

## 概统第十二次作业参考题解

2023.12.14

Q1. 考虑假设检验:  $H_0: \lambda \geq \lambda_0$  vs.  $H_1: \lambda < \lambda_0$ . 由  $E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$ , 拒绝域的形式应为  $\{\bar{X} \geq c\}$ . 由  $2\lambda X_1 \sim \chi^2(2)$  与卡方分布的可加性可知  $2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$ . 按第一类错误  $P_{\lambda \geq \lambda_0}(\bar{X} \geq c) \leq \alpha$  可给出拒绝域为  $\{\bar{X} \geq \frac{\chi_{1-\alpha}^2(2n)}{2n\lambda_0}\}^1$ .

双边:  $H_0: \lambda = \lambda_0$  vs.  $H_1: \lambda \neq \lambda_0$ . 拒绝域为  $\{\bar{X} \geq \frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}{2n\lambda_0} \text{ 或 } \bar{X} \leq \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}{2n\lambda_0}\}$

Q2. (1)  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ , 拒绝域形式为  $\{2\bar{X} \geq c\}$ . 利用大样本方法可给出临界值  $c = \frac{\theta_0}{\sqrt{3n}} z_{1-\alpha} + \theta_0$ . 功效函数为:  $P_\theta(X \in R) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{c}{2} - \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\theta^2}{12}}}\right)$ .

(2)  $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\} = X_{(n)}$ , 拒绝域形式为  $\{X_{(n)} \geq c\}$ . 利用极大次序统计量的分布可给出临界值  $c = \theta_0(1 - \alpha)^{\frac{1}{n}}$ . 功效函数为:  $P_\theta(X \in R) = 1 - (1 - \alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n$ .

Q3.  $H_0: \mu \leq \mu_0$  vs.  $H_1: \mu > \mu_0$ .  $\mu_0 = 5.1$ . 方差未知的正态总体均值检验问题, 若取检验水平  $\alpha = 0.05$ , 拒绝原假设.

Q4. (1)  $H_0: \mu \geq \mu_0$  vs.  $H_1: \mu < \mu_0$ .  $\mu_0 = 1180$ . 方差未知的正态总体均值检验问题, 取检验水平  $\alpha = 0.05$ , 不拒绝原假设(认为合格).

(2)  $H_0: \mu \leq \mu_0$  vs.  $H_1: \mu > \mu_0$ .  $\mu_0 = 1180$ . 取检验水平  $\alpha = 0.05$ , 不拒绝原假设(认为不合格). NP 范式倾向于保护原假设.

(3) 当检验水平取很大时, 一定会拒绝原假设.

Q5.  $H_0: \mu \leq \mu_0$  vs.  $H_1: \mu > \mu_0$ .  $\mu_0 = 225$ . 不拒绝原假设, 即无理由认为元器件寿命大于225.

Q6. 利用中心极限定理, 拒绝域为  $\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$ .

<sup>1</sup>参考题解中所用分位数均为下分位数.

Q7. (1)  $\frac{200}{4000}$ . (2)  $\frac{200}{700}$ . (3)  $\frac{500}{1000}$ . (4)  $H_1$  成立时功效为  $\frac{500}{1000}$ .

Q8. “第  $i$  个患者是否治愈” 记为  $X_i \sim B(1, p)$ . 通过假设检验判断.

$H_0 : p \leq p_0$  vs.  $H_1 : p > p_0$ .  $p_0 = 2\%$ . 拒绝域形为  $\{\sum_{i=1}^n X_i \geq c, c \in \mathbb{N}^+\}$ .

控制第一类错误:  $\sum_{i=c_0}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{(n-i)} > \alpha > \sum_{i=c_0+1}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{(n-i)}$ . 取  $c = c_0 + 1$ . 给定检验水平  $\alpha = 0.05$  时  $c = 7$ , 不拒绝原假设, 即不能认为更有效.

**作业总结:** 1. 注意给清楚  $H_0$  vs.  $H_1$ , 这是关于总体参数的描述, 之后采样做决策.

2. 注意区分 power function 与 power.

3. NP 范式下  $H_0$  与  $H_1$  是不对等的, 倾向于保护原假设.