

2022年秋微积分A(1)期末考试样卷参考解答

系别_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}$, 以及直线 $x = 0, y = 0$ 围成的有界平面图形的面积为 _____.

答: 6.

详解: 所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 (\sqrt{6} - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^6 (6 + x - 2\sqrt{6x}) dx \\ &= 36 + 18 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6^{3/2} = 6. \end{aligned}$$

2. 极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

答: 1.

详解: 将待求极限的函数写作

$$\frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \cdot \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{x^2}.$$

第一个因子的极限容易求得:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{x^2}{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \rightarrow 2.$$

第二个因子的极限可两次使用 L'Hospital 法则得到:

$$\frac{[\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt]'}{[x^2]'} = \frac{e^{\sin x} - \cos x}{2x};$$

$$\frac{[e^{\sin x} - \cos x]'}{[2x]'} = \frac{e^{\sin x} \cos x + \sin x}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

因此极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} = 1.$$

3. 曲线段 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 15$) 的弧长为 _____.

答: 42.

详解: 所求弧长为

$$\int_0^{15} \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \int_0^{15} \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=15} = \frac{2}{3}(64-1) = 42.$$

4. 极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答 2.

详解: 由于

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,$$

故所求极限为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}} = e^{\ln 2} = 2.$$

5. 记 $y = y(x)$ 是常微分方程 $y' + y = e^{-x}$ 满足 $y(0) = 0$ 的解, 则函数 $y = y(x)$ 拐点的横坐标为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

答 $x = 2$.

详解: 根据一阶线性常微分方程的求解公式, 可知方程 $y' + y = e^{-x}$ 的一般解为

$$y(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x e^{-s} e^s ds \right) = e^{-x}(c+x) = xe^{-x} + ce^{-x}.$$

令 $y(0) = 0$ 得 $c = 0$. 因此方程 $y' + y = e^{-x}$ 满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = xe^{-x}$. 以下求 $y(x)$ 的拐点. 简单计算得 $y'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, $y''(x) = (x-2)e^{-x}$.

可见函数 $y''(x)$ 有且仅有唯一的零点 $x=2$. 由于 $y''(x)$ 在零点 $x=2$ 附近改变了符号, 故函数 $y=y(x)$ 有唯一的拐点 $(x, y)=(2, 2e^{-2})$, 其横坐标为 $x=2$. 解答完毕.

6. 设 $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(\frac{\pi t^2}{2}) dt$, 则 $F'(1) =$ _____.

答 $F'(1) = 2$.

详解: 由于

$$F'(x) = \sin(\frac{\pi x^4}{2}) \cdot 2x,$$

故

$$F'(1) = \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot 2 = 2.$$

7. 积分 $\int_0^2 |(x-1)(x-2)| dx =$ _____.

答 1.

详解:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |(x-1)(x-2)| dx &= \int_0^1 (1-x)(2-x) dx + \int_1^2 (x-1)(2-x) dx \\ &= \int_0^1 (2-3x+x^2) dx + \int_1^2 (-x^2+3x-2) dx = 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(2^3-1) + \frac{3}{2}(2^2-1) - 2 = 1. \end{aligned}$$

8. 设 $f(x)$ 为连续可微函数, 满足方程 $2\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^2$, 则 $f'(1) =$ _____.

答 $f'(1) = 3$.

详解: 在方程 $2\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^2$ 中, 令 $x=1$ 得 $0 = f(1) - 1$. 由此得 $f(1) = 1$. 再对方程 $2\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^2$ 两边求导得 $2f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x$. 化简得 $f(x) = xf'(x) - 2x$. 令 $x=1$ 得 $1 = f'(1) - 2$. 由此得 $f'(1) = 3$.

9. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y' = 2x + 2xy^2$ 满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解, 则 $\arctan y(1) =$ _____.

答: $\arctan y(1) = 1$.

详解: 方程 $y' = 2x + 2xy^2$ 可写作 $y' = 2x(1 + y^2)$. 这是变量分离型方程. 分离变量并两边积分得 $\arctan y = x^2 + C$. 根据初值条件 $y(0) = 0$ 知 $C = 0$. 因此 $\arctan y = x^2$. 故 $\arctan y(1) = 1$.

10. 设 $y(x)$ 是常微分方程 $y'' - 2y' + y = 2$ 满足初值条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解, 则 $y(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答: $y(1) = 2$.

解: 观察知常数函数 $y = 2$ 是方程的解, 且满足初值条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$. 根据初值问题解的唯一性知 $y(x) \equiv 2$. 因此 $y(1) = 2$. (也可以先求齐次方程的通解, 然后求非齐次方程的一个特解. 这样就得到非齐次方程的通解. 再根据初值条件确定通解中的两个常数. 这样就得到 Cauchy 问题的解. 从而确定 $y(1)$ 的值)

二、选择题 (10道题, 每题3分, 共30分)

1. 积分 $\int_{-1}^1 [x^2 \sin(x^5) + \sqrt{1-x^2}] dx =$

- A. 0;
- B. $\frac{\pi}{2}$;
- C. π ;
- D. 1.

选 B.

详解: 由于 $x^2 \sin(x^5)$ 是奇函数, 故积分 $\int_{-1}^1 x^2 \sin(x^5) dx = 0$. 实际上函数 $x^2 \sin(x^5)$ 只是起迷惑作用. 积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 通过三角函数代换很容易计算:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} [\sin t]' dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当

- A. $p > 1$;
- B. $p < 3$;
- C. $1 < p < 3$;
- D. $1 \leq p \leq 3$.

选 C.

详解: 记

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^p} dx, \quad J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx,$$

则积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当积分 J_1 和 J_2 均收敛.

考虑积分 J_1 . 显然 $x = 0$ 是积分 J_1 唯一的瑕点, 且积分 J_1 收敛, 当且仅当积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}} dx$ 收敛. 而后者收敛, 当且仅当 $p - 2 < 1$, 即 $p < 3$.

再考虑积分 J_2 . 积分 J_2 又可以写作 $J_2 = J_3 - J_4$, 其中

$$J_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad J_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx.$$

显然 J_3 收敛, 当且仅当 $p > 1$; J_4 收敛, 当且仅当 $p > 0$ (Dirichlet 判别法). 而积分 J_2 收敛, 当且仅当 J_3 和 J_4 均收敛. 因此积分 J_2 收敛, 当且仅当 $p > 1$.

综上所述, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$ 收敛, 当且仅当 $1 < p < 3$.

3. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt =$

- A. $3 \sin(x^3) - 2 \sin(x^2)$;
- B. $\frac{3 \sin(x^3) - 2 \sin(x^2)}{x}$;
- C. $\frac{3 \sin(x^3) - 2 \sin(x^2)}{x^2}$;
- D. $\frac{3 \sin(x^3) - 2 \sin(x^2)}{x^3}$.

选 B.

详解:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{\sin(x^3)}{x^3} (x^3)' - \frac{\sin(x^2)}{x^2} (x^2)' \\ &= \frac{\sin(x^3)}{x^3} 3x^2 - \frac{\sin(x^2)}{x^2} 2x = \frac{3\sin(x^3) - 2\sin(x^2)}{x}.\end{aligned}$$

4. 函数 $y = x \ln(e + \frac{1}{x^2})$ 的斜渐近线为

- A. $y = x$;
- B. $y = x + 1$;
- C. $y = 2x$;
- D. $y = 2x + 1$.

选 A.

详解: 由于

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{x \ln(e + \frac{1}{x^2})}{x} = \ln(e + \frac{1}{x^2}) \rightarrow \ln e = 1,$$

且

$$\begin{aligned}y(x) - x &= x \ln(e + \frac{1}{x^2}) - x = x \left(\ln(e + \frac{1}{x^2}) - 1 \right) \\ &= x \ln \left(1 + \frac{1}{ex^2} \right) = x \left(\frac{1}{ex^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \frac{1}{ex} + o\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

因此函数 $y = x \ln(e + \frac{1}{x^2})$ 有斜渐近线 $y = x$. 解答完毕.

5. 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} =$

- A. 1;
- B. $\ln 2$;
- C. 2;
- D. $2 \ln 2$.

选 B.

详解:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = -\ln(e^{-x} + 1) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

6. 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx =$

- A. $\frac{1}{2}$;
- B. $\frac{1}{2} \ln 2$;
- C. $\ln 2$;
- D. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

选 D.

详解:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^3 x d \cos x}{1 + \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x d \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \cos^2 x} \right) d \cos^2 x = -\frac{1}{2} \left[\cos^2 x - \ln(1 + \cos^2 x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

7. 由曲线段 $y = \sqrt{x-1}$ ($1 \leq x \leq 3$) 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为

- A. π ;
- B. 3π ;
- C. 2π ;
- D. 4π .

选 C.

详解: 由旋转体体积公式得所求体积为

$$V = \int_1^3 \pi y^2 dx = \pi \int_1^3 (x-1) dx = \pi \int_0^2 t dt = 2\pi.$$

8. 抛物线的一段 $y = \sqrt{2x}$ ($0 \leq x \leq 1$) 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的侧面积为

- A. $2\sqrt{3}\pi$;
- B. $\frac{2\pi}{3}(3\sqrt{3} - 1)$;
- C. 2π ;
- D. π .

选 B.

详解: 根据旋转面的侧面积公式得

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_0^1 2\pi \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

9. 旋轮线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 一拱与 x 轴所围平面有界图形的面积为

- A. π ;
- B. 2π ;
- C. 3π ;
- D. 4π .

选 C.

详解: 若将旋轮线可以看作函数 $y = f(x)$ 的函数图像, 则 $y(t) = f(x(t))$. 于是所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x(t)) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 3\pi. \end{aligned}$$

10. 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x} dx$ 等于

- A. 0;
- B. 1;
- C. 2;
- D. $\ln 2$.

选 D.

详解: 由于

$$\int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \ln 2 + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx,$$

且

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x} dx = \ln 2.$$

三. 解答题 (5道题, 共计40分)

1. (10分) 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间, 极值点与极值, 凸性区间, 拐点和渐近线.

解: 显然 $f(x)$ 有唯一间断点 $x = 0$. 对于 $x \neq 0$, $f(x)$ 无穷次可微. 计算得

$$f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}.$$

由此可见

(i) 函数在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均单调下降;

(ii) $x = 0$ 是严格极小值点, 极小值为 $f(0) = 0$;

(iii) 函数于区间 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上凸, 于区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 均下凸.

(iv) 函数有唯一拐点 $x = -\frac{1}{2}$;

(v) 函数有一条垂直渐近线 $x = 0$, 以及一条水平渐近线 $y = 1$. 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

1. 解答完毕.

2. (10分) 讨论广义积分

$$\int_1^{+\infty} \left(\arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx \quad (*)$$

的收敛性. 若收敛, 请求出积分值; 若发散, 请说明理由.

解: 由函数 $\sin u$ 的 Taylor 展式 $\sin u = u - \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$ 知其反函数 $\arcsin u$ 的 Taylor 展式为 $\arcsin u = u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$. 因此当 x 充分大时,

$$\arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x} \right)^3 + o \left(\frac{1}{x} \right)^3.$$

根据广义积分比较判别法的极限形式知, 广义积分(*)收敛. 为计算积分(*), 我们作变量代换 $u = \frac{1}{x}$ 或 $x = \frac{1}{u}$. 记积分(*)为 J , 则

$$\begin{aligned} J &= \int_1^0 (\arcsin u - u) \frac{-du}{u^2} = \int_0^1 (\arcsin u - u) d \left(\frac{-1}{u} \right) \\ &= \frac{u - \arcsin u}{u} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{u} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{1}{u} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) du. \end{aligned}$$

注意积分 $\int_0^1 \frac{1}{u} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) du$ 收敛, $u=0$ 不是瑕点, $u=1$ 是瑕点. 对积分作变量变换 $u = \sin t$ 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{u} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} - 1 \right) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} (1 - \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2(t/2)}{2 \sin(t/2) \cos(t/2)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} dt = -2 \ln \cos(t/2) \Big|_0^{\pi/2} = \ln 2. \end{aligned}$$

于是原广义积分

$$\int_1^{+\infty} \left(\arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$

3. (10分) 求解 Euler 方程 $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 2 \ln x - 3$ ($x > 0$) 的通解.

解: 作变量代换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 并记 $z(t) = y(e^t)$, 则

$$z'(t) = y'(e^t)e^t = xy', \quad z''(t) = y''(e^t)e^t e^t + y'(e^t)e^t = x^2 y'' + xy'.$$

于是 $xy'(x) = z'(t)$, $x^2 y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$, 原方程就变成了 $z'' - z' + 2z' - 2z = 2t - 3$, 即 $z'' + z' - 2z = 2t - 3$. 这是常系数线性方程, 易见对应的齐次方程 $z'' + z' - 2z = 0$ 的通解为 $z = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$. 由 ODE 线性方程的理论

知, 非齐次方程 $z'' + z' - 2z = 2t - 3$ 有特解 $z_p = at + b$, 其中 a, b 为待定常数. 将特解 z_p 代入非齐次方程得 $a - 2(at + b) = 2t - 3$. 比较系数得 $-2a = 1, 1 - 2b = -3$. 解之得 $a = -1, b = 1$. 即非齐次方程 $z'' + z' - 2z = 2t - 3$ 有特解 $z_p = -t + 1$, 从而有通解 $z = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - t + 1$. 于是原 Euler 方程 $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 2 \ln x - 3$ ($x > 0$) 的通解为 $y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \ln x + 1$. 解答完毕.

4. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续, 且满足 $[f(x)]^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt, \forall x \in [0, 1]$. 证明 $f(x) \leq 1 + x, \forall x \in [0, 1]$.

证明: 记 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $g(x)$ 于 $[0, 1]$ 上连续, 于 $(0, 1)$ 上连续可微, 且 $g'(x) = f(x) \leq \sqrt{1 + 2g(x)}, \forall x \in (0, 1)$. 由此得 $\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + 2g(x)}} \leq 1$. 对这个不等式两边从 0 到 x 积分得 $\int_0^x \frac{g'(t) dt}{\sqrt{1 + 2g(t)}} \leq x$. 作积分变量代换 $u = g(t)$ 得 $\int_0^{g(x)} \frac{du}{\sqrt{1 + 2u}} \leq x$. 左边的积分容易计算出来得 $\sqrt{1 + 2g(x)} - 1 \leq x$. 于是 $f(x) \leq \sqrt{1 + 2g(x)} \leq 1 + x, \forall x \in [0, 1]$. 证毕.

5. (5 分) 设 $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 为实系数多项式. 若 $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 证明 $p(x) + p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 其中 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ 分别表示 $p(x)$ 的一阶, 二阶, \cdots , 以及 n 阶导数.

证明: 由于 $p(x)$ 为 n 次多项式, 故它的 $n + 1$ 阶导数恒为零, 即 $p^{(n+1)}(x) \equiv 0$. 因此若记 $H(x) = p(x) + p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x)$, 则 $H'(x) = p'(x) + p''(x) + \cdots + p^{(n)}(x) = H(x) - p(x)$. 于是 $H'(x) - H(x) = -p(x)$. 在这个等式两边同乘以积分因子 e^{-x} 得 $e^{-x}[H'(x) - H(x)] = -e^{-x}p(x)$. 此即 $[e^{-x}H(x)]' = e^{-x}[H'(x) - H(x)] = -e^{-x}p(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 这表明函数 $e^{-x}H(x)$ 在整个实轴 \mathbb{R} 上单调下降. 由于 $e^{-x}H(x) = \frac{H(x)}{e^x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$, 故 $e^{-x}H(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 从而 $H(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. 证毕.