云顶抽卡概率计算器 TFTHelper

2021 年 5 月 8 日

目录

1 导读

想写这篇文章，一是因为近期在nga和reddit看到了类似的抽卡模型，但个人又觉得不够完善，二是因为 s5 又没有天选了，抽卡和游戏节奏又变得比较线性而可预测了，做这么一个计算模型对实际游戏的指导价值又比较大了。

当然在一个游戏论坛，新人发比较技术向的帖子，如果没有好的排版，是比较容易收获一堆“太长不看”然后石沉大海的。我很担心这种情况的发生，所以我也尽可能地让自己的文章排布显得有条理且易读，且提供能直接使用的程序，并在源码下载部分提供精排的本文 pdf 草稿以提升大家的阅读体验。

对于不同的读者，本文有以下几种推荐的阅读顺序：

1. 只想感性了解计算原理的读者：跳过“背景知识”和“计算方法推导”小节
2. 想详细了解计算原理的且了解二项分布和超几何分布的读者：跳过“背景知识”小节
3. 想详细了解计算原理且背景知识缺乏的读者：全文阅读，或者先跳过“背景知识”小节，在后续遭遇不懂的名词时返回“背景知识”查阅或搜索相关名词。

2 背景知识

2.1 离散随机变量及其分布

离散随机变量：指可能取值为有限个或可列的随机变量。如我们要探讨的“给定抽卡次数抽出的目标卡的数量 x”其可能的取值是有限的，“抽出至少一张卡所需抽卡次数 t”的可能取值为全体正整数是可列的，二者都是离散随机变量。

离散随机变量的分布列：由离散随机变量的每个可能取值和对应取值概率构成的联表。

2.2 二项分布

若进行 n 次独立重复的，成功率为 p 的实验，记总成功次数为 X。显然，X 是随机变量，而其服从的分布称为二项分布，记为 $X \sim B(n,p)$，其各值的取值概率为

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \le x \le n \tag{1}$$

在本文，二项分布用于推导抽卡时，实际在目标费用 c 卡池中的有效抽取次数。

2.3 超几何分布

随机变量 X 服从超几何分布 $H(M,N,n)$，用于描述，在一个总数 (奖品和非奖品数) 为 M，奖品总量为 N 的奖池箱中，不放回地抽取 n 次/一次性抽出 n 个样品时，得到的奖品数 X 的分布。其各值的取值概率为

$$P(X=x)=\frac{\binom{N}{x}\binom{M-N}{n-x}}{\binom{M}{n}}=\frac{\binom{n}{x}\binom{M-n}{N-x}}{\binom{M}{N}},\quad \max(0,N-M+n)\le x\le\min(n,N) \tag{2}$$

注：超几何分布参量命名在不同参考网站各不相同，文中定义与程序原型使用的库函数定义一致

在本文，超几何分布用于推导抽卡时，在目标费用卡池中进行有效抽卡，得到的目标卡数目。

3 流程可视化

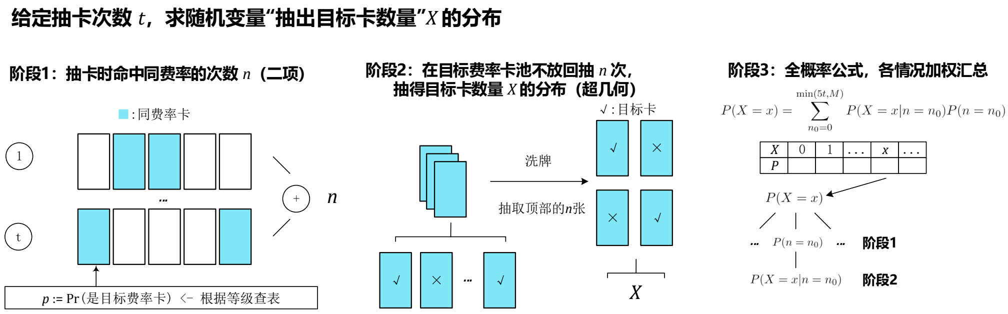

图 1: 给定抽卡次数下抽卡结果分布的计算

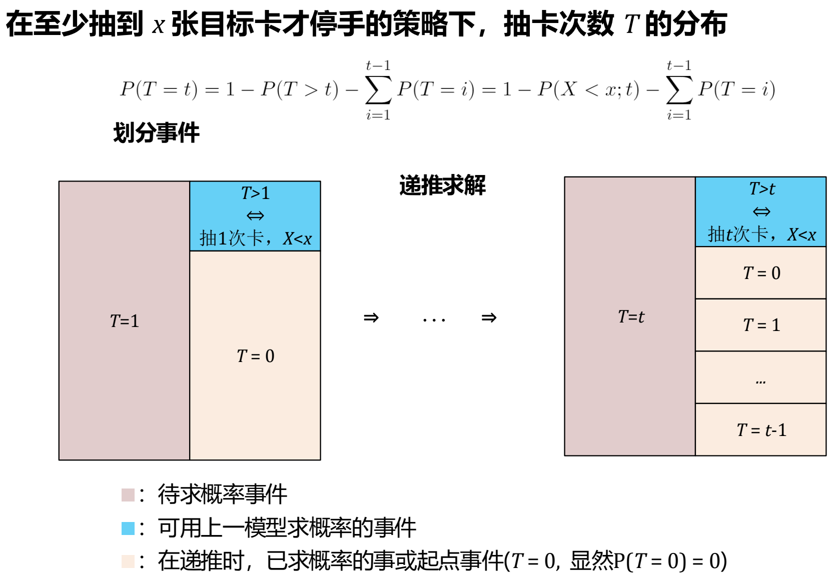

图 2: 给定所需卡的最小数量时抽卡次数分布的计算

4 计算方法推导

4.1 参量定义表

表 1: 参量定义

变量	含义	变量	含义
X	抽到的目标卡的数量 (随机变量)	x	抽到的目标卡的数量
T	抽卡次数（随机变量）	t	抽卡次数
n	抽卡得到目标费用卡的张数（有效抽卡张数，随机变量）	n_0	有效抽卡张数
p	当前等级抽出目标费用卡的概率		
M	目标费用卡池的总大小		
N	目标卡的剩余总量		

4.2 给定抽卡次数 t，得到的目标卡的张数 X 的分布

如上节图所示，为考虑“被卡牌”和“自己卡同费牌 d”等影响牌池大小操作的影响，我们需要将抽卡 t 次拆解为两个阶段然后合并考虑：

1. t 次抽牌对应抽出了 $5t$ 张卡，但 $5t$ 个卡槽每个槽都只有“根据等级变化的” p 的概率刷出与目标同费的卡。这个“有效试抽次数” n 是一个随机变量，服从二项分布 $B(5t, p)$

2. 在给定有效抽卡次数 n，也即条件于 n 时，我们就能在目标费率 c 的大卡池里不放回 (也即“卡牌 d”) 地抽取 n 次，最后得到**此情况下**抽取的目标卡张数 x。

   设置卡池时，其总量 M 为“c 费卡种类数 * 单卡张数 - 已抽出的 c 费卡数量”，而目标卡总量 N 为，“c 费卡单卡张数 - 已抽出目标卡数量”。也就是，在这样的条件下，x 的条件分布为超几何分布 $H(M, N, n)$。**注：超几何分布参量命名在不同参考网站各不相同，文中定义与程序原型使用的库函数定义一致**

3. 结合以上，对 n 的各个情况加权，从条件分布求全分布。

   也即

$$P(X = x) = \sum_{n_0=0}^{\min(5t,M)} P(X = x|n = n_0)P(n = n_0) \tag{3}$$

4.3 使用“至少得到 x 张目标卡才停手”的策略，所需的抽卡次数 T 的分布

在这里抽卡次数 T 从给定的参数变成了随机变量。但利用上小节得出的结论，可以简单递推求出。转换的思路是把“抽了 t 张才抽到”转为求对立事件“抽了 t 张都没抽足 x 张”（可以用上节结论，抽 t 次取分布列中 $X < x$ 的概率, $P(X < x; t)$）或“在 t 张前已经抽足 x 张”的概率

$$
\begin{aligned}
&P(T=0)=0\\
&P(T=1)=1-P(T>1)=1-P(X<x;t=1)\\
&P(t=2)=1-P(T>2)-P(T=1)=1-P(X<x;t=2)-P(T=1)\\
&\qquad\cdots\\
&P(T=t)=1-P(T>t)-\sum_{i=1}^{t-1}P(T=i)=1-P(X<x;t)-\sum_{i=1}^{t-1}P(T=i)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

这里随机变量 T 的可能取值是全体自然数。在程序计算 T 的期望方差时，按有限项截断做数值近似即可。截断的可行性和误差分析见附录。

4.4 误差分析

简要列举模型假设与实际情况中不相符的地方。

1. 卡格子。模型中认为所有同费的非目标卡都被抽出过滤，但备战席有限部分情况下同费的非目标卡需要放回。

2. 若你拥有三星的某张卡，它将不再刷新在你的商店中。本条性质是在 pbe1v0 模式中测试而得。它可能会影响对赌多个三星卡的阵容的计算。

5 部分结论

5.1 不同情况下抽出至少一张目标单卡的抽卡次数期望

先对标原帖格式，给出不同等级，不同的已抽出目标卡数目下，至少抽一张目标单卡所需抽卡次数的期望：

Tier 1	0	1	2	3	6	9	12
4	5	5.14	5.3	5.46	6.05	6.8	7.8
5	6.01	6.19	6.38	6.58	7.3	8.21	9.44
6	7.61	7.83	8.08	8.34	9.26	10.44	12.02
7	13.36	14.08	14.53	15.01	16.71	18.88	21.79
8	25.58	26.38	27.24	28.16	31.38	35.52	41.04
9	25.58	26.38	27.24	28.16	31.38	35.52	41.04

Tier 2	0	1	2	3	6	9	12
4	8.72	9.07	9.45	9.87	11.42	13.63	17.06
5	7.97	8.28	8.63	9.01	10.42	12.43	15.55
6	7.54	7.83	8.16	8.52	6.05	9.85	14.68
7	7.54	7.83	8.16	8.52	6.05	9.85	14.68
8	10.38	10.8	11.26	11.76	13.62	16.28	20.39
9	17.03	17.72	18.48	19.32	22.43	26.86	33.71

Tier 3	0	1	2	3	6	9	12
4	16.88	17.72	18.66	19.72	23.87	30.52	42.85
5	12.76	13.4	14.1	14.89	18.01	22.99	32.24
6	10.29	10.8	11.36	12	14.49	18.47	25.88
7	8.65	9.07	9.54	10.07	12.14	15.46	21.63
8	7.47	7.83	8.24	8.69	10.47	13.31	18.6
9	8.65	9.07	9.54	10.07	12.14	15.46	21.63

Tier 4	0	1	2	3	6	9
5	102.63	110.32	119.4	130.31	181.72	310.27
6	41.29	44.37	48	52.36	72.93	124.35
7	14.04	15.06	16.27	17.73	24.58	41.72
8	8.59	9.2	9.93	10.8	14.91	25.19
9	7.23	7.74	8.34	9.07	12.49	21.06

Tier 5	0	1	2	3	6	9
7	147.56	160.28	175.83	195.27	300.24	720.2
8	29.84	32.38	35.49	39.38	60.37	144.36
9	10.22	11.07	12.1	13.4	20.39	48.39

图 3: 不同情况下抽出至少一张目标单卡的抽卡次数期望

5.2 能用本模型解释的一些问题

Q：速八 50 块抽不出想要的 5 费合理吗？

抽卡次数	5	10	15	20
未抽到的概率	69.03%	47.14%	31.83%	21.23%
期望	0.36	0.73	1.09	1.45

表 3: 空城 7 级抽卡情况

A: 合理，有大约 20% 的失败率。个人观点，除非某个橙卡强到一星神装锁血可以吃，两星乱吃 (比如 s1 潘森，s2 剑圣，s3 泽拉斯)，固定玩橙卡阵容上分效率不高。

Q：赌一费三星，5 级慢 d 还是 4 级快 d 哪个方法更好？

A: 以人均持有 4 张其他一费卡，自己独家为例分析。

Lv/已有张数	0	3	4	5	6
4	38.57	28.43	24.59	20.47	16.03
5	47.06	34.66	29.97	24.93	19.50

表 2: 不同状态下，抽足 9 张一费卡所需的抽卡次数的期望

仅从期望的角度看，嫖卡大于等于 5 张的情况下，四级快抽就是一个比较可行的方法了。当然在实战中还需要综合经济 (reddit 原帖上有一个综合经济和抽卡情况的判据)/阵容强度去做考虑 (比如 s3 里，波比二三星的战力差比较大，而霞二三星战力差不大，前者会比后者更倾向于快抽)。

Q：空城 3-5 拉 7 玩 4 费在概率上是合理的玩法吗？

其他已被抽出的四费卡总计 8 张，自己独家为例分析。

A: 悲观来看，在抽 20 下这种绝对经济崩盘的抽法下，我们仍有 20% 的概率颗粒无收；但从另外一方面，抽 5-10 下就有不错的成功率。所以当一张 4 费单卡较强的时候，大家空城玩，有一家成功作为你对手出现的概率是很高的。

对一个空城套路的熟练度不止体现在顺风的流程，更体现在逆风的处理和作为对手时对这个套路节奏、缺陷的洞悉。

5.3 杂谈

事实上，给我自己评价这些做出来的东西，除了关于一费三星部分的结论是对实战直接有帮助之外，其他部分都比较鸡肋。

在实战中除了已定型阵容的主 c，其他的卡几乎不值得去单搜，但模型基础假设便是抽单卡。而我本来想做的比较深度的分析，是“以所需搜卡次数的期望和方差等统计量”引出一个附加价值，让它累加到本身的阵容价值上，更准确的分析阵容的“性价比”(性能可以去数据网站查询前四率吃鸡率来计算)。“抽单卡”的基础假设很可能导致某些灵活度较高的阵容得到一个虚高的附加价值。于是这部分就暂时搁置了 (当然也是因为自己懒)。

6 程序与源码

下载-github

本程序从自用的 python 小脚本，变成朋友圈子里用的简单命令行工具，最后再加入了简单的 ui 发布于此。开发时间仓促，不免有很多欠考虑的地方。如果程序有什么 bug，也欢迎回帖反馈或者到 github 提 issue。另外，如果有一些新的功能、需求 (比如输入阵容计算附加价值，又或者给程序开个网页端或者移动端) 也欢迎提出。