第 10 次作业

1. （简单随机抽样）设总体的大小为 N，总体均值和方差分别为 μ,σ^2， X_i（$i=1,\cdots,n$）为简单随机样本（无放回抽取），$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

（1） *证明：$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{N}{N-1}$.

（2） 给出 $Var(\overline{X})$ 的一个无偏估计.

2. **设 X 来自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 的一个样本.

（1） 证明：$g(\lambda)=e^{-2\lambda}$ 的唯一无偏估计为 $\hat{\theta}(X)=\begin{cases}1, & \text{当}X\text{为偶数}\\ -1, & \text{当}X\text{为奇数}\end{cases}$.

（2） 上述估计是否合理？如不合理，请尝试给出一个合理的估计.

3. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自总体 $U(0,\theta)$.

（1） 证明：$\hat{\theta}_1=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计.

（2） 证明：可以适当选择常数 c_n 使得 $\hat{\theta}_2=c_n\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计.

（3） **比较四个无偏估计 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3=2\overline{X}$，$\hat{\theta}_4=\frac{n+1}{n}\max(X_1,\cdots,X_n)$ 的方差大小.

4. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自某一个均值为 θ 且方差有限的总体.

（1） 设 $c_1,\cdots,c_n$ 为常数，证明：$\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$ 是 θ 的无偏估计当且仅当 $\sum_{i=1}^{n}c_i=1$.

（2） 在上述形式的估计类中，只有在$c_1=\cdots=c_n$（$=\frac{1}{n}$）时方差达到最小.

5. *设随机样本X_i（$i=1,\cdots,n$）来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，m_2和S^2可以作为σ^2的估计，试比较两个估计的均方误差.

6. 设随机样本X_i（$i=1,\cdots,4$）来自正态总体$N(0,4)$，令$Y=a\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$，这里$a$为常数，已知$Y$服从$t$分布，求$a$的值以及$t$分布的自由度.

7. 有一大批糖果，现从中随机取 16 袋称得重量（克）为

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

假设袋装糖果重量服从正态分布，求总体均值的 95%置信的区间估计. 如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计，误差的范围为多少？这个范围是在什么意义下？

8. 从一大批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命（单位：小时）为

1050 1100 1120 1250 1280

假设灯泡寿命服从正态分布，求这批灯泡寿命平均值 95%置信的单侧置信下限（即求$\hat{\mu}(X_1,\cdots,X_n)$使得$P(\mu>\hat{\mu})\ge 0.95$）.

9. *为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见，先进行试验. 采用原催化剂 20 次试验的得率均值为91.73，样本方差为3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为93.75，样本方差为4.02. 假设两总体都服从正态分布，方差相等，且两样本独立.
（1） 求两总体均值差的 95%置信的区间估计.
（2） 两种催化剂有显著差别吗？请尝试说明你的理由.

10. *设随机样本X_i（$i=1,\cdots,n$）来自总体$U(0,\theta)$. 证明：对于任意给定常数$0<\alpha<1$，可以找到常数c_n，使$(\max\{X_1,\cdots,X_n\}, c_n\max\{X_1,\cdots,X_n\})$为$\theta$的一个$(1-\alpha)$置信区间.

11. （计算机实验）（自助法 Bootstrap）设随机样本X_i（$i=1,\cdots,n$）来自正态

总体$N(\mu,1)$，$\theta=e^{\mu}$，考虑θ的估计$\hat{\theta}=T(X_1,\cdots,X_n)=\exp(\bar{X})$.

（1） 创建一个包含n个观测的数据集，数据记为$x_1,\cdots,x_n$（取$\mu=5$，$n=100$）.（数据所确定的经验分布记为$F_n(x)$）

（2） 从（1）中数据集中有放回地抽取$n=100$个观测，记为$x_1^*,\cdots,x_n^*$.（等同于从分布$F_n(x)$中抽取容量依旧为n的随机样本）

（3） 计算$\hat{\theta}^*=T(x_1^*,\cdots,x_n^*)$.

（4） 重复步骤（2）和（3）m次，得到$\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$.（取$m=1000$）

（5） 画出$\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$的直方图，并与$\hat{\theta}$的分布相比较，你能得到什么结论？

（6） 令$V_{boot}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\left(\hat{\theta}_r^*-\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\hat{\theta}_r^*\right)^2$，求$V_{boot}$. 是否可以用$V_{boot}$来近似$Var(\hat{\theta})$？