概统第十次作业参考题解

2023.12.02

Q1. (1) $E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)-E\left(\bar{X}^2\right)=\sigma^2\frac{n-1}{n}\frac{N}{N-1}$.

(2) 由上问与作业9-3立即得无偏估计为: $\frac{N-n}{(n-1)N}\hat{\sigma}^2$.

Q2. (1) 令 $\hat{\mathrm{g}}(X)$ 为无偏估计, 则满足 $\sum\limits_{k\in N}\frac{\lambda^k}{k!}\hat{\mathrm{g}}(k)=\exp(-\lambda)=\sum\limits_{k\in N}\frac{(-\lambda)^k}{k!}$.

(2) $\mathrm{g}(\lambda)\in(0,1)$, $\hat{\theta}(X)$ 显然不合理. 可采用极大似然估计 $\exp(-2X)$.

Q3. (1) 记 $Y=\max\left(X_1,\ldots,X_n\right), Z=\min\left(X_1,\ldots,X_n\right)$.

由 $f_Y(y)=\frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}$, $f_Z(z)=\frac{n}{\theta}\left(1-\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}$. 即得$E(Y)+E(Z)=\theta$.

(2) $c_n=n+1$.

(3) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Var}(Z)+2\mathrm{Cov}(Y,Z)$, $\mathrm{Cov}(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)$.

重点为给出 (Y,Z) 的联合分布: $f_{Y,Z}(y,z)=f_Y(y\mid z)f_Z(z)=\frac{n(n-1)}{\theta^2}\left(\frac{y}{\theta}-\frac{z}{\theta}\right)^{n-2}$.

分别计算各项期望, 整理可得 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

同理有 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)=\frac{n\theta^2}{(n+2)}$. $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)=\frac{\theta^2}{3n}$. $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_4)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

Q4. (2) $\mathrm{Var}(\sum\limits_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sigma^2\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2$, 由 Cauchy Inequality 可得结论.

Q5. $E(S^2)=\sigma^2$, $E(m_2)=E(\frac{n-1}{n}S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

在正态情形下, $\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$, 期望为 $n-1$, 方差为 $2(n-1)$.

$\mathrm{MSE}(m_2)=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$, $\mathrm{MSE}(S^2)=\mathrm{Var}(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$.

Q6. a=1; 自由度为 2.

Q7. $(\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$[1], 95%置信区间: (500.45, 507.05)

[1]参考题解中所用分位数均为下分位数.

Q8. 95%置信下限: 1064.9.

Q9. (1) 利用大样本方法近似. $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n}+\dfrac{S_Y^2}{m}}}$ 近似服从 $\mathcal{N}(0,1)$.

95%置信区间: $(-3.14,-0.90)$.

Q10. 记 $Y=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, $F_Y(y)=\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^n$. 则 $c_n=\alpha^{-\frac{1}{n}}$.

Q11. (2) Bootstrap (自助法)

(5) $\hat{\theta}$ 服从对数正态分布.