

第 15 次作业

1. 假定变量  $Y$ （响应变量）与  $X$ （预测变量）之间的关系可用如下的线性模型刻画： $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ ，其中  $\beta_0$  是常数项， $\beta_1$  称为模型的回归系数，皆为

常数， $\varepsilon$  为随机误差项，均值为 0，方差为  $\sigma^2$ 。假设有  $(X, Y)$  的独立观测：

$(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ )。参数  $\beta_0, \beta_1$  的最小二乘估计分别表示为  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 。

(1) 验证：最小二乘法拟合的直线经过点  $(\bar{x}, \bar{y})$ 。

(2) 计算  $\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ 。什么时候  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  不相关？

(3) 假设  $x_i \in [-1, 1]$  ( $i = 1, \dots, n$ )，为最小化  $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ ，应该如何选择  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )？

(4) 如果模型可以事先假设  $\beta_0 = 0$ ，则请在此情况下给出  $\beta_1$  的最小二乘估计，并给出  $X = x_0$  时响应变量  $Y$  取值的  $(1 - \alpha)$  置信的区间估计。

2. 进一步假设随机误差  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。

(1) 给出参数  $\sigma^2$  的极大似然估计。

(2) 证明： $\frac{\text{SSE}}{n-2}$  是  $\sigma^2$  的无偏估计。