概统第三次作业参考题解

2023.03.18

Q2. 利用概率的连续性

(1) 令 $A_n = \{X \le -n\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n\ge1} A_n) = 0$. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ 同理.

(2) 取 $A_n = \{X \le x + 1/n\}$, $F(x+) = \lim\limits_{n\to\infty} F(x+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(X \le x) = F(x)$.

注：左连续不能依据此过程令$B_n = \{X \le x - 1/n\}$ 推出，因为此时 $P(\bigcup_{n\ge1} B_n) = p(\{X < x\}) \ne F(x)$

(3) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-)$. 证明同 (2).

Q3. (2) $P(X+Y=3) = P(X+Y=4) = P(X+Y=5) = 1/3$; $P(Y-X=1) = 2/3, P(Y-X=-2) = 1/3$.

注：出现错误答案$P(X+Y=2) = P(X=1)\times P(Y=1) = \frac{1}{9}$,实际上X和Y不独立。

Q4. 展开, 利用期望的线性性.

Q5. (1) $P(X=k) = \dfrac{ba!(a+b-k)!}{(a-k+1)!(a+b)!}$, $k = 1, 2, \ldots, a+1$.

(2) X 服从参数为 $p = b/(a+b)$ 的几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$, $E(X) = (a+b)/b$.

Q6. 存在.

Q7. (1) 服从参数为 p 的几何分布 $\mathrm{Ge}(p)$.

(2) 利用幂级数性质 $E(X) = 1/p$, $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

Q8. $X \sim B(25, 0.6)$.

(1) $P(X \ge 15) \approx 0.5858$. (2) $P(X > 20) \approx 0.0095$. (3) $P(X < 10) \approx 0.0132$.

Q9. 利用二项式定理, 分别计算 $E(X)=np$ 与 $E(X^2)=np(n-1)p+np$, 进一步可得 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$.

Q10. (1) X 服从超几何分布 $X\sim H(n,M,N)$.
(2) 直觉上估计值 $\hat{N}$ 满足 $\dfrac{M}{\hat{N}}=\dfrac{m}{n}$, 故可取 $\hat{N}=\left[\dfrac{nM}{m}\right]$.
(3) 对不同的 N, 记概率 $P(X=m)$ 为 $f(N)$, 作商

$$\frac{f(N)}{f(N-1)}=\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-n-M+m)},$$

从而知当 $N<(nM)/m$ 时 $f(N)$ 递增, 当 $N>(nM)/m$ 时 $f(N)$ 递减. 因此 $f(N)$ 最大时应取 $N=\lfloor\dfrac{nM}{m}\rfloor$ 和 $N=\lfloor\dfrac{nM}{m}\rfloor+1$中的一个。经比较，前者使 $P(X=m)$ 达到最大值, 此即极大似然估计.

Q11. (1)(2)(3) $x=15=\mu,\sigma^2=6$.
(4) $P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9362$.

作业总结:

1. 分布函数的性质可用 P 的连续性证明.
2. 离散随机变量的期望方差计算, 利用不同级数求和技巧.
3. Q13 中极大似然估计(MLE)思想.