概统第四次作业参考题解

2023.03.26

Q1. $P(X=2)\approx 0.2009$. 对 $\lambda=1$, 其 Poisson 近似值为 $P(X=2)\approx 0.1839$.

Q2. 0.3233, 0.3233.

Q3. 记 X 为产卵个数, Y 为虫卵发育成虫的个数.

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\sum_{n=k}^{\infty}P(Y=k|X=n)P(X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\\&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

Q4. $a=1/3,\ b=2$.

Q5. (1)1/3.　(2)1/3.

Q6. 记怀孕期天数 X, $P\left(\{X\geq\mu+2\sigma\}\bigcup\{X\leq\mu-3\sigma\}\right)\approx 0.0241$.

Q7. 记报废公里数 X, $P(X>2.5|X>1.5)=\dfrac{1-F(2.5)}{1-F(1.5)}\approx 0.7165$. 这里体现指数分布的无记忆性.

Q8. (1) 令冤枉无罪的人的概率 $P(X>c|\mu=1)=e^{-c}=1-95\%$ 即得 $c=\log(20)\approx 2.9957$.
(2) $P(X>c|\mu=2)=e^{-c/2}\approx 0.2236$.

Q9. $f_Y(y)=f_X(\log y)\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\log y\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left(-\dfrac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),\ y>0.$

Q10. (1) $|(g^{-1}(z))'|f(g^{-1}(z))$.
(2) 用定义证:$P(Y\leq y)=P(F(X)\leq y)=P(X\leq F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$。

因此分布为$U(0,1)$.

(3) 用定义证：$P(Z \le z) = P(F^{-1}(Y) \le z) = P(Y \le F(z)) = F(z)$

(4) Inverse CDF Sampling

(5)定义$f^{-1}(y) = sup\{x|F(x) \le y\}$,可验证(2)证明过程中此定义下等号依然成立。

Q11. (1) $P(Y = i) = P(X \in I_i) = p_i$.

(2)给定任一离散型分布, 记其取值 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 及对应概率 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, 令 $a_0 = 0, a_i = a_{i-1} + p_i (i > 1)$, 取 $I_i = (a_{i-1}, a_i)$, $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, 构造 $Y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i 1_{I_i}(X) + y_1 1_{(0,1)\setminus \cup_i I_i}(X)$ 即满足前述离散型分布.

Q12. 记断点 $X \sim U(0,1)$, $l(x) = 1 - x$, if $x \le p_0$; x, otherwise. 期望为 $E(l(x)) = p_0 - p_0^2 + 1/2$.

Q13. $f(x) = 1/2$, if $x \in (0,1) \cup (3,4)$; 0, otherwise. $EX = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 7/3$.

作业总结:

1. Poisson 分布近似 Binomial 分布.
2. 指数分布的无记忆性.
3. 随机变量的函数及其分布 (Q9, Q10, Q12).