概统第九次作业参考题解

2023.12.01

Q3. 考虑从某盒子 (N 个球，其中 m 个白球) 中无放回抽样. 第 $k(k \leq N)$ 次抽中白球的概率为: m/N, 与抽样顺序无关.

(1) 基于此, 该问题显然.

(2) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n^2}\left\{n\mathrm{Var}(X_1) + \sum_{i \neq j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right\}$. 当 $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - \mu^2$, 利用条件概率计算$E(X_iX_j)$, 代入即得结论.

Q4. (1) $\hat{p} = 1 - \dfrac{m_2}{a_1}, \quad \hat{k} = \dfrac{a_1^2}{a_1 - m_2}$.

(2) 样本量小时偏差较大; 无法保证k为整数; 无法保证$k > \max_i X_i$; m_2 与 a_1 大小关系不确定.

Q5. 矩估计: $\hat{\theta} = \frac{2}{3}a_1, \quad$ MLE: $\hat{\theta} = \frac{1}{2}\max_i X_i$.

Q6. (1)非负性显然, 验证正则性.

(2) $E(X) = a$. (利用正则性与奇函数性质); $\mathrm{Var}(X) = 3\sigma^2$. (换元, 分步积分). 因此有 $\hat{a} = \bar{X}, \hat{\sigma^2} = \frac{1}{3}m_2$.

(3) $\ln L(a, \sigma) = -3n\ln(\sigma) + \sum_{i=1}^n 2\ln(x_i - a) + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right) + \mathrm{const}$. 可利用 Newton-Rapson Method, Gradient Ascent 等求解.

Q7. 矩估计: $\hat{p} = \bar{X}, \quad$ MLE: $\hat{p} = \bar{X}$.

Q8. $\ln L(p_1, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^m X_i \ln p_i$. 在 $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ 的约束下极大化对数似然函数, 可采用 Lagrange Multiplier Method. MLE: $\hat{p_i} = \frac{X_i}{n}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

Q9. 矩估计: $\hat{\theta} = \frac{5}{6}, \quad$ MLE: $\hat{\theta} = \frac{5}{6}$.

Q10. 矩估计: $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}, \quad$ MLE: $\hat{\theta} = \dfrac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.