

中国科学技术大学

硕士学位论文



夸克对湮灭产生 W 玻色子对过程的 QCD 修正中双圈主积分的解析研究

作者姓名： 何文杰

学科专业： 粒子物理与原子核物理

导师姓名： 张仁友 副教授

完成时间： 二〇二四年五月七日

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



**Study on the master integrals for
QCD corrections to W -pair
production in quark-antiquark
annihilation**

Author: Wen-Jie He

Speciality: Particle Physics and Nuclear Physics

Supervisor: Asso. Prof. Ren-You Zhang

Finished time: May 7, 2024

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

☒ 公开 ☐ 控阅（____年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘要

标准模型很好地解释和描述了基本粒子及其之间的相互作用，但是仍然有诸多问题不能解释，比如：暗物质与暗能量、中微子质量、精细调节等。这预示了标准模型仅为 10^2 GeV 量级能标下的一个有效理论，仍然存在超出标准模型的新物理。寻找新物理主要分为两个途径：一是直接测量到超出标准模型的新粒子的信号；另外则是通过观测新物理粒子对标准模型过程的间接影响，来分析新物理的存在性，而这一途径则依赖于对理论模型的精确检验。随着对撞机的能量与亮度越来越高，实验精度也不断提升，因此，我们需要精确理论预言来间接寻找新物理。费曼积分的精确计算对于高能物理唯象学的精确预言来说不可或缺，如何高效计算多圈多外腿的费曼积分是目前唯象理论的一大难点。

在使用微扰论方法计算散射截面或衰变宽度时，我们会遇到大量的费曼图，这些费曼图会带来巨大的计算量。通过张量约化，散射振幅能够写为诸多洛伦兹张量结构与标量费曼积分的组合。进一步地，这些费曼积分可以通过 IBP 关系表示为一组积分的线性组合，这一组积分被称为主积分。我们只需要得到这些主积分的结果便可以快速地计算出所需费曼积分的值，有助于精确预言相关物理观测，因此主积分的约化及解析与数值计算是唯象理论一个重要的研究方向。

目前，已有诸多解析及数值求解主积分的方法，其中微分方程方法是目前计算主积分的一个有效手段，该方法经过数十年的研究已经取得了不小的成果，并且已被广泛应用到各种高精度唯象理论当中。同时也诞生了很多在此方法基础上优化后的更加高效精确的方法。如辅助质量流方法就是基于微分方程方法所建立的一套快速高效数值计算方法，此外在解析计算方面，构建正则微分方程来求解主积分也十分重要。正则微分方程方法能够降低求解方程的难度，使得我们可以快速地将解写为迭代积分的形式。当方程中的元素均为有理分式时，我们可以利用特殊函数多重对数函数来表示方程的解。但是对于更加复杂的情况，则会引入更多的特殊函数比如椭圆积分等，求解的难度也大大增加。

W 玻色子对产生过程在所有弱规范玻色子对产生过程中具有最大的产生截面，是研究电弱相互作用规范对称性以及电弱对称性破缺机制的重要过程。通过对 W 规范玻色子对产生过程的精确研究，可以测量涉及 W 玻色子的三规范耦合，精确检验标准模型规范结构。此外， W 玻色子对产生过程也用于测量 W 玻色子的质量。由于 W 玻色子对产生是 Higgs 玻色子衰变过程的不可约本底，该过程也在寻找 Higgs 玻色子相关的新物理中有着不可或缺的作用，是寻找超出标准模型新物理的重要本底过程。本论文研究了正反轻夸克对湮灭产生 W 玻色子对的 QCD 修正中的双圈主积分。我们考虑了顶夸克的质量，并对积分含有多个

标度的问题进行了处理。在此之中，涉及到顶夸克的不可约双圈图总共有 17 种拓扑结构，其中有 4 种顶拓扑结构，包括 3 种平面拓扑结构和 1 种非平面拓扑结构，本文对 3 种平面拓扑进行了全面系统地研究。其中对于一些家族分支我们成功构建出了正则微分方程，之后，我们需要处理有理化问题。在通过选择合适的有理化方案之后实现了 3 个根式的同时有理化，并且利用特殊函数多重对数函数及一重积分表示出了主积分的解。特别地，对于某些家族分支，我们将面临椭圆费曼积分以及线性非正则基的求解问题。最后我们利用已有的数值计算方法，独立地验证了结果的正确性。

关键词：主积分，正则微分方程， W 玻色子对产生过程

ABSTRACT

The Standard Model excellently explains and describes the fundamental particles and their interactions. However, there are still many unresolved issues, such as dark matter and dark energy, neutrino masses, hierarchy problem and so on. This suggests that the Standard Model is merely an effective theory at the energy scale of around 10^2 GeV, and there exists new physics beyond the Standard Model. There are two main ways to search for new physics, direct detection of signals from new particles beyond the Standard Model and indirect observations and analysis of the impacts of new physics particles through Standard Model processes. The latter one relies on the precise calculation of theoretical models. With the increasing energy and luminosity of colliders, experimental precision is continually improving. Therefore, precise theoretical predictions are needed to indirectly search for new physics. Precise calculations of Feynman integrals are indispensable for precise predictions in high-energy physics phenomenology. Efficient computation of multi-loop and multi-leg Feynman integrals is currently a major challenge in phenomenological theory.

A large number of Feynman diagrams usually appear in the perturbative calculation for the cross section and the decay width, which contribute significantly to the computational complexity. Through tensor reduction, the scattering amplitudes can be expressed as combinations of Lorentz tensor structures and scalar Feynman integrals. Furthermore, these Feynman integrals can be expressed as linear combinations of a set of integrals using IBP relations. This set of integrals is referred to as master integrals. Obtaining the results of these master integrals allows for the rapid computation of the desired Feynman integrals to accurately predict the relevant physical observations. Therefore, the reduction, analytical, and numerical computation of master integrals constitute crucial research directions in phenomenological theory.

Currently, there exist various methods for analytically and numerically solving master integrals. Many efficient methods improved from the differential equation has made significant progress through the previous researches widely utilized in high-precision phenomenological theories. For example, the numeric method of auxiliary mass flow provides a fast and efficient numerical computation. Furthermore, in analytical calculations, constructing canonical differential equations to solve master integrals is crucial. The canonical differential equation method enables us to quickly express solutions in the form of iterated integrals. When all elements in the equation are rational

functions, solutions can be represented using special functions such as multiple polylogarithms. For more complicated cases, the new special function will occur into the solutions such as elliptic integrals, significantly increasing the computational difficulty.

Among all massive diboson processes, the production cross-section of W -boson pairs is the largest, and it is a crucial process for studying the gauge symmetry structure of EW interactions and the mechanism of EW symmetry breaking. This process is extensively utilized to investigate anomalous gauge boson couplings, providing a basis for mutual validation between experimental and theoretical studies. Moreover, it contributes significantly to the experimental data for the measurement of the W -boson mass. As the production of W -boson pairs serves as the irreducible background in Higgs boson decay processes, it plays an indispensable role in searching for new physics related to the Higgs boson and is considered an important background process for probing beyond the Standard Model physics. This paper focuses on the double-loop master integrals in the QCD corrections of W -boson pair production via the annihilation of light quark-antiquark pairs. This paper investigates the two-loop planar master integrals for NNLO QCD corrections to W -boson pair production in quark-antiquark annihilation with the top-quark effect. We encounter the issue of integrals with multiple scales. This process is not only crucial for precise predictions within the Standard Model but also serves as an important background process in the search for physics beyond the Standard Model. In this context, there are a total of 17 distinct topological structures for irreducible two-loop Feynman diagrams involving top quarks, among which 4 are topologies, including 3 planar topologies and a non-planar topology. We comprehensively investigate the three planar topologies. For certain family branches, we successfully construct canonical differential equations. Subsequently, rationalization is performed to address the issue of radicals. By selecting suitable rationalization schemes, we achieve the rationalization of three radicals simultaneously and express the solutions of master integrals as Goncharov polylogarithms and one-fold integrals. In particular, for some family branches, three integrals related to elliptic integrals appear in the master integrals. By solving the non-canonical differential equations which are in linear form, the results are expressed using iterative methods.

Key Words: Master Integral, Canonical Differential Equation, W -boson Pair Production

目 录

第 1 章 标准模型	1
1.1 标准模型拉氏量	1
1.1.1 电弱部分及 Higgs 机制	2
1.1.2 QCD 部分拉氏量	5
1.2 微扰论	7
第 2 章 费曼积分计算方法介绍	11
2.1 积分的发散与维数正规化	11
2.2 费曼积分相关概念	13
2.3 费曼积分的表示	16
2.3.1 Schwinger 参数表示	16
2.3.2 费曼参数表示	18
2.3.3 Baikov 表示	21
2.4 IBP 方法及主积分	26
2.5 微分方程方法	29
2.5.1 微分方程的构建	30
2.5.2 正则微分方程	32
2.5.3 微分方程的解	34
2.6 积分的切割	41
第 3 章 夸克对湮灭产生 W 玻色子对过程的 QCD 修正中双圈平面 主积分的计算	45
3.1 背景介绍	45
3.2 积分家族	47
3.3 微分方程	49
3.3.1 顶分支 \mathcal{T}_{1F}	50
3.3.2 顶分支 \mathcal{T}_{2F}	52
3.3.3 顶分支 \mathcal{T}_{3F}	58
3.4 数值检验	61
3.5 本章小结	62
第 4 章 总结	64
参考文献	66

附录 A	顶分支 \mathcal{T}_{1F} 和 \mathcal{T}_{2F} 中的正则基组合系数	83
附录 B	NNLO QCD 修正下 $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 过程中平面主积分解析表达式	84
B.1	顶分支 \mathcal{T}_{1F} 中的主积分	84
B.2	顶分支 \mathcal{T}_{2F} 中的主积分	86
B.3	顶分支 \mathcal{T}_{2F} 中的主积分	92
致谢	97
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	98

第1章 标准模型

标准模型是描述自然界基本粒子之间强、弱、电磁相互作用力的 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 规范理论，该模型于 1970 年代建立，取得了巨大的成功，已经被大量实验所检验，它所预言的 W 玻色子 [1-2]、 Z 玻色子 [3-4]、顶夸克 [5-6] 等粒子先后在对撞机上被发现。随着 2012 年大型强子对撞机上 Higgs 粒子被发现 [7-8]，标准模型的最后一块拼图得以补齐。至此，标准模型预言的所有基本粒子均已被实验所证实。

1.1 标准模型拉氏量

标准模型的规范对称群为 $G = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ， G 中的群元可以表示为

$$U(x) = \exp \left[ig_S T_3^a \theta_3^a(x) + ig T_2^k \theta_2^k(x) + ig' \frac{Y}{2} \theta_1(x) \right], \quad \forall U(x) \in G. \quad (1.1)$$

其中， T_3^a ($a = 1, \dots, 8$)， T_2^k ($k = 1, 2, 3$) 和 $Y/2$ 分别为 $SU(3)_C$ ， $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的生成元， θ_3^a ， θ_2^k ， θ_1 为相应规范变换的参数。

对于一个任意的 $SU(N)$ 规范理论，其拉氏量形式可以表示为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}. \quad (1.2)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \sum_f \bar{\psi}_f (i \not{D} - m_f) \psi_f, & \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_{GF} &= \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, & \mathcal{L}_{FP} &= -\bar{\eta}^a \delta^{ac} \partial^2 \eta^c - g f^{abc} \bar{\eta}^a \partial^\mu A_\mu^b \eta^c, \end{aligned} \quad (1.3)$$

\mathcal{L}_F 和 \mathcal{L}_G 分别为费米部分及规范部分， \mathcal{L}_{GF} 为规范固定部分，以及 \mathcal{L}_{FP} 为 Faddeev-Popov 规范补偿项。 \not{D} 定义为 $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ ，其中，协变导数 D_μ 为

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu(x), \quad (1.4)$$

场强张量由协变导数给出，

$$F_{\mu\nu}^a t^a = -\frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu], \quad a = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (1.5)$$

其中， t^a 为 $SU(N)$ 生成元。由此可得，

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.6)$$

除了物质场及规范场外，标准模型额外引入了一个复标量二重态，又称为 Higgs 二重态，由 Higgs 二重态给出的规范不变项包括 Higgs 动能和自相互作用势 \mathcal{L}_H 以及 Yukawa 耦合项 \mathcal{L}_Y 。完整的标准模型拉氏量为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y. \quad (1.7)$$

Higgs 机制的引入实现了标准模型的电弱对称性自发破缺，给出了基本粒子的质量起源，并预言了一个中性标量 Higgs 粒子的存在。

1.1.1 电弱部分及 Higgs 机制

标准模型电弱部分是基于 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 定域规范对称性的规范理论，也被称为 Glashow-Weinberg-Salam 理论。

标准模型物质费米场包括夸克及轻子规范多重态，

$$\begin{aligned} Q_L^i, \quad u_R^i, \quad d_R^i, \\ L_L^i, \quad e_R^i, \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中， $i = 1, 2, 3$ 为代指标， Q_L^i, L_L^i 为 $SU(2)_L$ 二重态， u_R^i, d_R^i, e_R^i 为 $SU(2)_L$ 单态。表1.1中，我们给出了具体的符号标记以及 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 定域规范对称群下的相关量子数。

表 1.1 标准模型中的费米子在 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 定域规范对称群下的相关量子数。

粒子类别	符号约定	Y	T_2	I_W^3	Q
夸克	$Q_L^{1,2,3} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
	$u_R^{1,2,3} = u_R, c_R, t_R$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
	$d_R^{1,2,3} = d_R, s_R, b_R$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$
轻子	$L_L^{1,2,3} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	-1	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$e_R^{1,2,3} = e_R, \mu_R, \tau_R$	-2	0	0	-1

物质部分拉氏量为

$$\mathcal{L}_F = \sum_i \bar{\psi}^i i \not{D} \psi^i, \quad \psi^i = Q_L^i, L_L^i, u_R^i, d_R^i, e_R^i. \quad (1.9)$$

协变导数为

$$D_\mu^L = \left(\partial_\mu - ig T_2^k W_\mu^k - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right), \quad (1.10)$$

T_2^k ($k = 1, 2, 3$) 及 $Y/2$ 分别为 $SU(2)_L$ 及 $U(1)_Y$ 生成元在 ψ^i 下的表示。特别地,

$$T_2^k = \begin{cases} \frac{\sigma^k}{2} & (\psi^i = Q_L^i, L_L^i) \\ 0 & (\psi^i = u_R^i, d_R^i, d_R^i) \end{cases} \quad (1.11)$$

规范部分拉氏量为

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^a B^{a\mu\nu}, \quad (1.12)$$

其中, $SU(2)_L$ 及 $U(1)_Y$ 场强张量为

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \\ B_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a. \end{aligned} \quad (1.13)$$

考虑到规范对称性, 物质粒子及规范场质量项是被禁戒的, 物质场及规范玻色子的质量可由 Higgs 机制给出。标准模型 Higgs 二重态记为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Higgs 部分拉氏量包含动能及势能项, 写为

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (1.15)$$

其中, $(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)$ 为动能项, 包含了 Higgs 规范相互作用, 这里的协变导数为

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\sigma^i}{2}W_\mu^i - ig'\frac{Y}{2}B_\mu. \quad (1.16)$$

$V(\Phi)$ 为势能项,

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (1.17)$$

当 $\mu^2 < 0$ 时, 其势能如图1.1所示, 势能的极小值位于

$$\Phi^\dagger \Phi = -\frac{2\mu^2}{\lambda}. \quad (1.18)$$

Higgs 真空期望值通常取为

$$\Phi_0 = \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{其中, } v = \sqrt{-\frac{4\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.19)$$

真空破坏了系统的 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 规范对称性。我们定义

$$Q = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

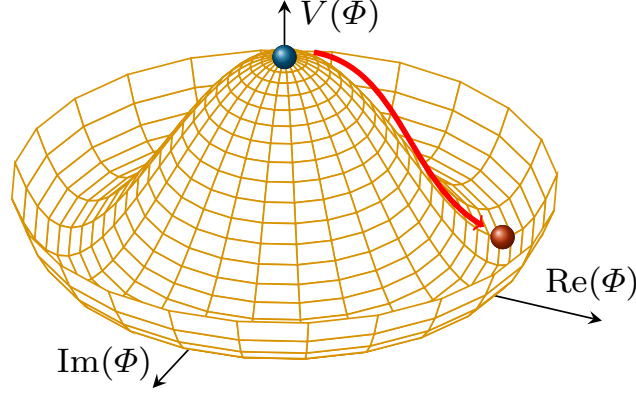


图 1.1 Higgs 势能与真空自发对称性破缺示意图 [9]。

可以看到： $Q\langle\Phi\rangle=0$ ，因此，真空仍保有以 Q 为生成元的 $U(1)$ 规范对称性，此即为电磁 $U(1)_{\text{em}}$ 规范对称性，即 Higgs 机制实现了 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}}$ 的电弱对称性自发破缺。式 (1.20) 被称为 Gell-Mann-Nishijima 关系，其指出了电荷、同位旋第三分量和超荷之间的关系，即： $Q = I_W^3 + Y/2$ 。

Higgs 二重态在真空附近可以展开为

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} G^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[v + h^0(x) + iG^0(x)] \end{pmatrix}, \quad \langle G^+ \rangle = \langle G^0 \rangle = \langle h^0 \rangle = 0. \quad (1.21)$$

在么正规范下， $G^+ = G^0 = 0$ ，则

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[v + h^0(x)] \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

此时，势能为

$$V(h^0) = \mu^2 h^{02} + \frac{\mu^2}{v} h^{03} + \frac{\mu^2}{4v^2} h^{04} = \frac{1}{4}\lambda v^2 h^{02} + \frac{1}{4}\lambda v h^{03} + \frac{1}{16}\lambda h^{04}. \quad (1.23)$$

考虑到真空自发破缺，式 (1.15) 中的 Higgs 动能项可以诱导出规范场质量（即二次）项如下：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} (ig\sigma^k W_\mu^k + ig'YB_\mu) (-ig\sigma^l W^{l\mu} - ig'YB^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}v^2 (g^2 W_\mu^k W^{k\mu} + g'^2 B_\mu B^\mu + 2gg'B^\mu W_\mu^3) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{g^2 v^2}{4} (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + \frac{v^2}{4} (gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

对场 W_μ^i ， B_μ 作线性组合，得到物理的场规范场的质量本征态为

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

质量分别为

$$m_W = \frac{1}{2}gv, \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v = \frac{m_W}{\cos\theta_W}, \quad m_A = 0. \quad (1.26)$$

其中, Weinberg 角 θ_W 由规范耦合常数 g, g' 定义,

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.27)$$

协变导数可藉由规范质量本征态表达为

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) - \frac{ig}{\cos\theta_W}\left(\frac{\sigma^3}{2} - Q\sin^2\theta_W\right)Z_\mu - ieQA_\mu. \quad (1.28)$$

其中,

$$\tau^\pm = \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2}. \quad (1.29)$$

$U(1)_{\text{em}}$ 规范耦合常数 e 为

$$e = g\sin\theta_W = \sqrt{g^2 + g'^2}\sin\theta_W\cos\theta_W. \quad (1.30)$$

物质费米场的质量可由 Higgs 场与费米场的 Yukawa 相互作用给出。Yukawa 相互作用可以写为

$$\mathcal{L}_Y = -\lambda_e^{ij}\bar{L}_L^i\Phi e_R^j + \lambda_d^{ij}\bar{Q}_L^i\Phi d_R^j + \lambda_u^{ij}\Phi^C Q_L^i u_R^j + h.c. \quad (1.31)$$

这里 $\Phi^C = i\tau^2\Phi^\dagger$ 。以轻子为例, Yukawa 相互作用诱导的质量项为

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_e^{ij}}{\sqrt{2}}\bar{L}_L^i\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}e_R^j + h.c. &= -\frac{\lambda_e^{ij}}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_{eL}^i \quad \bar{e}_L^i)\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}e_R^j + h.c. \\ &= -\frac{\lambda_e^{ij}v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L^i e_R^j + \bar{e}_R^i e_L^j). \end{aligned} \quad (1.32)$$

可以看到, 费米子质量正比与 Yukawa 耦合强度。需要注意的是, 与夸克场不同, 由于没有右手中微子单态, 标准模型的 Yukawa 项并未给出中微子质量, 也就是说, 标准模型预言了中微子为无质量粒子。而实验中观测到的中微子振荡现象表明中微子质量的存在 [10-13]。这也说明标准模型并不是最终理论, 新物理仍然存在。

1.1.2 QCD 部分拉氏量

描述强相互作用的 QCD 部分拉氏量相对电弱部分较为简洁, 不同的夸克对应于不同的狄拉克旋量场 ψ_q , 每一种夸克有三种颜色。传递强相互作用的规范场为胶子场 G_μ^a , QCD 拉氏量表示为

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_q \bar{\psi}_q (i\not{D} - m_q)\psi_q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad (1.33)$$

其中，协变导数为

$$D = \gamma^\mu (\partial_\mu - i g_S T_3^a G_\mu^a), \quad (1.34)$$

$T_3^a = \lambda^a/2$ ($a = 1, 2, \dots, 8$), λ^a 为 SU(3) 群生成元, $G_{\mu\nu}^a$ 为场强张量,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_S f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (1.35)$$

其中 f^{abc} 为 su(3) 李代数的结构常数。与 U(1) 规范对称群不同, SU(3) 为非阿贝尔对称群, 即 $f^{abc} \neq 0$, 这也预示了胶子自相互作用的存在。

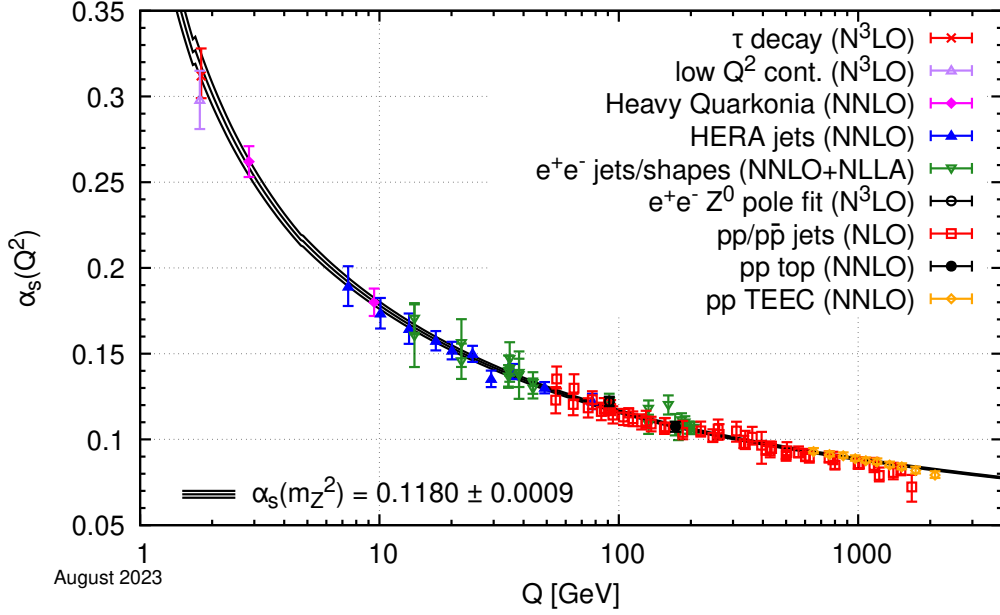


图 1.2 耦合强度 α_s 随能标 Q 的演化曲线以及与实验数据的比较 [14]。

在 QCD 理论中存在色禁闭现象, 指夸克和胶子都被禁闭在色中性的复合粒子内部, 我们无法直接观测到色荷的存在, 也无法观测到独立存在的夸克。实验上也期望通过寻找分数电荷来寻找自由夸克 [15-19], 然而到目前为止带有分数电荷的粒子是否存在也一直没有定论。对于该现象也有许多理论模型解释 [20-24], 从物理上简单地可以看作, 在裸夸克周围有与 QED 中类似的胶子“云”, 不过与 QED 不同的是, 胶子也带有色荷, 即前文所提到的带有自相互作用, 导致有效色荷随距离增加而增加, 起到反屏蔽作用。而当两个夸克距离很近时, 相互作用反而减小, 这也被称为渐近自由行为 [25-26]。图1.2给出了强相互作用耦合常数 α_s 在不同能标下的测量结果, 能量标度增加, 耦合常数将减小, 粒子之间相互作用变弱, 高能标下夸克和胶子可视为自由粒子; 能量标度减小, 耦合常数将增加, 粒子之间相互作用也变强, 呈现出禁闭现象。在诸多量子场论教材中 [27-29], 对这一行为也有更为详细的解释。

1.2 微扰论

为了与实验结果相比较, 需要给出理论的预言, 微扰论是理论计算的一个重要工具。其基本思想是将拥有复杂相互作用的系统分解为自由部分及相互作用的部分。微扰论要求相互作用强度为小量, 在此情形下, 微扰理论预言与实验测量相吻合。随着实验测量精度的不断提高, 需要更精确的理论预言, 微扰级数需保留到更高阶。

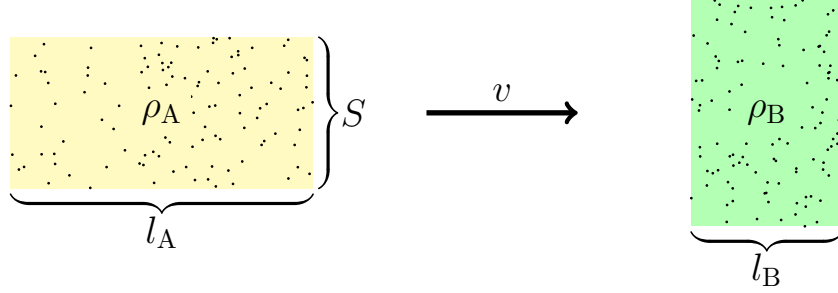


图 1.3 粒子束流对撞示意图。

粒子物理过程主要分为初态两体散射过程及初态单体衰变过程,

$$\begin{aligned} A + B &\longrightarrow 1 + 2 + \cdots n, \\ A &\longrightarrow 1 + 2 + \cdots n. \end{aligned} \quad (1.36)$$

反应发生概率可分别由散射截面 σ , 衰变宽度 Γ 来描述。以散射过程为例, 考虑粒子束流 A 和 B 对撞的情况,

$$p_A + p_B \longrightarrow p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \quad (1.37)$$

如图1.3所示, 其中, l_A 和 l_B 分别为两束粒子流的长度, ρ_A 和 ρ_B 为其束流密度, S 为对撞束流重叠面积。反应发生的事例数正比于这些量, 我们给出散射截面的定义为

$$\sigma = \frac{\text{散射事例数}}{\rho_A l_A \rho_B l_B S}. \quad (1.38)$$

从上式也可以看出散射截面具有 [长度]² 的量纲。由此可以写出微分截面的形式为

$$d\sigma = \text{流因子} \times n \text{ 体末态相空间体积元} \times |\text{散射振幅}|^2. \quad (1.39)$$

其中,

- 流因子:

$$\text{flux} = \frac{1}{2E_A 2E_B |\vec{v}_A - \vec{v}_B|} \quad (1.40)$$

$|\vec{v}_A - \vec{v}_B|$ 为 A、B 粒子的相对速度, E_A 、 E_B 分别为粒子束的入射能量。

- n 体末态相空间体积元:

$$d\text{LIPS} = \left[\prod_f \frac{d^3 \vec{p}_f}{2E_f(2\pi)^3} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_f p_f) \quad (1.41)$$

其具有洛伦兹不变性, 这里 δ 函数保证了能动量守恒。

- 散射振幅:

$$\mathcal{M}(\{p_A, p_B\} \rightarrow \{p_1, \dots, p_n\}) \quad (1.42)$$

该部分包含了理论模型动力学的信息。

散射截面将由上述各项给出, 若基于已知的散射振幅, 相空间积分可以利用蒙特卡洛方法进行有效的数值计算, 下面我们将介绍散射振幅相关的微扰计算方法。

S 矩阵由散射振幅给出, 它代表从无穷远过去到无穷远将来的时间演化,

$$\langle p_1, \dots, p_n | S | p_A, p_B \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle p_1, \dots, p_n | e^{-2i\mathcal{H}T} | p_A, p_B \rangle. \quad (1.43)$$

在微扰论下,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I. \quad (1.44)$$

我们将式 (1.43) 演化作编路径展开,

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \langle p_1, \dots, p_n | e^{-2i\mathcal{H}T} | p_A, p_B \rangle \\ & \simeq \lim_{T \rightarrow \infty(1+i\epsilon)} {}_0 \langle p_1, \dots, p_n | \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \mathcal{H}_I(t) \right] \right\} | p_A, p_B \rangle_0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \mathcal{H}_I(t) \right] \right\} &= \mathbb{1} + (-i) \int_{-T}^T dt_1 \mathcal{H}_I(t_1) \\ &+ (-i)^2 \int_{-T}^T dt_1 \int_{-T}^{t_1} dt_2 \mathcal{H}_I(t_1) \mathcal{H}_I(t_2) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (1.46)$$

S 矩阵可以写为

$$S = \mathbb{1} + iT, \quad (1.47)$$

其中, $\mathbb{1}$ 代表自由部分, 跃迁矩阵 T 则由相互作用给出, 跃迁矩阵元写为

$$\begin{aligned} \langle p_1, \dots, p_n | iT | p_A, p_B \rangle &= (2\pi)^4 \delta(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f) \\ &\times i\mathcal{M}(\{p_A, p_B\} \rightarrow \{p_1, \dots, p_n\}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

散射振幅 \mathcal{M} 可由相互作用常数 g 展开为

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 + g\mathcal{M}^{(1)} + g^2\mathcal{M}^{(2)} + g^3\mathcal{M}^{(3)} + \dots \quad (1.49)$$

$\mathcal{M}^{(i)}$ 可由各阶费曼图给出, 相应地, 散射截面可以微扰展开为

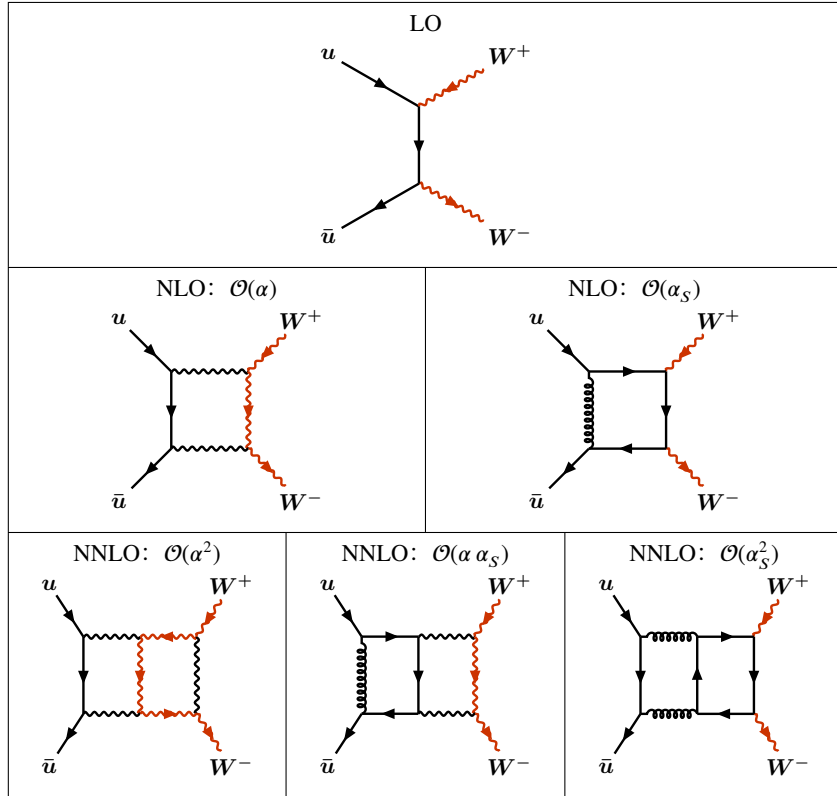
$$\sigma = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \sigma^{(i)}. \quad (1.50)$$

其中,

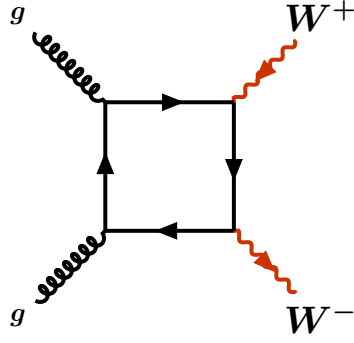
$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi}, \quad (1.51)$$

$\sigma^{(0)}$ 为 LO (leading order) 散射截面, 它代表了散射过程的主导贡献, 通常也是计算中最容易得到的。为了获得更精确的结果, 我们必须考虑高阶修正。随着微扰级数增加, 所涉及费曼图的圈数会越来越多, 费曼图的拓扑结构也会越来越复杂, 不论是费曼图的数目还是难度都会大幅提升。如标准模型下, 在正反夸克对湮灭

表 1.2 $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$ 过程中, 虚修正所涉及的费曼图示例。



产生 W 玻色子对 $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$ 过程中, 其 LO 为树图贡献, 如表1.2中第一行所示。圈图则贡献到更高阶的修正中, 表1.2的第二行及第三行给出了 $u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$ 过程的 NLO (next-to-leading order) 及 NNLO (next-to-next-to-leading order) 费曼图的代表。对于一些过程, 最低阶的贡献为圈图, 例如 $gg \rightarrow W^+W^-$ 过程中, 其领头阶的费曼图示例在图1.4中展示。


 图 1.4 $gg \rightarrow W^+W^-$ 过程中领头阶费曼图示例。

借助费曼图并结合费曼规则，我们可以写出散射振幅的表达式。费曼规则表明传播子及顶点中带有张量结构，例如 QCD 中，胶子传播子以及三胶子顶点费曼规则为

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu \\ a \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \nu \\ b \end{array} &= \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \\
 \begin{array}{c} \mu_1 \quad a_1 \\ p_1 \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \mu_3 \quad a_3 \\ p_3 \end{array} &= -gf^{abc} \left[g^{\mu_1\mu_2}(p_1 - p_2)^{\mu_3} \right. \\
 \begin{array}{c} \mu_2 \quad a_2 \\ p_2 \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} &\quad \left. + g^{\mu_2\mu_3}(p_2 - p_3)^{\mu_1} \right. \\
 &\quad \left. + g^{\mu_3\mu_1}(p_3 - p_1)^{\mu_2} \right].
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

因此，散射振幅能够被表示为

$$\mathcal{M} = N_{\mu_1 \dots \mu_R}(p_1, p_2; p_1, \dots, p_n) F^{\mu_1 \dots \mu_R}, \tag{1.53}$$

其中， $F^{\mu_1 \dots \mu_R}$ 为 R 阶张量积分。通过张量约化，其张量结构能够提取出来与系数 $N_{\mu_1 \dots \mu_R}$ 缩并，

$$F^{\mu_1 \dots \mu_R} = \sum_a T_a^{\mu_1 \dots \mu_R} I_a(p_i \cdot p_j; m_k). \tag{1.54}$$

$I_a(p_i \cdot p_j; m_i)$ 则需要求解费曼积分获得。Passarino 和 Veltman 提出了一种通用的约化方法 [30]，得到了广泛的应用，但随着张量阶数增加，该算法将面临庞大的计算量。之后也有许多张量约化的方法被提出来 [31-37]，本文中不展开讨论。

精确高效地求解费曼积分是对理论模型作出精确微扰预言的必要条件。高阶辐射修正所涉及的费曼积分求解复杂度有显著提升。研究多圈费曼积分不仅能提供更加精确的理论预言，还能揭示更加底层的数学结构。除了已经在散射振幅中被广泛使用的多重对数函数外，椭圆曲线以及 Calabi-Yau 流形在粒子物理研究中同样扮演着重要的角色 [38-42]，而单圈费曼积分的研究中，此类线索难以被人们捕捉。在后面的章节中，我们将介绍费曼积分的相关计算技术，通过这些技术解决了 W 玻色子对产生过程中所涉及费曼积分的解析计算，这将为强子对撞机上 W 玻色子对产生截面的高精度理论预言提供重要基础。

第2章 费曼积分计算方法介绍

从微扰论角度来看，想要计算量子场论中的振幅从而得到精确的物理结果，我们需要考虑计算中的高阶修正。我们可以利用费曼图将高阶贡献方便地表示出来。随着阶数的增加，计算将会涉及到带有更多圈数的费曼图，解决这类费曼图的计算大致可以分为两个步骤：首先对费曼幅度做张量约化将张量结构分离出来得到费曼积分，然后再对其进行计算。高阶虚修正将带来更加难以解决的费曼积分，从最初的单圈积分开始，人们逐渐意识到费曼积分的重要性，其不仅出现在高能物理的微扰计算中，在其他学科中也有涉及，例如引力波相关理论中[43-46]。精确求解费曼积分是高精度理论预言的核心之一，本章我们将介绍有关费曼积分的基本概念和计算方法。

2.1 积分的发散与维数正规化

在研究量子场论时，人们就发现了理论计算中会出现发散问题。但由于所预言的最终物理结果是一个可观测的物理量，在计算中面临的无穷大是可以避免的，所以我们需要将不确定、不能够处理的发散利用某些参数表征出来，也被称为正规化，引入的参数被称为正规子（regulator）。从下面例子中，我们将初步看到一个积分中的发散如何表征出来。我们考虑下列积分，

$$\mathcal{T}_2^{(4)} = \int \frac{d^4 l}{\pi^2} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^2}, \quad (2.1)$$

我们假定该积分处于4维欧氏空间中并且约定 $\Delta > 0$ ， l 是四维空间中的矢量，积分区域为全空间，进一步我们可以将积分变换为

$$\mathcal{T}_2^{(4)} = \int \frac{d\Omega_4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d|l||l|^3}{(|l|^2 + \Delta)^2} = \int_0^\infty \frac{d|l|^2 |l|^2}{(|l|^2 + \Delta)^2} = \int_0^\infty \frac{x dx}{(x + \Delta)^2}, \quad (2.2)$$

上式中第二步我们完成了角向分量的积分，

$$\int d\Omega_4 = 2\pi^2, \quad (2.3)$$

剩下径向的积分我们用其模长的平方作为变量。可以从表达式中看出这个积分最终会得到一个发散的結果，源于积分上限为无穷大。我们需要引入一个正规子来使得积分是良好定义的，最简单的做法是对积分做一个截断，

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x + \Delta)^2} \longrightarrow \int_0^\Lambda \frac{x dx}{(x + \Delta)^2} = \log\left(\frac{\Delta + \Lambda}{\Delta}\right) - \frac{\Lambda}{\Delta + \Lambda}, \quad (2.4)$$

其中, Λ 也称为紫外正规子, 由此积分的发散将表征为 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时, $\log \Lambda$ 带来的发散。我们也可以加上额外的一项将发散分离量化,

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{(x + \Delta)^2} \longrightarrow \int_0^\infty \left[\frac{x dx}{(x + \Delta)^2} - \frac{x dx}{(x + \Delta_\Lambda)^2} \right] = \log \frac{\Delta}{\Delta_\Lambda}. \quad (2.5)$$

当 $\Delta_\Lambda \rightarrow \infty$ 时, 发散表征为 $\log \Delta_\Lambda$ 发散。

目前最方便且被广泛使用的方法为维数正规化方法 [47-49]。接下来我们在维数正规化下处理积分中的发散问题。首先我们需要将整数维的运算法则扩展到任意维数, 并将积分视为关于时空维数 D 的函数,

$$D = D_0 - 2\epsilon, \quad (2.6)$$

其中, D_0 是整数, ϵ 是维数正规化方案下的正规子, 积分的发散将表现为 ϵ 的奇点。对于 D 维下的运算, 我们要求它同样满足通常黎曼积分的性质, 如线性, 平移不变性和标度变换性质 [50-51]。

• 线性:

$$\int d^D l [a f(l) + b g(l)] = a \int d^D l f(l) + b \int d^D l g(l), \quad \text{其中 } a, b \text{ 为常数}, \quad (2.7)$$

• 平移不变性:

$$\int d^D l f(l) = \int d^D l f(l + p), \quad \text{其中 } p \text{ 为任意常矢量}, \quad (2.8)$$

• 标度变换性质:

$$\int d^D l f(\alpha l) = \alpha^{-D} \int d^D l f(l), \quad \text{其中 } \alpha \text{ 为常数}. \quad (2.9)$$

另外, D 维下对高斯函数的积分应该与 D_0 维的情况保持一致, 满足归一化条件,

$$\int \frac{d^D l}{\pi^{D/2}} e^{-l^2} = 1. \quad (2.10)$$

对于之前的例子 (2.1), 在 D 维下可以表示为

$$\mathcal{I}_2^{(D)} = \int \frac{d^D l}{\pi^{D/2}} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^2}, \quad (2.11)$$

同样的先完成角向自由度的积分, D 维下的角向积分可以由如下式子给出:

$$\int d\Omega_D = 2\pi^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)^{-1}, \quad (2.12)$$

由此得

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^{(D)} &= \int \frac{d\Omega_D}{\pi^{D/2}} \int_0^\infty \frac{d|l| |l|^{D-1}}{(|l|^2 + \Delta)^2} = \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty \frac{d|l|^2 (|l|^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(|l|^2 + \Delta)^2} \\ &= \Delta^{\frac{D}{2}-2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D}{2}-1} dx}{(x+1)^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

上式最后一步中有变量替换 $|l|^2 = \Delta x$ 。则上述积分实际为 Beta 函数，再利用其性质，最终可以将结果用 Gamma 函数来表示，

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{D}{2}-1} dx}{(x+1)^2} = B\left(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right), \quad (2.14)$$

最终结果在 $D_0 = 4$ 的发散行为由 $\epsilon = 0$ 处极点行为给出，

$$\tau_2^{(D)} = \Delta^{\frac{D}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Delta^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon), \quad (2.15)$$

该结果还可以扩展到分母为其他整数幂次的情况，

$$\tau_a^{(D)} = \Delta^{\frac{D}{2}-2} \frac{\Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(a)}. \quad (2.16)$$

2.2 费曼积分相关概念

我们在这章给出费曼积分的基本定义式为

$$I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \int \prod_i^L \frac{d^D l_i}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{\prod_{i=0}^{n_{\text{int}}} P_i^{\alpha_i}}, \quad (2.17)$$

其中 l_i 代表圈动量， L 为圈动量的数目， n_{int} 为传播子的个数， P_i 代表传播子的逆^①，由圈动量 l_i 、外动量 p_i 以及传播子对应的质量组成，

$$P_i = q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad q_i = \sum_{j=1}^L A_{ij} l_j + \sum_{j=1}^{N_{\text{ext}}} B_{ij} p_j, \quad (2.18)$$

利用每个顶点动量守恒可以定出 A_{ij} , B_{ij} 。之后通过一些简单的例子我们将继续对其进行讨论，每一个传播子带有一个整数幂次 $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ，称为指标 (index)。这样的积分我们可以结合图形来进行说明，下面先以一个例子作为简单介绍。

对于图2.1，我们可以给出根据内线写出其相应的费曼积分，

$$I_{1,1,1,1}^{\text{box}} = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{l^2 (l+p_1)^2 (l+p_1+p_2)^2 (l+p_1+p_2+p_3)^2}, \quad (2.19)$$

该费曼积分具有 4 条外腿，由于动量守恒，独立的外动量数目为 3 个，记其为 $N_{\text{ext}} = 3$ ，圈动量数目为 $L = 1$ ，由外动量与圈动量构成的独立的洛伦兹标量数目为 $N_{\text{int}} = 4$ 个。当传播子的数目等于 N_{int} 时，这组传播子便可以定义一个（费曼）积分家族 (integral family)，许多研究费曼积分系统且方便的方法都需要在积分家族中使用。对于单圈即 $L = 1$ 的情况，具有 N_{ext} 个独立外动量的费曼积

^①为了方便有时也直接称其为传播子。

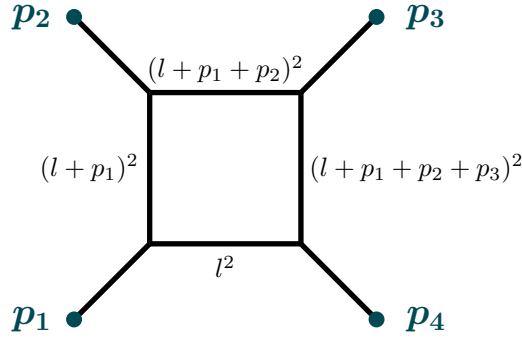


图 2.1 单圈箱图，四条外动量以及传播子动量如图所示，这里约定外动量方向朝内，内线无质量。

分，需要 $N_{\text{ext}} + 1$ 个线性独立的传播子构成一个积分家族。具有相同结构传播子的费曼积分则属于同一个积分家族，例如，

$$I_{2,1,1,1}^{\text{box}} = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(l^2)^2 (l + p_1)^2 (l + p_1 + p_2)^2 (l + p_1 + p_2 + p_3)^2}, \quad (2.20)$$

与 $I_{1,1,1,1}^{\text{box}}$ 就属于同一个积分家族，同理 $I_{0,1,0,1}^{\text{box}}$ 、 $I_{-1,1,1,1}^{\text{box}}$ 也属于该家族，这里的-1代表该传播子存在于分子上。可以注意到，由于 α_i 为任意的整数，所以一个积分家族中包含有无数个费曼积分。

扩展到任意圈数 L ，任意外腿数 N_{ext} 的情况，由圈动量和外动量构造的独立洛伦兹标量数目为

$$N_{\text{int}} = \frac{L(L+1)}{2} + LN_{\text{ext}}, \quad (2.21)$$

其中包括

$$\begin{aligned} l_i^2, & \quad 1 \leq i \leq L, \\ l_i \cdot l_j, & \quad 1 \leq i < j \leq L, \\ l_i \cdot p_j, & \quad 1 \leq i \leq L, \quad 1 \leq j \leq N_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

对于更高圈的费曼积分，我们往往需要补充一些传播子去构建一个积分家族。这里给出一个双圈的例子，由于双圈四点费曼积分中 $N_{\text{ext}} = 3$ ， $L = 2$ ，由

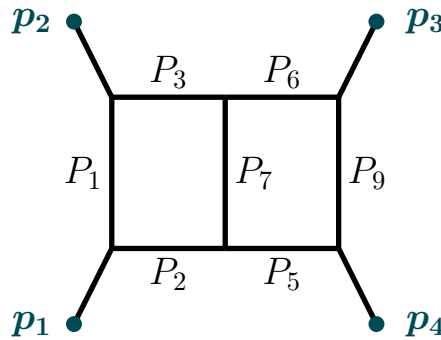


图 2.2 双圈箱图。四条外线动量方向朝里，传播子 $P_{1,2,3,5,6,7,9}$ 在图中已标注， $P_{4,8}$ 为额外引入的传播子。

式 (2.21) 可以得知，对这类费曼积分需要用 $N_{\text{int}} = 9$ 个传播子来构造一个积分

家族。可以选择约定传播子如下：

$$\begin{aligned} P_1 &= l_1^2 - m_1^2, & P_2 &= (l_1 + p_1)^2 - m_2^2, & P_3 &= (l_1 - p_2)^2 - m_3^2, \\ P_4 &= l_2^2 - m_4^2, & P_5 &= (l_2 + p_1)^2 - m_5^2, & P_6 &= (l_2 - p_2)^2 - m_6^2, \\ P_7 &= (l_1 - l_2)^2 - m_7^2, & P_8 &= (l_1 - p_2 - p_3)^2 - m_8^2, & P_9 &= (l_2 - p_2 - p_3)^2 - m_9^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

对于图2.2所示的费曼积分， P_4 ， P_8 两个传播子是我们额外引入的，被引入的传播子被称为不可约标量积（irreducible scalar product, ISP）。

下面我们讨论一下费曼积分所依赖的变量。首先，费曼积分依赖于维数 D ；其次，是传播子所带的指标 α_i ；最后是费曼积分依赖于外线动量构成的洛伦兹不变量 $p_i \cdot p_j$ 以及传播子所带的质量 m_i^2 ，由外动量构成的洛伦兹不变量可以分类为

$$s_i = p_i^2, \quad s_{ij} = (p_i + p_j)^2, \quad \text{其中, } i \neq j, \quad (2.24)$$

有 $\frac{N_{\text{ext}}(N_{\text{ext}}+1)}{2}$ 个，加上内线质量总共有

$$N_{\text{scale}} = \frac{N_{\text{ext}}(N_{\text{ext}}+1)}{2} + N_{\text{int}}, \quad (2.25)$$

统一记为 Δ_i ， $i = 1 \dots N_{\text{scale}}$ 。这些量被称为标度（scale），它们带有质量的平方的量纲。费曼积分所有依赖的变量可以表示为

$$I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(D; \mathbf{\Delta}). \quad (2.26)$$

但是通常在很多情况下，一些标度等于 0，所以实际上标度的数目会小于式 (2.25) 给出的值。费曼积分的质量量纲为

$$[I] = \frac{LD}{2} - |\alpha|, \quad \text{其中, } |\alpha| = \sum_{i=1}^{i=n_{\text{int}}} \alpha_i. \quad (2.27)$$

将费曼积分作标度变换

$$\Delta_i \longrightarrow \mu \Delta'_i, \quad (2.28)$$

可以得到

$$I(\mu \Delta'_1, \mu \Delta'_2, \dots, \mu \Delta'_{N_{\text{scale}}}) = \mu^{\frac{LD}{2} - |\alpha|} I(\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_{N_{\text{scale}}}). \quad (2.29)$$

我们可以将 μ 选取为某个标度 Δ_l ，则

$$I(x_1, \dots, x_{l-1}, 1, \dots, x_{N_{\text{scale}}}) = \Delta_l^{|\alpha| - \frac{LD}{2}} I, \quad (2.30)$$

其中，

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_l}. \quad (2.31)$$

在后面的工作中，我们通常会利用一个标度对需要处理的积分作无量纲化处理。考虑一个只带有一个标度的蝌蚪图（tadpole）

$$I_a(D; m^2) = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(l^2 - m^2)^a}. \quad (2.32)$$

对该积分作量纲分析，

$$[I_a(D; m^2)] = \frac{D}{2} - a, \quad (2.33)$$

利用 m^2 对积分作无量纲处理

$$I_a(D; m^2) = (m^2)^{\frac{D}{2}-a} I_a(D; 1), \quad (2.34)$$

将 m^2 因子化之后，只剩下关于 a 、 D 的函数。我们对 (2.32) 进行 Wick 转动^①之后，它与上一节所提到的例子 (2.11) 相差一个系数 $(-1)^a$ 。

最后值得一提的是，对于没有标度的积分有

$$\int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{(l^2)^a} = \begin{cases} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right), & \frac{D}{2} = a, \\ 0, & \frac{D}{2} \neq a. \end{cases} \quad (2.35)$$

2.3 费曼积分的表示

这一章将介绍一些处理费曼积分的方法，将原来以圈动量为积分变量的被积表达式转换到其他参数空间中，这样利于我们对需要处理的积分进行后续的分析 and 计算。

2.3.1 Schwinger 参数表示

Schwinger 参数表示将积分变换为对 n_{int} 个参数的积分，它利用了下面的恒等式：

$$\frac{1}{A^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty dx x^{\beta-1} e^{-\beta A}, \quad \text{Re}(A) > 0. \quad (2.36)$$

注意在 (2.18) 约定下，传播子作 Wick 转动变换后将提出 -1 的因子。于是我们将费曼积分中的传播子视为 $-A$ ，再利用上式将费曼积分变换为对新参数的积分，同样我们可以利用一个标度使得新参数的量纲为 0，

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha_i|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} x' \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i'^{\alpha_i-1} \right) \int \prod_{r=1}^l \frac{d^D l_r}{i\pi^{D/2}} \exp\left(\sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i' P_i\right) \\ &= \Delta^{\frac{LD}{2}-|\alpha|} \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha_i|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} x \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i^{\alpha_i-1} \right) \int \prod_{r=1}^l \frac{d^D l_r}{i\pi^{D/2}} \exp\left(\sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{x_i P_i}{\Delta}\right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

^①在闵氏时空中，度规为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots)$ 。利用 Wick 转动我们将度规变到欧氏度规， $e_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, \dots)$ ，而矢量 l 需要相应变换为 $l^0 \rightarrow ik^0$ ， $l^i \rightarrow k^i$ ，其中 $i \neq 0$ 。总结来说， $l^2 = -k^2$ ， $d^D l = i d^D k$ 。

上式中有

$$x_i = x'_i \Delta. \quad (2.38)$$

e 指数上关于传播子的求和表示式可以写为

$$\sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i P_i = \sum_{r,s=1}^L l_r M_{rs} l_s + \sum_{r=1}^L 2l_r \cdot v_r + w, \quad (2.39)$$

其中, l_r 代表第 r 个 D 维的圈动量, M_{rs} 代表 $L \times L$ 的矩阵 M 的分量, 由传播子形式决定。对上式作正交变换以及对圈动量平移变换, 再利用 D 维下的式 (2.10), 我们可以将式 (2.37) 中对 l_r 的积分写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^L \frac{d^D l_r}{i\pi^{D/2}} \exp \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i \frac{P_i}{\Delta} \right) = (\det M)^{-\frac{D}{2}} \exp \left(\frac{w}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \sum_{r,s=1}^L v_r M_{rs}^{-1} v_s \right). \quad (2.40)$$

我们定义两个多项式,

$$\mathcal{U} = \det M, \quad \mathcal{F} = \frac{\det M}{\Delta} \left(\sum_{r,s=1}^L v_r M_{rs}^{-1} v_s - w \right). \quad (2.41)$$

它们也分别被称为 Symanzik 第一、第二多项式, 将 (2.40) 与 (2.41) 代入 (2.37), 得到费曼积分的 Schwinger 表示为

$$I = \Delta^{\frac{LD}{2} - |\alpha|} \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{\infty} d^{n_{\text{int}}} x \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i^{\alpha_i - 1} \right) \mathcal{U}^{-\frac{D}{2}} \exp \left(-\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{U}} \right). \quad (2.42)$$

以之前图2.2所给的双圈积分为例, 可以求出

$$M = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_7 & -x_7 \\ -x_7 & x_5 + x_6 + x_7 + x_9 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_1 x_2 - p_2 x_3 \\ p_1 x_5 - p_2 x_6 - p_2 x_9 - p_3 x_9 \end{pmatrix}.$$

以及

$$w = x_2 (p_1^2 - m_2^2) + x_3 (p_2^2 - m_3^2) + x_5 (p_1^2 - m_5^2) + x_6 (p_2^2 - m_6^2) \\ + x_9 (s_{23} - m_9^2) - x_1 m_1^2 - x_7 m_7^2. \quad (2.44)$$

由此我们可以得到 \mathcal{U} 和 \mathcal{F} ，若外动量为类光矢量 $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0$ 以及传播子质量 $m_i = m$ ，在该条件下可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= x_3x_5 + x_7x_5 + x_3x_6 + x_3x_7 + x_6x_7 + x_3x_9 + x_7x_9 + x_1x_5 \\ &\quad + x_1x_6 + x_1x_7 + x_1x_9 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_2x_7 + x_2x_9, \\ \mathcal{F} &= \frac{-s}{\Delta}(x_2x_3x_5 + x_1x_6x_5 + x_2x_6x_5 + x_3x_6x_5 + x_3x_7x_5 \\ &\quad + x_6x_7x_5 + x_2x_3x_6 + x_2x_3x_7 + x_2x_6x_7 + x_2x_3x_9) \\ &\quad + \frac{-t}{\Delta}x_1x_7x_9 + \frac{m^2}{\Delta}(x_1^2x_5 + \cdots).\end{aligned}\tag{2.45}$$

从上面式子中我们能看到 Symanzik 第一和第二多项式都是关于 Schwinger 参数的齐次函数，其中 \mathcal{U} 是 L 次， \mathcal{F} 是 $L+1$ 次。并且 \mathcal{U} 中每一项的系数都是 +1。另外，如果内线质量为 0，那么 \mathcal{U} 和 \mathcal{F} 和 Schwinger 参数呈线性关系。并且，当我们不对 \mathcal{F} 多项式中的标度作无量纲化处理，即 $\Delta \neq \Delta_i$ 时，它满足

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{\Delta}) = \sum_i^{N_{\text{scale}}} \Delta_i \frac{\partial}{\partial \Delta_i} \mathcal{F}.\tag{2.46}$$

2.3.2 费曼参数表示

费曼参数表示被广泛应用于直接计算费曼积分，不论是在数值还是解析方面，许多费曼积分都利用该表示得到了结果。费曼参数表示可以由 Schwinger 参数表示变换得到，首先我们需要引入 δ 函数，

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i\right) = \int_0^{\infty} dt \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i\right).\tag{2.47}$$

注意在上面的等式中，参数 x_i 都是大于 0 的。我们将其加入到 (2.42) 中，

$$I = \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha_i|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{\infty} d^{n_{\text{int}}} x \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i^{\alpha_i-1} \right) \mathcal{U}^{-\frac{D}{2}} \exp\left(-\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{U}}\right) \int_0^{\infty} dt \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i\right).\tag{2.48}$$

将上式做一个变量替换 $y_i = x_i/t$ ，在此我们可以利用等式

$$\begin{aligned}&\int d^n x \int_0^{\infty} dt \delta\left(t - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i\right) f(x_i, \cdots, x_n) \\ &= \int d^n y \int_0^{\infty} dt t^{n-1} \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i\right) f(ty_i, \cdots, ty_n).\end{aligned}\tag{2.49}$$

将 (2.48) 变换为

$$\begin{aligned}
 I &= \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} y \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i^{\alpha_i-1} \right) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i\right) \mathcal{U}(y)^{-\frac{D}{2}} \\
 &\quad \times \int_0^\infty dt t^{|\alpha|-\frac{LD}{2}-1} \exp\left[-\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{U}(y)} t\right] \\
 &= \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} y \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i^{\alpha_i-1} \right) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i\right) \frac{\mathcal{U}^{|\alpha|-(L+1)D/2}}{\mathcal{F}^{|\alpha|-LD/2}} \\
 &\quad \int_0^\infty dt t^{|\alpha|-LD/2-1} \exp(-t) .
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

关于 t 积分的结果为 $\Gamma(|\alpha| - LD/2)$ 。由此我们就得到了费曼参数化表示

$$I = (-1)^{|\alpha|} \frac{\Gamma(|\alpha| - LD/2)}{\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} y \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i^{\alpha_i-1} \right) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i\right) \frac{\mathcal{U}^{|\alpha|-(L+1)D/2}}{\mathcal{F}^{|\alpha|-LD/2}} . \tag{2.51}$$

当然我们也可以直接从动量表示变换到费曼参数化表示，它利用了下列公式，

$$\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{1}{A_i^{\alpha_i}} = \int_0^1 d^{n_{\text{int}}} x \delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i\right) \frac{\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i^{\alpha_i-1}}{\sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i A_i^{|\alpha|}} \frac{\Gamma(|\alpha|)}{\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \Gamma(\alpha_i)} , \tag{2.52}$$

同样地，这里 $A > 0$ 。

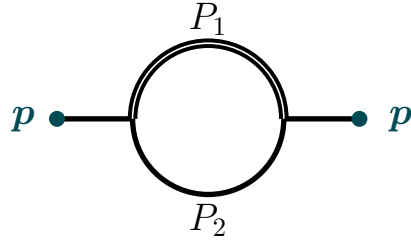


图 2.3 单圈自能图。外动量以及传播子动量如图所示，双实线代表传播子带质量。

费曼参数化可以直接用来计算费曼积分，以单圈自能2.3为例，其传播子约定为

$$P_1 = l^2 - m^2, \quad P_2 = (l + p)^2 . \tag{2.53}$$

由上面传播子定义的费曼积分为

$$I_{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{self}} = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}} , \tag{2.54}$$

通过费曼参数化得到 \mathcal{U} 和 \mathcal{F} 多项式

$$\mathcal{U} = y_1 + y_2, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\Delta} (m^2 y_1^2 + m^2 y_1 y_2 - p^2 y_1 y_2) . \tag{2.55}$$

代入式 (2.51) 有

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{self}} &= (-1)^{|\alpha|} \Delta^{D/2-|\alpha|} \frac{\Gamma(|\alpha| - D/2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty dy_1 dy_2 \left(y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \right) \delta(1 - y_1 - y_2) \\
 &\quad \frac{(y_1 + y_2)^{|\alpha|-D}}{\left(\frac{m^2}{\Delta} y_1^2 + \frac{m^2}{\Delta} y_1 y_2 - \frac{p^2}{\Delta} y_1 y_2 \right)^{|\alpha|-D/2}} \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \Delta^{D/2-|\alpha|} \frac{\Gamma(|\alpha| - D/2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 dy_2 \frac{y_2^{\alpha_2-1} (1 - y_2)^{D/2-\alpha_2-1}}{\left(\frac{m^2}{\Delta} - \frac{p^2}{\Delta} y_2 \right)^{\alpha_1+\alpha_2-D/2}}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

我们先展示 $\alpha_2 = 1$ 的情况, 并代入 $D = 4 - 2\epsilon$. 积分可以写为

$$I_{\alpha_1, 1}^{\text{self}} = (-1)^{\alpha_1+1} \Delta^{1-\alpha_1-\epsilon} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \epsilon - 1)}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^1 dy_2 \frac{(1 - y_2)^{1-\alpha_2-\epsilon}}{\left(\frac{m^2}{\Delta} - \frac{p^2}{\Delta} y_2 \right)^{\alpha_1+\epsilon-1}}. \tag{2.57}$$

我们可以对被积函数在 $\epsilon = 0$ 附近作洛朗展开 [52-53], 下面就 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ 的情况作为例子我们给出其计算过程,

$$\begin{aligned}
 I_{1,1}^{\text{self}} &= \Delta^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dy_2 \frac{1}{(1 - y_2)^\epsilon \left(\frac{m^2}{\Delta} - \frac{p^2}{\Delta} y_2 \right)^\epsilon} \\
 &= \Delta^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dy_2 \left\{ 1 - \epsilon \left[\log(1 - y_2) + \log \left(\frac{m^2}{\Delta} - \frac{p^2}{\Delta} y_2 \right) \right] \right\} \\
 &= \Delta^{-\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \frac{m^2}{p^2} \log \left(\frac{m^2}{\Delta} \right) + \left(\frac{m^2}{p^2} - 1 \right) \log \left(\frac{m^2 - p^2}{\Delta} \right) - \gamma_E + O(\epsilon^1) \right],
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

其中, γ_E 是欧拉常数. 除此之外, 对于任意的 ϵ , 它可以利用合流超几何函数 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 表示为

$$I_{1,1}^{\text{self}} = -m^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon - 1) {}_2F_1(1, \epsilon; 2 - \epsilon; p^2/m^2). \tag{2.59}$$

值得注意的是, 通常情况下想要得到无质量的单圈自能积分, 不能直接将上述积分结果的 m^2 直接取为 0, 只能重新计算得到。

• *Cheng-Wu* 定理 [54]

该定理说的是我们可以在作积分时进行下列替换

$$\delta \left(1 - \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} y_i \right) \longrightarrow \delta \left(1 - \sum_{j \in S} y_j \right), \tag{2.60}$$

这里 S 代表费曼参数所构成的集合, 是所有费曼参数的非空子集. 可以用上面的例子来进行验证, 同样在内线质量 $m^2 = 0$ 的情况下, 选择 $S = \{1\}$, 那么根据 *Cheng-Wu* 定理, 式 (2.56) 中的 δ 函数变换为,

$$\delta(1 - y_1 - y_2) \longrightarrow \delta(1 - y_1), \tag{2.61}$$

进而对 y_1 积分后, 可以得到

$$I_{\alpha_1, \alpha_2}^{\text{self}} = (-1)^{|\alpha|} \Delta^{D/2-|\alpha|} \frac{\Gamma(|\alpha| - D/2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty dy_2 y_2^{\alpha_2-1} \frac{(1+y_2)^{|\alpha|-D}}{\left[\frac{m^2}{\Delta}(1+y_2) - \frac{p^2}{\Delta}y_2\right]^{|\alpha|-D/2}}. \quad (2.62)$$

同样可以按照前面的步骤得到 $I_{1,1}^{\text{self}}$ 的结果,

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{\text{self}} &= \Delta^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^\infty \frac{dy_2 (1+y_2)^{2\epsilon-2}}{\left[\frac{m^2}{\Delta}(1+y_2) - \frac{p^2}{\Delta}y_2\right]^\epsilon} \\ &= \Delta^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^\infty \frac{dy_2}{(1+y_2)^2} \left\{ 1 + \epsilon \left[2\log(y_2+1) - \log\left(\frac{m^2}{\Delta}(y_2+1) - \frac{p^2}{\Delta}y_2\right) \right] \right\} \\ &= \Delta^{-\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} + 2 - \frac{m^2}{p^2} \log\left(\frac{m^2}{\Delta}\right) + \left(\frac{m^2}{p^2} - 1\right) \log\left(\frac{m^2 - p^2}{\Delta}\right) - \gamma_E + O(\epsilon^1) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

通过这个简单的例子, 我们可以验证 Cheng-Wu 定理。费曼参数化是非常实用的来直接计算费曼积分的一个方法, 有许多计算程序包都利用了费曼参数化表示进行计算, 例如用于计算数值的 pySecDec [55-59], FIESTA [60-62] 以及能够直接得到解析表达式的 HyperInt [52]。

2.3.3 Baikov 表示

费曼积分是一个关于 D 维圈动量的积分, 但是用动量表示的费曼积分往往难以将积分的信息和性质暴露出来, 这使得我们在分析并使用积分时会面临困难。Baikov 表示 [63] 将原先的被积变量从圈动量改变为洛伦兹不变量, 这样在利用费曼积分的切割 (cut) 分析积分性质时会带来极大的便利 [64-67]。

这里我们用单圈情况来演示 Baikov 表示的推导及其形式。首先我们将圈动量分为 N_{ext} 维平行分量与 $D - N_{\text{ext}}$ 维的垂直分量,

$$d^D l \longrightarrow d^{N_{\text{ext}}} l_{\parallel} d^{D-N_{\text{ext}}} l_{\perp}, \quad (2.64)$$

其中, l_{\parallel} 代表与外动量线性相关的矢量, 即 $l_{\parallel} \cdot p_i \neq 0$, 同理 $l_{\perp} \cdot p_i = 0$ 。以洛伦兹不变量 $l \cdot p_i$ 作为被积变量时, 积分测度相应的需要改变, 我们以 $N_{\text{ext}} = 2$ 作为演示,

$$d^2 l_{\parallel} = \frac{1}{\det \mathcal{J}} d(l \cdot p_1) d(l \cdot p_2), \quad \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

其中, Jacobi 行列式 $\det \mathcal{J}$ 可以用 Gram 矩阵的行列式 G 来表示, Gram 行列式 G

定义为

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & v_n \cdot v_2 & \cdots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$\det \mathcal{J}$ 可以由下面式子给出,

$$\begin{aligned} (\det \mathcal{J})^2 &= \det \mathcal{J} \det \mathcal{J} = \det \mathcal{J} \det \mathcal{J}^\top \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} p_1 \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \\ p_2 \cdot p_1 & p_2 \cdot p_2 \end{pmatrix} \\ &= G(p_1, p_2). \end{aligned} \quad (2.67)$$

于是有

$$d^{N_{\text{ext}}} l_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{G(p_1, p_2)}} d(l \cdot p_1) d(l \cdot p_2). \quad (2.68)$$

同理, 任意 N_{ext} 的情况可以写为

$$d^{N_{\text{ext}}} l_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{G(p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})}} d(l \cdot p_1) \cdots d(l \cdot p_{N_{\text{ext}}}). \quad (2.69)$$

对于 l_{\perp} 的部分有

$$d^{D-N_{\text{ext}}} l_{\perp} = l_{\perp}^{D-N_{\text{ext}}-1} dl_{\perp} d\Omega_{D-N_{\text{ext}}} = \frac{1}{2} (l_{\perp}^2)^{\frac{D-N_{\text{ext}}-2}{2}} dl_{\perp}^2 d\Omega_{D-N_{\text{ext}}}. \quad (2.70)$$

进一步, 可以用 Gram 行列式表示 l_{\perp}^2 ,

$$\begin{aligned} G(l, p_1, \dots) &= \det \begin{pmatrix} l \cdot l & l \cdot p_1 & \cdots \\ l \cdot p_1 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} l_{\parallel} \cdot l + l_{\perp} \cdot l & l \cdot p_1 & \cdots \\ l_{\parallel} \cdot p_1 + l_{\perp} \cdot p_1 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} l_{\parallel} \cdot l & l \cdot p_1 & \cdots \\ l_{\parallel} \cdot p_1 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} l_{\perp} \cdot l & l \cdot p_1 & \cdots \\ l_{\perp} \cdot p_1 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} l_{\perp} \cdot l & l \cdot p_1 & \cdots \\ l_{\perp} \cdot p_1 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} l_{\perp} \cdot l_{\perp} & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \\
 &= l_{\perp}^2 \det \begin{pmatrix} p_1 \cdot p_1 & \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
 &= l_{\perp}^2 G(p_1, \cdots). \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

于是可以得到

$$d^{D-N_{\text{ext}}} l_{\perp} = \frac{1}{2} \left[\frac{G(l, p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})}{G(p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})} \right]^{\frac{D-N_{\text{ext}}-2}{2}} dl_{\perp}^2 d\Omega_{D-N_{\text{ext}}}, \tag{2.72}$$

其中, $dl_{\perp}^2 = dl^2$ 。再利用 (2.12) 积掉角向自由度, 我们便能将 (2.64) 写为

$$d^D l = \frac{G(l, p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})^{\frac{D-N_{\text{ext}}-2}{2}}}{G(p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})^{\frac{D-N_{\text{ext}}-1}{2}}} d(l \cdot l) d(l \cdot p_1) \cdots d(l \cdot p_{N_{\text{ext}}}). \tag{2.73}$$

此时被积变量已经从圈动量变为洛伦兹不变量。用 N_{int} 个参数 σ_i 表示这些不变量, 特别地, 在该单圈情况下 $N_{\text{int}} = N_{\text{ext}} + 1$,

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{N_{\text{ext}}+1}\} = \{l^2, l \cdot p_1, \cdots, l \cdot p_{N_{\text{ext}}}\}. \tag{2.74}$$

再用 z_i 表示传播子,

$$z_i = P_i, \quad i = 1, \cdots, N_{\text{int}}, \tag{2.75}$$

传播子与动量内积构成的不变量之间存在线性关系,

$$z_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} C_{ij} \sigma_j + f_i, \tag{2.76}$$

这里 C_{ij} 和 f_i 可以由传播子结构以及外动量规则定出。此变换相应的 Jacobi 因子为 $\det J = \det \mathbb{C}$, 可得单圈费曼积分的 Baikov 表示为

$$I = \frac{G(p_1, \cdots, p_E)^{\frac{-D+N_{\text{ext}}+1}{2}}}{\det \mathbb{C} \pi^{\frac{N_{\text{ext}}}{2}} \Gamma\left(\frac{D-N_{\text{ext}}}{2}\right)} \int_{\mathbb{C}} d^{N_{\text{int}}} z \prod_i^{N_{\text{int}}} z_i^{-\alpha_i} G(l, p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})^{\frac{D-N_{\text{ext}}-2}{2}}. \tag{2.77}$$

该积分区域可以由 l_{\perp}^2 给出,

$$l_{\perp}^2 = \frac{G(l, p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})}{G(p_1, \cdots, p_{N_{\text{ext}}})} \geq 0. \tag{2.78}$$

通常情况下积分围道的计算非常复杂，利用 Baikov 表示直接解析计算费曼积分一般不具有可操作性。但是利用该表示对费曼积分性质进行分析时会带来很大的便利性。

对于任意圈的情况，Baikov 表示为

$$I = \frac{\pi^{\frac{L-N_{\text{int}}}{2}} G(p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})^{\frac{-D+N_{\text{ext}}+1}{2}}}{\det \mathbb{C} \prod_j^L \Gamma\left(\frac{D-N_{\text{ext}}-j+1}{2}\right)} \int_C d^{N_{\text{int}}} z \left(\prod_i^{N_{\text{int}}} z_i^{-\alpha_i} \right) [B(z)]^{\frac{D-N_{\text{ext}}-L-1}{2}}. \quad (2.79)$$

其中， $B(z)$ 为 Baikov 多项式，

$$B(z) = G(l_1, \dots, l_L, p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}}). \quad (2.80)$$

积分区域则为

$$\bigcap_{i=1}^L \frac{G(l_i, l_{i+1}, \dots, l_L, p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})}{G(l_{i+1}, \dots, l_L, p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})} \geq 0. \quad (2.81)$$

以单圈箱图 2.1 为例，约定外线动量内积为 $p_i^2 = 0$ ，即 $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ ，约定 Baikov 变量为

$$\begin{aligned} z_1 &= l^2, & z_2 &= (l + p_1)^2, \\ z_3 &= (l + p_1 + p_2)^2, & z_4 &= (l + p_1 + p_2 + p_3)^2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

可以从上式反解出洛伦兹不变量与被积变量之间的关系，

$$\begin{aligned} l^2 &= z_1, & l \cdot p_1 &= \frac{z_2 - z_1}{2}, \\ l \cdot p_2 &= \frac{z_3 - z_2}{2} - s_{12}, & l \cdot p_3 &= \frac{z_4 - z_3}{2} - s_{12}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

根据 Gram 行列式的定义可以写出

$$G(l, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_2 - s_{12} & z_4 - z_3 + s_{12} \\ z_2 - z_1 & 0 & s_{12} & -s_{12} - s_{23} \\ z_3 - z_2 + s_{12} & s_{12} & 0 & s_{23} \\ z_4 - z_3 + s_{12} & -s_{12} - s_{23} & s_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

由于 $(p_1 + p_2 + p_3)^2 = 0$ ，我们可以得到关系 $s_{12} + s_{13} + s_{23} = 0$ 。Baikov 多项式 $B(z)$ 结果为

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{16} (s_{12}^2 z_2^2 + s_{12}^2 z_4^2 - 2s_{23}s_{12}^2 z_2 - 2s_{23}s_{12}^2 z_4 - 2s_{12}^2 z_2 z_4 - 2s_{23}^2 s_{12} z_1 \\ &\quad + 2s_{23}s_{12} z_1 z_2 - 2s_{23}^2 s_{12} z_3 - 4s_{23}s_{12} z_1 z_3 + 2s_{23}s_{12} z_2 z_3 \\ &\quad + 2s_{23}s_{12} z_1 z_4 - 4s_{23}s_{12} z_2 z_4 + 2s_{23}s_{12} z_3 z_4 + s_{23}^2 z_1^2 \\ &\quad + s_{23}^2 z_3^2 - 2s_{23}^2 z_1 z_3 + s_{23}^2 s_{12}^2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Baikov 表示被广泛应用于分析积分特性，来寻找一些具有特殊性质的费曼积分，对于我们理解费曼积分本身或者微扰量子场论都有一定意义。

- loop-by-loop 方法下的 Baikov 表示

这里我们介绍一种实用的方法来获得 Baikov 表示。对于高圈的费曼积分，我们通常会遇到 N_{int} 大于费曼积分中具有的传播子数目的情况。这使得我们需要引入更多的参数来构建表达式，而通过 loop-by-loop 的方法 [68-70] 我们通常可以方便地得到积分变量数目小于 N_{int} 的费曼积分。以双圈两点积分为例，如图 2.4 所

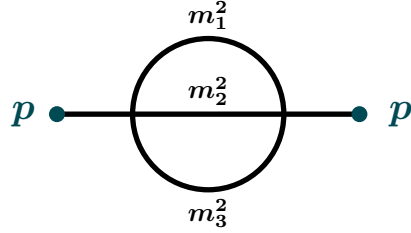


图 2.4 双圈日出图。其中三个传播子带有任意质量。

示，其传播子表示为

$$P_1 = l_1^2 - m_1^2, \quad P_2 = (l_1 - l_2)^2 - m_2^2, \quad P_3 = (l_2 - p)^2 - m_3^2. \quad (2.86)$$

它们并不能构成一个积分家族，我们需要额外两个传播子，

$$P_4 = l_2^2, \quad P_5 = (l_1 - p)^2. \quad (2.87)$$

标准的 Baikov 表示在完成积分前由五个被积变量以及其他标度构成，但是使用 loop-by-loop 的方法则只需要四个被积变量，下面我们将展示如何利用 loop-by-loop 方法写出积分 I_{11100} 的 Baikov 表示。

$$I_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0} = \int \frac{d^D l_1}{i\pi^{D/2}} \frac{d^D l_2}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[l_1^2 - m_1^2]^{\alpha_1} [(l_1 - l_2)^2 - m_2^2]^{\alpha_2} [(l_2 - p)^2 - m_3^2]^{\alpha_3}}, \quad (2.88)$$

我们先将以 l_1 为积分变量的积分变换到 Baikov 参数 z_1 和 z_2 下，将 l_2 视为外动量，之后再加入辅助的传播子 P_4 ，对包含 l_2 的部分作 Baikov 变换，

$$\begin{aligned} I_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0} &= C^{(1)}(p^2, D) \int dz_1 dz_2 \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}} \int \frac{d^D l_2}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[(l_2 - p)^2 - m_3^2]^{\alpha_3}} \\ &\quad \times \left\{ [G(l_1, l_2)]^{\frac{D-3}{2}} [G(l_2)]^{-\frac{D-2}{2}} \right\}, \\ &= C^{(1)}(D) \int dz_1 dz_2 \int \frac{d^D l_2}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{[(l_2 - p)^2 - m_3^2]^{\alpha_3}} \\ &\quad \times \left\{ G(l_1, l_2)^{\frac{D-3}{2}} G(l_2)^{-\frac{D-2}{2}} \right\}, \\ &= C^{(1)}(D) C^{(2)}(p^2, D) \int dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \frac{1}{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ G(l_2, p)^{\frac{D-3}{2}} G(l_1, l_2)^{\frac{D-3}{2}} G(l_2)^{-\frac{D-2}{2}} \right\}, \quad (2.89)$$

其中,

$$C^{(1)}(D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(D-1)}, \quad C^{(2)}(p^2, D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(D-1)p^2}, \quad (2.90)$$

Gram 行列式表达式为

$$\begin{aligned} G(l_2) &= z_4, \\ G(l_2, p) &= \frac{1}{4} \left[2p^2 m_3^2 - 2z_3 m_3^2 + 2z_4 m_3^2 - m_3^4 - (p^2)^2 + 2p^2 z_3 \right. \\ &\quad \left. + 2p^2 z_4 - z_3^2 - z_4^2 + 2z_3 z_4 \right], \\ G(l_1, l_2) &= \frac{1}{4} (-2z_1 m_1^2 + 2z_1 m_2^2 + 2z_2 m_1^2 + 2z_4 m_1^2 - 2z_2 m_2^2 \\ &\quad + 2z_4 m_2^2 - m_1^4 - m_2^4 + 2m_1^2 m_2^2 - z_1^2 + 2z_2 z_1 \\ &\quad + 2z_4 z_1 - z_2^2 - z_4^2 + 2z_2 z_4). \end{aligned} \quad (2.91)$$

原本需要五个被积变量的积分缩减到四个被积变量, 我们可以更加方便地得到积分相关的信息。

2.4 IBP 方法及主积分

在具体物理过程中, 我们需要计算大量不同的费曼积分, 即使我们能在不同表示下计算费曼积分, 但适用的范围非常有限, 并且计算效率很难满足日益增加的精度的需求。一个积分家族包含无穷多个费曼积分, 然而这些积分之间并不是线性独立的, 通过分部积分等式 (integration-by-parts identity, IBP identity) [71-72], 我们可以获得积分之间的线性关系。已经证明在一个积分家族中, 存在一组有限个数的积分 [73], 任何积分可以写为这一组积分的线性组合。这一组积分称作主积分 (master integral)。将一个积分家族中的每个积分看作线性空间中的矢量, 那么积分家族中所有积分则构成了一个线性空间, 主积分则为该线性空间的一组基矢量。

对一个全导数积分之后结果总为 0, 也就是没有边界项。通过该定理我们可以得到费曼积分满足的基础 IBP 恒等式,

$$\int \prod_i^L \frac{d^D l_i}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial l_j^\mu} \frac{v^\mu}{\prod_{k=0}^{N_{\text{int}}} P_k^{\alpha_k}} = 0, \quad (2.92)$$

其中 v^μ 为圈动量或者外动量 $l_1, \dots, l_L, p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}}$, l_j 可以取为任意的圈动量 l_1, \dots, l_L 。IBP 恒等式不止一个, 由不同的 l_j 和 v^μ 可以组合出 $L(L + N_{\text{ext}})$ 种对

不同指标都成立的等式。由于指标可以取任意的整数，所以我们可以列出的 IBP 恒等式是无穷多个的。除了 IBP 恒等式，还有其他方式可以列出不同费曼积分之间的线性关系。比如可以利用洛伦兹不变恒等式 (Lorentz invariance identity, LI identity),

$$\sum_n \left(p_{n,\nu} \frac{\partial}{\partial p_n^\mu} - p_{n,\mu} \frac{\partial}{\partial p_n^\nu} \right) I(p_i) = 0, \quad (2.93)$$

以及费曼积分之间的对称性等。每一个恒等式给出了费曼积分之间的线性关系,

$$\sum_i c_i I_{\alpha_1+\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_n+\alpha_{n,i}} = 0, \quad (2.94)$$

其中, c_i 是一个依赖于维数 D 和不同能标的有理函数。

考虑由 $P_1 = l^2 - m^2$ 和 $P_2 = (l+p)^2$ 组成的积分家族, 即之前图提到的例 2.3, 可以看到通过 IBP 恒等式可以将不同的费曼积分表示为主积分的线性组合。我们有两类 IBP 恒等式

$$\begin{cases} \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{l^\mu}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}} = 0 \\ \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{p^\mu}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}} = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

由第一个等式中我们可以得到

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{l^\mu}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}} &= D I_{\alpha_1, \alpha_2} - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_1 \frac{2l^2}{P_1^{\alpha_1+1} P_2^{\alpha_2}} - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_2 \frac{2l^2 + 2l \cdot p}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2+1}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

式中分子里出现的标量积可以写为

$$l^2 = P_1 + m^2, \quad p \cdot l = \frac{P_2 - P_1 - p^2 - m^2}{2}. \quad (2.97)$$

代入式 (2.97) 中, 有

$$\begin{aligned} 0 &= D I_{\alpha_1, \alpha_2} - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_1 \frac{2(P_1 + m^2)}{P_1^{\alpha_1+1} P_2^{\alpha_2}} - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_2 \frac{P_2 + P_1 + m^2 - p^2}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2+1}} \\ &= (D - 2\alpha_1 - \alpha_2) I_{\alpha_1, \alpha_2} - 2\alpha_1 m^2 I_{\alpha_1+1, \alpha_2} - \alpha_2 (m^2 - p^2) I_{\alpha_1, \alpha_2+1} \\ &\quad - \alpha_2 I_{\alpha_1-1, \alpha_2+1}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

同理, 由另外一个可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_1 \frac{P_2 - P_1 - p^2 - m^2}{P_1^{\alpha_1+1} P_2^{\alpha_2}} - \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \alpha_2 \frac{P_2 - P_1 + p^2 - m^2}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2+1}} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) I_{\alpha_1, \alpha_2} + \alpha_1 (m^2 + p^2) I_{\alpha_1+1, \alpha_2} + \alpha_2 (m^2 - p^2) I_{\alpha_1, \alpha_2+1} \\ &\quad - \alpha_1 I_{\alpha_1+1, \alpha_2-1} + \alpha_2 I_{\alpha_1-1, \alpha_2+1}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

通过不断运用上面两类 IBP 等式，我们可以将该积分家族中的积分约化到两个线性独立的积分上。这里的选择是具有任意性的，选择一组合适的主积分会优化我们的后续计算。这里我们可以暂时地选择为

$$I_{1,0}, \quad I_{1,1}. \quad (2.100)$$

该积分家族中的积分都可以表示为这两个积分的线性组合，不过之后我们也将展示其他积分作为基时对计算带来的优化。以 $I_{2,0}$ 为例，我们可以利用恒等式将其约化为主积分的线性组合。将式 (2.98) 中 α_1 和 α_2 分别取为 1 和 0，我们可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= (D-2)I_{1,0} - 2m^2 I_{2,0}, \\ I_{2,0} &= \frac{D-2}{2m^2} I_{1,0}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

取 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ 可以推出

$$I_{2,1} = \frac{2-D}{2m^2(m^2-p^2)} I_{1,0} + \frac{D-3}{m^2-p^2} I_{1,1}. \quad (2.102)$$

目前已有许多系统的算法来实现 IBP 约化,如:Laporta 算法 [74]。基于 Laporta 算法已经编写出不少成熟的程序，如 KIRA [75-76]、FIRE [77-78]、Reduze [79-80] 等。该算法为积分拟定了一个字典序，定义了积分的复杂度并排序。在不同程序包中约定的排序并不相同。

我们接下来引入一些概念来更好地将费曼积分分类。当我们定义了一个积分家族，其中费曼积分可以用指标表示为

$$I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}}. \quad (2.103)$$

当两个不同的积分 $I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}}$ 及 $I_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{N_{\text{int}}}}$ 满足下面关系时，

$$\Theta\left(\alpha'_i - \frac{1}{2}\right) = \Theta\left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right), \quad (i = 1, \dots, N_{\text{int}}), \quad (2.104)$$

我们称它们具有等价关系，其中， $\Theta(x)$ 阶跃函数。并且这两个积分属于等价类

$$[s_1, s_2, \dots, s_{N_{\text{int}}}] = \{I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}} \mid \Theta(\alpha_i - 1/2) = s_i\}, \quad (2.105)$$

该等价类被称为 sector。可以看出 sector 通过一个由 0 和 1 组成的列表表示出来，那么可以将其视为一个二进制数，由此给出某一 sector 的编号，

$$N_{\text{id}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} 2^i s_i. \quad (2.106)$$

另外，当两个 sector, $\mathbf{s}^{(1)}$ 和 $\mathbf{s}^{(2)}$ 满足

$$s_i^{(1)} \leq s_i^{(2)}, \quad (2.107)$$

则称 $s^{(1)}$ 为 $s^{(2)}$ 的子 sector (sub-sector) 反之, $s^{(2)}$ 为 $s^{(1)}$ 的超级 sector (super-sector)。另外, 我们还可以利用一些值来定义积分的复杂度,

$$N_{\text{prop}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} s_i, \quad (2.108)$$

$$s = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} |\alpha_i| \Theta \left(-\alpha_i + \frac{1}{2} \right), \quad (2.109)$$

$$r = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}} \alpha_i \Theta \left(\alpha_i - \frac{1}{2} \right). \quad (2.110)$$

N_{prop} 代表传播子指标为正个数, s 代表负指标的总和, 而 r 代表正指标的总和。一个积分所有正指标不超过 1, 且带有 ISP 时, 我们称其为 IRN 积分 (irreducible numerator integral), 用此类积分来作为基时, 也被称为 ISP 基; 但有超过 1 的正指标时, 则称为 DP 积分 (double propagator integral), 用此类积分来作为基时, 被称为 dot 基。

我们可以用上面的值定义一个积分的复杂度

$$\{N_{\text{prop}}, N_{\text{id}}, r, s\}, \quad (2.111)$$

这表示, 分母上传播子数目越多越复杂; 传播子数目相同时, 传播子排序靠后的积分更复杂; 同一 sector 中, dot 基比 ISP 基复杂。也有另外的方式可以定义积分复杂度,

$$\{N_{\text{prop}}, N_{\text{id}}, s, r\}, \quad (2.112)$$

这表示同一 sector 中, 带有 ISP 的积分比不带有 ISP 的积分复杂。

2.5 微分方程方法

这一节我们介绍目前广泛有效的计算费曼积分的方法——微分方程的方法 [81-85]。该方法不是直接计算费曼积分, 而是构建费曼积分关于运动学变量的微分方程, 然后通过求解微分方程获得费曼积分的结果。主积分构成了积分家族的一组基, 它们可以作为微分方程的基。更详细地来说, 我们对费曼积分关于运动学变量求导之后, 结果仍然是费曼积分的组合, 那么利用 IBP 关系, 结果最终表示为主积分的组合。由此, 我们便可以得到有关主积分封闭完备的微分方程组。由此带来的好处是该微分方程只是一个一阶的微分方程, 不过这仍然不是一个简单的问题。如果我们能将方程中关于维数的依赖因子化出来, 那么方程的解可以用迭代积分的形式表示出来 [86]。一类特殊函数多重多对数函数 (multiple polylogarithm, MPL 或者 Goncharov polylogarithm, GPL) 被广泛应用于表示这些

由费曼积分构建的微分方程的解，该特殊函数对于费曼积分也有非常重要的意义。但是随着需要解决的问题逐渐复杂，越来越多的积分无法用这类特殊函数表示，所以我们需要引入超越 GPL 的特殊函数 [38, 87-90]，例如椭圆积分 [91] 等。

2.5.1 微分方程的构建

我们可以通过对主积分求关于各种标度的偏导数，并利用 IBP 恒等式来构建一组主积分的微分方程组。费曼积分依赖于外动量以及传播子中的质量，对传播子的质量求导将会提高其所对应的指标。

对于质量 m_i 只存在于传播子上，且外腿不在壳 ($p_i^2 \neq m_i^2$) 的情况对 m_i 的偏导就只会使得传播子的幂次增加，

$$\frac{\partial}{\partial m_i^2} \frac{1}{(q_i^2 - m_i^2)^\alpha} = \frac{\alpha}{(q_i^2 - m_i^2)^{\alpha+1}}, \quad (2.113)$$

由外动量构成的标量积则可以由链式法则得到求导规则，

$$\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} = \sum_j^{N_{\text{ext}}} p_j^\mu \frac{\partial}{\partial p_{ij}}, \quad p_{ij} = \begin{cases} p_i \cdot p_j & i \neq j \\ \frac{1}{2} p_i^2 & i = j \end{cases}. \quad (2.114)$$

对等式两边同时与 p_k 作标量积得到

$$p_k \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} = \sum_j^{N_{\text{ext}}} p_k \cdot p_j \frac{\partial}{\partial p_{ij}}, \quad (2.115)$$

其中，我们可以看到 $p_k \cdot p_j$ 是 Gram 矩阵第 k, j 个矩阵元，那么由此得出

$$\frac{\partial}{\partial p_{ij}} = \sum_k^{N_{\text{ext}}} [\mathbb{G}(p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})^{-1}]_{jk} p_k \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (2.116)$$

这里的 \mathbb{G} 代表 Gram 矩阵。

同样可以用例子来说明具体的步骤。我们回到之前图 2.3 所给的单圈自能的例子，对质量 m^2 作偏导，可以求出

$$\frac{\partial I_{\alpha_1, \alpha_2}}{\partial m_i^2} = I_{\alpha_1+1, \alpha_2}. \quad (2.117)$$

对 p^2 求导则稍微复杂一些，首先有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{(l^2 - m^2)^{\alpha_1} [(l+p)^2]^{\alpha_2}} &= -\frac{\alpha_2}{2p^2} \frac{2p \cdot (l+p)}{(l^2 - m^2)^{\alpha_1} [(l+p)^2]^{\alpha_2+1}} \\ &= -\frac{\alpha_2}{2p^2} \frac{p^2 - m^2 - (l^2 - m^2) + (l+p)^2}{(l^2 - m^2)^{\alpha_1} [(l+p)^2]^{\alpha_2+1}} \\ &= -\frac{\alpha_2}{2p^2} \left(\frac{p^2 - m^2}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2+1}} - \frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2+1}} + \frac{1}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}} \right). \end{aligned} \quad (2.118)$$

由此得出

$$\frac{\partial}{\partial p^2} I_{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{\alpha_2}{2p^2} [(m^2 - p^2) I_{\alpha_1, \alpha_2+1} + I_{\alpha_1-1, \alpha_2+1} - I_{\alpha_1, \alpha_2}]. \quad (2.119)$$

除此之外，我们还可以在费曼积分的其他表示下完成该操作。在 Schwinger 参数化下 (2.51)，对积分作关于 Δ_i 的偏导为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Delta_i} I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{\text{int}}}} &= -\Delta^{\frac{LD}{2}-|\alpha|} \prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} \frac{(-1)^{|\alpha_i|}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^\infty d^{n_{\text{int}}} x \left(\prod_{i=1}^{n_{\text{int}}} x_i^{\alpha_i-1} \right) \\ &\times \frac{\partial_{\Delta_i} \mathcal{F}}{\mathcal{U}^{(D+2)/2}} \exp\left(-\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{U}}\right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

这里分子上的 $\partial_{\Delta_i} \mathcal{F}$ 的形式仍为 Schwinger 参数与标度的多项式，于是可以将其看作对指标的升降操作，

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_i} I_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_{\text{int}}}} = -\partial_{\Delta_i} \hat{\mathcal{F}} I_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_{\text{int}}}}^{D+}, \quad (2.121)$$

其中， $\hat{\mathcal{F}}$ 表示将多项式中的 Schwinger 参数改为对应指标的升算符后所构成的算符， $I_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_{\text{int}}}}^{D+}$ 表示将原积分的 D 平移到 $D+2$ 后的结果。还是借用前面单圈自能的例子，式 (2.55) 给出了 \mathcal{F} 的表达式，于是可以写出

$$\partial_{m^2} \hat{\mathcal{F}} = \frac{1}{\Delta} (\hat{1}^{+2} + \hat{1}^+ \hat{2}^+), \quad (2.122)$$

其中有

$$\hat{1}^+ I_{\dots, \alpha_i, \dots} = \alpha_i I_{\dots, \alpha_i+1, \dots}. \quad (2.123)$$

另外，再利用维数递推关系 (dimensional shift relation) [92-93]^① 和 IBP 关系，我们仍然可以得到主积分求导的结果。

利用 IBP 关系 (2.101) 和 (2.102)，在 $\alpha_1 = 1$ ， $\alpha_2 = 1$ 时，将 (2.117) 和 (2.119) 的右边重新化到主积分上去，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \begin{pmatrix} I_{1,0} \\ I_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{(2-D)}{2p^2(p^2-m^2)} & \frac{(D-2)m^2+(D-4)p^2}{2p^2(p^2-m^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1,0} \\ I_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \begin{pmatrix} I_{1,0} \\ I_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-2}{2m^2} & 0 \\ \frac{D-2}{2m^2(p^2-m^2)} & \frac{D-3}{m^2-p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1,0} \\ I_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

通过求解此方程组，就可以得到积分 $I_{1,0}$ 和 $I_{1,1}$ 的解。

^① 由该递推关系可以获得 D 维费曼积分和 $D+2$ 维或者 $D-2$ 维费曼积分之间的关系，在文献和书籍 [94-96] 中有详细讨论。

由此，我们得到了一个主积分关于能标求导的一阶微分方程组。主积分满足的微分方程组可以写为

$$\partial_i I = A_i(\mathbf{x}; D) I, \quad (2.126)$$

其中， $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ， $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_{\text{scale}}}\}$ ，注意到 $A_i(\mathbf{x}, D)$ 是一个关于 \mathbf{x} 和维数 D 的有理函数，这是因为 IBP 关系中所有的系数都是有理的。将上式写为全微分形式

$$dI = \sum_{i=1}^{N_{\text{scale}}} \partial_i I dx_i, \quad (2.127)$$

则微分方程可以写为一个比较紧凑的形式

$$(d - A) I = 0, \quad (2.128)$$

这里 A 是一个 1-形式，

$$A = \sum_{i=1}^{N_{\text{scale}}} A_i dx_i. \quad (2.129)$$

A 满足可积性条件

$$dA - A \wedge A = 0, \quad (2.130)$$

其分量形式为

$$\partial_j A_i - \partial_i A_j - [A_j, A_i] = 0, \quad (2.131)$$

我们可以利用该关系检查构建的微分方程是否正确。另外，费曼积分满足 Euler 关系

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{scale}}} x_i \partial_i I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}} = \left(\frac{LD}{2} - |\alpha| \right) I_{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_{\text{int}}}}. \quad (2.132)$$

由此可以得出方程系数矩阵满足

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{scale}}} x_i A_i = \begin{pmatrix} [I_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [I_{N_{\text{master}}}] \end{pmatrix}. \quad (2.133)$$

2.5.2 正则微分方程

之前小节中，我们得到了主积分的微分方程系统 (2.126)，如果系数矩阵中的 ϵ 可以因子化出来 [86]，即方程为

$$\partial_i \mathbf{g} = \epsilon \mathbb{A}_i(\mathbf{x}) \mathbf{g}. \quad (2.134)$$

则这组构成正则微分方程 (canonical differential equation) 的基 \mathbf{g} 称为正则基。

我们仍以图2.3所示的自能积分家族为例来进行说明, 选择主积分 $I_{2,0}$, $I_{2,1}$ 作为基, 其满足的微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ I_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\epsilon}{p^2(p^2-m^2)} & \frac{\epsilon(m^2+p^2)}{p^2(m^2-p^2)} - \frac{1}{p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ I_{2,1} \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ I_{2,1} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2} & 0 \\ \frac{1}{m^2(m^2-p^2)} & \frac{2}{p^2-m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ I_{2,1} \end{pmatrix}. \quad (2.136)$$

其中,

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

即此时微分方程的基为

$$g_1 = I_{2,0}, \quad g_2 = p^2 I_{2,1}. \quad (2.138)$$

可以看到, $g_{1,2}$ 满足的微分方程为正则微分方程,

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ p^2 I_{2,1} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{p^2-m^2} & \frac{m^2+p^2}{p^2(m^2-p^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ p^2 I_{2,1} \end{pmatrix}, \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ p^2 I_{2,1} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2} & 0 \\ \frac{p^2}{m^2(p^2-m^2)} & \frac{2}{p^2-m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ p^2 I_{2,1} \end{pmatrix}. \quad (2.140)$$

$I_{2,0}, p^2 I_{2,1}$ 为正则基。可以验证, 该方程同样满足可积性条件, 正则微分方程的可积性条件进一步简化为

$$\partial_j \mathbb{A}_i - \partial_i \mathbb{A}_j = 0, \quad [\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_i] = 0. \quad (2.141)$$

该例子中可以看到, 上述正则微分方程中出现的奇点都是一阶极点。对于这样的正则微分方程, 若我们将方程写为全微分形式,

$$d\mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon) = \epsilon d\mathbb{A}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon), \quad (2.142)$$

则系数矩阵 $d\mathbb{A}$ 可以写为 $d \log$ 形式

$$d\mathbb{A} = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}_i d \log \omega_i(\mathbf{x}), \quad (2.143)$$

其中, \mathbb{C}_i 为常数矩阵, ω_i 称为 symbol letter, 微分方程所有的 letter 构成了 alphabet。考虑到费曼积分是能标的齐次函数, 上述关于 p^2 和 m^2 的两个微分方程并不独

立。方便起见，引入无量纲量 $x = -\frac{p^2}{m^2}$ ，主积分关于 x 的微分方程，

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ xI_{2,1} \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{x+1} & \frac{1-x}{x(1+x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2,0} \\ xI_{2,1} \end{pmatrix}, \quad (2.144)$$

写为全微分形式，则方程系数矩阵为

$$d\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d \log(1+x) & d \log(x) - 2d \log(1+x) \end{pmatrix}. \quad (2.145)$$

正则微分方程会降低我们求解的难度，但是如何找到微分方程的正则形式仍然是值得研究的问题。已有许多的方法和算法被提出来 [70, 97-109]。在之后的小节中，我们会从积分的角度再次讨论这个话题。由最初的费曼积分所构建的微分方程，其系数矩阵的矩阵元都是有理函数，但我们在构建正则微分方程时，可能会引入一些根式。此外，一些更复杂的积分家族，其主积分求解会涉及到一些复杂的特殊函数如椭圆积分 [110-113]，这将会大大增加求解难度。

2.5.3 微分方程的解

通常我们会将费曼积分的解以 ϵ 为小量作展开，

$$g(\mathbf{x}, \epsilon) = \sum_{i \geq 0} \epsilon^i g^{(i)}(\mathbf{x}), \quad (2.146)$$

这里从 ϵ^0 开始是因为我们总是可以通过乘上 ϵ 的幂使得解能够关于 ϵ 泰勒展开。将 (2.146) 代入 (2.142)，有

$$d g^{(n)}(\mathbf{x}, \epsilon) = \epsilon d\mathbb{A}(\mathbf{x}) g^{(n-1)}(\mathbf{x}, \epsilon), \quad (2.147)$$

方程的解可以通过迭代的方式得到，结果可以写为陈迭代积分（Chen iterated integrals）的形式 [114]，

$$I(\mathbf{x}, \epsilon) = \mathcal{P} \exp \left(\epsilon \int_{\gamma} d\mathbb{A} \right) I(\mathbf{x}_0, \epsilon). \quad (2.148)$$

这里的编路径用级数的形式表示为

$$\mathcal{P} \exp \left(\epsilon \int_{\gamma} d\mathbb{A} \right) = 1 + \epsilon \int_{\gamma} d\mathbb{A} + \epsilon^2 \int_{\gamma} d\mathbb{A} d\mathbb{A} + \epsilon^3 \int_{\gamma} d\mathbb{A} d\mathbb{A} d\mathbb{A} + \dots \quad (2.149)$$

我们也可以直接从偏微分方程的角度出发，求出方程的通解，只剩下需要被确定的积分常数向量 \mathbf{c} ，这些积分常数将由边界条件确定。

在前面我们基于单圈自能图 2.3 构建了一个由 $\mathbf{g} = \{\epsilon I_{2,0}, \epsilon x I_{2,1}\}^{(1)}$ 构成的正则微分方程系统 (2.139)，该方程组的通解为，

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{i=0} \epsilon^i c_1^{(i)}, \\ g_2 &= c_2^{(0)} \\ &\quad + \epsilon \left\{ -c_1^{(0)} \log(1+x) + c_2^{(0)} [\log(x) - 2\log(1+x)] + c_2^{(1)} \right\} \\ &\quad + \epsilon^2 \left\{ c_1^{(0)} [\text{Li}_2(-x) + \log^2(x+1)] \right. \\ &\quad \quad + c_2^{(0)} [\log(x)^2/2 - 2\log(x) \log(1+x) + 2\log(1+x)^2] \\ &\quad \quad \left. - c_1^{(1)} \log(x+1) + c_2^{(1)} [\log(x) - 2\log(x+1)] + c_2^{(2)} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.150)$$

这里 $c_i^{(j)}$ 是待定的常数。

求解一阶微分方程需要利用边界条件来定解，这可由定解条件来确定。我们可以利用积分的性质，提供正规化条件 (regular condition)，对方程的解进行约束。该例子中，第二个积分可以通过区域展开 (expansion by regions) 的方法 [115-117] 得知它在 $p^2 = 0$ 处是解析的，这意味着解中不应该出现 $x = 0$ 的奇点，例如 $\log(x)$ 。所以我们可以推断出

$$c_2^{(0)} = c_2^{(1)} = c_2^{(2)} = 0. \quad (2.151)$$

利用式 (2.16) 和 IBP 关系 (2.101) 我们可以求出 g_1 的结果，

$$g_1 = \Gamma(1+\epsilon) = 1 - \epsilon \gamma_E + \frac{\epsilon^2}{12} (6\gamma_E^2 + \pi^2) + \dots, \quad (2.152)$$

再结合约束条件，便可以得到 g_2 完整表达式。

在通常工作中，我们可以选择合适的圈积分测度因子使我们求得的结果尽可能简洁，并且能够较为明显地突出积分所具有的性质。本例中我们将圈积分测度重新定义如下：

$$\frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \longrightarrow \tilde{d}^D l = \frac{d^D l_i}{(2\pi)^D} \left(\frac{iS_\epsilon}{16\pi^2} \right)^{-1}, \quad S_\epsilon = (4\pi)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon). \quad (2.153)$$

这相当于乘上了因子

$$\frac{1}{\Gamma(1+\epsilon)}. \quad (2.154)$$

在此定义下， $g_1^{(2)}$ 的表达式非常简单，就是 1，即

$$g_1^{(0)} = 1, \quad g_1^{(i)} = 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (2.155)$$

^①这里乘上 ϵ 的因子是为了使得结果在 $\epsilon = 0$ 处解析，注意当我们给所有基乘上一个相同的常数时，方程的系数矩阵不会改变。

^②注意此时的积分测度已经修改为 (2.153)，为了方便将其同样记为 g_i 。

在这样的定义下, γ_E 不会出现在解析表达式当中了。常数 $c_i^{(j)}$ 都已被确定下来, 最终得到 g_2 的解

$$g_2 = -\epsilon \log(1+x) + \epsilon^2 [\log(1+x)^2 + \text{Li}_2(-x)] + \dots \quad (2.156)$$

另外, 我们也可以选择一个起始点, 利用编路径积分演化到参数空间任意一处, 这里需要提前计算出起始点处积分的值。上面例子中, 我们假设已知 g_1 和 g_2 在 $x=0$ 处的值为

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 0. \quad (2.157)$$

在我们选择路径为

$$\gamma : x(\kappa) = \kappa x, \quad 0 \leq \kappa \leq 1. \quad (2.158)$$

我们能够得到

$$\bullet \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$g_1^{(0)} = 1, \quad g_2^{(0)} = 0. \quad (2.159)$$

$$\bullet \mathcal{O}(\epsilon^1)$$

$$g_1^{(1)} = 0, \quad g_2^{(1)} = -\int_0^1 d\kappa \frac{x}{1+\kappa x} = -\log(1+x). \quad (2.160)$$

$$\bullet \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

.....

最终也能得到主积分 $g_{1,2}$ 的解析解。

在上面例子中, 我们通过微分方程写出了积分的表达式, 可以发现上面的解能够写为一种迭代积分的形式, 也就是在最开始提到的陈迭代积分的形式,

$$I_\gamma(f_1, f_2, \dots, f_n; \tau) = \int_a^\tau d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_a^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) \dots \int_a^{\tau_{n-1}} d\tau_n f_n(\tau_n), \quad (2.161)$$

或

$$I_\gamma(f_1, f_2, \dots, f_n; \tau) = \int_a^\tau d\tau_1 f_1(\tau_1) I_\gamma(f_2, \dots, f_n; \tau), \quad I_\gamma(; \tau) = 1. \quad (2.162)$$

这里 n 称为迭代积分的深度 (depth)。深度为 0 的积分为 1, γ 代表一条线段到 m 维流形的映射,

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X, \quad (2.163)$$

起始点和终点分别为 $\mathbf{x}_a = \gamma(a)$ 和 $\mathbf{x}_b = \gamma(b)$ 。

更一般地, 被积表达式可以写为由 1 形式 ω_i 作拖回映射 γ^* 得到

$$f_i(\tau) d\tau = \gamma^* \omega_i. \quad (2.164)$$

可以通过下面两式

$$\omega_i = \sum_{j=1}^m \omega_{ij}(\mathbf{x}) dx_j, \quad \mathbf{x}(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\tau) \\ \vdots \\ \gamma_m(\tau) \end{pmatrix}, \quad (2.165)$$

推导出关系

$$f_i(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m \omega_{ij}(\mathbf{x}(\tau)) \frac{d\gamma_j(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.166)$$

我们也可以用 1-形式来表示迭代积分

$$\tilde{I}_\gamma(\omega_1, \dots, \omega_n; \tau) = \int_\gamma \omega_1 \cdots \omega_n = \int_a^\tau \gamma^* \omega_1(\tau_1) \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \gamma^* \omega_n(\tau_n). \quad (2.167)$$

迭代积分的路径满足路径连接公式。设有两条路径 γ_1, γ_2 , 其中 γ_1 的终点为 γ_2 的起点, 则迭代积分满足,

$$I_{\gamma_1 \circ \gamma_2}(f_1, \dots, f_n; \tau) = \sum_{i=0}^n I_{\gamma_1}(f_1, \dots, f_i; \tau) I_{\gamma_2}(f_{i+1}, \dots, f_n; \tau). \quad (2.168)$$

例如, 当 $n = 2$ 时, 不失一般性, 我们选择

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow X, \\ \gamma_2 &: [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X, \\ \gamma_1 \circ \gamma_2 &: [0, 1] \longrightarrow X, \end{aligned} \quad (2.169)$$

迭代积分写为

$$\begin{aligned} I_{\gamma_1 \circ \gamma_2}(f_1, f_2; 1) &= \int_0^1 d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) \\ &= \int_{1/2}^1 d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) + \int_0^{1/2} d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) \\ &= \int_{1/2}^1 d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_{1/2}^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) + \int_{1/2}^1 d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_0^{1/2} d\tau_2 f_2(\tau_2) \\ &\quad + \int_0^{1/2} d\tau_1 f_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 f_2(\tau_2) \\ &= I_{\gamma_1}(f_1, f_2; 1) + I_{\gamma_1}(f_1; 1) I_{\gamma_2}(f_2; 1/2) + I_{\gamma_2}(f_1, f_2; 1/2). \end{aligned} \quad (2.170)$$

当 γ^{-1} 为 γ 的逆时, 有

$$I_{\gamma^{-1}}(f_1, f_2, \dots, f_n; \tau) = (-1)^n I_\gamma(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1; \tau). \quad (2.171)$$

• Shuffle 积

Shuffle 代数与迭代积分紧密相关，下面来介绍 shuffle 代数的一些定义。首先我们考虑一个 word，命为 ω ，它由一系列 letter，即下面式中的 l_i 有序构成，

$$\omega = l_1 l_2 \cdots l_k. \quad (2.172)$$

我们考虑两个 word 之间的 shuffle 规则。原来的两个 word 之中 letter 分别保持其原有相对排序，组合之后写出所有的可能排序方法。例如我们考虑 $l_1 l_2$ 和 $l_3 l_4$ 之间的 shuffle，满足 shuffle 规则的有

$$\begin{aligned} l_1 l_2 l_3 l_4, & \quad l_1 l_3 l_2 l_4, & \quad l_1 l_3 l_4 l_2, \\ l_3 l_1 l_2 l_4, & \quad l_3 l_1 l_4 l_2, & \quad l_3 l_4 l_1 l_2, \end{aligned} \quad (2.173)$$

像 $l_1 l_2 l_4 l_3$ 或者 $l_2 l_1 l_3 l_4$ 就不满足该规则。有了上面的说明我们可以定义两个 word 之间的 shuffle 积为

$$\begin{aligned} l_1 l_2 \cdots l_k \sqcup l_{k+1} \cdots l_r &= l_1 (l_2 \cdots l_k \sqcup l_{k+1} \cdots l_r) + l_{k+1} (l_1 l_2 \cdots l_k \sqcup l_{k+2} \cdots l_r) \\ &= \sum_{\text{shuffles } \sigma} l_{\sigma(1)} l_{\sigma(2)} \cdots l_{\sigma(r)}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

从上面可以看出，两个 word 作 shuffle 积之后结果为所有满足 shuffle 规则的 word 之和。我们可以证明迭代积分同样满足 shuffle 关系。迭代积分可以视为 word 空间 \mathcal{W} 到 \mathbb{C} 的映射，在这里假设两个迭代积分所对应的 word 为 ν 和 ω ，分别写为

$$\nu = \nu_1 \cdots \nu_n = \nu_1 \nu', \quad \omega = \omega_1 \cdots \omega_n = \omega_1 \omega'. \quad (2.175)$$

它们的乘积为

$$\int_{\gamma} \nu \cdot \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \gamma^* \nu_1(t) \int_{\gamma_t} \nu' \cdot \int_0^1 \gamma^* \omega_1(s) \int_{\gamma_s} \omega', \quad (2.176)$$

其中根据式 (2.167) 我们约定可以写出

$$\int_{\gamma_t} \eta = \int_0^1 \gamma^* \eta_1(t') \int_{\gamma_{t'}} \eta'. \quad (2.177)$$

接下来如图2.5，将被积区域分为 $s > t$ 和 $s < t$ 两部分，

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nu \cdot \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 \gamma^* \nu_1(t) \int_{\gamma_t} \nu' \cdot \int_0^1 \gamma^* \omega_1(s) \int_{\gamma_s} \omega' \\ &= \int_0^1 \gamma^* \omega_1(s) \left(\int_{\gamma_s} \nu \cdot \int_{\gamma_s} \omega' \right) + \int_0^1 \gamma^* \nu_1(t) \left(\int_{\gamma_t} \nu' \cdot \int_{\gamma_t} \omega \right) \\ &= \int_{\gamma} \omega_1 (\nu \sqcup \omega') + \int_{\gamma} \nu_1 (\nu' \sqcup \omega), \end{aligned} \quad (2.178)$$

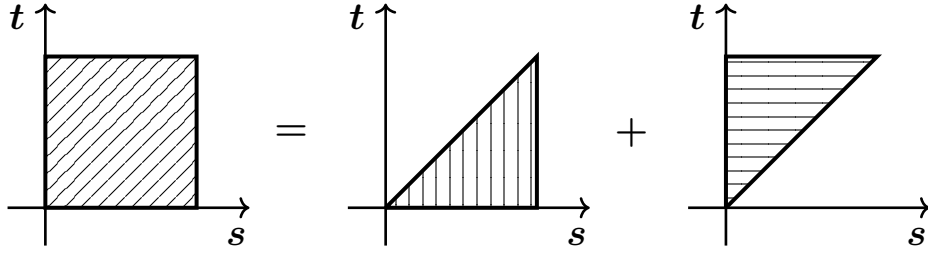


图 2.5 Shuffle 代数在积分表示下推导示意。通过将原先正方形的积分区域替换为上三角和下三角积分区域的和可以推导出 shuffle 代数。

结合式子

$$1 \sqcup \omega = \omega \sqcup 1 = \omega, \quad (2.179)$$

通过数学归纳法，最后则可以得到两个迭代积分乘积满足 shuffle 关系，

$$\int_{\gamma} v \cdot \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} v \sqcup \omega. \quad (2.180)$$

- 多重多对数函数 (multiple polylogarithm, MPL)

多重多对数函数也是一种特殊的迭代积分，有很大一部分费曼积分都可以利用 MPL 表示出来，下面我们简要介绍一下该特殊函数。数学家 Goncharov 对多重多对数函数进行了更加深刻的讨论 [118-119]，多重多对数函数也称为被称为 Goncharov polylogarithm (GPL)。GPL 被广泛应用于高能物理中散射振幅的计算 [120-123]，很早时期数学家们就对这类特殊函数有过研究 [124-128]，它与黎曼泽塔函数 (Riemann zeta function) 息息相关，

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}. \quad (2.181)$$

对于数学中研究多重泽塔函数 (multiple zeta function, multiple zeta value, MZV) 也有着重要意义。随着高能物理的蓬勃发展，物理学家逐渐意识到该函数在微扰计算量子场论中的重要地位，开发出了许多高效方便的程序，利用该函数使得高能物理唯象学高圈计算得到快速发展。

GPL 通过迭代积分的方式被定义为

$$G(a_1, \dots, a_n; z) = \int_0^z \frac{dt}{t - a_1} G(a_2, \dots, a_n; t), \quad (2.182)$$

以及

$$G(a_1; z) = \int_0^z \frac{1}{t - a_1} dt, \quad \text{其中, } a_1 \neq 0, \quad (2.183)$$

且

$$G(\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-times}}; z) = G(\mathbf{0}_n; z) = \frac{\log^n(z)}{n!}. \quad (2.184)$$

这里的 n 表示 GPL 的权重 (weight) 为 n , 当然 n 也代表了之前在迭代积分中定义的深度。由 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 构成的矢量被称为 GPL 的权重矢量 (weight vector)。除了迭代形式的定义外, GPL 还有级数形式的定义,

$$\text{Li}_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{n_1 > \dots > n_k > 0} \prod_{i=1}^k \frac{z_i^{n_i}}{n_i^{m_i}} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{n_1}}{n_1^{m_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1-1} \dots \sum_{n_k=1}^{n_{k-1}-1} \frac{z_k^{n_k}}{n_k^{m_k}}. \quad (2.185)$$

上式中有约定

$$\text{当 } m < n \text{ 时, } \sum_{i=n}^m f(i) = 0. \quad (2.186)$$

它与迭代积分形式的定义关系为

$$\text{Li}_{m_1, \dots, m_k}(z_1, \dots, z_k) = (-1)^k G\left(\mathbf{0}_{m_1-1}, \frac{1}{z_1}, \mathbf{0}_{m_2-1}, \frac{1}{z_1 z_2}, \dots, \mathbf{0}_{m_k-1}, \frac{1}{z_1 \dots z_k}; 1\right), \quad (2.187)$$

以及

$$G(\mathbf{0}_{m_1}, a_1, \mathbf{0}_{m_2}, \dots, \mathbf{0}_{m_k}, a_k; z) = (-1)^k \text{Li}_{m_1, \dots, m_k}\left(\frac{z}{a_1}, \dots, \frac{a_{k-1}}{a_k}\right). \quad (2.188)$$

GPL 存在一些特殊的情况。当 $\mathbf{a} = \{\mathbf{0}_{n-1}, a\}$ 时, GPL 变为经典多对数函数 (classical polylogarithm) ^①,

$$\text{Li}_n\left(\frac{z}{a}\right) = -G(\mathbf{0}_{n-1}, a; z). \quad (2.190)$$

当 $\mathbf{a} = \{\mathbf{0}_{n-k}, a_k\}$ 时, GPL 变为尼尔森多对数函数 (Nielsen polylogarithm),

$$S_{n-k, k}\left(\frac{z}{a}\right) = (-1)^k G(\mathbf{0}_{n-k}, a_k; z) = \text{Li}_{n-k+1, 1, \dots, 1}\left(\frac{z}{a}, \mathbf{1}_{k-1}\right). \quad (2.191)$$

当 \mathbf{a} 只由 0 或者单位 1 的 n 次根组成时, GPL 则变为 cyclotomic harmonic polylogarithm [129]。更进一步地, 当 \mathbf{a} 只由 $\{0, \pm 1\}$ 组成时, 通常称其为 harmonic polylogarithm (HPL) ^② [130],

$$H(a_1, \dots, a_n; z) = (-1)^p G(a_1, \dots, a_n; z), \quad a_i \in \{0, \pm 1\}. \quad (2.192)$$

其中, p 代表 \mathbf{a} 中的 +1 的数目。前文提到的 MZV 也是特殊的 GPL 之一, 它为级数形式中 \mathbf{z} 都为 1 的情况,

$$\zeta_{m_1, \dots, m_k} = \text{Li}_{m_1, \dots, m_k}(1, \dots, 1). \quad (2.193)$$

^①有时在表达式中还会出现 Clausen 函数和 Glaisher 函数,

$$\text{Cl}_n(\theta) = \begin{cases} \text{Im Li}_n(e^{i\theta}), & n \text{ 为偶数} \\ \text{Re Li}_n(e^{i\theta}), & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad \text{Gl}_n(\theta) = \begin{cases} \text{Re Li}_n(e^{i\theta}), & n \text{ 为偶数} \\ \text{Im Li}_n(e^{i\theta}), & n \text{ 为奇数} \end{cases}. \quad (2.189)$$

^②我们也可以利用 $H_{m_1, \dots, m_k}(z)$ 来表示 \mathbf{a} 中只会出现 0, 1 的情况, $H_{m_1, \dots, m_k}(z) = H(\mathbf{0}_{m_1}, 1, \mathbf{0}_{m_2}, \dots, \mathbf{0}_{m_k}, 1; z)$ 。这也被叫做 HPL, 而正文中出现的被严格称为第二 HPL, 不过这里不做严格区分, 统称为 HPL。

同样我们可以将 GPL 视为从 word 空间 \mathcal{W} 映射到 \mathbb{C} 的函数,

$$\begin{aligned} G : \quad \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a_1 a_2 \cdots a_n &\longrightarrow G(a_1, \dots, a_n; z) \end{aligned} \quad (2.194)$$

它们也满足 shuffle 代数,

$$G(a_1, \dots, a_k; z) G(a_{k+1}, \dots, a_n; z) = \sum_{\text{shuffles } \sigma} G(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; z). \quad (2.195)$$

有了 GPL 之间的 shuffle 关系, 我们可以找到 GPL 之间存在的某些关系, 这些关系能够帮助我们简化表达式, 或者一定程度上规范结果的表达式以更明显地表现结果突显的性质。例如, 可以利用这些关系将 GPL 中的 0 转移位置, 将权重矢量 \mathbf{a} 中最右边的零 (trailing zeros) 移走。对于 GPL,

$$G(a_1, \dots, a_j, \mathbf{0}_{n-j}; z), \quad (2.196)$$

我们无法对其在 $z = 0$ 附近作泰勒展开, 其渐近行为表现为 $\log(z)$ 发散。可以通过 shuffle 关系将其发散分离出来。我们利用基本关系,

$$\begin{aligned} G(0; z) G(a_1, \dots, a_j, \mathbf{0}_{n-j-1}; z) &= (r-j) G(a_1, \dots, a_j, \mathbf{0}_{r-j}; z) \\ &+ \sum_{s_1 \cdots s_j = a_1 \cdots a_{j-1} \sqcup 0} G(s_1, \dots, s_j, a_j, \mathbf{0}_{r-j-1}; z), \end{aligned} \quad (2.197)$$

逐渐将末尾的 0 移出。举一个具体的例子,

$$\begin{aligned} G(a, b, 0, 0; z) &= G(0, 0, z) G(a, b, z) - G(0, z) G(0, a, b, z) - G(0, z) G(a, 0, b, z) \\ &+ G(0, 0, a, b, z) + G(0, a, 0, b, z) + G(a, 0, 0, b, z), \end{aligned} \quad (2.198)$$

且 $a, b \neq 0$ 。当 $z \rightarrow 0$ 时, 我们可以看到发散来自于 $G(0, 0, z)$ 和 $G(0, z)$ 。

最后, GPL 的全微分满足规则

$$\begin{aligned} dG(a_1, \dots, a_r; z) &= \sum_{j=1}^n G(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1} \cdots a_r; z) \\ &\times [d \log(a_{j-1} - a_j) - d \log(a_{j+1} - a_j)], \end{aligned} \quad (2.199)$$

其中, $a_0 = z, a_{n+1} = 0$ 。

2.6 积分的切割

正则微分方程一般由一组性质良好的基构成, 为了描述这类性质, 超越度的概念被引入进来, 这也为寻找正则基提供了另外的思路。此前也有许多方法

被提出来，它们利用方程系数矩阵为 Fuchcia 型的性质 [97-99, 131] 或者是利用 Magnus 级数方法 [100-103] 等根据方程的形式直接作变换。近年来也有直接从积分性质进行分析，寻找合适的正则基的方法 [104-105, 109, 132-133]。基于各种方法，有许多程序包被开发出来，例如，DLogBasis [107]、epsilon [134]、Fuchsia [99]、CANONICA [135] 等。

对费曼积分作某一传播子的切割 (cut) 是我们分析积分性质的重要手段 [63-67, 136]。对某一个传播子幂次 $\alpha_i = 1$ 的费曼积分来说，取该积分关于传播子 P_i 的 cut 对应于作下面替换，

$$\frac{1}{q_i^2 - m_i^2} \longrightarrow 2\pi i \delta(q_i^2 - m_i^2). \quad (2.200)$$

这个替换等价于取被积表达式的留数，

$$2\pi i \int d_x f(x) \delta(x) = 2\pi i f(0) = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{f(x)}{x}, x=0 \right) = \oint_C dx \frac{f(x)}{x}. \quad (2.201)$$

在 Baikov 表示下 (2.79)，我们能更加方便地求出积分的 cut，

$$I_{\alpha_1 \dots \alpha_n} |_{k \times \text{cut}} = C_E^L G(p_1, \dots, p_{N_{\text{ext}}})^{\frac{E-D+1}{2}} \int \prod_{a=k+1}^n dz_i \oint_{z_j=0} \prod_{j=1}^k dz_j B^{\frac{D-L-E-1}{2}} \frac{1}{z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}}. \quad (2.202)$$

可以用图2.2中所示积分作为例子，

$$I_{1,1,1,1}^{\text{box}} = \int \frac{d^D l}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4}. \quad (2.203)$$

我们之前已经写出该积分的 Baikov 多项式 (2.85)，对传播子 $P_1 = l_1^2$ 作 cut，通

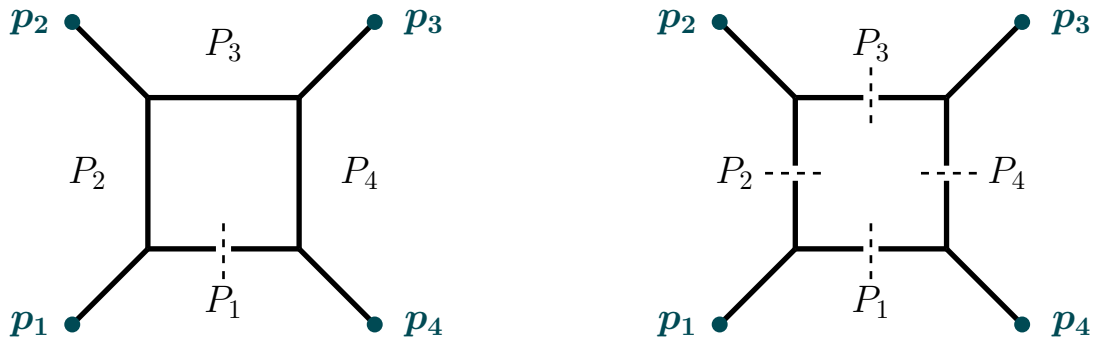


图 2.6 单圈箱图，从左到右分别对应于对传播子 P_1 取 cut 和取 maximal cut。

常用图2.6 (左) 示意，其表达式为

$$\begin{aligned} \text{Cut}_{P_1} I_{1,1,1,1}^{\text{box}} &\sim \int_C dz_2 dz_3 dz_4 \frac{1}{z_2 z_3 z_4} \oint_{\gamma_1} dz_1 \frac{B(z)}{z_1} \\ &\sim \int_C dz_2 dz_3 dz_4 \frac{1}{z_2 z_3 z_4} B(z)|_{z_1=0}. \end{aligned} \quad (2.204)$$

在计算和分析费曼积分时，我们通常会计算其最大割（maximal cut），即对所有在分母上的传播都作 cut 处理，用图 2.6（右）表示，可以计算出其 maximal cut 为

$$\begin{aligned} \text{MaxCut} I_{1,1,1,1}^{\text{box}} &= \text{Cut}_{p_1, p_2, p_3, p_4} I_{1,1,1,1}^{\text{box}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{(p_1^2 p_3^2)^2 + (s t - p_2^2 p_4^2)^2 - 2 p_1^2 p_3^2 (p_2^2 p_4^2 + s t)}}. \end{aligned} \quad (2.205)$$

需要注意的是，当被 cut 的传播子幂次 $\alpha_i \leq 0$ 时，作 cut 后的结果为 0，因为对于该变量来说，其在零点处留数为 0。比如

$$\text{Cut}_{p_1} I_{0,1,1,1}^{\text{box}} = \text{Cut}_{p_1} I_{-1,1,1,1}^{\text{box}} = 0. \quad (2.206)$$

目前暂时看不出取 cut 后对求解积分的帮助，但是我们可以结合微分方程来进行讨论。考虑微分方程

$$\partial_i I = A_i(\mathbf{x}; D) I, \quad (2.207)$$

对方程两边作 top-sector 积分的 maximal cut,

$$\partial_i \text{MaxCut}_{\text{top}} I = A_i(\mathbf{x}; D) \text{MaxCut}_{\text{top}} I, \quad (2.208)$$

左右两边的 sub-sector 都变成 0，方程的系数矩阵的维度减小为 $N_{\text{top}} \times N_{\text{top}}$ ，这里的 N_{top} 代表 top-sector 的主积分的数目，最后方程则只剩下 I_{top} 的齐次项部分，

$$\partial_i \text{MaxCut}_{\text{top}} I_{\text{top}} = A_i^{N_{\text{top}} \times N_{\text{top}}}(\mathbf{x}; D) \text{MaxCut}_{\text{top}} I_{\text{top}}. \quad (2.209)$$

在一定程度上，当我们求出一个积分的 maximal cut，其结果则代表了微分方程的齐次解。我们可以利用这一性质来构建正则基 [70, 106-109]。相比于从矩阵构造的角度来建立算法，该方法更关注积分本身的性质。其主要步骤在于如何构建出积分的 dlog 形式，然后找到其领头奇点（leading singularity, LS）[106-107]，其理论背景在文献中已有讨论 [96, 137-138]，这里我们仅用例子作说明。

我们对之前计算过的单圈自能 2.3 的例子来讨论。首先写出它的 Baikov 表示，

$$\begin{aligned} I_{2,1}^{\text{self}} &= \int dz_1 dz_2 \frac{(4p^2)^{\epsilon-1}}{\sqrt{\pi} z_1^2 z_2 \Gamma(3-2\epsilon)} \\ &\times \left[2p^2(m^2 + z_1 + z_2) - (p^2)^2 - (m^2 + z_1 - z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.210)$$

然后求出其 maximal cut,

$$\text{MaxCut} I_{2,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi} p^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.211)$$

而对于这个简单的情况，其 LS 正比于 $1/p^2$ ，我们给积分乘上 p^2 之后使其具有常数的 LS，该组合便适合作为构造微分方程的候选基，这个结果也与式 (2.137) 所

得出的正则基相符。在一些更加复杂的例子当中，一个积分的 LS 不止一个，我们需要考虑其子 sector 或者超级 sector 中的积分进行组合 [106]，这些操作对于不同情况都需要特别处理。

另外，maximal cut 也能够为我们提供积分的一部分信息，我们可以用它来判断积分与哪些特殊函数相关。例如目前费曼积分中最简单的、与椭圆积分相关的双圈日出图，为了更清晰地看到结果，我们在 $D = 2$ 时利用 loop-by-loop 的方法求出其 maximal cut,

$$I_{1,1,1}^{\text{sunrise}}(D=2, x) = -8\pi i \int_{C_{\text{MaxCut}}} \frac{dz}{\sqrt{z(z-4m^2)[(z-p^2)^2-2m^2(p^2+z)+m^4]}}. \quad (2.212)$$

我们发现需要用椭圆积分来表示 maximal cut 的结果,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-kt^2)}}. \quad (2.213)$$

这说明该积分已经无法再用之前所介绍的 GPL 来表示，需要引入超越 GPL 的特殊函数才能写出其最终结果。

第3章 夸克对湮灭产生 W 玻色子对过程的 QCD 修正中双圈平面主积分的计算

在大型强子对撞机上，规范玻色子对产生的过程在标准模型框架内研究电弱规范对称结构方面发挥着关键的作用 [139-141]。在所有弱规范玻色子对产生过程中， W 玻色子对的产生具有最大的截面，为高能对撞实验贡献了大量数据，其不仅可以用于精确检验标准模型，还可以寻找超出标准模型的新物理。为了获得完整 W 玻色子对产生过程的截面，我们需要考虑实修正的贡献和虚修正的贡献。虚修正中需要考虑圈图部分以及通过重整化引入抵消项的部分，圈图中非物理紫外发散将与抵消项相消。根据 KLN 定理，圈图中的红外发散则能被实修正中的红外发散完全抵消，其中实修正中的红外发散包括软发散、共线发散，而实修正中剩余的共线发散可以将其吸收到部分子分布函数中。我们可以利用相空间分割方法 [142-143]、双极点减除方法 [144-148] 以及天线减除方法 [149-151] 等来分离实修正中的红外发散。最终我们可以得到不包含非物理发散的结果，并将其作为与实验相检验的对象。

如前文提到的，虚修正中对圈图的计算是我们高精度预言的核心之一，本章将对虚修正中的圈图计算部分进行详细讨论。在轻夸克对湮灭产生 W 玻色子对过程的 NNLO QCD 修正中将涉及上百张费曼图，我们将其归类并关注其中涉及到顶夸克的平面双圈费曼积分，通过正则微分方程方法完成了主积分的解析计算。我们详细阐述了三个不同拓扑对应的微分方程系统，分别包括 27 个、45 个和 15 个主积分。前两个微分方程系统可以通过选择适当的基成功地得到为正则形式。第三个系统涉及椭圆积分，它可以被变换为关于维数正规化参数 ϵ 的线性形式，其中系数矩阵 $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ 为严格的下三角矩阵。我们的结果以 ϵ 的幂级数形式展开，直到 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ ，并根据其是否涉及椭圆积分分为两类。第一类包括不涉及椭圆积分的主积分，可以用 GPL 和一重积分表示。第二类中的主积分涉及椭圆积分，我们将其表示为迭代积分。最后我们通过独立的数值方法验证了我们的解析解，结果表明其具有较高的精度。主积分的结果为涉及顶夸克的正反夸克对湮灭产生 W 玻色子对过程提供了解析研究基础，也为后续理论研究和实验验证提供了有力的支撑。

3.1 背景介绍

在标准模型中， W 玻色子对过程主要通过三个产生道发生。首要的产生道是夸克—反夸克对的湮灭，这也就是说在 $pp \rightarrow W^+W^-$ 中，主要的产生道同样

为 $q\bar{q}$ 部分子通道 [152-155]。第二个是圈诱导的胶子聚合，由于在典型能量下胶子有很高的亮度，其贡献仍然显著，该特定过程首次在文献中探讨 [156]。第三个产生道为 Higgs 玻色子衰变过程 $H \rightarrow W^+W^-$ ，虽然与前两个过程相比其截面相对较小，但是该产生道在发现与 Higgs 玻色子相关的新物理背景中扮演了不可缺少的角色，主要是由于双玻色子末态产生是 Higgs 玻色子衰变过程的非平庸不可约本底 [157-159]。因此，对 W 玻色子对产生的精确理论预测不仅对表征自身的产生道非常重要，还是提高实验中探测 Higgs 衰变过程灵敏度的必要条件。

强子对撞机上，测量 W 玻色子对产生截面的实验相对误差已经低于 10% [160-161]。通过分析规范玻色子对产生过程，我们能够对一些关键的电弱观测测量进行精确预言。例如可以通过与质心能量为 7、8 和 13 TeV 的质子—质子对撞的实验数据进行比较并对反常三规范玻色子耦合顶点给出实验限制 [162-167]。因此，为 W 玻色子对产生提供准确的理论预测至关重要，以便于与实验测量所取得的显著精度作相互检验。此外，在未来进行高能物理实验的对撞机中，也有关于 W 玻色子质量及相关新物理研究等方向进行极高精度测量的计划，例如未来环形对撞机 [168-172]，国际直线对撞机 [173-175] 等。

对撞机上的实验数据不断累积，能量与亮度也不断提升，实验测量的精度越来越高，为了达到当前以及即将到来的实验分析所要求的精度水平，并鉴于 W 玻色子对产生过程的关键性，我们必须获得更高阶的 QCD 和 EW 修正，前人已经对于该过程做出了大量理论预言的工作。稳定 W 玻色子对产生的 NLO EW 修正首次在文献中探讨 [176-179]。之后，玻色子衰变为轻子的非共振效应等因素也被考虑进来 [180-181]。对于双圈阶，强子对撞机中在壳 W 玻色子对产生的 NNLO QCD 修正 [182] 被首次计算出来，其中运用了 q_T 减除方法 [183]。在从 7 到 14 TeV 的能量范围内，NNLO 的结果对 NLO 预测的总截面产生了约 9% 到 12% 的修正。非共振的 W 玻色子对的情况与 $2l2\nu$ 产生相关，结合已有的双圈振幅 [184-185] 与程序包 MATRIX [186]，文献 [187] 给出了该过程完整微分截面预测。对于 $gg \rightarrow W^+W^-$ ，文献 [188-189] 计算了该过程的双圈振幅，随后涉及 NLO QCD 修正下圈诱导的胶子聚合贡献也基于该结果给出 [190-191]。由于非共振效应，与在壳近似相比，考虑衰变到轻子的情况会导致总截面的减少。 W 玻色子对产生的 NNLO QCD 和 NLO EW 修正已在文献 [192] 中进行了研究。该研究涵盖了共振和非共振图，自旋关联和非在壳效应在内的夸克—胶子部分子通道 [193]。最近，第三夸克代的贡献也被考虑进来 [194]，其利用了常微分方程方法 [195] 求解主积分，并在考虑胶子聚合后，获得在壳 W 玻色子对产生的理论预言。除了强子对撞机，也有大量文献针对轻子对撞机给出了轻子初态产生 W 玻色子对的相关计算 [196-207]，并且对该过程的 NLO 研究给出了详细的概述 [208-209]。在 Les Houches 的愿望清单中 [210]，也列出了该过程的详细研究

现状。

目前，在强子对撞中，关于 NNLO 修正下考虑顶夸克影响后的 W 玻色子对产生截面的全面解析计算仍然处于研究阶段。在这之前，内线无质量的在壳 W 玻色子对产生双圈主积分在文献 [211-213] 中已有研究。对于末态玻色子对不在壳情况也已经有了文献记录 [214-216]。在这两种情况下，主积分的解都可以通过使用 GPL 表示出来，正如之前章节所提到，这类函数能够广泛地表达费曼积分的结果。然而，当我们考虑内线质量时，计算将变得更加困难，引入了一类超出 GPL 范围的特殊函数，例如在许多情况下涉及到椭圆曲线的积分 [217-220]，目前对于这一情况的研究并不充分。为了促进对现象学的进一步发展，我们有必要扩展 GPL 的特征性质，对超越 GPL 特殊函数的数学性质进行更深刻的讨论和研究。在本章中，我们将重点放在了轻夸克对湮灭产生 W 玻色子对的双圈平面主积分上，并将结果表示为迭代积分。

3.2 积分家族

我们研究的过程为夸克对湮灭产生玻色子对，

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \longrightarrow W^+(p_3) + W^-(p_4), \quad (q = u, d, c, s), \quad (3.1)$$

其中初态轻夸克被视为无质量粒子，而四个外动量 p_i ($i = 1, \dots, 4$) 都在壳，且都约定其方向朝内。这个 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的振幅依赖于 Mandelstam 不变量，

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_2 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_3)^2. \quad (3.2)$$

由于动量守恒，它们满足关系 $s + t + u = 2m_W^2$ 。双圈四点的费曼积分需要用 9 个传播子来定义一个积分家族。在维数正规化下，我们约定费曼积分的形式为

$$F(n_1, \dots, n_9) = \frac{1}{(Q^2)^{d-n}} \int D^d l_1 D^d l_2 \frac{1}{P_1^{n_1} \dots P_9^{n_9}}, \quad (n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, 9), \quad (3.3)$$

其中， $n = n_1 + \dots + n_9$ ， $d = 4 - 2\epsilon$ 代表时空维数， Q 是特征能标， $\{P_i | i = 1, \dots, 9\}$ 是一组独立的传播子， $l_{1,2}$ 代表圈动量。积分测度定义与式 (2.153) 相同。

文献 [211-212] 详细研究了 NNLO QCD 修正下， $q\bar{q} \rightarrow VV$ 过程中内线无质量的双圈四点费曼积分。因此，本章只关注内线传播子带有质量的双圈积分。在 QCD 修正下， $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 过程中内线传播子带有顶夸克质量的不可约双圈费曼图可分为 17 种拓扑，它们分别属于 6 个积分家族。

- 积分家族 \mathcal{F}_A :

$$\begin{aligned} P_1 &= l_1^2 & P_2 &= (l_1 + p_1)^2 & P_3 &= (l_1 - p_2)^2 \\ P_4 &= l_2^2 & P_5 &= (l_2 + p_1)^2 & P_6 &= (l_2 - p_2)^2 \\ P_7 &= (l_1 - l_2)^2 & P_8 &= (l_1 - p_2 - p_3)^2 & P_9 &= (l_2 - p_2 - p_3)^2 - m_t^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

2 种拓扑结构 $\subset \mathcal{F}_A$:

$$\mathcal{T}_1 = [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1], \quad \mathcal{T}_{1,1} = [0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1] \quad (3.5)$$

- 积分家族 \mathcal{F}_B :

$$\begin{aligned} P_1 &= l_1^2 & P_2 &= (l_1 + p_1)^2 & P_3 &= (l_1 - p_2)^2 \\ P_4 &= l_2^2 - m_t^2 & P_5 &= (l_2 + p_1)^2 - m_t^2 & P_6 &= (l_2 - p_2)^2 - m_t^2 \\ P_7 &= (l_1 - l_2)^2 - m_t^2 & P_8 &= (l_1 - p_2 - p_3)^2 & P_9 &= (l_2 - p_2 - p_3)^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

6 种拓扑结构 $\subset \mathcal{F}_B$:

$$\mathcal{T}_2 = [1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1], \quad \mathcal{T}_{2,1} = [0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1] \quad (3.7)$$

$$\mathcal{T}_{3,1} = [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$$

$$\mathcal{T}_3 = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0], \quad \mathcal{T}_{3,2} = [1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0] \quad (3.8)$$

$$\mathcal{T}_{3,3} = [1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$$

- 积分家族 \mathcal{F}_C :

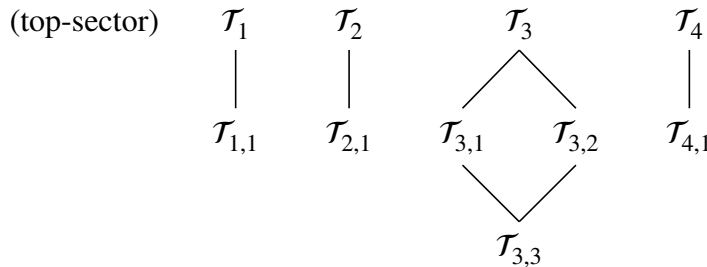
$$\begin{aligned} P_1 &= l_1^2 & P_2 &= (l_1 + p_1)^2 & P_3 &= (l_1 - p_2)^2 \\ P_4 &= l_2^2 & P_5 &= (l_2 + p_1)^2 & P_6 &= (l_2 - p_2)^2 \\ P_7 &= (l_1 - l_2)^2 & P_8 &= (l_1 - l_2 - p_4)^2 - m_t^2 & P_9 &= (l_2 - p_2 - p_3)^2 - m_t^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

2 种拓扑结构 $\subset \mathcal{F}_C$:

$$\mathcal{T}_4 = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1], \quad \mathcal{T}_{4,1} = [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1] \quad (3.10)$$

- 通过交换外动量 p_1 和 p_2 , 其他 3 个积分家族和 7 个拓扑可以由 \mathcal{F}_A 、 \mathcal{F}_B 、 \mathcal{F}_C 以及 \mathcal{T}_1 、 \mathcal{T}_2 、 \mathcal{T}_3 、 $\mathcal{T}_{3,1}$ 、 $\mathcal{T}_{3,2}$ 、 $\mathcal{T}_{3,3}$ 、 \mathcal{T}_4 获得^①

下面的图例说明了这些拓扑之间的 sector 关系:



^① $\mathcal{T}_{1,1}$ 、 $\mathcal{T}_{2,1}$ 和 $\mathcal{T}_{4,1}$ 在 p_1 和 p_2 交换下不变。

图3.1为拓扑 \mathcal{T}_1 、 \mathcal{T}_2 、 \mathcal{T}_3 和 \mathcal{T}_4 。可以清楚地看到， \mathcal{T}_1 、 \mathcal{T}_2 和 \mathcal{T}_3 是平面拓扑，而 \mathcal{T}_4

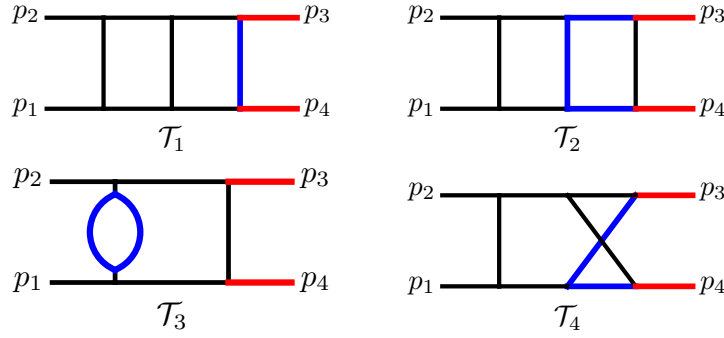


图 3.1 $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 过程中 QCD 双圈修正的 top-sector 的拓扑图。黑色、红色和蓝色的线分别代表无质量粒子， W 玻色子和顶夸克。

是非平面拓扑，本文我们主要关注平面拓扑结构。NNLO QCD 对 $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 的修正中所涉及的大量双圈平面图均属于顶拓扑 \mathcal{T}_1 、 \mathcal{T}_2 和 \mathcal{T}_3 即其子拓扑构成的集合，我们将其称为顶分支 \mathcal{T}_{1F} 、 \mathcal{T}_{2F} 和 \mathcal{T}_{3F} 。

由2.4节可知我们可以将一个积分集合中的积分通过 IBP 关系表示为主积分的线性组合。在本章中，我们使用程序包 Kira 进行 IBP 约化，对于 \mathcal{T}_{1F} 、 \mathcal{T}_{2F} 和 \mathcal{T}_{3F} 分别得到了 27、45 和 15 个主积分。

3.3 微分方程

在 NNLO QCD 修正下， $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 过程在内线传播子带有质量时，会引入四个不同的能标： s 、 t 、 m_W^2 和 m_t^2 。为了方便起见，我们将无量纲化特征能标 Q 设置为 m_t 。因此，式 (3.3) 中定义的无量纲费曼积分仅依赖于三个无量纲的变量，

$$x = -\frac{s}{m_t^2}, \quad y = -\frac{t}{m_t^2}, \quad z = -\frac{m_W^2}{m_t^2}. \quad (3.11)$$

接下来，我们将详细阐述三个顶分支所构建的微分方程系统，包括方程的构建以及方程的解。借助 LiteRed [221-222]，我们写出了主积分 $f(\mathbf{x}; \epsilon)$ 的微分方程，

$$\partial_i f(\mathbf{x}; \epsilon) = A_i(\mathbf{x}; \epsilon) f(\mathbf{x}; \epsilon), \quad (3.12)$$

对于前两个顶分支 (\mathcal{T}_{1F} 和 \mathcal{T}_{2F}) 所构成的微分系统，它们的解可以方便地用 GPL 和以及关于 GPL 的一重积分表示。然而 \mathcal{T}_{3F} 将涉及椭圆费曼积分，这也使得我们难以得到正则微分方程系统。不过我们可以构造如下形式的一组“松弛”正则微分方程，^①

$$\partial_i g(\mathbf{x}; \epsilon) = \left[A_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \epsilon A_i^{(1)}(\mathbf{x}) \right] g(\mathbf{x}; \epsilon), \quad (3.13)$$

^①方程 (3.13) 中的微分方程也被称为线性形式的微分方程，因此 $g(\mathbf{x}; \epsilon)$ 通常被称为线性基。

其中, $\mathbb{A}_i^{(0)}(\mathbf{x})$ 是严格的下三角矩阵 [218, 220, 223], 因此, 顶分支 \mathcal{T}_{3F} 的解仍然可以写为迭代的形式。

3.3.1 顶分支 \mathcal{T}_{1F}

利用 Kira, 我们在顶分支 \mathcal{T}_{1F} 中获得了 27 个主积分, 如图3.2所示。正则基 $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{27})^T$ 将通过下面的变换获得:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \epsilon^2 f_1 x, & g_2 &= \epsilon^2 f_2 x z, \\
 g_3 &= \epsilon^2 f_3 x^2, & g_4 &= \epsilon^3 f_4 x r, \\
 g_5 &= \epsilon^2 f_5 x, & g_6 &= \epsilon^2 f_6 z, \\
 g_7 &= \epsilon^2 f_7 (z+1) + 2\epsilon^2 f_6, & g_8 &= \epsilon^2 f_8 y, \\
 g_9 &= \epsilon^2 f_9 (y+1) + 2\epsilon^2 f_8, & g_{10} &= \epsilon^3 f_{10} x, \\
 g_{11} &= \epsilon^3 f_{11} r, & g_{12} &= \epsilon^2 f_{12} r, \\
 g_{13} &= \epsilon^2 f_{13} x z + \epsilon^2 f_{12} x + 3/2 \epsilon^3 f_{11} x, & g_{14} &= \epsilon^3 f_{14} r, \\
 g_{15} &= \epsilon^2 f_{15} [x - (z+1)^2] + 3/2 \epsilon^3 f_{14} [x - 2(z+1)], & g_{16} &= \epsilon^3 f_{16} (y-z), \\
 g_{17} &= \epsilon^4 f_{17} (x+y-z), & g_{18} &= \epsilon^3 f_{18} [x + (z+1)(y-z)], \\
 g_{19} &= \epsilon^4 f_{19} r, & g_{20} &= \epsilon^3 (1-2\epsilon) f_{20} r, \\
 g_{21} &= \epsilon^3 f_{21} x (y+1), & g_{22} &= \epsilon^3 f_{22} x y, \\
 g_{23} &= \epsilon^2 f_{23} x (y+1) + \epsilon^3 f_{22} x, & g_{24} &= \epsilon^4 f_{24} x (y-z), \\
 g_{25} &= \epsilon^4 f_{25} x^2 (y+1), & g_{26} &= \epsilon^4 f_{26} x r, \\
 g_{27} &= (y+1)^{-1} \sum_i \alpha_i f_i,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中, r 为 $x(x-4z)$ 的平方根, g_{27} 中的系数 α_i ($i = 1, \dots, 27$) 由附录A给出。将方程写为 $d \log$ 形式 (2.142) 后, 14 个 letter 为

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= x, & \omega_2 &= y, & \omega_3 &= z, \\
 \omega_4 &= z+1, & \omega_5 &= y+1, & \omega_6 &= z-y, \\
 \omega_7 &= x-4z, & \omega_8 &= x+y-z, & \omega_9 &= x-(z+1)^2, \\
 \omega_{10} &= x+(z+1)(y-z), & \omega_{11} &= xy+(y-z)^2, & \omega_{12} &= (x-r)/(x+r), \\
 \omega_{13} &= \frac{x-2(z+1)-r}{x-2(z+1)+r}, & \omega_{14} &= \frac{x+2(y-z)-r}{x+2(y-z)+r}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

r 能够通过以下变量的变化实现有理化:

$$x = \frac{(x_1 + z)^2}{x_1}. \tag{3.16}$$

之后, 所有 letter 都是变量 (x_1, y, z) 的有理函数。于是我们可以利用 GPL 来构造该正则微分系统的解, 但我们还需要确定解中的待定积分常数。

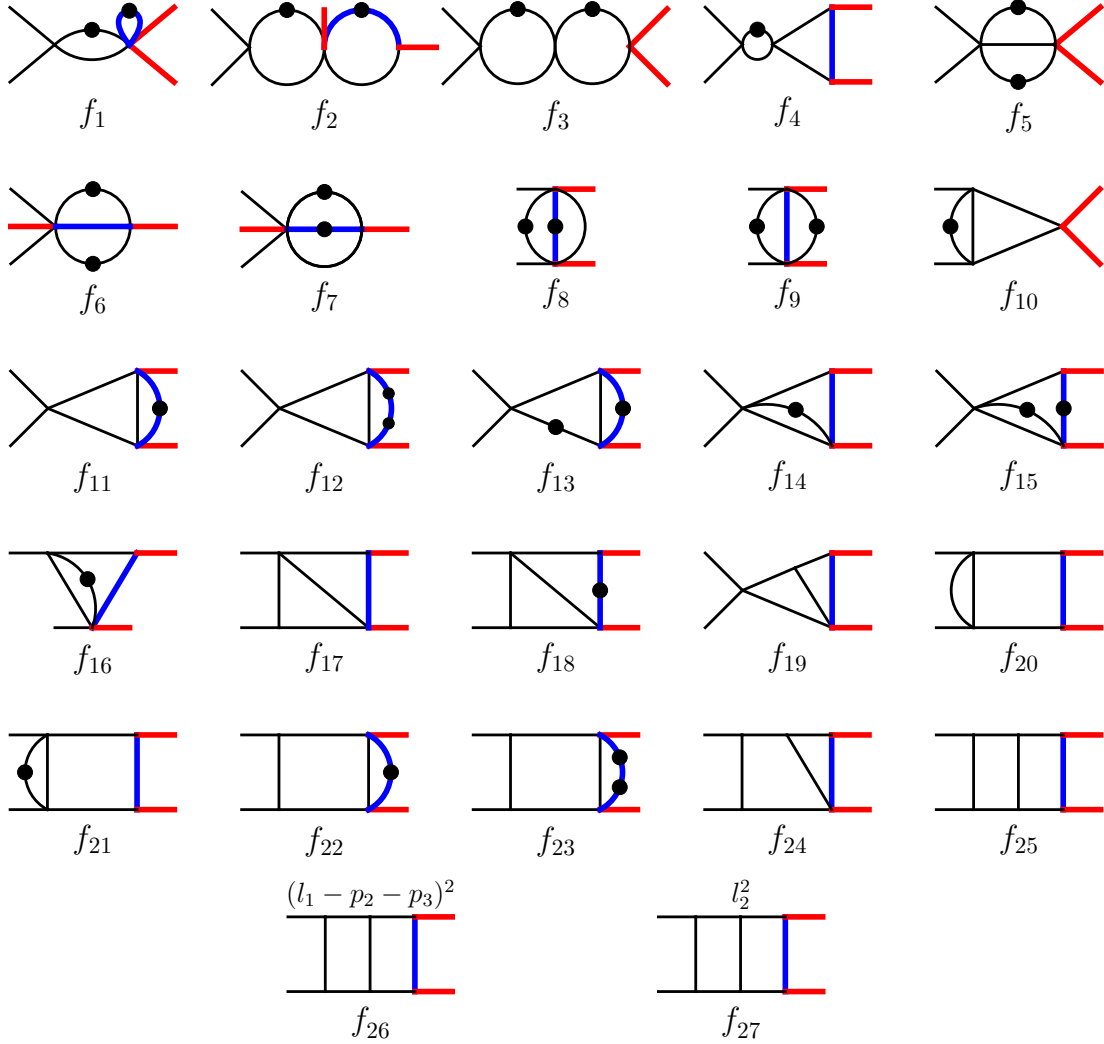


图 3.2 顶分支 τ_{1F} 中主积分所构成的基。黑色、红色和蓝色的线分别代表无质量粒子, W 玻色子和顶夸克。传播子上每多一个点表示对应幂加 1。

有的积分可以由其他文献已给出的结果中获得, 作为独立的输入。其他的积分则可以通过主积分在不同运动学极限下的行为来确定。由积分在某些极限下收敛, 可以获得积分常数的约束关系。这个过程对积分常数施加了约束, 而只有建立足够数量的这些约束才能获取最终的特解。在程序包 FIESTA [62, 224] 中的 `asy.m` [117, 225-226] 的帮助下, 利用区域展开的方法, 我们可以获得主积分的极限行为。下面我们给出了确定边界常数所用到的条件。

- $g_{1,3,5,\dots,10}$ 的解析表达式可以在文献 [227-228] 中找到, 因此将其作为独立的输入。
- 剩下 19 个主积分的积分常数将由下面这些运动学极限下的行为确定:
 - 在 $x = 0$ 处有限: $g_{14,19,26}^\circ$
 - 在 $y = 0$ 处有限: g_{22}°

- 在 $z = 0$ 处有限: $g_{2,11,14,16,17,20,23,\dots,27^\circ}$
- 在 $x/z = 4$ 处有限: $g_{4,11,12,20^\circ}$

在附录B.1中, 我们展示了顶分支 \mathcal{T}_{1F} 到 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的正则基 g_i ($i = 1, \dots, 27$) 的解析表达式。

3.3.2 顶分支 \mathcal{T}_{2F}

本节中, 45 个主积分 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{45})^T$ 的选择如图3.3所示。从非正则基 \mathbf{f} 到正则基 \mathbf{g} 的线性变换如下:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \epsilon^2 f_1, & g_2 &= \epsilon^2 f_2 x, \\
 g_3 &= \epsilon^2 f_3 z, & g_4 &= \epsilon^2 f_4 r_1, \\
 g_5 &= \epsilon^2 f_5 x z, & g_6 &= \epsilon^2 f_6 x r_1, \\
 g_7 &= \epsilon^3 f_7 r_2, & g_8 &= \epsilon^3 f_8 x r_2, \\
 g_9 &= \epsilon^2 f_9 x, & g_{10} &= \epsilon^2 f_{10} r_1 + 1/2 \epsilon^2 f_9 r_1, \\
 g_{11} &= \epsilon^2 f_{11} z, & g_{12} &= \epsilon^2 f_{12} (z + 1) + 2 \epsilon^2 f_{11}, \\
 g_{13} &= \epsilon^2 f_{13} y, & g_{14} &= \epsilon^2 f_{14} (y + 1) + 2 \epsilon^2 f_{13}, \\
 g_{15} &= \epsilon^3 f_{15} r_2, & g_{16} &= \epsilon^2 f_{16} r_2, \\
 g_{17} &= \epsilon^2 f_{17} x z + \epsilon^2 f_{16} x + 3/2 \epsilon^3 f_{15} x, & g_{18} &= \epsilon^3 f_{18} r_2, \\
 g_{19} &= \epsilon^2 f_{19} r_2, & g_{20} &= \epsilon^2 f_{20} [1 + x(z + 1)] + \epsilon^2 f_{19} (x + 2) + 3/2 \epsilon^3 f_{18} (x + 2), \\
 g_{21} &= \epsilon^3 f_{21} (y - z), & g_{22} &= \epsilon^2 f_{22} (y - z), \\
 g_{23} &= \epsilon^2 f_{23} (1 - y + z) + 2 \epsilon^2 f_{22} + 3 \epsilon^3 f_{21}, & g_{24} &= \epsilon^3 f_{24} x, \\
 g_{25} &= \epsilon^2 f_{25} x, & g_{26} &= \epsilon^2 f_{26} r_1 + \epsilon^2 f_{25} r_1 + 3/2 \epsilon^3 f_{24} r_1, \\
 g_{27} &= \epsilon^3 f_{27} x y, & g_{28} &= \epsilon^2 f_{28} x (y + 1) + \epsilon^3 f_{27} x, \\
 g_{29} &= \epsilon^4 f_{29} (x + y - z), & g_{30} &= \epsilon^3 f_{30} r_3, \\
 g_{32} &= \epsilon^4 f_{32} r_2, & g_{33} &= \epsilon^3 f_{33} (z + 1) r_2, \\
 g_{34} &= \epsilon^3 f_{34} z + 1/2 \epsilon^3 f_{33} x (z + 1) - \epsilon^4 f_{32} x + \epsilon^2 f_{16} (x - 2 z) + 1/2 \epsilon^3 f_{15} (x - 2 z), \\
 g_{35} &= \epsilon^3 (1 - 2 \epsilon) f_{35} x, & g_{36} &= \epsilon^3 f_{36} r_4, \\
 g_{37} &= \epsilon^2 f_{37} r_3 + \epsilon^3 f_{36} r_3, & g_{38} &= \epsilon^3 f_{38} r_2 + \epsilon^3 f_{36} r_2, \\
 g_{39} &= \epsilon^4 f_{39} r_1 r_2, & g_{40} &= \epsilon^4 f_{40} x (y - z), \\
 g_{41} &= [\epsilon^3 f_{41} (y - z) + \epsilon^3 f_{30} - 2 \epsilon^2 f_{28} - 2 \epsilon^3 f_{27}] x (z + 1), \\
 g_{42} &= \epsilon^4 f_{42} x r_3, & g_{43} &= \epsilon^4 f_{43} x r_2, \\
 g_{44} &= \epsilon^4 f_{44} x r_1 + \epsilon^4 f_{42} x y r_1 - 2 \epsilon^2 f_{37} (y - z) r_1 - 2 \epsilon^3 f_{36} (y - z) r_1 + \epsilon^3 f_{30} (y - z) r_1,
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$g_{31} = [x(z+1)]^{-1} \sum_i \beta_i f_i, \quad g_{45} = \sum_i \gamma_i f_i,$$

方程系统出现了四个根式 $r_{1,2,3,4}$,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x(x+4), & r_2^2 &= x(x-4z), \\ r_3^2 &= x[x(y+1)^2 + 4(y-z)^2], & r_4^2 &= xy[4(z+1) - y(x+4)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

正则基 g_{31} 和 g_{45} 中的系数 β_i 和 γ_i ($i = 1, \dots, 45$) 在附录A中给出。这组 45 个正则基所满足的 $d \log$ 形式全微分方程 (2.142) 由 35 个 letter 组成,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x, & \omega_2 &= y, & \omega_3 &= z, \\ \omega_4 &= x+4, & \omega_5 &= y+1, & \omega_6 &= z+1, \\ \omega_7 &= x-4z, & \omega_8 &= z-y, & \omega_9 &= 1-y+z, \\ \omega_{10} &= x+y-z, & \omega_{11} &= x(z+1)+1, & \omega_{12} &= x(z+1)+(y-z), \\ \omega_{13} &= x-(z+1)^2, & \omega_{14} &= xy+(y-z)^2, & \omega_{15} &= x(y+1)^2+4(y-z)^2, \\ \omega_{16} &= \frac{x-r_1}{x+r_1}, & \omega_{17} &= \frac{x-r_2}{x+r_2}, & \omega_{18} &= \frac{x+2-r_2}{x+2+r_2}, \\ \omega_{19} &= \frac{x-2(z+1)-r_2}{x-2(z+1)+r_2}, & \omega_{20} &= \frac{x+2(y-z)-r_2}{x+2(y-z)+r_2}, & \omega_{21} &= \frac{x-xy-r_3}{x-xy+r_3}, \\ \omega_{22} &= \frac{x+xy-r_3}{x+xy+r_3}, & \omega_{23} &= \frac{x-xy+2xz-r_3}{x-xy+2xz+r_3}, & \omega_{24} &= \frac{xy-r_4}{xy+r_4}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \omega_{25} &= \frac{xy+2(y-z)-r_4}{xy+2(y-z)+r_4}, & \omega_{26} &= \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}, & \omega_{27} &= \frac{yr_1-r_4}{yr_1+r_4}, \\ \omega_{28} &= \frac{yr_2-r_4}{yr_2+r_4}, & \omega_{29} &= \frac{(y+1)r_1-r_3}{(y+1)r_1+r_3}, & \omega_{30} &= \frac{(y+1)r_2-r_3}{(y+1)r_2+r_3}, \\ \omega_{31} &= \frac{(y-z)r_1-r_3}{(y-z)r_1+r_3}, & \omega_{32} &= \frac{yr_3-(y+1)r_4}{yr_3+(y+1)r_4}, \\ \omega_{33} &= \frac{(1-y)(z-y)r_2-(y+z)r_3}{(1-y)(z-y)r_2+(y+z)r_3}, & \omega_{34} &= \frac{y(2-y+z)r_2-(y+z)r_4}{y(2-y+z)r_2+(y+z)r_4}, \\ \omega_{35} &= \frac{y(2-y+z)r_3-(1-y)(y-z)r_4}{y(2-y+z)r_3+(1-y)(y-z)r_4}. \end{aligned}$$

因为涉及的平方根数量更多, 相比较于 \mathcal{T}_{1F} , \mathcal{T}_{2F} 的微分系统更加复杂, 难以同时使四个平方根 r_i ($i = 1, \dots, 4$) 有理化。在程序包 Rationalizeroots

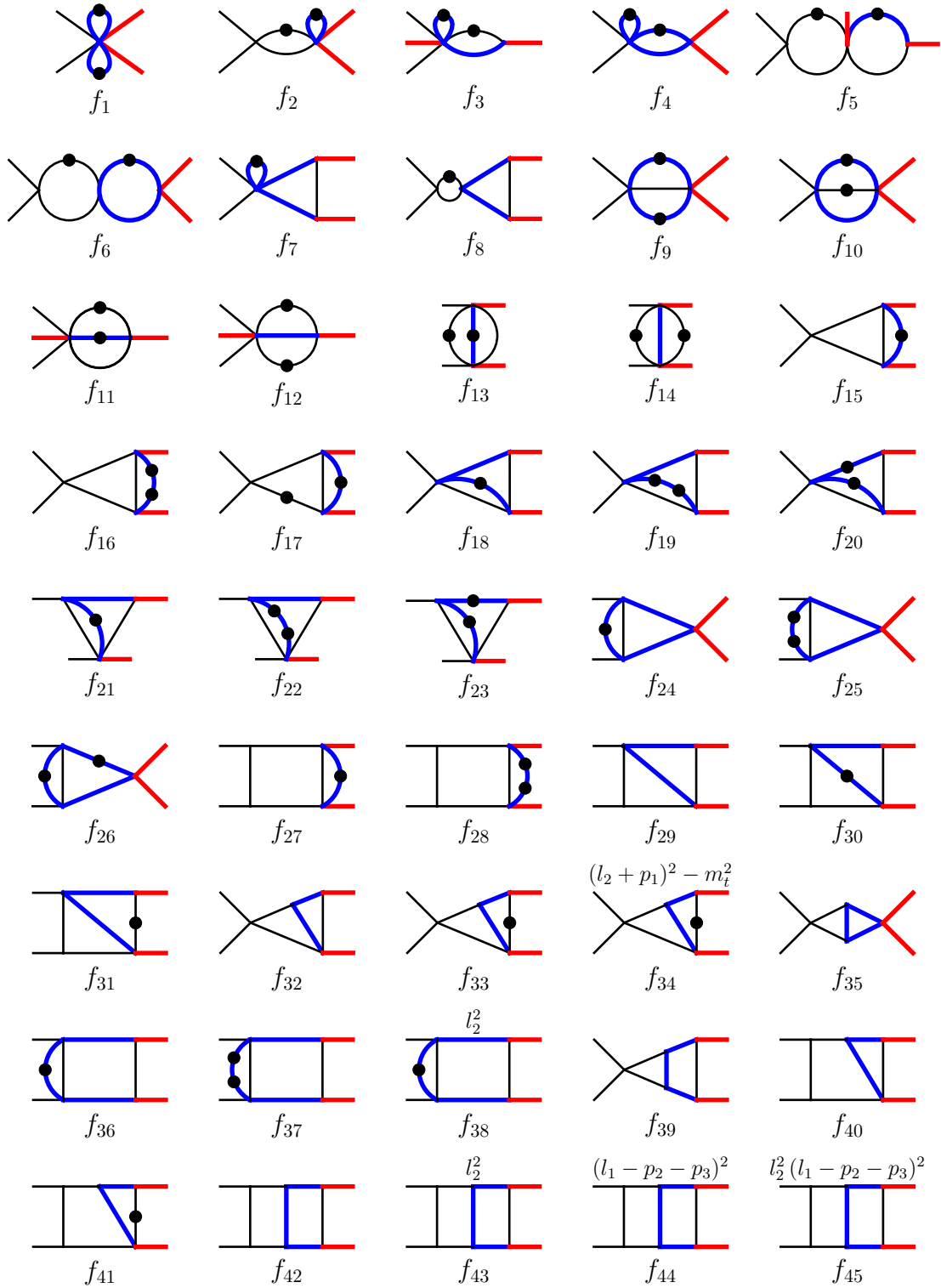


图 3.3 顶分支 τ_{2F} 中的 45 个主积分。黑色、红色和蓝色的线分别代表无质量粒子， W 玻色子和顶夸克。传播子上每多一个点表示对应幂加 1。

[229] 的帮助下, 我们通过以下变换成功地使 r_1 、 r_2 和 r_3 同时有理化:

$$(x, y, z) \mapsto (x_2, y_2, z_2) : \begin{cases} x = \frac{x_2^2}{x_2 + 1} \\ y = \frac{x_2(x_2 + 1)y_2 z_2^2 - x_2^2[y_2^2 - (x_2 + 1)](z_2 + 1)}{(x_2 + 1)(y_2 + 1)[y_2 - (x_2 + 1)]z_2^2} \\ z = -\frac{x_2^2(z_2 + 1)}{z_2^2(x_2 + 1)} \end{cases} \quad (3.20)$$

最后整个微分系统只剩下一个不可有理化的平方根,

$$R = \sqrt{[\lambda_1 z_2^2 + \lambda_2(z_2 + 1)][\lambda_3 z_2^2 + \lambda_4(z_2 + 1)]}, \quad (3.21)$$

其中, λ_i ($i = 1, \dots, 4$) 是 x_2 和 y_2 的多项式, 其形式为

$$\lambda_i = \mu_i y_2 + \nu_i [y_2^2 - (x_2 + 1)], \quad (3.22)$$

且有

$$\begin{aligned} \mu_1 &= x_2(x_2 + 1), & \nu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 0, & \nu_2 &= -x_2^2, \\ \mu_3 &= x_2(x_2 + 1)[8(x_2 + 1) + x_2^2], & \nu_3 &= -4(x_2 + 1)^2, \\ \mu_4 &= -4x_2^3(x_2 + 1), & \nu_4 &= -x_2^4. \end{aligned} \quad (3.23)$$

这种无法有理化的平方根会使得我们不能方便地利用 GPL 来表示所有 45 个正则基。但如果我们能够选择一个容易得到的初始点, 方程的解仍然可以写为编路径的形式。

对于顶分支 \mathcal{T}_{2F} 所构成的微分方程系统, 系数矩阵 \mathbb{A}_x 可以展开为小 y 和 z 的泰勒级数, 而 \mathbb{A}_y 和 \mathbb{A}_z 是洛朗级数。

$$\begin{cases} \mathbb{A}_x(x, y, z) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{x,(m,n)}(x) y^m z^n, \\ \mathbb{A}_y(x, y, z) = \frac{\mathbb{A}_{y,(-1,0)}}{y} + \sum_{m,n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{y,(m,n)}(x) y^m z^n, \\ \mathbb{A}_z(x, y, z) = \frac{\mathbb{A}_{z,(0,-1)}}{z} + \sum_{m,n=0}^{+\infty} \mathbb{A}_{z,(m,n)}(x) y^m z^n, \end{cases} \quad (3.24)$$

其中, $\mathbb{A}_{y,(-1,0)}$ 和 $\mathbb{A}_{z,(0,-1)}$ 都是常数矩阵。在最低阶近似中,

$$\begin{aligned} d\mathbb{A}(x, y, z) &= \mathbb{A}_{x,(0,0)}(x) dx + \frac{\mathbb{A}_{y,(-1,0)}}{y} dy + \frac{\mathbb{A}_{z,(0,-1)}}{z} dz \\ &= \mathbb{A}_{y,(-1,0)} d \log y + \mathbb{A}_{z,(0,-1)} d \log z + \sum_{i=1}^5 \tilde{\mathbb{C}}_i d \log \tilde{\omega}_i(x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

取近似之后的正则微分方程系统包含了 7 个 letter,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= x, & \tilde{\omega}_4 &= x+1, & \tilde{\omega}_7 &= (x-r_1)/(x+r_1), \\ \tilde{\omega}_2 &= y, & \tilde{\omega}_5 &= x-1, \\ \tilde{\omega}_3 &= z, & \tilde{\omega}_6 &= x+4,\end{aligned}\tag{3.26}$$

其中唯一的根式 r_1 可以通过式3.20中的变换 $x \mapsto x_2$ 实现有理化。因此, 求解具有有理系数矩阵的正则微分系统的方法同样适用于该近似系统。其解我们记为 \tilde{g} , 可以用以下边界条件求出:

- $g_{1,4,9,10}$ 由参考文献 [227] 得知。
- $g_{2,5,11,\dots,17,27,28}$ 与 \mathcal{T}_{1F} 中的 $g_{1,2,6,7,8,9,11,12,13,22,23}$ 匹配。
- 其余的 30 个主积分的积分常数将由下面这些运动学极限下的行为确定:
 - 在 $x=0$ 处有限: $g_{3,8,18,\dots,26,29,30,32,35,36,37,42,43,44,45^\circ}$
 - 在 $y=0$ 处有限: $g_{29,37,41,42,44,45^\circ}$
 - 在 $z=0$ 处有限: $g_{6,32^\circ}$
 - 在 $x=-4$ 处有限: g_{39°

g 在 y 和 z 是小量时, 其领头阶行为由 \tilde{g} 给出。由区域展开方法得出 g 在 $y=0$ 和 $z=0$ 处的敛散性, 表明 g 在 $(x, y, z) = (x, 0, 0)$ 处都是有限的。因此, 我们得到

$$g(x, 0, 0; \epsilon) = \tilde{g}(x, 0, 0; \epsilon),\tag{3.27}$$

它们的解可以由变量为 x_2 且带有常量 weight 的 GPL 表示出来。这也说明我们可以选择 $(x, y, z) = (x, 0, 0)$ 作为路径积分的初始点 \mathbf{x}_0 , 并且初始值 $g_i(\mathbf{x}_0; \epsilon)$ ($i = 1, \dots, 45$) 都可以方便地在最低阶近似下求解。

积分的路径被选为一条在 (x_2, y_2, z_2) 参数空间连接 \mathbf{x}_0 到 \mathbf{x} 的直线。根据变换 (3.20), 点 \mathbf{x}_0 对应于 $y_2 = 0$ 以及 $z_2 = -1$ 。积分路径的参数化形式为

$$\gamma : \begin{cases} x_2(\kappa) = x_2 \\ y_2(\kappa) = \kappa y_2 \\ z_2(\kappa) = \kappa(z_2 + 1) - 1 \end{cases} \quad 0 \leq \kappa \leq 1.\tag{3.28}$$

积分的结果可以表示为关于 ϵ 展开的泰勒级数的形式,

$$g(\mathbf{x}; \epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n g^{(n)}(\mathbf{x}),\tag{3.29}$$

其中 $g^{(n)}(\mathbf{x})$ ($n \in \mathbb{N}$) 可以写为迭代的形式,

$$g^{(n)}(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} d\mathbb{A} g^{(n-1)} + g^{(n)}(\mathbf{x}_0).\tag{3.30}$$

通过分部积分 [217], 我们也可以将 $g^{(n)}$ 表示为对 $g^{(n-2)}$ 的一重积分,

$$g^{(n)}(x) = \int_{\gamma} \left[\mathbb{A}(x) - \mathbb{A} \right] d\mathbb{A} g^{(n-2)} + \left[\mathbb{A}(x) - \mathbb{A}(x_0) \right] g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0). \quad (3.31)$$

直到 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, 所有 45 个主积分都能够用 GPL 表示。 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 和 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ 需要分别利用式 (3.30) 和 (3.31) 将结果写为一重积分的形式。不过幸运地是, 除了 g_{36} 的 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 和 $g_{36,37,38,44,45}$ 的 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$, 其余的解都可以表示为 GPL。

为了得到更简单的表达式形式, 我们从 45 个正则基构造的整个系统中分离出一个封闭且完备的可有理化的子系统, 它由 33 个主积分组成, 即 $g_{1,\dots,28,32,33,34,35,39}$ 。之后我们在该子系统中重新计算得到了这些积分的解, 与整个系统相比, 子系统中的 letter 只包含两个根式 r_1 和 r_2 。通过式 (3.20) 中的变换将 $(x, z) \mapsto (x_2, z_2)$, 我们可以使两个根式同时有理化。随后, 该有理系统可以沿直线作路径积分至参数空间 (x_2, y, z_2) 任意点处。为了更好地说明该操作的目的, 我们在 (3.32) 展示了 g_{13} ^① 在整个 45 维的微分系统与 33 维的子系统中解的差别, 以及在表 3.1 积分 $g_{1,\dots,28,32,33,34,35,39}$ 里不同阶中含有 GPL 种类的数目在不同系统中的对比。正如所期望的那样, 这 33 个主积分在子系统中求得的解相比于在完整系统中求得的解要更加简洁。因此对于 $g_{1,\dots,28,32,33,34,35,39}$, 我们采用子系统给出的解析表达式, 而不是整个系统给出的解析表达式。在附录中 B.2, 我们展示了顶分支 \mathcal{T}_{2f} 中的正则基 g_i ($i = 1, \dots, 45$) 写到 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的结果。

$$g_{13}^{(1)}(\text{full}) = -2G(a_7; 1) + G(a_8; 1) + G(a_9; 1) - G(a_{10}; 1) - G(a_{11}; 1) + G(a_{12}; 1) + G(a_{13}; 1), \quad (3.32)$$

$$g_{13}^{(1)}(\text{sub}) = G(a_6; 1). \quad (3.33)$$

表 3.1 分别在完整系统和子系统获得到的 33 个主积分 $g_{1,\dots,28,32,33,34,35,39}$ 的解中, 所包含的 GPL 种类的数目

阶	N_{GPL} (完整系统)	N_{GPL} (子系统)
ϵ^1	9	6
ϵ^2	104	59
ϵ^3	1702	678
ϵ^4	26440	6511

^①式 (3.32) 中各 GPL 的权重矢量的分量 $a_{6,\dots,13}$ 在式 (B.4) 和 (B.5) 中定义。

3.3.3 顶分支 \mathcal{T}_{3F}

顶分支 \mathcal{T}_{3F} 的主积分, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{15})^T$ 如图3.4所示。主要的挑战是在 \mathcal{T}_{3F} 中, 存在椭圆 sector,

$$\mathcal{T}_{\text{elliptic}} = [0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]. \quad (3.34)$$

由于椭圆费曼积分的出现, 微分系统将难以变换到正则形式。我们利用 loop-by-loop 的方法计算了 Baikov 表示下积分 $f_{13} = I_{0,1,1,2,0,0,1,1,0} \in \mathcal{T}_{\text{elliptic}}$ 的 maximal cut, 然后得到

$$\text{MaxCut}(f_{13}) = \frac{1}{4\pi^3 \sqrt{x(x-4z)}} \int_{C_{\text{MaxCut}}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.35)$$

其中,

$$\xi_{1,2} = -\frac{(x-2z)y + 2z^2 \pm 2z\sqrt{xy + (y-z)^2}}{x-4z}, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 4. \quad (3.36)$$

式 (3.35) 中 maximal cut 的解析表达式表明, 与椭圆 sector 相关的椭圆曲线为,

$$(\xi, \vartheta) : \quad \vartheta^2 = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4). \quad (3.37)$$

椭圆曲线的模 (modulus) k 以及互补模 (complementary modulus) \bar{k} 定义为

$$k^2 = \frac{U_1}{U_3}, \quad \bar{k}^2 = \frac{U_2}{U_3}, \quad (3.38)$$

其中,

$$U_1 = (\xi_3 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_1), \quad U_2 = (\xi_2 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_3), \quad U_3 = (\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2). \quad (3.39)$$

椭圆曲线两个独立的周期为

$$\Psi_1 = \frac{4K(k)}{U_3^{1/2}}, \quad \Psi_2 = \frac{4iK(\bar{k})}{U_3^{1/2}}, \quad (3.40)$$

式中 $K(x)$ 为第一类完全椭圆积分,

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}. \quad (3.41)$$

利用椭圆曲线的周期, 我们可以构造一组新的基, 它满足式 (3.13) 的线性微分方程, 其中 $\mathbb{A}_i^{(0)}(\mathbf{x})$ 是严格的下三角矩阵 [218, 223]。线性基的构造由下面给

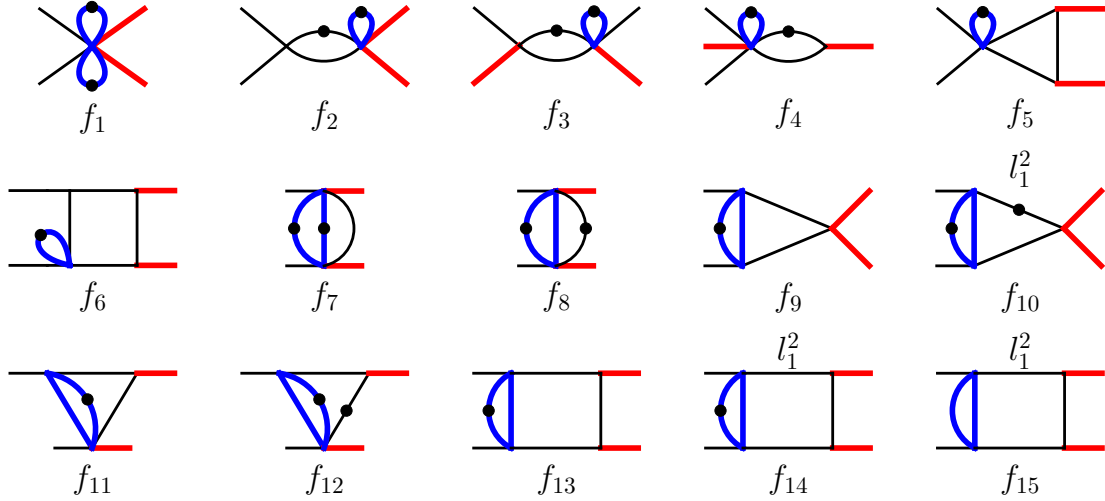


图 3.4 顶分支 τ_{3F} 中的 15 个主积分。黑色、红色和蓝色的线分别代表无质量粒子, W 玻色子和顶夸克。传播子上每多一个点表示对应幂加 1。

出,

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \epsilon^2 f_1, & g_9 &= \epsilon^3 f_9 x, \\
 g_2 &= \epsilon^2 f_2 x, & g_{10} &= \epsilon^2 f_{10} r'_1 - \epsilon^3 f_9 r'_1, \\
 g_3 &= \epsilon^2 f_3 y, & g_{11} &= \epsilon^3 f_{11} (y - z), \\
 g_4 &= \epsilon^2 f_4 z, & g_{12} &= [\epsilon^2 f_{12} z + \epsilon^3 f_{11} (y - z) - \epsilon^2 f_8 y] r'_4 / (y - z), \\
 g_5 &= \epsilon^3 f_5 r'_3, & g_{13} &= \epsilon^3 \frac{\pi r'_3}{\Psi_1} f_{13}, \\
 g_6 &= \epsilon^3 f_6 x y, & g_{14} &= \epsilon^3 f_{14} r'_3, \\
 g_7 &= \epsilon^2 f_7 y, & & \\
 g_8 &= \epsilon^2 f_8 r'_2 + 1/2 f_7 r'_2, & g_{15} &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\Psi_1^2}{2\pi i W_y} \frac{\partial g_{13}}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

其中, 两个周期 $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ 的 Wronskian 行列式 W_y 定义为

$$W_y = \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \tag{3.43}$$

进一步地, 它能够被写为

$$W_y = \frac{4\pi i}{U_3} \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{U_2}{U_1} = \frac{2\pi i (x - 4z) [x(3y + 4) + 2(y - z)(y - 2z) - 16z]}{y [xy + (y - z)^2] [16z(y - z + 4) - x(y + 4)^2]}. \tag{3.44}$$

式 (3.42) 中的四个不同根式为

$$\begin{aligned}
 r_1'^2 &= x(x - 4), & r_2'^2 &= y(y + 4), \\
 r_3'^2 &= x(x - 4z), & r_4'^2 &= (z - y)(y - z + 4).
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

由于 $\mathbb{A}_i^{(0)}(\mathbf{x})$ 为严格下三角矩阵, 我们仍然可以将此线性微分系统的解写为迭代形式。即使 \mathcal{T}_{3F} 中涉及到椭圆费曼积分, 我们仍然可以采用3.3.2小节中的方法求出 $g_i(\mathbf{x}; \epsilon)$ ($i = 1, \dots, 15$) 在适当的初始点的值。

在 $(y, z) = (y_0, z_0)$ 附近的最低阶近似下, 线性型微分方程的系数矩阵 $\mathbb{A}_i^{(a)}$ ($a = 0, 1$ 以及 $i = x, y, z$) 可近似为

$$\mathbb{A}_x^{(a)}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}_{x,(0,0)}^{(a)}(x), \quad \mathbb{A}_y^{(a)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{A}_{y,(-1,0)}^{(a)}}{y - y_0}, \quad \mathbb{A}_z^{(a)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbb{A}_{z,(0,-1)}^{(a)}}{z - z_0}, \quad (3.46)$$

在我们的计算中, 我们取 $(y_0, z_0) = (0, 1)$, 原因有下面几个:

1. 15 个线性基 \mathbf{g} 在 $y = 0$ 和 $z = 1$ 处都是有限的。
2. 当 $(y_0, z_0) = (0, 1)$ 时, 有

$$\mathbb{A}_{x,(0,0)}^{(0)}(x) = \mathbb{A}_{y,(-1,0)}^{(0)} = \mathbb{A}_{z,(0,-1)}^{(0)} = \mathbb{A}_{z,(0,-1)}^{(1)} = 0. \quad (3.47)$$

近似的微分系统退化为正则微分系统,

$$d\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}; \epsilon) = \epsilon \left[\mathbb{A}_{x,(0,0)}^{(1)}(x) dx + \frac{1}{y} \mathbb{A}_{y,(-1,0)}^{(1)} \right] \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}; \epsilon). \quad (3.48)$$

3. 在 $y \rightarrow 0$ 与 $z \rightarrow 1$ 极限下,

$$r'_2 = 0, \quad r'_4 = \sqrt{3}, \quad r'_3 = r'_1 = \sqrt{x(x-4)}, \quad (3.49)$$

且有

$$\Psi_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{x-4}, \quad \partial_y \Psi_1 = \frac{\pi}{8} (2-x) \sqrt{x-4}. \quad (3.50)$$

该正则微分系统只包含两个根式, 可以利用下面的变换使两个根式同时有理化,

$$x = \left(x_3 + \frac{1}{x_3} \right)^2. \quad (3.51)$$

因此, \mathcal{T}_{3F} 在 $(y, z) = (0, 1)$ 附近的线性基的微分系统可以近似为一个可有理化的正则微分系统。该微分系统的解可以简单地用 **GPL** 表示, 并由以下边界条件指定:

- $g_{1,\dots,8}$ 由参考文献 [227] 得知。
- 在 $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ 处, 有 $g_{11} = -g_9$ 和 $g_{12} = i g_{10}$ 。
- 其余的 5 个主积分的积分常数将由下面这些运动学极限下的行为确定:
 - g_9 在 $x = 0$ 有限。
 - g_{13} 分别在 $x = 0$ 、 $x = 3$ 和 $y = 0$ 有限。
 - g_{14} 在 $x = 4$ 有限。

线性基 $g(\mathbf{x}; \epsilon)$ 在 $(x, y, z) = (x, 0, 1)$ 是有限的。因此, $(x, 0, 1)$ 被设为初始点 \mathbf{x}_0 , 初始值 $g_i(\mathbf{x}_0, \epsilon)$ ($i = 1, \dots, 15$) 则由近似解给出,

$$g(\mathbf{x}_0; \epsilon) = \tilde{g}(\mathbf{x}_0; \epsilon). \quad (3.52)$$

我们选择积分路径为 (x_3, y, z) 参数空间中连接 \mathbf{x}_0 至 \mathbf{x} 的一条直线,

$$\gamma : \begin{cases} x_3(\kappa) = x_3 \\ y(\kappa) = \kappa y \\ z(\kappa) = \kappa(z - 1) + 1 \end{cases} \quad 0 \leq \kappa \leq 1. \quad (3.53)$$

这样 \mathcal{T}_{3F} 中的积分 g_i ($i = 1, \dots, 15$) 都可以用迭代积分的形式表示。在附录B.3中, 我们只展示了属于椭圆 sector 的 g_{13} 、 g_{14} 和 g_{15} 的解析表达式。

3.4 数值检验

正则基 \mathcal{T}_{iF} ($i = 1, 2, 3$) 的解析表达式在正如之前所提到的, \mathcal{T}_{1F} 和 \mathcal{T}_{2F} 中的正则基, 直到 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ 的解都可以表示为 GPL 或 GPL 的一重积分。我们借助了 Mathematica 程序包 PolyLogTools [230-232] 和 C++ 库 GiNaC [233-234] 来处理 GPL 的符号和数值计算。为了验证 \mathcal{T}_{1F} 和 \mathcal{T}_{2F} 微分系统的解析解, 我们将欧氏区域的结果与 Mathematica 程序包 AMFlow [235] 获得的数值结果进行了对比。在表3.2中, 我们给出了在 $(x, y, z) = (17/2, 1/3, 5/3)$ 点处, \mathcal{T}_{1F} 和 \mathcal{T}_{2F} 一些具有代表性的主积分, 通过解析表达式与 AMFlow 得到的数值结果的比较。

所选数值结果如表3.2所示。结果表明, 前两种顶结构的积分都可以高精度地进行数值计算,

$$\left| \frac{I^{\text{analytic}} - I^{\text{AMFlow}}}{I^{\text{AMFlow}}} \right| < 10^{-30}. \quad (3.54)$$

对于顶分支 \mathcal{T}_F , 其涉及椭圆 sector, 主积分的数值结果直接通过迭代积分求出。由于所涉及的被积表达式的复杂性, 我们只验证到了 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 。值得注意的是, 计算这些数值结果需要大量的计算资源, 因此, 一种更加高效的数值积分方法也是值得研究的。表3.3给出了解析与独立获得的数值的结果。

表 3.2 在动力学点 ($x = 17/2, y = 1/3, z = 5/3$) 处, 通过 $\mathcal{T}_{1,2F}$ 中选取积分的解析表达式获得的数值结果, 与 **AMFlow** 给出的相应值之间的比较。

积分	方法	结果
$g_{25} \in \mathcal{T}_{1F}$	解析	-0.25
		$+0.3768859011881900759989191267492984157 \epsilon$
		$-1.2620443490084127732359725216242483421 \epsilon^2$
		$-0.7517989880793716026311279513267280442 \epsilon^3$
		$+2.5243257885032819715982812514126356527 \epsilon^4$
	AMFlow	-0.25 $+0.3768859011881900759989191267492984157 \epsilon$ $-1.2620443490084127732359725216242483421 \epsilon^2$ $-0.7517989880793716026311279513267280442 \epsilon^3$ $+2.5243257885032819715982812514126356527 \epsilon^4$
$g_{42} \in \mathcal{T}_{2F}$	解析	$-2.1153713978990082749586947832894060646 \epsilon^2$
		$-0.8166254210332590669598372077758470683 \epsilon^3$
		$+1.8108236510538266812815390892429259758 \epsilon^4$
	AMFlow	$-2.1153713978990082749586947832894060646 \epsilon^2$
		$-0.8166254210332590669598372077758470683 \epsilon^3$
		$+1.8108236510538266812815390892429259758 \epsilon^4$
$g_{36} \in \mathcal{T}_{2F}$	解析	$0.9282065930624508142424433019313325833 \epsilon^3$
		$+1.2458618319714537281221371673463469360 \epsilon^4$
	AMFlow	$0.9282065930624508142424433019313325833 \epsilon^3$
		$+1.2458618319714537281221371673463469360 \epsilon^4$

表 3.3 在运动学点 ($x = 17/2, y = 1/3, z = 5/3$) 处, 由 \mathcal{T}_{3F} 中的解析表达式得到数值结果与用 **AMFlow.m** 得到的相应值之间的比较。

积分	解析 / AMFlow
g_{13}	$3.25482756069829030572 \epsilon^3 / 3.25482756069829030514 \epsilon^3$
g_{14}	$-2.337560556018276873 \epsilon^3 / -2.337560556018276912 \epsilon^3$
g_{15}	$-0.0941324619097784037373626 \epsilon^2 - 0.07156553140068870 \epsilon^3 /$
	$-0.0941324619097784037373607 \epsilon^2 - 0.07156553140068855 \epsilon^3$

3.5 本章小结

本章中我们给出了 NNLO QCD 修正下 W 玻色子对产生过程中的双圈平面主积分的解析结果。我们考虑了传播子中的顶夸克质量, 这些主积分中出现了椭圆费曼积分。

我们建立了三个不同的微分方程组, 分别由 27、45 和 15 个主积分构建。通

过选择适当的基, 我们构造了前两个微分方程系统的正则形式。在对方程中出现的根式进行有理化之后, 它们的解可以用 GPL 表示。由于未能有理化系统中涉及到的所有根式, 其中有五个积分不能由 GPL 表示, 但是我们可以通过分部积分的方法将它们的 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 和 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ 表示为一重积分。在最低阶近似下, 我们通过分析费曼积分的敛散性确定了积分的边界条件。在第三个拓扑中, 我们遇到了椭圆费曼积分, 它对应于从 maximal cut 中分析得来的椭圆曲线。通过引入椭圆曲线的周期和它的导数, 我们将这个系统转换成了关于 ϵ 的线性形式, 其中微分方程系数矩阵的 $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ 部分是严格的下三角矩阵。我们将主积分结果以迭代积分的形式表示并写至 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 。最后我们用数值程序 AMFlow 验证了结果。

第4章 总 结

大型强子对撞机上实验结果和通过微扰论计算得到的理论预言之间的互相检验是高能物理方向的当务之急。精确计算是目前理论发展最重要的突破口，因此，我们需要提高计算散射振幅的效率。其中，高效且精确的获得费曼积分的结果对理论预言有着重要意义，也是高精度计算的瓶颈之一。经过几十年的发展，已有不少求解费曼积分的技术方法被提出，本篇论文中我们主要研究了高能物理中费曼积分的解析计算。

首先我们在第一章回顾了标准模型的建立以及利用费曼图进行微扰论计算的方法，指出费曼图中涉及到的多圈费曼积分是微扰论计算的一大难点。第二章中我们介绍了费曼积分的相关概念和目前与之相关的研究技术。维数正规化方法可以将积分中的发散发征出来，积分结果可以表示为 ϵ 的洛朗级数展开的形式。通过将费曼积分变换到特定表示下，我们能够直接计算出积分的结果，或者得到某些可以利用的性质。我们分别介绍了 **Schwinger** 参数表示、费曼参数表示以及 **Baikov** 表示。费曼参数表示被广泛地应用于直接计算费曼积分的结果，并且已经有许多实用的程序包被开发出来；而 **Baikov** 表示则更多地用于分析积分性质，例如利用其来寻找正则基。除了直接计算费曼积分，目前更加有效的方法是构建费曼积分关于运动学变量的微分方程组，通过求解方程组进而获得费曼积分的表达式。我们介绍了此类方法的基本概念和一些简单的例子，并结合所给例子，展示了正则微分方程具有的便利性。我们还介绍了如何利用费曼积分的 **cut**，并且说明了利用其寻找正则基的可能性。但是对于多圈多外腿以及多标度的积分，该方法应用时很难找到正则形式。另外在具体工作中，还存在许多需要引入根式来构建正则微分方程系统的情况。同时有理化根式通常只有在根式数量少、根式形式简单的情况下完成，大量根式将导致我们难以利用已知的特殊函数 **GPL** 来写出积分的表达式。

对于轻夸克对湮灭产生玻色子对的过程，已有不少唯象学方面的研究。在所有带质量玻色子对产生中，该过程具有最大的产生截面，被广泛应用于研究电弱相互作用的规范对称性以及电弱对称性的破缺机制。我们不仅能够利用其对 W 玻色子质量进行精确测量，还能够对反常三规范玻色子耦合顶点进行检验。由于 W 玻色子对的产生过程为 **Higgs** 粒子衰变过程的不可约本底，其在寻找 **Higgs** 玻色子的过程中也有着不可或缺的作用。研究轻夸克对湮灭产生玻色子对的过程的解析计算对于理论预言也是十分重要的方面。但是由于其涉及的主积分中传播子所带标度较多，完整的解析结果仍然处于探索中。在本文第三章，我们计算了该过程中的平面主积分，该过程中存在三个需要被计算的双圈平面拓扑结

构。由此我们建立了三个独立的微分方程系统，在构建正则微分方程的过程中我们遇到了根式的有理化问题，以及线性微分方程求解的问题。最终写出了这些主积分的表达式，其中有三个主积分属于椭圆 sector，最终的结果不仅包含 GPL 及其一重积分，还有关于椭圆积分的迭代积分。最后我们通过与现有数值方法作比较，检验了结果的正确性。而如何高效获得这些出现的特殊函数的数值解，也是目前急需的技术，只有攻克这些技术难题，我们才能系统且高效地得到更高圈、更多标度费曼积分的解析结果，推动解析计算在高能唯象理论中更深层次的发展。不止如此，研究高阶微扰论修正中费曼积分也能加深人们对于量子场论中数学原理的理解，为理论发展提供有力的支撑。

在利用微扰论对物理过程进行更精确计算时，我们不可避免地会涉及多变量、多标度的费曼积分。而随着对理论预言精度要求的日益严格，所需处理的费曼积分复杂性也显著提升。这类积分解析性质所需的数学背景往往还没有被物理学家深入研究，将其系统性地应用于各种物理计算中仍是一个艰巨的任务。虽然可以通过数值的方法求解并将其应用于具体的物理过程研究中，但是获得其解析表达式以及其背后的数学原理将在一定程度上使我们更好理解量子场论所蕴含的更深层的对称性。并且解析计算在很多情况下仍然是获得物理结果的高效途径，具有不可忽视的实用价值。

参 考 文 献

- [1] Arnison G, et al. Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV[J/OL]. Phys Lett B, 1983, 122: 103-116. DOI: 10.1016/0370-2693(83)91177-2.
- [2] Banner M, et al. Observation of Single Isolated Electrons of High Transverse Momentum in Events with Missing Transverse Energy at the CERN anti-p p Collider[J/OL]. Phys Lett B, 1983, 122: 476-485. DOI: 10.1016/0370-2693(83)91605-2.
- [3] Arnison G, et al. Experimental Observation of Lepton Pairs of Invariant Mass Around 95-GeV/ c^2 at the CERN SPS Collider[J/OL]. Phys Lett B, 1983, 126: 398-410. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90188-0.
- [4] Bagnaia P, et al. Evidence for $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ at the CERN $\bar{p}p$ Collider[J/OL]. Phys Lett B, 1983, 129: 130-140. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90744-X.
- [5] Abe F, et al. Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions[J/OL]. Phys Rev Lett, 1995, 74: 2626-2631. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2626.
- [6] Abachi S, et al. Observation of the top quark[J/OL]. Phys Rev Lett, 1995, 74: 2632-2637. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2632.
- [7] Aad G, et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC[J/OL]. Phys Lett B, 2012, 716: 1-29. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020.
- [8] Chatrchyan S, et al. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC[J/OL]. Phys Lett B, 2012, 716: 30-61. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.021.
- [9] Riebesell J, Bringuier S. Collection of standalone tikz images[CP/OL]. 2020. DOI: 10.5281/zenodo.7486911.
- [10] Cleveland B T, Daily T, Davis R, Jr., et al. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector[J/OL]. Astrophys J, 1998, 496: 505-526. DOI: 10.1086/305343.
- [11] Kodama K, et al. Observation of tau neutrino interactions[J/OL]. Phys Lett B, 2001, 504: 218-224. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00307-0.
- [12] Ahmad Q R, et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ^8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory[J/OL]. Phys Rev Lett, 2001, 87: 071301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.071301.
- [13] Ahmad Q R, et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current

- interactions in the Sudbury Neutrino Observatory[J/OL]. Phys Rev Lett, 2002, 89: 011301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.011301.
- [14] Workman R L, Others. Review of Particle Physics[J/OL]. PTEP, 2022, 2022: 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
- [15] Jones L W. A Review of Quark Search Experiments[J/OL]. Rev Mod Phys, 1977, 49: 717. DOI: 10.1103/RevModPhys.49.717.
- [16] Lyons L. Quark Search Experiments at Accelerators and in Cosmic Rays[J/OL]. Phys Rept, 1985, 129: 225. DOI: 10.1016/0370-1573(85)90011-0.
- [17] Perl M L, Lee E R, Loomba D. A Brief review of the search for isolatable fractional charge elementary particles[J/OL]. Mod Phys Lett A, 2004, 19: 2595-2610. DOI: 10.1142/S0217732304016019.
- [18] Liu C, et al. Latest results on searching for fractionally charged particles with the DAMPE experiment[J/OL]. PoS, 2023, ICRC2023: 149. DOI: 10.22323/1.444.0149.
- [19] Hayrapetyan A, et al. Search for fractionally charged particles in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV[A]. 2024. arXiv: 2402.09932.
- [20] Wilson K G. Confinement of Quarks[J/OL]. Phys Rev D, 1974, 10: 2445-2459. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445.
- [21] Callan C G, Jr., Coote N, Gross D J. Two-Dimensional Yang-Mills Theory: A Model of Quark Confinement[J/OL]. Phys Rev D, 1976, 13: 1649. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.1649.
- [22] Hasenfratz P, Kuti J. The Quark Bag Model[J/OL]. Phys Rept, 1978, 40: 75-179. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90076-5.
- [23] Ambjorn J, Olesen P. A Color Magnetic Vortex Condensate in QCD[J/OL]. Nucl Phys B, 1980, 170: 265-282. DOI: 10.1016/0550-3213(80)90150-9.
- [24] Buballa M. NJL model analysis of quark matter at large density[J/OL]. Phys Rept, 2005, 407: 205-376. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004.
- [25] Gross D J, Wilczek F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories[J/OL]. Phys Rev Lett, 1973, 30: 1343-1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [26] Gross D J, Wilczek F. Asymptotically Free Gauge Theories - I[J/OL]. Phys Rev D, 1973, 8: 3633-3652. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3633.
- [27] Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to quantum field theory[M]. 1995.
- [28] Schwartz M D. Quantum Field Theory and the Standard Model[M]. 2014.
- [29] Weinberg S. The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications[M/OL]. 2013. DOI: 10.1017/CBO9781139644174.
- [30] Passarino G, Veltman M J G. One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model[J/OL]. Nucl Phys B, 1979, 160: 151-207. DOI: 10.1016/0550-321

- 3(79)90234-7.
- [31] Ezawa Y, et al. Brown-Feynman reduction of one loop Feynman diagrams to scalar integrals with orthonormal basis tensors[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 1992, 69: 15-45. DOI: 10.1016/0010-4655(92)90125-I.
 - [32] Denner A, Dittmaier S. Reduction schemes for one-loop tensor integrals[J/OL]. *Nucl Phys B*, 2006, 734: 62-115. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.11.007.
 - [33] Ossola G, Papadopoulos C G, Pittau R. Reducing full one-loop amplitudes to scalar integrals at the integrand level[J/OL]. *Nucl Phys B*, 2007, 763: 147-169. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.11.012.
 - [34] Binoth T, Guillet J P, Heinrich G, et al. Golem95: A Numerical program to calculate one-loop tensor integrals with up to six external legs[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2009, 180: 2317-2330. DOI: 10.1016/j.cpc.2009.06.024.
 - [35] van Hameren A. Multi-gluon one-loop amplitudes using tensor integrals[J/OL]. *JHEP*, 2009, 07: 088. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/07/088.
 - [36] Cascioli F, Maierhofer P, Pozzorini S. Scattering Amplitudes with Open Loops[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 111601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.111601.
 - [37] Peraro T, Tancredi L. Tensor decomposition for bosonic and fermionic scattering amplitudes [J/OL]. *Phys Rev D*, 2021, 103: 054042. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.054042.
 - [38] Bourjaily J L, McLeod A J, von Hippel M, et al. Bounded Collection of Feynman Integral Calabi-Yau Geometries[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 031601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.031601.
 - [39] Bönisch K, Duhr C, Fischbach F, et al. Feynman integrals in dimensional regularization and extensions of Calabi-Yau motives[J/OL]. *JHEP*, 2022, 09: 156. DOI: 10.1007/JHEP09(2022)156.
 - [40] Bourjaily J L, et al. Functions Beyond Multiple Polylogarithms for Precision Collider Physics [C]//Functions Beyond Multiple Polylogarithms for Precision Collider Physics. 2022.
 - [41] Morales R, Spiering A, Wilhelm M, et al. Bootstrapping Elliptic Feynman Integrals Using Schubert Analysis[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2023, 131: 041601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.131.041601.
 - [42] Duhr C, Klemm A, Nega C, et al. The ice cone family and iterated integrals for Calabi-Yau varieties[J/OL]. *JHEP*, 2023, 02: 228. DOI: 10.1007/JHEP02(2023)228.
 - [43] Bern Z, Carrasco J J M, Johansson H. Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 061602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.061602.
 - [44] Bern Z, Cheung C, Roiban R, et al. Black Hole Binary Dynamics from the Double Copy and

- Effective Theory[J/OL]. JHEP, 2019, 10: 206. DOI: 10.1007/JHEP10(2019)206.
- [45] Buonanno A, Khalil M, O'Connell D, et al. Snowmass White Paper: Gravitational Waves and Scattering Amplitudes[C]//Snowmass 2021. 2022.
- [46] Febres Cordero F, Kraus M, Lin G, et al. Conservative Binary Dynamics with a Spinning Black Hole at O(G3) from Scattering Amplitudes[J/OL]. Phys Rev Lett, 2023, 130: 021601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.130.021601.
- [47] 't Hooft G, Veltman M. Regularization and renormalization of gauge fields[J/OL]. Nucl Phys B, 1972, 44: 189-213. DOI: 10.1016/0550-3213(72)90279-9.
- [48] Bollini C G, Giambiagi J J. Dimensional renormalization : The number of dimensions as a regularizing parameter[J/OL]. Il Nuovo Cimento B, 1972, 12: 20-26. DOI: 10.1007/BF02895558.
- [49] Cicuta G M, Montaldi E. Analytic renormalization via continuous space dimension[J/OL]. Lettere Al Nuovo Cimento Series 2, 1972, 4: 329-332. DOI: 10.1007/BF02756527.
- [50] Wilson K G. Quantum field theory models in less than four-dimensions[J/OL]. Phys Rev D, 1973, 7: 2911-2926. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2911.
- [51] Collins J C. Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion: Vol. 26[M/OL]. 1986. DOI: 10.1017/CBO9780511622656.
- [52] Panzer E. Algorithms for the symbolic integration of hyperlogarithms with applications to Feynman integrals: Vol. 188[A/OL]. 2015: 148-166. 1403.3385.
- [53] Panzer E. On hyperlogarithms and Feynman integrals with divergences and many scales [J/OL]. JHEP, 2014, 03: 071. DOI: 10.1007/JHEP03(2014)071.
- [54] Cheng H, Wu T T. EXPANDING PROTONS: SCATTERING AT HIGH-ENERGIES[M]. 1987.
- [55] Carter J, Heinrich G. SecDec: A general program for sector decomposition[J/OL]. Comput Phys Commun, 2011, 182: 1566-1581. DOI: 10.1016/j.cpc.2011.03.026.
- [56] Borowka S, Carter J, Heinrich G. Numerical evaluation of multi-loop integrals for arbitrary kinematics with SecDec 2.0[J/OL]. Comput Phys Commun, 2013, 184: 396-408. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.09.020.
- [57] Borowka S, Heinrich G, Jones S P, et al. SecDec-3.0: Numerical evaluation of multi-scale integrals beyond one loop[J/OL]. Comput Phys Commun, 2015, 196: 470-491. DOI: 10.1016/j.cpc.2015.05.022.
- [58] Borowka S, Heinrich G, Jahn S, et al. pySecDec: A toolbox for the numerical evaluation of multi-scale integrals[J/OL]. Comput Phys Commun, 2018, 222: 313-326. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.09.015.

- [59] Borowka S, Heinrich G, Jahn S, et al. A GPU compatible quasi-Monte Carlo integrator interfaced to pySecDec[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2019, 240: 120-137. DOI: 10.1016/j.cpc.2019.02.015.
- [60] Smirnov A V, Tentyukov M N. Feynman Integral Evaluation by a Sector decomposition Approach (FIESTA)[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2009, 180: 735-746. DOI: 10.1016/j.cpc.2008.11.006.
- [61] Smirnov A V, Smirnov V A, Tentyukov M. FIESTA 2: Parallelizeable multiloop numerical calculations[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2011, 182: 790-803. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.11.025.
- [62] Smirnov A V, Shapurov N D, Vysotsky L I. FIESTA5: Numerical high-performance Feynman integral evaluation[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2022, 277: 108386. DOI: 10.1016/j.cpc.2022.108386.
- [63] Baikov P A. Explicit solutions of the multiloop integral recurrence relations and its application[J/OL]. *Nucl Instrum Meth A*, 1997, 389: 347-349. DOI: 10.1016/S0168-9002(97)00126-5.
- [64] Kosower D A, Larsen K J. Maximal Unitarity at Two Loops[J/OL]. *Phys Rev D*, 2012, 85: 045017. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.045017.
- [65] Primo A, Tancredi L. On the maximal cut of Feynman integrals and the solution of their differential equations[J/OL]. *Nucl Phys B*, 2017, 916: 94-116. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.12.021.
- [66] Bosma J, Sogaard M, Zhang Y. Maximal Cuts in Arbitrary Dimension[J/OL]. *JHEP*, 2017, 08: 051. DOI: 10.1007/JHEP08(2017)051.
- [67] Primo A, Tancredi L. Maximal cuts and differential equations for Feynman integrals. An application to the three-loop massive banana graph[J/OL]. *Nucl Phys B*, 2017, 921: 316-356. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.05.018.
- [68] Frellesvig H, Papadopoulos C G. Cuts of Feynman Integrals in Baikov representation[J/OL]. *JHEP*, 2017, 04: 083. DOI: 10.1007/JHEP04(2017)083.
- [69] Harley M, Moriello F, Schabinger R M. Baikov-Lee Representations Of Cut Feynman Integrals[J/OL]. *JHEP*, 2017, 06: 049. DOI: 10.1007/JHEP06(2017)049.
- [70] Chen J, Jiang X, Ma C, et al. Baikov representations, intersection theory, and canonical Feynman integrals[J/OL]. *JHEP*, 2022, 07: 066. DOI: 10.1007/JHEP07(2022)066.
- [71] Tkachov F V. A Theorem on Analytical Calculability of Four Loop Renormalization Group Functions[J/OL]. *Phys Lett B*, 1981, 100: 65-68. DOI: 10.1016/0370-2693(81)90288-4.
- [72] Chetyrkin K, Tkachov F. Integration by parts: The algorithm to calculate β -functions in 4 loops[J/OL]. *Nucl Phys B*, 1981, 192: 159-204. DOI: <https://doi.org/10.1016/0550-321>

- 3(81)90199-1.
- [73] Smirnov A V, Petukhov A V. The number of master integrals is finite: Vol. 97[A/OL]. 2011: 37-44. 1004.4199.
 - [74] Laporta S. High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations [J/OL]. *Int J Mod Phys A*, 2000, 15: 5087-5159. DOI: 10.1142/S0217751X00002159.
 - [75] Maierhöfer P, Usovitsch J, Uwer P. Kira—A Feynman integral reduction program[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2018, 230: 99-112. DOI: 10.1016/j.cpc.2018.04.012.
 - [76] Klappert J, Lange F, Maierhöfer P, et al. Integral reduction with Kira 2.0 and finite field methods[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2021, 266: 108024. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108024.
 - [77] Smirnov A V. FIRE5: A C++ implementation of Feynman Integral REduction[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2015, 189: 182-191. DOI: 10.1016/j.cpc.2014.11.024.
 - [78] Smirnov A V, Chuharev F S. FIRE6: Feynman Integral REduction with Modular Arithmetic [J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2020, 247: 106877. DOI: 10.1016/j.cpc.2019.106877.
 - [79] Studerus C. Reduze - Feynman Integral Reduction in C++[J/OL]. *Comput Phys Commun*, 2010, 181: 1293-1300. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.03.012.
 - [80] von Manteuffel A, Studerus C. Reduze 2 - Distributed Feynman Integral Reduction[A]. 2012. 1201.4330.
 - [81] Kotikov A V. Differential equations method: New technique for massive Feynman diagrams calculation[J/OL]. *Phys Lett B*, 1991, 254: 158-164. DOI: 10.1016/0370-2693(91)90413-K.
 - [82] Remiddi E. Differential Equations for Feynman Graph Amplitudes[J/OL]. *Il Nuovo Cimento A*, 1997, 110: 1435-1452. DOI: 10.1007/BF03185566.
 - [83] Gehrmann T, Remiddi E. Differential equations for two loop four point functions[J/OL]. *Nucl Phys B*, 2000, 580: 485-518. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00223-6.
 - [84] Argeri M, Mastrolia P. Feynman Diagrams and Differential Equations[J/OL]. *Int J Mod Phys A*, 2007, 22: 4375-4436. DOI: 10.1142/S0217751X07037147.
 - [85] Henn J M. Lectures on differential equations for Feynman integrals[J/OL]. *J Phys A*, 2015, 48: 153001. DOI: 10.1088/1751-8113/48/15/153001.
 - [86] Henn J M. Multiloop integrals in dimensional regularization made simple[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 251601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.251601.
 - [87] Brown F, Schnetz O. A K3 in ϕ^4 [J/OL]. *Duke Mathematical Journal*, 2012, 161: 1817-1862. DOI: 10.1215/00127094-1644201.
 - [88] Bourjaily J L, McLeod A J, Vergu C, et al. Embedding Feynman Integral (Calabi-Yau) Geometries in Weighted Projective Space[J/OL]. *JHEP*, 2020, 01: 078. DOI: 10.1007/JHEP01(2020)078.

- [89] Klemm A, Nega C, Safari R. The l -loop Banana Amplitude from GKZ Systems and relative Calabi-Yau Periods[J/OL]. JHEP, 2020, 04: 088. DOI: 10.1007/JHEP04(2020)088.
- [90] Bönisch K, Fischbach F, Klemm A, et al. Analytic Structure of all Loop Banana Amplitudes[J/OL]. JHEP, 2021, 05: 066. DOI: 10.1007/JHEP05(2021)066.
- [91] Broedel J, Duhr C, Dulat F, et al. Elliptic Feynman integrals and pure functions[J/OL]. JHEP, 2019, 01: 023. DOI: 10.1007/JHEP01(2019)023.
- [92] Tarasov O V. Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension[J/OL]. Phys Rev D, 1996, 54: 6479-6490. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.6479.
- [93] Tarasov O V. Generalized recurrence relations for two loop propagator integrals with arbitrary masses[J/OL]. Nucl Phys B, 1997, 502: 455-482. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00376-3.
- [94] Lee R N. Space-time dimensionality D as complex variable: Calculating loop integrals using dimensional recurrence relation and analytical properties with respect to D [J/OL]. Nucl Phys B, 2010, 830: 474-492. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.12.025.
- [95] Lee R N. DRA method: Powerful tool for the calculation of the loop integrals[J/OL]. J Phys Conf Ser, 2012, 368: 012050. DOI: 10.1088/1742-6596/368/1/012050.
- [96] Weinzierl S. Feynman Integrals[M]. 2022.
- [97] Moser J. The order of a singularity in Fuchs' theory[J/OL]. Mathematische Zeitschrift, 1959, 72: 379-398. DOI: 10.1007/BF01162962.
- [98] Lee R N. Reducing differential equations for multiloop master integrals[J/OL]. JHEP, 2015, 04: 108. DOI: 10.1007/JHEP04(2015)108.
- [99] Gituliar O, Magerya V. Fuchsia: a tool for reducing differential equations for Feynman master integrals to epsilon form[J/OL]. Comput Phys Commun, 2017, 219: 329-338. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.05.004.
- [100] Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator[J/OL]. Commun Pure Appl Math, 1954, 7: 649-673. DOI: 10.1002/cpa.3160070404.
- [101] Argeri M, Di Vita S, Mastrolia P, et al. Magnus and Dyson Series for Master Integrals[J/OL]. JHEP, 2014, 03: 082. DOI: 10.1007/JHEP03(2014)082.
- [102] Di Vita S, Mastrolia P, Schubert U, et al. Three-loop master integrals for ladder-box diagrams with one massive leg[J/OL]. JHEP, 2014, 09: 148. DOI: 10.1007/JHEP09(2014)148.
- [103] Höschle M, Hoff J, Ueda T. Adequate bases of phase space master integrals for $gg \rightarrow h$ at NNLO and beyond[J/OL]. JHEP, 2014, 09: 116. DOI: 10.1007/JHEP09(2014)116.
- [104] Dlapa C, Henn J, Yan K. Deriving canonical differential equations for Feynman integrals from a single uniform weight integral[J/OL]. JHEP, 2020, 05: 025. DOI: 10.1007/JHEP05(2020)025.
- [105] Henn J, Ma R, Yan K, et al. Four-dimensional differential equations for the leading di-

- vergences of dimensionally-regulated loop integrals[J/OL]. JHEP, 2023, 03: 162. DOI: 10.1007/JHEP03(2023)162.
- [106] Dlapa C, Li X, Zhang Y. Leading singularities in Baikov representation and Feynman integrals with uniform transcendental weight[J/OL]. JHEP, 2021, 07: 227. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)227.
- [107] Henn J, Mistlberger B, Smirnov V A, et al. Constructing d-log integrands and computing master integrals for three-loop four-particle scattering[J/OL]. JHEP, 2020, 04: 167. DOI: 10.1007/JHEP04(2020)167.
- [108] Ma C, Wang Y, Xu X, et al. Mixed QCD-EW corrections for Higgs leptonic decay via HW^+W^- vertex[J/OL]. JHEP, 2021, 09: 114. DOI: 10.1007/JHEP09(2021)114.
- [109] Dlapa C, Henn J M, Wagner F J. An algorithmic approach to finding canonical differential equations for elliptic Feynman integrals[J/OL]. JHEP, 2023, 08: 120. DOI: 10.1007/JHEP08(2023)120.
- [110] Adams L, Weinzierl S. The ϵ -form of the differential equations for Feynman integrals in the elliptic case[J/OL]. Phys Lett B, 2018, 781: 270-278. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.04.002.
- [111] Pögel S, Wang X, Weinzierl S. The ϵ -factorised differential equation for the four-loop equal-mass banana graph: Vol. 130[A/OL]. 2023: 101601. 2211.04292.
- [112] Frellesvig H, Weinzierl S. On ϵ -factorised bases and pure Feynman integrals[A]. 2023. 2301.02264.
- [113] Jiang X, Wang X, Yang L L, et al. ϵ -factorized differential equations for two-loop non-planar triangle Feynman integrals with elliptic curves: Vol. 09[A/OL]. 2023: 187. 2305.13951.
- [114] Chen K T. Iterated path integrals[J/OL]. Bull Am Math Soc, 1977, 83: 831-879. DOI: 10.1090/S0002-9904-1977-14320-6.
- [115] Beneke M, Smirnov V A. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold[J/OL]. Nucl Phys B, 1998, 522: 321-344. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00138-2.
- [116] Smirnov V A. Problems of the strategy of regions[J/OL]. Phys Lett B, 1999, 465: 226-234. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)01061-8.
- [117] Jantzen B. Foundation and generalization of the expansion by regions[J/OL]. JHEP, 2011, 12: 076. DOI: 10.1007/JHEP12(2011)076.
- [118] Goncharov A B. Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes: Vol. 5[A/OL]. 1998: 497-516. 1105.2076.
- [119] Goncharov A B. Multiple polylogarithms and mixed Tate motives[A]. 2001. math/0103059.
- [120] Duhr C. Hopf algebras, coproducts and symbols: An application to Higgs boson amplitudes [J/OL]. JHEP, 2012, 08: 043. DOI: 10.1007/JHEP08(2012)043.
- [121] Chavez F, Duhr C. Three-mass triangle integrals and single-valued polylogarithms[J/OL].

- JHEP, 2012, 11: 114. DOI: 10.1007/JHEP11(2012)114.
- [122] Anastasiou C, Duhr C, Dulat F, et al. Higgs boson gluon-fusion production in N³LO QCD [J/OL]. Phys Rev Lett, 2015, 114: 212001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.212001.
- [123] Chicherin D, Gehrmann T, Henn J M, et al. Analytic result for a two-loop five-particle amplitude[J/OL]. Phys Rev Lett, 2019, 122: 121602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.121602.
- [124] Kummer E. Ueber die transcendenten, welche aus wiederholten integrationen rationaler formeln entstehen.[J/OL]. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1840, 1840: 74-90. DOI: doi:10.1515/crll.1840.21.74.
- [125] Kummer E. Ueber die transcendenten, welche aus wiederholten integrationen rationaler formeln entstehen. (fortsetzung).[J/OL]. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1840, 1840: 193-225. DOI: doi:10.1515/crll.1840.21.193.
- [126] Kummer E. Ueber die transcendenten, welche aus wiederholten integrationen rationaler formeln entstehen. (fortsetzung).[J/OL]. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1840, 1840: 328-371. DOI: doi:10.1515/crll.1840.21.328.
- [127] Poincaré H. Sur les groupes des équations linéaires[J/OL]. Acta Mathematica, 1884, 4: 201-312. DOI: 10.1007/BF02418420.
- [128] Agarwal A K, Berndt B C, Krattenthaler C F, et al. Multiple polylogarithms: An introduction, in conference on number theory and discrete mathematics in honour of srinivasa ramanujan [M/OL]. 2002. DOI: 10.1007/978-3-0348-8223-1.
- [129] Ablinger J, Blümlein J, Schneider C. Harmonic Sums and Polylogarithms Generated by Cyclotomic Polynomials[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 2011, 52: 102301. DOI: 10.1063/1.3629472.
- [130] Remiddi E, Vermaseren J A M. Harmonic Polylogarithms[J/OL]. Int J Mod Phys A, 2000, 15: 725-754. DOI: 10.1142/S0217751X00000367.
- [131] Gituliar O, Magerya V. Fuchsian and master integrals for splitting functions from differential equations in QCD: LL2016[A/OL]. 2016: 030. 1607.00759.
- [132] Frellesvig H. On Epsilon Factorized Differential Equations for Elliptic Feynman Integrals [J/OL]. JHEP, 2022, 03: 079. DOI: 10.1007/JHEP03(2022)079.
- [133] Görges L, Nega C, Tancredi L, et al. On a procedure to derive ϵ -factorised differential equations beyond polylogarithms: Vol. 07[A/OL]. 2023: 206. 2305.14090.
- [134] Prausa M. Epsilon: A tool to find a canonical basis of master integrals: Vol. 219[A/OL]. 2017: 361-376. 1701.00725.
- [135] Meyer C. Algorithmic transformation of multi-loop master integrals to a canonical basis with CANONICA[J/OL]. Comput Phys Commun, 2018, 222: 295-312. DOI: 10.1016/j.cpc.2017.09.014.

- [136] Lee R N, Smirnov V A. The Dimensional Recurrence and Analyticity Method for Multicomponent Master Integrals: Using Unitarity Cuts to Construct Homogeneous Solutions[J/OL]. JHEP, 2012, 12: 104. DOI: 10.1007/JHEP12(2012)104.
- [137] Cachazo F. Sharpening The Leading Singularity[A]. 2008. 0803.1988.
- [138] Arkani-Hamed N, Bourjaily J L, Cachazo F, et al. Local Integrals for Planar Scattering Amplitudes[J/OL]. JHEP, 2012, 06: 125. DOI: 10.1007/JHEP06(2012)125.
- [139] Aaboud M, et al. Precision measurement and interpretation of inclusive W^+ , W^- and Z/γ^* production cross sections with the ATLAS detector[J/OL]. Eur Phys J C, 2017, 77: 367. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4911-9.
- [140] Aaboud M, et al. Measurement of fiducial and differential W^+W^- production cross-sections at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector[J/OL]. Eur Phys J C, 2019, 79: 884. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-7371-6.
- [141] Buarque Franzosi D, et al. Vector boson scattering processes: Status and prospects[J/OL]. Rev Phys, 2022, 8: 100071. DOI: 10.1016/j.revip.2022.100071.
- [142] Harris B W, Owens J F. Two cutoff phase space slicing method[J/OL]. Phys Rev D, 2002, 65: 094032. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.094032.
- [143] Denner A, Dittmaier S, Roth M, et al. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow WW \rightarrow 4$ fermions in double-pole approximation — The RACOONWW approach[J/OL]. Nucl Phys B, 2000, 587: 67-117. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00511-3.
- [144] Catani S, Seymour M H. The Dipole formalism for the calculation of QCD jet cross-sections at next-to-leading order[J/OL]. Phys Lett B, 1996, 378: 287-301. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00425-X.
- [145] Catani S, Seymour M H. A General algorithm for calculating jet cross-sections in NLO QCD [J/OL]. Nucl Phys B, 1997, 485: 291-419. DOI: 10.1016/S0550-3213(96)00589-5.
- [146] Catani S, Dittmaier S, Seymour M H, et al. The Dipole formalism for next-to-leading order QCD calculations with massive partons[J/OL]. Nucl Phys B, 2002, 627: 189-265. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00098-6.
- [147] Dittmaier S. A general approach to photon radiation off fermions[J/OL]. Nucl Phys B, 2000, 565: 69-122. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00563-5.
- [148] Dittmaier S, Kabelschacht A, Kasprzik T. Polarized QED splittings of massive fermions and dipole subtraction for non-collinear-safe observables[J/OL]. Nucl Phys B, 2008, 800: 146-189. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.03.010.
- [149] Kosower D A. Antenna factorization of gauge theory amplitudes[J/OL]. Phys Rev D, 1998, 57: 5410-5416. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.5410.
- [150] Campbell J M, Cullen M A, Glover E W N. Four jet event shapes in electron - positron

- annihilation[J/OL]. Eur Phys J C, 1999, 9: 245-265. DOI: 10.1007/s100529900034.
- [151] Kosower D A. Antenna factorization in strongly ordered limits[J/OL]. Phys Rev D, 2005, 71: 045016. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.045016.
- [152] Brown R W, Mikaelian K O. W^+W^- and Z^0Z^0 Pair Production in e^+e^- , pp , and $\bar{p}p$ Colliding Beams[J/OL]. Phys Rev D, 1979, 19: 922. DOI: 10.1103/PhysRevD.19.922.
- [153] Ohnemus J. AN ORDER α_s CALCULATION OF HADRONIC W^-W^+ PRODUCTION [J/OL]. Phys Rev D, 1991, 44: 1403-1414. DOI: 10.1103/PhysRevD.44.1403.
- [154] Frixione S. A Next-to-leading order calculation of the cross-section for the production of W^+W^- pairs in hadronic collisions[J/OL]. Nucl Phys B, 1993, 410: 280-324. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90435-R.
- [155] Campbell J M, Ellis R K, Williams C. Vector boson pair production at the LHC[J/OL]. JHEP, 2011, 07: 018. DOI: 10.1007/JHEP07(2011)018.
- [156] Dicus D A, Kao C, Repko W W. Gluon Production of Gauge Bosons[J/OL]. Phys Rev D, 1987, 36: 1570. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.1570.
- [157] Sirunyan A M, et al. Measurements of the Higgs boson width and anomalous HVV couplings from on-shell and off-shell production in the four-lepton final state[J/OL]. Phys Rev D, 2019, 99: 112003. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.112003.
- [158] Aaboud M, et al. Measurements of gluon-gluon fusion and vector-boson fusion Higgs boson production cross-sections in the $H \rightarrow WW^* \rightarrow e\nu\mu\nu$ decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector[J/OL]. Phys Lett B, 2019, 789: 508-529. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.11.064.
- [159] Aaboud M, et al. Constraints on off-shell Higgs boson production and the Higgs boson total width in $ZZ \rightarrow 4\ell$ and $ZZ \rightarrow 2\ell 2\nu$ final states with the ATLAS detector[J/OL]. Phys Lett B, 2018, 786: 223-244. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.048.
- [160] Sirunyan A M, et al. W^+W^- boson pair production in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV[J/OL]. Phys Rev D, 2020, 102: 092001. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.092001.
- [161] Aaboud M, et al. Measurement of the W^+W^- production cross section in pp collisions at a centre-of-mass energy of $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS experiment[J/OL]. Phys Lett B, 2017, 773: 354-374. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.08.047.
- [162] Aad G, et al. Measurement of W^+W^- production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector and limits on anomalous WWZ and $WW\gamma$ couplings[J/OL]. Phys Rev D, 2013, 87: 112001. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.112001.
- [163] Chatrchyan S, et al. Measurement of the W^+W^- Cross Section in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and Limits on Anomalous $WW\gamma$ and WWZ Couplings[J/OL]. Eur Phys J C, 2013, 73: 2610. DOI: 10.1140/epjc/s10052-013-2610-8.

- [164] Aad G, et al. Measurement of total and differential W^+W^- production cross sections in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector and limits on anomalous triple-gauge-boson couplings[J/OL]. JHEP, 2016, 09: 029. DOI: 10.1007/JHEP09(2016)029.
- [165] Khachatryan V, et al. Measurement of the W^+W^- cross section in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV and limits on anomalous gauge couplings[J/OL]. Eur Phys J C, 2016, 76: 401. DOI: 10.1140/epjc/s10052-016-4219-1.
- [166] Aad G, et al. Combination of the W boson polarization measurements in top quark decays using ATLAS and CMS data at $\sqrt{s} = 8$ TeV[J/OL]. JHEP, 2020, 08: 051. DOI: 10.1007/JHEP08(2020)051.
- [167] Aaboud M, et al. Observation of electroweak $W^\pm Z$ boson pair production in association with two jets in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector[J/OL]. Phys Lett B, 2019, 793: 469-492. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.05.012.
- [168] Abada A, et al. FCC Physics Opportunities: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 1[J/OL]. Eur Phys J C, 2019, 79(6): 474. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6904-3.
- [169] Abada A, et al. FCC-ee: The Lepton Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 2[J/OL]. Eur Phys J Special Topic, 2019, 228(2): 261-623. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900045-4.
- [170] Abada A, et al. FCC-hh: The Hadron Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 3[J/OL]. Eur Phys J ST, 2019, 228(4): 755-1107. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900087-0.
- [171] Abada A, et al. HE-LHC: The High-Energy Large Hadron Collider: Future Circular Collider Conceptual Design Report Volume 4[J/OL]. Eur Phys J ST, 2019, 228(5): 1109-1382. DOI: 10.1140/epjst/e2019-900088-6.
- [172] Benedikt M, et al. Future Circular Hadron Collider FCC-hh: Overview and Status[A]. 2022. arXiv: 2203.07804.
- [173] Behnke T, Brau J E, Foster B, et al. The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 1: Executive Summary[A]. 2013. arXiv: 1306.6327.
- [174] Baer H, et al. The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 2: Physics [A]. 2013. arXiv: 1306.6352.
- [175] Bambade P, et al. The International Linear Collider: A Global Project[A]. 2019. arXiv: 1903.01629.
- [176] Bierweiler A, Kasprzik T, Kühn J H, et al. Electroweak corrections to W -boson pair production at the LHC[J/OL]. JHEP, 2012, 11: 093. DOI: 10.1007/JHEP11(2012)093.
- [177] Bierweiler A, Kasprzik T, Kühn J H. Vector-boson pair production at the LHC to $\mathcal{O}(\alpha^3)$

- accuracy[J/OL]. JHEP, 2013, 12: 071. DOI: 10.1007/JHEP12(2013)071.
- [178] Baglio J, Ninh L D, Weber M M. Massive gauge boson pair production at the LHC: a next-to-leading order story[J/OL]. Phys Rev D, 2013, 88: 113005. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.099902.
- [179] Gieseke S, Kasprzik T, Kühn J H. Vector-boson pair production and electroweak corrections in HERWIG++[J/OL]. Eur Phys J C, 2014, 74: 2988. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-2988-y.
- [180] Biedermann B, Denner A, Dittmaier S, et al. Electroweak corrections to $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^- + X$ at the LHC: a Higgs background study[J/OL]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 161803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.161803.
- [181] Biedermann B, Billoni M, Denner A, et al. Next-to-leading-order electroweak corrections to $pp \rightarrow W^+ W^- \rightarrow 4$ leptons at the LHC[J/OL]. JHEP, 2016, 06: 065. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)065.
- [182] Gehrmann T, Grazzini M, Kallweit S, et al. $W^+ W^-$ Production at Hadron Colliders in Next to Next to Leading Order QCD[J/OL]. Phys Rev Lett, 2014, 113: 212001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.212001.
- [183] Catani S, Grazzini M. An NNLO subtraction formalism in hadron collisions and its application to Higgs boson production at the LHC[J/OL]. Phys Rev Lett, 2007, 98: 222002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.222002.
- [184] Caola F, Henn J M, Melnikov K, et al. Two-loop helicity amplitudes for the production of two off-shell electroweak bosons in quark-antiquark collisions[J/OL]. JHEP, 2014, 11: 041. DOI: 10.1007/JHEP11(2014)041.
- [185] Gehrmann T, von Manteuffel A, Tancredi L. The two-loop helicity amplitudes for $q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \rightarrow 4$ leptons[J/OL]. JHEP, 2015, 09: 128. DOI: 10.1007/JHEP09(2015)128.
- [186] Grazzini M, Kallweit S, Wiesemann M. Fully differential NNLO computations with MATRIX[J/OL]. Eur Phys J C, 2018, 78: 537. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5771-7.
- [187] Grazzini M, Kallweit S, Pozzorini S, et al. $W^+ W^-$ production at the LHC: fiducial cross sections and distributions in NNLO QCD[J/OL]. JHEP, 2016, 08: 140. DOI: 10.1007/JHEP08(2016)140.
- [188] von Manteuffel A, Tancredi L. The two-loop helicity amplitudes for $gg \rightarrow V_1 V_2 \rightarrow 4$ leptons[J/OL]. JHEP, 2015, 06: 197. DOI: 10.1007/JHEP06(2015)197.
- [189] Caola F, Henn J M, Melnikov K, et al. Two-loop helicity amplitudes for the production of two off-shell electroweak bosons in gluon fusion[J/OL]. JHEP, 2015, 06: 129. DOI: 10.1007/JHEP06(2015)129.
- [190] Caola F, Melnikov K, Röntsch R, et al. QCD corrections to $W^+ W^-$ production through gluon fusion[J/OL]. Phys Lett B, 2016, 754: 275-280. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.01.046.

- [191] Caola F, Dowling M, Melnikov K, et al. QCD corrections to vector boson pair production in gluon fusion including interference effects with off-shell Higgs at the LHC[J/OL]. JHEP, 2016, 07: 087. DOI: 10.1007/JHEP07(2016)087.
- [192] Grazzini M, Kallweit S, Lindert J M, et al. NNLO QCD + NLO EW with Matrix+OpenLoops: precise predictions for vector-boson pair production[J/OL]. JHEP, 2020, 02: 087. DOI: 10.1007/JHEP02(2020)087.
- [193] Grazzini M, Kallweit S, Wieseemann M, et al. W^+W^- production at the LHC: NLO QCD corrections to the loop-induced gluon fusion channel[J/OL]. Phys Lett B, 2020, 804: 135399. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135399.
- [194] Brønnum-Hansen C, Wang C Y. Contribution of third generation quarks to two-loop helicity amplitudes for W boson pair production in gluon fusion[J/OL]. JHEP, 2021, 01: 170. DOI: 10.1007/JHEP01(2021)170.
- [195] Liu X, Ma Y Q, Wang C Y. A Systematic and Efficient Method to Compute Multi-loop Master Integrals[J/OL]. Phys Lett B, 2018, 779: 353-357. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.02.026.
- [196] Alles W, Boyer C, Buras A J. W boson production in e^+e^- collisions in the Weinberg-Salam model[J/OL]. Nucl Phys B, 1977, 119: 125-140. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90078-5.
- [197] Hagiwara K, Peccei R D, Zeppenfeld D, et al. Probing the weak boson sector in $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ [J/OL]. Nucl Phys B, 1987, 282: 253-307. DOI: 10.1016/0550-3213(87)90685-7.
- [198] Lemoine M, Veltman M J G. Radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ in the Weinberg model [J/OL]. Nucl Phys B, 1980, 164: 445-483. DOI: 10.1016/0550-3213(80)90521-0.
- [199] Philippe R. W -pair production in electron-positron annihilation[J/OL]. Phys Rev D, 1982, 26: 1588-1599. DOI: 10.1103/PhysRevD.26.1588.
- [200] Bohm M, Denner A, Sack T, et al. Electroweak radiative corrections to $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ [J/OL]. Nucl Phys B, 1988, 304: 463-499. DOI: 10.1016/0550-3213(88)90638-4.
- [201] Beenakker W, Kołodziej K, Sack T. The total cross section $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ [J/OL]. Phys Lett B, 1991, 258: 469-474. DOI: 10.1016/0370-2693(91)91120-K.
- [202] Beenakker W, Berends F A, Sack T. The radiative process $e^+e^- \rightarrow W^+W^-\gamma$ [J/OL]. Nucl Phys B, 1991, 367: 287-312. DOI: 10.1016/0550-3213(91)90018-S.
- [203] Fleischer J, Jegerlehner F, Zralek M. Radiative corrections to helicity amplitudes for W -pair production in e^+e^- -annihilation[J/OL]. Z Phys C, 1989, 42: 409. DOI: 10.1007/BF01548446.
- [204] Kołodziej K, Zralek M. Helicity amplitudes for spin-0 or spin-1 boson production in e^+e^- annihilation[J/OL]. Phys Rev D, 1991, 43: 3619-3625. DOI: 10.1103/PhysRevD.43.3619.
- [205] Fleischer J, Kołodziej K, Jegerlehner F. W pair production in e^+e^- annihilation: Radiative corrections including hard bremsstrahlung[J/OL]. Phys Rev D, 1993, 47: 830-836. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.830.

- [206] Beenakker W, Denner A. Standard model predictions for W -pair production in electron-positron collisions[J/OL]. Int J Mod Phys A, 1994, 9: 4837-4919. DOI: 10.1142/S0217751X94001965.
- [207] Zerwas P. e^+e^- Collisions at 500 GeV: The Physics Potential, Part A[C/OL]//Zerwas P. Workshop on e^+e^- Collisions at 500 GeV: The Physics Potential. Hamburg, Germany: DESY, 1991. DOI: 10.3204/PUBDB-2016-05691.
- [208] Denner A. Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200[J/OL]. Fortsch Phys, 1993, 41: 307-420. DOI: 10.1002/prop.2190410402.
- [209] Beenakker W, Berends F A, Argyres E, et al. WW cross-sections and distributions[C]//CERN Workshop on LEP2 Physics. 1996.
- [210] Huss A, Huston J, Jones S, et al. Les Houches 2021—physics at TeV colliders: report on the standard model precision wishlist[J/OL]. J Phys G, 2023, 50: 043001. DOI: 10.1088/1361-6471/acbaec.
- [211] Gehrmann T, Tancredi L, Weihs E. Two-loop master integrals for $q\bar{q} \rightarrow VV$: the planar topologies[J/OL]. JHEP, 2013, 08: 070. DOI: 10.1007/JHEP08(2013)070.
- [212] Gehrmann T, von Manteuffel A, Tancredi L, et al. The two-loop master integrals for $q\bar{q} \rightarrow VV$ [J/OL]. JHEP, 2014, 06: 032. DOI: 10.1007/JHEP06(2014)032.
- [213] Papadopoulos C G. Simplified differential equations approach for Master Integrals[J/OL]. JHEP, 2014, 07: 088. DOI: 10.1007/JHEP07(2014)088.
- [214] Henn J M, Melnikov K, Smirnov V A. Two-loop planar master integrals for the production of off-shell vector bosons in hadron collisions[J/OL]. JHEP, 2014, 05: 090. DOI: 10.1007/JHEP05(2014)090.
- [215] Caola F, Henn J M, Melnikov K, et al. Non-planar master integrals for the production of two off-shell vector bosons in collisions of massless partons[J/OL]. JHEP, 2014, 09: 043. DOI: 10.1007/JHEP09(2014)043.
- [216] Anastasiou C, Cancino J, Chavez F, et al. NNLO QCD corrections to $pp \rightarrow \gamma^*\gamma^*$ in the large N_F limit[J/OL]. JHEP, 2015, 02: 182. DOI: 10.1007/JHEP02(2015)182.
- [217] Bonciani R, Del Duca V, Frellesvig H, et al. Two-loop planar master integrals for Higgs \rightarrow 3 partons with full heavy-quark mass dependence[J/OL]. JHEP, 2016, 12: 096. DOI: 10.1007/JHEP12(2016)096.
- [218] Adams L, Chaubey E, Weinzierl S. Analytic results for the planar double box integral relevant to top-pair production with a closed top loop[J/OL]. JHEP, 2018, 10: 206. DOI: 10.1007/JHEP10(2018)206.
- [219] Moriello F. Generalised power series expansions for the elliptic planar families of Higgs +

- jet production at two loops[J/OL]. JHEP, 2020, 01: 150. DOI: 10.1007/JHEP01(2020)150.
- [220] Badger S, Chaubey E, Hartanto H B, et al. Two-loop leading colour QCD helicity amplitudes for top quark pair production in the gluon fusion channel[J/OL]. JHEP, 2021, 06: 163. DOI: 10.1007/JHEP06(2021)163.
- [221] Lee R N. Presenting LiteRed: a tool for the Loop InTEgrals REDuction[A]. 2012. arXiv: 1212.2685.
- [222] Lee R N. LiteRed 1.4: a powerful tool for reduction of multiloop integrals[J/OL]. J Phys Conf Ser, 2014, 523: 012059. DOI: 10.1088/1742-6596/523/1/012059.
- [223] Adams L, Chaubey E, Weinzierl S. Planar Double Box Integral for Top Pair Production with a Closed Top Loop to all orders in the Dimensional Regularization Parameter[J/OL]. Phys Rev Lett, 2018, 121: 142001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.142001.
- [224] Smirnov A V. FIESTA4: Optimized Feynman integral calculations with GPU support[J/OL]. Comput Phys Commun, 2016, 204: 189-199. DOI: 10.1016/j.cpc.2016.03.013.
- [225] Pak A, Smirnov A. Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals[J/OL]. Eur Phys J C, 2011, 71: 1626. DOI: 10.1140/epjc/s10052-011-1626-1.
- [226] Jantzen B, Smirnov A V, Smirnov V A. Expansion by regions: revealing potential and Glauber regions automatically[J/OL]. Eur Phys J C, 2012, 72: 2139. DOI: 10.1140/epjc/s10052-012-2139-2.
- [227] Di Vita S, Mastrolia P, Primo A, et al. Two-loop master integrals for the leading QCD corrections to the Higgs coupling to a W pair and to the triple gauge couplings ZWW and γ^*WW [J/OL]. JHEP, 2017, 04: 008. DOI: 10.1007/JHEP04(2017)008.
- [228] Long M M, Zhang R Y, Ma W G, et al. Master integrals for mixed QCD-QED corrections to charged-current Drell-Yan production of a massive charged lepton[J/OL]. JHEP, 2022, 07: 078. DOI: 10.1007/JHEP07(2022)078.
- [229] Besier M, Wasser P, Weinzierl S. RationalizeRoots: Software Package for the Rationalization of Square Roots[J/OL]. Comput Phys Commun, 2020, 253: 107197. DOI: 10.1016/j.cpc.2020.107197.
- [230] Maitre D. HPL, a mathematica implementation of the harmonic polylogarithms[J/OL]. Comput Phys Commun, 2006, 174: 222-240. DOI: 10.1016/j.cpc.2005.10.008.
- [231] Maitre D. Extension of HPL to complex arguments[J/OL]. Comput Phys Commun, 2012, 183: 846. DOI: 10.1016/j.cpc.2011.11.015.
- [232] Duhr C, Dulat F. PolyLogTools — polylogs for the masses[J/OL]. JHEP, 2019, 08: 135. DOI: 10.1007/JHEP08(2019)135.
- [233] Bauer C W, Frink A, Kreckel R. Introduction to the GiNaC framework for symbolic computation within the C++ programming language[J/OL]. J Symb Comput, 2002, 33: 1-12. DOI:

- 10.1006/jsco.2001.0494.
- [234] Vollinga J, Weinzierl S. Numerical evaluation of multiple polylogarithms[J/OL]. Comput Phys Commun, 2005, 167: 177. DOI: 10.1016/j.cpc.2004.12.009.
- [235] Liu X, Ma Y Q. AMFlow: A Mathematica package for Feynman integrals computation via auxiliary mass flow[J/OL]. Comput Phys Commun, 2023, 283: 108565. DOI: 10.1016/j.cpc.2022.108565.

附录 A 顶分支 τ_{1F} 和 τ_{2F} 中的正则基组合系数

式 (3.14) 中, 系数 α_i ($i = 1, \dots, 27$) 为

$$\begin{aligned}
 \alpha_5 &= -3/2 \epsilon^2 x (y - z), & \alpha_6 &= 3 \epsilon^2 (y - z), \\
 \alpha_7 &= -3/2 \epsilon^2 (y - z) (z + 1), & \alpha_8 &= \epsilon^2 (y - z) (4y + 1), \\
 \alpha_9 &= 1/2 \epsilon^2 (y + 1) (y - z), & \alpha_{14} &= -6 \epsilon^3 (y - z) [x - 2(z + 1)], \\
 \alpha_{15} &= -4 \epsilon^2 (y - z) [x - (z + 1)^2], & \alpha_{16} &= 6 \epsilon^3 (y - z)^2, \\
 \alpha_{17} &= -6 \epsilon^4 (y - z) (x + y - z), & \alpha_{18} &= -4 \epsilon^3 (y - z) [x + (y - z)(z + 1)], \\
 \alpha_{21} &= 2 \epsilon^3 x (y + 1) (z + 1), & \alpha_{25} &= -\epsilon^4 x^2 (y + 1), \\
 \alpha_{27} &= \epsilon^4 x^2 (y + 1).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

式 (3.17) 中, 系数 β_i 与 γ_i ($i = 1, \dots, 45$) 为

$$\begin{aligned}
 \beta_9 &= -3/2 \epsilon^2 x (y - z), & \beta_{11} &= \epsilon^2 (y - z) (2z - 1), \\
 \beta_{12} &= -1/2 \epsilon^2 (y - z) (z + 1), & \beta_{13} &= -\epsilon^2 (y - z) (2y - 1), \\
 \beta_{14} &= 1/2 \epsilon^2 (y + 1) (y - z), & \beta_{18} &= -3 \epsilon^3 (x + 2) (y - z), \\
 \beta_{19} &= -2 \epsilon^2 (x + 2) (y - z), & \beta_{20} &= -2 \epsilon^2 (y - z) [x(z + 1) + 1], \\
 \beta_{21} &= -3 \epsilon^3 (y - z) (y - z - 2), & \beta_{22} &= -2 \epsilon^2 (y - z) (y - z - 2), \\
 \beta_{23} &= -2 \epsilon^2 (y - z) (y - z - 1), & \beta_{30} &= 1/2 \epsilon^3 x (z + 1) [x(y + 1) + 2(y - z)], \\
 \beta_{31} &= -\epsilon^3 (y - z) (z + 1) [x(z + 1) + (y - z)],
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_7 &= -1/2 \epsilon^3 x, & \gamma_8 &= -1/2 \epsilon^3 x [x + 2(y - z)], \\
 \gamma_{18} &= -\epsilon^3 x, & \gamma_{19} &= -\epsilon^2 x, \\
 \gamma_{29} &= 2 \epsilon^4 (y - z), & \gamma_{30} &= -1/2 \epsilon^3 x (y - z), \\
 \gamma_{32} &= \epsilon^4 x, & \gamma_{35} &= -\epsilon^4 x, \\
 \gamma_{36} &= \epsilon^3 x (y - z + 1), & \gamma_{37} &= \epsilon^2 x (y - z), \\
 \gamma_{38} &= \epsilon^3 x, & \gamma_{39} &= 1/2 \epsilon^4 x (x - 2z + 2), \\
 \gamma_{42} &= -1/2 \epsilon^4 x^2 y, & \gamma_{43} &= -1/2 \epsilon^4 x (x - 2z), \\
 \gamma_{44} &= -1/2 \epsilon^4 x^2, & \gamma_{45} &= \epsilon^4 x.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

附录 B NNLO QCD 修正下 $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$ 过程中平面主积分解析表达式

B.1 顶分支 \mathcal{T}_{1F} 中的主积分

这里我们首先给出 \mathcal{T}_{1F} 中 27 个主积分 $g_{1,\dots,27}$ 保留到 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的表达式。

$$\begin{aligned}
g_1 &= 1 - \epsilon \left[G(a_1; x_1) + 2 G(a_4; z) \right] \\
&\quad + \epsilon^2 \left[2 G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1, a_1; x_1) + 4 G(a_4, a_4; z) - \pi^2/6 \right] \\
g_2 &= -\epsilon G(a_3; z) \\
&\quad + \epsilon^2 \left[G(a_1; x_1) G(a_3; z) - G(a_1, a_3; z) + 2 G(a_3, a_3; z) + 2 G(a_3, a_4; z) + 2 G(a_4, a_3; z) \right] \\
g_3 &= 1 - 2\epsilon \left[G(a_1; x_1) + 2 G(a_4; z) \right] \\
&\quad + 4\epsilon^2 \left[2 G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1, a_1; x_1) + 4 G(a_4, a_4; z) - \pi^2/12 \right] \\
g_4 &= \epsilon^2 \left[G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) - G(a_2, a_1; x_1) + 2 G(a_1, a_3; z) \right. \\
&\quad \left. - 2 G(a_5, a_3; z) + 2 G(a_5, a_4; z) - 2 G(a_6, a_3; z) + 2 G(a_6, a_4; z) \right] \\
g_5 &= -g_3 \\
g_6 &= \epsilon G(a_3; z) + \epsilon^2 \left[G(a_1, a_3; z) - 4 G(a_3, a_3; z) \right] \\
g_7 &= -1 + 2\epsilon G(a_3; z) + 4\epsilon^2 \left[G(a_1, a_3; z) - 2 G(a_3, a_3; z) - \pi^2/12 \right] \\
g_8 &= \epsilon G(a_3; y) + \epsilon^2 \left[G(a_1, a_3; y) - 4 G(a_3, a_3; y) \right] \\
g_9 &= -1 + 2\epsilon G(a_3; y) + 4\epsilon^2 \left[G(a_1, a_3; y) - 2 G(a_3, a_3; y) - \pi^2/12 \right] \\
g_{10} &= g_3/4 + \pi^2/12 \epsilon^2 \\
g_{11} &= 0 \\
g_{12} &= -g_4/2 \\
g_{13} &= \epsilon G(a_3; z) \\
&\quad + \epsilon^2/2 \left[-G(a_1; x_1) G(a_5; z) - G(a_1; x_1) G(a_6; z) - G(a_2, a_1; x_1) + 2 G(a_1, a_3; z) \right. \\
&\quad \left. - 8 G(a_3, a_3; z) - 4 G(a_4, a_3; z) + 2 G(a_5, a_3; z) - 2 G(a_5, a_4; z) + 2 G(a_6, a_3; z) \right. \\
&\quad \left. - 2 G(a_6, a_4; z) \right] \\
g_{14} &= -g_4 \\
g_{15} &= \epsilon \left[-G(a_1; x_1) + 2 G(a_3; z) - 2 G(a_4; z) \right] + \epsilon^2/2 \left[\right. \\
&\quad \left. - 2 G(a_1; x_1) G(a_3; z) + 8 G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) \right. \\
&\quad \left. + 4 G(a_1, a_1; x_1) + G(a_2, a_1; x_1) + 6 G(a_1, a_3; z) - 12 G(a_3, a_3; z) - 4 G(a_3, a_4; z) \right. \\
&\quad \left. + 16 G(a_4, a_4; z) - 2 G(a_5, a_3; z) + 2 G(a_5, a_4; z) - 2 G(a_6, a_3; z) + 2 G(a_6, a_4; z) \right. \\
&\quad \left. - 2 \pi^2/3 \right] \\
g_{16} &= \epsilon/2 \left[G(a_3; z) - G(a_3; y) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \epsilon^2/2 \left[-G(a_7; y) G(a_3; z) - 2G(a_1, a_3; y) + 4G(a_3, a_3; y) + G(a_7, a_3; y) \right. \\
 & \left. + G(a_1, a_3; z) - 3G(a_3, a_3; z) \right] \\
 g_{17} &= 0 \\
 g_{18} &= \epsilon^2 \left[G(a_1; x_1) G(a_3; y) + G(a_1; x_1) G(a_3; z) - G(a_1; x_1) G(a_5; z) - G(a_1; x_1) G(a_6; z) \right. \\
 & - 2G(a_3; y) G(a_3; z) + 2G(a_3; y) G(a_4; z) + G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_2, a_1; x_1) \\
 & - G(a_7, a_3; y) + G(a_1, a_3; z) - G(a_3, a_3; z) + 2G(a_3, a_4; z) - 2G(a_4, a_3; z) \\
 & \left. + 2G(a_5, a_3; z) - 2G(a_5, a_4; z) + 2G(a_6, a_3; z) - 2G(a_6, a_4; z) \right] \\
 g_{19} &= 0 \\
 g_{20} &= g_4 \\
 g_{21} &= -1/4 + \epsilon/2 \left[G(a_1; x_1) + 2G(a_3; y) - 2G(a_3; z) + 2G(a_4; z) \right] + \epsilon^2 \left[\right. \\
 & - 2G(a_1; x_1) G(a_3; y) - 2G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) \\
 & + 4G(a_3; y) G(a_3; z) - 4G(a_3; y) G(a_4; z) - 3G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_1, a_1; x_1) \\
 & + G(a_2, a_1; x_1) - 4G(a_3, a_3; y) + 3G(a_7, a_3; y) - 3G(a_1, a_3; z) + 3G(a_3, a_3; z) \\
 & + 4G(a_4, a_3; z) - 4G(a_4, a_4; z) - 2G(a_5, a_3; z) + 2G(a_5, a_4; z) - 2G(a_6, a_3; z) \\
 & \left. + 2G(a_6, a_4; z) \right] \\
 g_{22} &= \epsilon G(a_3; y) \\
 & + \epsilon^2 \left[-G(a_1; x_1) G(a_3; y) + 2G(a_3; y) G(a_3; z) - 2G(a_3; y) G(a_4; z) \right. \\
 & \left. - 2G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_1, a_3; y) - 4G(a_3, a_3; y) + 2G(a_7, a_3; y) \right] \\
 g_{23} &= -1/2 + \epsilon/2 \left[G(a_1; x_1) + 2G(a_3; y) - 2G(a_3; z) + 2G(a_4; z) \right] + \epsilon^2/2 \left[\right. \\
 & - 2G(a_1; x_1) G(a_3; y) - 2G(a_1; x_1) G(a_4; z) + 4G(a_3; y) G(a_3; z) - 4G(a_3; y) G(a_4; z) \\
 & - 4G(a_7; y) G(a_3; z) + G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) - G(a_1, a_1; x_1) \\
 & + G(a_2, a_1; x_1) + 4G(a_1, a_3; y) - 8G(a_3, a_3; y) + 4G(a_7, a_3; y) - 8G(a_1, a_3; z) \\
 & + 8G(a_3, a_3; z) + 4G(a_4, a_3; z) - 4G(a_4, a_4; z) - 2G(a_5, a_3; z) + 2G(a_5, a_4; z) \\
 & \left. - 2G(a_6, a_3; z) + 2G(a_6, a_4; z) + \pi^2/6 \right] \\
 g_{24} &= \epsilon/2 \left[G(a_3; z) - G(a_3; y) \right] \\
 & + \epsilon^2 \left[-G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_1, a_3; y) + 2G(a_3, a_3; y) + G(a_7, a_3; y) - G(a_3, a_3; z) \right] \\
 g_{25} &= -1/4 + \epsilon/2 \left[G(a_1; x_1) + 2G(a_3; y) - 2G(a_3; z) + 2G(a_4; z) \right] + \epsilon^2 \left[\right. \\
 & - 2G(a_1; x_1) G(a_3; y) - 2G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) \\
 & + 4G(a_3; y) G(a_3; z) - 4G(a_3; y) G(a_4; z) - 2G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_1, a_1; x_1) \\
 & + G(a_2, a_1; x_1) - 4G(a_3, a_3; y) + 2G(a_7, a_3; y) - 2G(a_1, a_3; z) + 2G(a_3, a_3; z) \\
 & + 4G(a_4, a_3; z) - 4G(a_4, a_4; z) - 2G(a_5, a_3; z) + 2G(a_5, a_4; z) - 2G(a_6, a_3; z) \\
 & \left. + 2G(a_6, a_4; z) - \pi^2/6 \right] \\
 g_{26} &= \epsilon^2 \left[-G(a_1; x_1) G(a_5; z) - G(a_1; x_1) G(a_6; z) + G(a_2, a_1; x_1) - 2G(a_1, a_3; z) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 G(a_5, a_3; z) - 2 G(a_5, a_4; z) + 2 G(a_6, a_3; z) - 2 G(a_6, a_4; z)] \\
 g_{27} = & - 1/4 + \epsilon/2 [G(a_1; x_1) + 2 G(a_3; y) - 2 G(a_3; z) + 2 G(a_4; z)] + \epsilon^2 [\\
 & - 2 G(a_1; x_1) G(a_3; y) - 2 G(a_1; x_1) G(a_4; z) + G(a_1; x_1) G(a_5; z) + G(a_1; x_1) G(a_6; z) \\
 & + 4 G(a_3; y) G(a_3; z) - 4 G(a_3; y) G(a_4; z) - 4 G(a_7; y) G(a_3; z) - G(a_1, a_1; x_1) \\
 & + G(a_2, a_1; x_1) - 4 G(a_3, a_3; y) + 4 G(a_7, a_3; y) - 4 G(a_1, a_3; z) + 4 G(a_3, a_3; z) \\
 & + 4 G(a_4, a_3; z) - 4 G(a_4, a_4; z) - 2 G(a_5, a_3; z) + 2 G(a_5, a_4; z) - 2 G(a_6, a_3; z) \\
 & + 2 G(a_6, a_4; z) + \pi^2/6] \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

其中,

$$a_1 = 0, \quad a_{2,3} = \pm 1, \quad a_4 = -x_1, \quad a_{5,6} = \pm \sqrt{x_1}, \quad a_7 = z. \tag{B.2}$$

B.2 顶分支 \mathcal{T}_{2F} 中的主积分

\mathcal{T}_2 中 45 个主积分 $g_{1,\dots,45}$ 保留到 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 1 \\
 g_2 &= 1 - \epsilon [2 G(a_1; x_2) - G(a_2; x_2)] \\
 & + \epsilon^2 [4 G(a_1, a_1; x_2) - 2 G(a_1, a_2; x_2) - 2 G(a_2, a_1; x_2) + G(a_2, a_2; x_2) - \pi^2/6] \\
 g_3 &= \epsilon [2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1)] \\
 & + \epsilon^2 [2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) + 4 G(a_7, a_7; 1) - 2 G(a_7, a_8; 1) \\
 & - 2 G(a_7, a_9; 1) - 4 G(a_8, a_7; 1) + 2 G(a_8, a_8; 1) + 2 G(a_8, a_9; 1) - 4 G(a_9, a_7; 1) \\
 & + 2 G(a_9, a_8; 1) + 2 G(a_9, a_9; 1)] \\
 g_4 &= -\epsilon G(a_2; x_2) - \epsilon^2 [G(a_2, a_2; x_2) - 2 G(a_3, a_2; x_2)] \\
 g_5 &= \epsilon [2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1)] \\
 & + \epsilon^2 [2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) + 4 G(a_7, a_7; 1) - 2 G(a_7, a_8; 1) \\
 & - 2 G(a_7, a_9; 1) - 4 G(a_8, a_7; 1) + 2 G(a_8, a_8; 1) + 2 G(a_8, a_9; 1) - 4 G(a_9, a_7; 1) \\
 & + 2 G(a_9, a_8; 1) + 2 G(a_9, a_9; 1) \\
 & - 4 G(a_7; 1) G(a_1; x_2) + 2 G(a_7; 1) G(a_2; x_2) + 2 G(a_8; 1) G(a_1; x_2) \\
 & - G(a_8; 1) G(a_2; x_2) + 2 G(a_9; 1) G(a_1; x_2) - G(a_9; 1) G(a_2; x_2)] \\
 g_6 &= -\epsilon G(a_2; x_2) + \epsilon^2 [2 G(a_1, a_2; x_2) + 2 G(a_2, a_1; x_2) - 3 G(a_2, a_2; x_2) + 2 G(a_3, a_2; x_2)] \\
 g_7 &= 2 \epsilon^2 [2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) - G(a_2, a_2; x_2) - G(a_8; 1) G(a_2; x_2) \\
 & + G(a_9; 1) G(a_2; x_2)] \\
 g_8 &= -g_7 \\
 g_9 &= -2 \epsilon^2 G(a_2, a_2; x_2) \\
 g_{10} &= \epsilon G(a_2; x_2) + 2 \epsilon^2 [-G(a_1, a_2; x_2) + 2 G(a_2, a_2; x_2) - 3 G(a_3, a_2; x_2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \epsilon \left[2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1) \right] \\
 &\quad + \epsilon^2 \left[2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) + 12 G(a_7, a_7; 1) - 6 G(a_7, a_8; 1) \right. \\
 &\quad - 6 G(a_7, a_9; 1) - 8 G(a_8, a_7; 1) + 4 G(a_8, a_8; 1) + 4 G(a_8, a_9; 1) - 8 G(a_9, a_7; 1) \\
 &\quad \left. + 4 G(a_9, a_8; 1) + 4 G(a_9, a_9; 1) \right] \\
 g_{12} &= -1 - 2\epsilon \left[2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1) \right] \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \left[-2 G(a_1, a_7; 1) + G(a_1, a_8; 1) + G(a_1, a_9; 1) - 4 G(a_7, a_7; 1) + 2 G(a_7, a_8; 1) \right. \\
 &\quad + 2 G(a_7, a_9; 1) + 4 G(a_8, a_7; 1) - 2 G(a_8, a_8; 1) - 2 G(a_8, a_9; 1) + 4 G(a_9, a_7; 1) \\
 &\quad \left. - 2 G(a_9, a_8; 1) - 2 G(a_9, a_9; 1) - \pi^2/12 \right] \\
 g_{13} &= \epsilon G(a_6; 1) + \epsilon^2 \left[G(a_1, a_6; 1) - 4 G(a_6, a_6; 1) \right] \\
 g_{14} &= -1 + 2\epsilon G(a_6; 1) + 4\epsilon^2 \left[G(a_1, a_6; 1) - 2 G(a_6, a_6; 1) - \pi^2/12 \right] \\
 g_{15} &= 0 \\
 g_{16} &= \epsilon^2 \left[2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) - 2 G(a_{14}, a_7; 1) + G(a_{14}, a_8; 1) \right. \\
 &\quad + G(a_{14}, a_9; 1) - 2 G(a_{15}, a_7; 1) + G(a_{15}, a_8; 1) + G(a_{15}, a_9; 1) + 2 G(a_{16}, a_7; 1) \\
 &\quad - G(a_{16}, a_8; 1) - G(a_{16}, a_9; 1) + 2 G(a_{17}, a_7; 1) - G(a_{17}, a_8; 1) - G(a_{17}, a_9; 1) \\
 &\quad - G(a_2, a_1; x_2) + G(a_2, a_2; x_2)/2 + G(a_4, a_1; x_2) - G(a_4, a_2; x_2)/2 + G(a_5, a_1; x_2) \\
 &\quad - G(a_5, a_2; x_2)/2 \\
 &\quad - G(a_{14}; 1) G(a_1; x_2) + G(a_{14}; 1) G(a_2; x_2)/2 - G(a_{15}; 1) G(a_1; x_2) \\
 &\quad + G(a_{15}; 1) G(a_2; x_2)/2 + G(a_{16}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{16}; 1) G(a_2; x_2)/2 \\
 &\quad \left. + G(a_{17}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{17}; 1) G(a_2; x_2)/2 \right] \\
 g_{17} &= \epsilon \left[2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1) \right] \\
 &\quad + \epsilon^2 \left[2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) + 4 G(a_7, a_7; 1) - 2 G(a_7, a_8; 1) \right. \\
 &\quad - 2 G(a_7, a_9; 1) - 8 G(a_8, a_7; 1) + 4 G(a_8, a_8; 1) + 4 G(a_8, a_9; 1) - 8 G(a_9, a_7; 1) \\
 &\quad + 4 G(a_9, a_8; 1) + 4 G(a_9, a_9; 1) + 2 G(a_{14}, a_7; 1) - G(a_{14}, a_8; 1) - G(a_{14}, a_9; 1) \\
 &\quad + 2 G(a_{15}, a_7; 1) - G(a_{15}, a_8; 1) - G(a_{15}, a_9; 1) + 2 G(a_{16}, a_7; 1) - G(a_{16}, a_8; 1) \\
 &\quad - G(a_{16}, a_9; 1) + 2 G(a_{17}, a_7; 1) - G(a_{17}, a_8; 1) - G(a_{17}, a_9; 1) \\
 &\quad - G(a_2, a_1; x_2) + G(a_2, a_2; x_2)/2 + G(a_4, a_1; x_2) - G(a_4, a_2; x_2)/2 + G(a_5, a_1; x_2) \\
 &\quad - G(a_5, a_2; x_2)/2 \\
 &\quad - 4 G(a_7; 1) G(a_1; x_2) + 2 G(a_7; 1) G(a_2; x_2) + G(a_{14}; 1) G(a_1; x_2) \\
 &\quad - G(a_{14}; 1) G(a_2; x_2)/2 + G(a_{15}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{15}; 1) G(a_2; x_2)/2 \\
 &\quad + G(a_{16}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{16}; 1) G(a_2; x_2)/2 + G(a_{17}; 1) G(a_1; x_2) \\
 &\quad \left. - G(a_{17}; 1) G(a_2; x_2)/2 \right] \\
 g_{18} &= 0 \\
 g_{19} &= -g_7/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{20} &= \epsilon^2 \left[2 G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1) - G(a_1, a_9; 1) - 2 G(a_8, a_7; 1) + G(a_8, a_8; 1) \right. \\
 &\quad \left. + G(a_8, a_9; 1) - 2 G(a_9, a_7; 1) + G(a_9, a_8; 1) + G(a_9, a_9; 1) + 2 G(a_2, a_2; x_2) + \pi^2/6 \right] \\
 g_{21} &= 0 \\
 g_{22} &= \epsilon^2 \left[G(a_1, a_7; 1) - G(a_1, a_8; 1)/2 - G(a_1, a_9; 1)/2 - 2 G(a_7, a_7; 1) + G(a_7, a_8; 1) \right. \\
 &\quad \left. + G(a_7, a_9; 1) + G(a_1, a_6; 1)/2 \right] \\
 g_{23} &= \epsilon^2 \left[2 G(a_{18}, a_7; 1) - G(a_{18}, a_8; 1) - G(a_{18}, a_9; 1) + 2 G(a_{19}, a_7; 1) - G(a_{19}, a_8; 1) \right. \\
 &\quad \left. - G(a_{19}, a_9; 1) + G(a_1, a_6; 1) - G(a_8, a_6; 1) - G(a_9, a_6; 1) + G(a_{18}, a_6; 1) \right. \\
 &\quad \left. + G(a_{19}, a_6; 1) - \pi^2/6 \right] \\
 g_{24} &= 0 \\
 g_{25} &= \epsilon^2 G(a_2, a_2; x_2)/2 \\
 g_{26} &= \epsilon^2 \left[G(a_1, a_2; x_2) - G(a_2, a_2; x_2)/2 \right] \\
 g_{27} &= \epsilon G(a_6; 1) + \epsilon^2 \left[-4 G(a_6, a_7; 1) + 2 G(a_6, a_8; 1) + 2 G(a_6, a_9; 1) + 4 G(a_{18}, a_7; 1) \right. \\
 &\quad \left. - 2 G(a_{18}, a_8; 1) - 2 G(a_{18}, a_9; 1) + 4 G(a_{19}, a_7; 1) - 2 G(a_{19}, a_8; 1) - 2 G(a_{19}, a_9; 1) \right. \\
 &\quad \left. + G(a_1, a_6; 1) - 4 G(a_6, a_6; 1) - 4 G(a_7, a_6; 1) + 2 G(a_{18}, a_6; 1) + 2 G(a_{19}, a_6; 1) \right. \\
 &\quad \left. - 2 G(a_6; 1) G(a_1; x_2) + G(a_6; 1) G(a_2; x_2) \right] \\
 g_{28} &= -1/2 + \epsilon \left[G(a_6; 1) + 2 G(a_7; 1) - G(a_8; 1) - G(a_9; 1) + G(a_1; x_2) - G(a_2; x_2)/2 \right] \\
 &\quad + \epsilon^2 \left[8 G(a_1, a_7; 1) - 4 G(a_1, a_8; 1) - 4 G(a_1, a_9; 1) - 4 G(a_6, a_7; 1) + 2 G(a_6, a_8; 1) \right. \\
 &\quad \left. + 2 G(a_6, a_9; 1) - 8 G(a_7, a_7; 1) + 4 G(a_7, a_8; 1) + 4 G(a_7, a_9; 1) - 8 G(a_8, a_7; 1) \right. \\
 &\quad \left. + 4 G(a_8, a_8; 1) + 4 G(a_8, a_9; 1) - 8 G(a_9, a_7; 1) + 4 G(a_9, a_8; 1) + 4 G(a_9, a_9; 1) \right. \\
 &\quad \left. + 2 G(a_{14}, a_7; 1) - G(a_{14}, a_8; 1) - G(a_{14}, a_9; 1) + 2 G(a_{15}, a_7; 1) - G(a_{15}, a_8; 1) \right. \\
 &\quad \left. - G(a_{15}, a_9; 1) + 2 G(a_{16}, a_7; 1) - G(a_{16}, a_8; 1) - G(a_{16}, a_9; 1) + 2 G(a_{17}, a_7; 1) \right. \\
 &\quad \left. - G(a_{17}, a_8; 1) - G(a_{17}, a_9; 1) + 4 G(a_{18}, a_7; 1) - 2 G(a_{18}, a_8; 1) - 2 G(a_{18}, a_9; 1) \right. \\
 &\quad \left. + 4 G(a_{19}, a_7; 1) - 2 G(a_{19}, a_8; 1) - 2 G(a_{19}, a_9; 1) \right. \\
 &\quad \left. + 4 G(a_1, a_6; 1) - 4 G(a_6, a_6; 1) - 4 G(a_7, a_6; 1) + 2 G(a_{18}, a_6; 1) + 2 G(a_{19}, a_6; 1) \right. \\
 &\quad \left. - 2 G(a_1, a_1; x_2) + G(a_1, a_2; x_2) + G(a_4, a_1; x_2) - G(a_4, a_2; x_2)/2 + G(a_5, a_1; x_2) \right. \\
 &\quad \left. - G(a_5, a_2; x_2)/2 \right. \\
 &\quad \left. - 2 G(a_6; 1) G(a_1; x_2) + G(a_6; 1) G(a_2; x_2) - 4 G(a_7; 1) G(a_1; x_2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 G(a_7; 1) G(a_2; x_2) + G(a_{14}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{14}; 1) G(a_2; x_2)/2 \right. \\
 &\quad \left. + G(a_{15}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{15}; 1) G(a_2; x_2)/2 + G(a_{16}; 1) G(a_1; x_2) \right. \\
 &\quad \left. - G(a_{16}; 1) G(a_2; x_2)/2 + G(a_{17}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{17}; 1) G(a_2; x_2)/2 + \pi^2/12 \right] \\
 g_{29} &= 0 \\
 g_{30} &= \epsilon^2 \left[-4 G(a_1, a_{10}; 1) - 4 G(a_1, a_{11}; 1) + 4 G(a_1, a_{12}; 1) + 4 G(a_1, a_{13}; 1) - G(a_2, a_2; x_2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 G(a_{10}; 1) G(a_2; x_2) - 2 G(a_{11}; 1) G(a_2; x_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{31} = & \epsilon \left[G(a_{10}; 1) + G(a_{11}; 1) - G(a_{12}; 1) - G(a_{13}; 1) \right] \\
 & + \epsilon^2 \left[2 G(a_{20}, a_7; 1) - G(a_{20}, a_8; 1) - G(a_{20}, a_9; 1) + 2 G(a_{21}, a_7; 1) - G(a_{21}, a_8; 1) \right. \\
 & - G(a_{21}, a_9; 1) + 6 G(a_{10}, a_7; 1) - 3 G(a_{10}, a_8; 1) - 3 G(a_{10}, a_9; 1) + 6 G(a_{11}, a_7; 1) \\
 & - 3 G(a_{11}, a_8; 1) - 3 G(a_{11}, a_9; 1) - 8 G(a_{12}, a_7; 1) + 4 G(a_{12}, a_8; 1) + 4 G(a_{12}, a_9; 1) \\
 & - 8 G(a_{13}, a_7; 1) + 4 G(a_{13}, a_8; 1) + 4 G(a_{13}, a_9; 1) \\
 & + 2 G(a_1, a_{10}; 1) + 2 G(a_1, a_{11}; 1) - 2 G(a_1, a_{12}; 1) - 2 G(a_1, a_{13}; 1) \\
 & + 6 G(a_7, a_{10}; 1) + 6 G(a_7, a_{11}; 1) - 6 G(a_7, a_{12}; 1) - 6 G(a_7, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_8, a_{10}; 1) - 4 G(a_8, a_{11}; 1) + 4 G(a_8, a_{12}; 1) + 4 G(a_8, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_9, a_{10}; 1) - 4 G(a_9, a_{11}; 1) + 4 G(a_9, a_{12}; 1) + 4 G(a_9, a_{13}; 1) \\
 & + 2 G(a_{10}, a_{10}; 1) + 2 G(a_{10}, a_{11}; 1) - 2 G(a_{10}, a_{12}; 1) - 2 G(a_{10}, a_{13}; 1) \\
 & + 2 G(a_{11}, a_{10}; 1) + 2 G(a_{11}, a_{11}; 1) - 2 G(a_{11}, a_{12}; 1) - 2 G(a_{11}, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_{12}, a_{10}; 1) - 4 G(a_{12}, a_{11}; 1) + 4 G(a_{12}, a_{12}; 1) + 4 G(a_{12}, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_{13}, a_{10}; 1) - 4 G(a_{13}, a_{11}; 1) + 4 G(a_{13}, a_{12}; 1) + 4 G(a_{13}, a_{13}; 1) \\
 & + G(a_{20}, a_{10}; 1) + G(a_{20}, a_{11}; 1) - G(a_{20}, a_{12}; 1) - G(a_{20}, a_{13}; 1) \\
 & + G(a_{21}, a_{10}; 1) + G(a_{21}, a_{11}; 1) - G(a_{21}, a_{12}; 1) - G(a_{21}, a_{13}; 1) \\
 & \left. + 1/2 G(a_2, a_2; x_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$g_{32} = 0$$

$$\begin{aligned}
 g_{33} = & \epsilon^2 \left[4 G(a_1, a_7; 1) - 2 G(a_1, a_8; 1) - 2 G(a_1, a_9; 1) - 4 G(a_{14}, a_7; 1) + 2 G(a_{14}, a_8; 1) \right. \\
 & + 2 G(a_{14}, a_9; 1) - 4 G(a_{15}, a_7; 1) + 2 G(a_{15}, a_8; 1) + 2 G(a_{15}, a_9; 1) + 4 G(a_{16}, a_7; 1) \\
 & - 2 G(a_{16}, a_8; 1) - 2 G(a_{16}, a_9; 1) + 4 G(a_{17}, a_7; 1) - 2 G(a_{17}, a_8; 1) - 2 G(a_{17}, a_9; 1) \\
 & - 2 G(a_2, a_1; x_2) + G(a_2, a_2; x_2) + 2 G(a_4, a_1; x_2) - G(a_4, a_2; x_2) + 2 G(a_5, a_1; x_2) \\
 & - G(a_5, a_2; x_2) \\
 & - 2 G(a_{14}; 1) G(a_1; x_2) + G(a_{14}; 1) G(a_2; x_2) - 2 G(a_{15}; 1) G(a_1; x_2) \\
 & + G(a_{15}; 1) G(a_2; x_2) + 2 G(a_{16}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{16}; 1) G(a_2; x_2) \\
 & \left. + 2 G(a_{17}; 1) G(a_1; x_2) - G(a_{17}; 1) G(a_2; x_2) \right]
 \end{aligned}$$

$$g_{34} = 0$$

$$g_{35} = 0$$

$$g_{36} = 0$$

$$g_{37} = g_{30}/2$$

$$g_{38} = 0$$

$$g_{39} = 0$$

$$\begin{aligned}
 g_{40} = & \epsilon^2 \left[2 G(a_{10}, a_7; 1) - G(a_{10}, a_8; 1) - G(a_{10}, a_9; 1) + 2 G(a_{11}, a_7; 1) - G(a_{11}, a_8; 1) \right. \\
 & \left. - G(a_{11}, a_9; 1) - 2 G(a_{20}, a_7; 1) + G(a_{20}, a_8; 1) + G(a_{20}, a_9; 1) - 2 G(a_{21}, a_7; 1) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + G(a_{21}, a_8; 1) + G(a_{21}, a_9; 1) \\
 & - G(a_1, a_{10}; 1) - G(a_1, a_{11}; 1) + G(a_1, a_{12}; 1) + G(a_1, a_{13}; 1) \\
 & + 2 G(a_7, a_{10}; 1) + 2 G(a_7, a_{11}; 1) - 2 G(a_7, a_{12}; 1) - 2 G(a_7, a_{13}; 1) \\
 & + G(a_{10}, a_{10}; 1) + G(a_{10}, a_{11}; 1) - G(a_{10}, a_{12}; 1) - G(a_{10}, a_{13}; 1) \\
 & + G(a_{11}, a_{10}; 1) + G(a_{11}, a_{11}; 1) - G(a_{11}, a_{12}; 1) - G(a_{11}, a_{13}; 1) \\
 & - G(a_{20}, a_{10}; 1) - G(a_{20}, a_{11}; 1) + G(a_{20}, a_{12}; 1) + G(a_{20}, a_{13}; 1) \\
 & - G(a_{21}, a_{10}; 1) - G(a_{21}, a_{11}; 1) + G(a_{21}, a_{12}; 1) + G(a_{21}, a_{13}; 1) \Big] \\
 g_{41} = & 1 + \epsilon \Big[4 G(a_7; 1) - 2 G(a_8; 1) - 2 G(a_9; 1) + 2 G(a_{10}; 1) + 2 G(a_{11}; 1) - 2 G(a_{12}; 1) \\
 & - 2 G(a_{13}; 1) - 2 G(a_1; x_2) + G(a_2; x_2) \Big] \\
 & + \epsilon^2 \Big[4 G(a_1, a_7; 1) - 2 G(a_1, a_8; 1) - 2 G(a_1, a_9; 1) + 8 G(a_7, a_7; 1) - 4 G(a_7, a_8; 1) \\
 & - 4 G(a_7, a_9; 1) + 8 G(a_{10}, a_7; 1) - 4 G(a_{10}, a_8; 1) - 4 G(a_{10}, a_9; 1) + 8 G(a_{11}, a_7; 1) \\
 & - 4 G(a_{11}, a_8; 1) - 4 G(a_{11}, a_9; 1) - 8 G(a_{12}, a_7; 1) + 4 G(a_{12}, a_8; 1) + 4 G(a_{12}, a_9; 1) \\
 & - 8 G(a_{13}, a_7; 1) + 4 G(a_{13}, a_8; 1) + 4 G(a_{13}, a_9; 1) - 4 G(a_{14}, a_7; 1) + 2 G(a_{14}, a_8; 1) \\
 & + 2 G(a_{14}, a_9; 1) - 4 G(a_{15}, a_7; 1) + 2 G(a_{15}, a_8; 1) + 2 G(a_{15}, a_9; 1) - 4 G(a_{16}, a_7; 1) \\
 & + 2 G(a_{16}, a_8; 1) + 2 G(a_{16}, a_9; 1) - 4 G(a_{17}, a_7; 1) + 2 G(a_{17}, a_8; 1) + 2 G(a_{17}, a_9; 1) \\
 & + 8 G(a_1, a_{10}; 1) + 8 G(a_1, a_{11}; 1) - 8 G(a_1, a_{12}; 1) - 8 G(a_1, a_{13}; 1) \\
 & + 8 G(a_7, a_{10}; 1) + 8 G(a_7, a_{11}; 1) - 8 G(a_7, a_{12}; 1) - 8 G(a_7, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_8, a_{10}; 1) - 4 G(a_8, a_{11}; 1) + 4 G(a_8, a_{12}; 1) + 4 G(a_8, a_{13}; 1) \\
 & - 4 G(a_9, a_{10}; 1) - 4 G(a_9, a_{11}; 1) + 4 G(a_9, a_{12}; 1) + 4 G(a_9, a_{13}; 1) \\
 & - 8 G(a_{12}, a_{10}; 1) - 8 G(a_{12}, a_{11}; 1) + 8 G(a_{12}, a_{12}; 1) + 8 G(a_{12}, a_{13}; 1) \\
 & - 8 G(a_{13}, a_{10}; 1) - 8 G(a_{13}, a_{11}; 1) + 8 G(a_{13}, a_{12}; 1) + 8 G(a_{13}, a_{13}; 1) \\
 & + 4 G(a_1, a_1; x_2) - 2 G(a_1, a_2; x_2) - G(a_2, a_2; x_2) - 2 G(a_4, a_1; x_2) + G(a_4, a_2; x_2) \\
 & - 2 G(a_5, a_1; x_2) + G(a_5, a_2; x_2) \\
 & - 8 G(a_7; 1) G(a_1; x_2) + 4 G(a_7; 1) G(a_2; x_2) + 8 G(a_8; 1) G(a_1; x_2) \\
 & - 4 G(a_8; 1) G(a_2; x_2) + 8 G(a_9; 1) G(a_1; x_2) - 4 G(a_9; 1) G(a_2; x_2) \\
 & - 4 G(a_{10}; 1) G(a_1; x_2) + 2 G(a_{10}; 1) G(a_2; x_2) - 4 G(a_{11}; 1) G(a_1; x_2) \\
 & + 2 G(a_{11}; 1) G(a_2; x_2) + 4 G(a_{12}; 1) G(a_1; x_2) - 2 G(a_{12}; 1) G(a_2; x_2) \\
 & + 4 G(a_{13}; 1) G(a_1; x_2) - 2 G(a_{13}; 1) G(a_2; x_2) - 2 G(a_{14}; 1) G(a_1; x_2) \\
 & + G(a_{14}; 1) G(a_2; x_2) - 2 G(a_{15}; 1) G(a_1; x_2) + G(a_{15}; 1) G(a_2; x_2) \\
 & - 2 G(a_{16}; 1) G(a_1; x_2) + G(a_{16}; 1) G(a_2; x_2) - 2 G(a_{17}; 1) G(a_1; x_2) \\
 & + G(a_{17}; 1) G(a_2; x_2) - \pi^2/6 \Big]
 \end{aligned}$$

$$g_{42} = g_{30}$$

$$g_{43} = -g_7$$

$$\begin{aligned} g_{44} &= 0 \\ g_{45} &= 0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= -1, & a_3 &= -2, \\ a_6 &= -1/y, & a_7 &= 1/(z_2 + 1), & a_8 &= (x_2 + 1)/(z_2 + 1), \\ a_9 &= 1/[(x_2 + 1)(z_2 + 1)], & a_{10} &= -1/y_2, & a_{11} &= (x_2 + 1)/y_2, \end{aligned} \tag{B.4}$$

并且 $a_{4,5}, a_{12,13}, a_{14,15}, a_{16,17}, a_{18,19}, a_{20,21}$ 分别为下面 6 个多项式的根,

$$\begin{aligned} a_{4,5} : & \quad \kappa^2 - \kappa - 1 = 0 \\ a_{12,13} : & \quad y_2^2 \kappa^2 - (x_2 + 1) = 0 \\ a_{14,15} : & \quad [(x_2 + 1) - x_2^2] (z_2 + 1)^2 \kappa^2 - 2(x_2 + 1)(z_2 + 1)\kappa + (x_2 + 1) = 0 \\ a_{16,17} : & \quad (x_2 + 1)(z_2 + 1)^2 \kappa^2 - 2(x_2 + 1)(z_2 + 1)\kappa + [(x_2 + 1) - x_2^2] = 0 \\ a_{18,19} : & \quad y(x_2 + 1)(z_2 + 1)^2 \kappa^2 - 2(x_2 + 1)(z_2 + 1)\kappa + [y(x_2 + 1) + x_2^2(z_2 + 1)] = 0 \\ a_{20,21} : & \quad y_2(z_2 + 1)[(x_2 + 1)(z_2 + 1) - x_2 y_2] \kappa^2 - 2y_2(x_2 + 1)(z_2 + 1)\kappa \\ & \quad + (x_2 + 1)[x_2(z_2 + 1) + y_2] = 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

\mathcal{T}_{2F} 中 g_{36} 的 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 以及 $g_{36,37,38,44,45}$ 的 $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ 被表示为一重积分的形式。这里展示了 g_{36} 的 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 的解析结果

$$\begin{aligned} g_{36}^{(3)} &= \int d \log \omega_{24} [4 G(a_1, a_7; \kappa) - 2 G(a_1, a_8; \kappa) - 2 G(a_1, a_9; \kappa) - 4 G(a_8, a_7; \kappa) \\ & \quad + 2 G(a_8, a_8; \kappa) + 2 G(a_8, a_9; \kappa) - 4 G(a_9, a_7; \kappa) + 2 G(a_9, a_8; \kappa) + 2 G(a_9, a_9; \kappa) \\ & \quad - 4 G(a_{10}, a_7; \kappa) + 2 G(a_{10}, a_8; \kappa) + 2 G(a_{10}, a_9; \kappa) - 4 G(a_{11}, a_7; \kappa) + 2 G(a_{11}, a_8; \kappa) \\ & \quad + 2 G(a_{11}, a_9; \kappa) + 4 G(a_{20}, a_7; \kappa) - 2 G(a_{20}, a_8; \kappa) - 2 G(a_{20}, a_9; \kappa) + 4 G(a_{21}, a_7; \kappa) \\ & \quad - 2 G(a_{21}, a_8; \kappa) - 2 G(a_{21}, a_9; \kappa) \\ & \quad + 4 G(a_1, a_{10}; \kappa) + 4 G(a_1, a_{11}; \kappa) - 4 G(a_1, a_{12}; \kappa) - 4 G(a_1, a_{13}; \kappa) \\ & \quad - 4 G(a_7, a_{10}; \kappa) - 4 G(a_7, a_{11}; \kappa) + 4 G(a_7, a_{12}; \kappa) + 4 G(a_7, a_{13}; \kappa) \\ & \quad - 4 G(a_{10}, a_{10}; \kappa) - 4 G(a_{10}, a_{11}; \kappa) + 4 G(a_{10}, a_{13}; \kappa) + 4 G(a_{10}, a_{12}; \kappa) \\ & \quad - 4 G(a_{11}, a_{10}; \kappa) - 4 G(a_{11}, a_{11}; \kappa) + 4 G(a_{11}, a_{12}; \kappa) + 4 G(a_{11}, a_{13}; \kappa) \\ & \quad + 2 G(a_{20}, a_{10}; \kappa) + 2 G(a_{20}, a_{11}; \kappa) - 2 G(a_{20}, a_{12}; \kappa) - 2 G(a_{20}, a_{13}; \kappa) \\ & \quad + 2 G(a_{21}, a_{10}; \kappa) + 2 G(a_{21}, a_{11}; \kappa) - 2 G(a_{21}, a_{12}; \kappa) - 2 G(a_{21}, a_{13}; \kappa) \\ & \quad + \pi^2/3] \\ & \quad + d \log \omega_{25} [2 G(a_{10}, a_7; \kappa) - G(a_{10}, a_8; \kappa) - G(a_{10}, a_9; \kappa) + 2 G(a_{11}, a_7; \kappa) \\ & \quad - G(a_{11}, a_8; \kappa) - G(a_{11}, a_9; \kappa) - 2 G(a_{20}, a_7; \kappa) + G(a_{20}, a_8; \kappa) + G(a_{20}, a_9; \kappa) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2G(a_{21}, a_7; \kappa) + G(a_{21}, a_8; \kappa) + G(a_{21}, a_9; \kappa) \\
 & -G(a_1, a_{10}; \kappa) - G(a_1, a_{11}; \kappa) + G(a_1, a_{12}; \kappa) + G(a_1, a_{13}; \kappa) \\
 & +2G(a_7, a_{10}; \kappa) + 2G(a_7, a_{11}; \kappa) - 2G(a_7, a_{12}; \kappa) - 2G(a_7, a_{13}; \kappa) \\
 & +G(a_{10}, a_{10}; \kappa) + G(a_{10}, a_{11}; \kappa) - G(a_{10}, a_{12}; \kappa) - G(a_{10}, a_{13}; \kappa) \\
 & +G(a_{11}, a_{10}; \kappa) + G(a_{11}, a_{11}; \kappa) - G(a_{11}, a_{12}; \kappa) - G(a_{11}, a_{13}; \kappa) \\
 & -G(a_{20}, a_{10}; \kappa) - G(a_{20}, a_{11}; \kappa) + G(a_{20}, a_{12}; \kappa) + G(a_{20}, a_{13}; \kappa) \\
 & -G(a_{21}, a_{10}; \kappa) - G(a_{21}, a_{11}; \kappa) + G(a_{21}, a_{12}; \kappa) + G(a_{21}, a_{13}; \kappa) \\
 & +G(a_2, a_2; x_2)/2 \Big] \\
 & -d \log \omega_{27} \Big[2G(a_1, a_2; x_2) - G(a_2, a_2; x_2) \Big] \\
 & -d \log(\omega_{28}/\omega_{34}) \Big[2G(a_1, a_7; \kappa) - G(a_1, a_8; \kappa) - G(a_1, a_9; \kappa) \\
 & -G(a_2; x_2)G(a_8; \kappa) + G(a_2; x_2)G(a_9; \kappa) - G(a_2, a_2; x_2) \Big] \\
 & -d \log(\omega_{32}\omega_{35}) \Big[2G(a_1, a_{10}; \kappa) + 2G(a_1, a_{11}; \kappa) - 2G(a_1, a_{12}; \kappa) - 2G(a_1, a_{13}; \kappa) \\
 & -G(a_2; x_2)G(a_{10}; \kappa) + G(a_2; x_2)G(a_{11}; \kappa) + G(a_2, a_2; x_2)/2 \Big] \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

其中 ω_i 在 (3.19) 中给出。同样, $g_{36,37,38,44,45}$ 的 ϵ^4 阶也表示为一次积分。

B.3 顶分支 \mathcal{T}_{2F} 中的主积分

在 \mathcal{T}_3 中, 椭圆 sector 中的 $g_{13,14,15}$ 写到 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ 的解析结果为

$$\begin{aligned}
 g_{13} = & \epsilon^3 \Big\{ I(a_{13,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + I(a_{13,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + I(a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + I(a_{13,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 + I(a_{13,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) - I(a_{13,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) \\
 & + I(a_{13,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + I(a_{13,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + I(a_{13,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + 2 \Big[I(a_{13,15}, b_{15,12}) + I(a_{13,12}) \Big] \text{Cl}_2(\pi/3) \\
 & + 2 \Big[I(a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) + I(a_{13,15}, a_{15,2}) + I(a_{13,5}, a_{5,2}) \Big] \Big[G(i; x_3) + G(-i; x_3) \\
 & - G(0; x_3) \Big] \\
 & + 4 \Big[I(a_{13,15}, b_{15,10}) + 2I(a_{13,15}, b_{15,5}) + I(a_{13,10}) + 2I(a_{13,5}) \Big] \Big[G(0, i; x_3) + G(0, -i; x_3) \\
 & - G(0, 0; x_3) - \pi^2/24 \Big] \\
 & + 6iG(c_1, 0, i; x_3) - 6iG(-c_1, 0, i; x_3) + 6iG(c_1, 0, -i; x_3) - 6iG(-c_1, 0, -i; x_3) \\
 & - 6iG(c_2, 0, i; x_3) + 6iG(-c_2, 0, i; x_3) - 6iG(c_2, 0, -i; x_3) + 6iG(-c_2, 0, -i; x_3) \\
 & - 6iG(c_1, 0, 0; x_3) + 6iG(-c_1, 0, 0; x_3) + 6iG(c_2, 0, 0; x_3) - 6iG(-c_2, 0, 0; x_3) \\
 & - 4iG(i, 0, i; x_3) + 4iG(-i, 0, i; x_3) - 4iG(i, 0, -i; x_3) + 4iG(-i, 0, -i; x_3) \\
 & + 4iG(i, 0, 0; x_3) - 4iG(-i, 0, 0; x_3) \\
 & - i\pi^2/12G(c_1; x_3) + i\pi^2/12G(-c_1; x_3) + 5i\pi^2/12G(c_2; x_3) - 5i\pi^2/12G(-c_2; x_3) \\
 & + i\pi^2/6G(i; x_3) - i\pi^2/6G(-i; x_3) + 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(c_1; x_3) - 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(-c_1; x_3) \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(c_2; x_3) - 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(-c_2; x_3) \} \\
 g_{14} = & \epsilon^3 \{ \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(a_{14,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(a_{14,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{14,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) \\
 & + \text{I}(a_{14,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(a_{14,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + \text{I}(a_{14,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(a_{5,2}, a_{7,8}, a_{7,8})/4 \\
 & + 2 [\text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}) + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,12}) + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,12}) + \text{I}(a_{14,12})] \text{Cl}_2(\pi/3) \\
 & + 2 [\text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,2}) \\
 & + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,5}, a_{5,2}) + \text{I}(a_{14,15}, a_{15,2}) + \text{I}(a_{14,5}, a_{5,2})] [G(i; x_3) + G(-i; x_3) - G(0; x_3)] \\
 & - 4 [\text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,10}) + 2 \text{I}(b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}) + \text{I}(a_{14,15}, b_{15,10}) + 2 \text{I}(a_{14,15}, b_{15,5}) \\
 & + \text{I}(b_{14,13}, a_{13,10}) + 2 \text{I}(b_{14,13}, a_{13,5}) + \text{I}(a_{14,10}) + 2 \text{I}(a_{14,5})] [G(0, i; x_3) + G(0, -i; x_3) \\
 & - G(0, 0; x_3) - \pi^2/24] - \text{I}(b_{14,13}) [\\
 & - 6 i G(c_1, 0, i; x_3) + 6 i G(-c_1, 0, i; x_3) - 6 i G(c_1, 0, -i; x_3) + 6 i G(-c_1, 0, -i; x_3) \\
 & + 6 i G(c_2, 0, i; x_3) - 6 i G(-c_2, 0, i; x_3) + 6 i G(c_2, 0, -i; x_3) - 6 i G(-c_2, 0, -i; x_3) \\
 & + 6 i G(c_1, 0, 0; x_3) - 6 i G(-c_1, 0, 0; x_3) - 6 i G(c_2, 0, 0; x_3) + 6 i G(-c_2, 0, 0; x_3) \\
 & + 4 i G(i, 0, i; x_3) - 4 i G(-i, 0, i; x_3) + 4 i G(i, 0, -i; x_3) - 4 i G(-i, 0, -i; x_3) \\
 & - 4 i G(i, 0, 0; x_3) + 4 i G(-i, 0, 0; x_3) \\
 & + i \pi^2/12 G(c_1; x_3) - i \pi^2/12 G(-c_1; x_3) - 5 i \pi^2/12 G(c_2; x_3) + 5 i \pi^2/12 G(-c_2; x_3) \\
 & - i \pi^2/6 G(i; x_3) + i \pi^2/6 G(-i; x_3) - 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(c_1; x_3) + 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(-c_1; x_3) \\
 & - 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(c_2; x_3) + 3 i \text{Li}_2(-ic_2) G(-c_2; x_3)] \\
 & - 12 G(c_1, 0, i; x_3) - 12 G(-c_1, 0, i; x_3) - 12 G(c_1, 0, -i; x_3) - 12 G(-c_1, 0, -i; x_3) \\
 & - 12 G(c_2, 0, i; x_3) - 12 G(-c_2, 0, i; x_3) - 12 G(c_2, 0, -i; x_3) - 12 G(-c_2, 0, -i; x_3) \\
 & + 12 G(c_1, 0, 0; x_3) + 12 G(-c_1, 0, 0; x_3) + 12 G(c_2, 0, 0; x_3) + 12 G(-c_2, 0, 0; x_3) \\
 & + 16 G(1, 0, i; x_3) + 16 G(-1, 0, i; x_3) + 16 G(1, 0, -i; x_3) + 16 G(-1, 0, -i; x_3) \\
 & - 16 G(1, 0, 0; x_3) - 16 G(-1, 0, 0; x_3) + 8 G(0, 0, i; x_3) + 8 G(0, 0, -i; x_3) \\
 & - 8 G(0, 0, 0; x_3) \\
 & + \pi^2/6 G(c_1; x_3) + \pi^2/6 G(-c_1; x_3) + 5 \pi^2/6 G(c_2; x_3) + 5 \pi^2/6 G(-c_2; x_3) \\
 & - 2 \pi^2/3 G(1; x_3) - 2 \pi^2/3 G(-1; x_3) - \pi^2/3 G(0; x_3) - 6 \text{Li}_2(-ic_2) G(c_1; x_3) \\
 & - 6 \text{Li}_2(-ic_2) G(-c_1; x_3) + 6 \text{Li}_2(-ic_2) G(c_2; x_3) + 6 \text{Li}_2(-ic_2) G(-c_2; x_3) - 2 \zeta(3)/3 \} \\
 g_{15} = & \epsilon^2 \{ \text{I}(b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + \text{I}(b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{I}(a_{15,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(a_{15,2}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{15,1}, a_{4,4}) \\
 & + 2 \text{I}(b_{15,12}) \text{Cl}_2(\pi/3) \\
 & + 2 \left[\text{I}(b_{15,5}, a_{5,2}) + \text{I}(a_{15,2}) \right] \left[G(i; x_3) + G(-i; x_3) - G(0; x_3) \right] \\
 & - 4 \left[\text{I}(b_{15,10}) + 2 \text{I}(b_{15,5}) \right] \left[G(0, i; x_3) + G(0, -i; x_3) - G(0, 0; x_3) - \pi^2/24 \right] \} \\
 & - \epsilon^3 \{ 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 - 3 \text{I}(b_{15,12}, a_{11,12}, a_{7,8}, a_{7,8})/4 - \text{I}(b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{5,2}, a_{7,8}, a_{7,8})/4 - \text{I}(b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(b_{15,12}, a_{12,8}, a_{8,8}, a_{7,8})/2 + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) - 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) + \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(a_{15,15}, b_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(a_{15,15}, b_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{15,15}, b_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(b_{15,12}, a_{12,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(b_{15,12}, a_{12,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) - \text{I}(b_{15,5}, a_{5,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(a_{15,15}, a_{15,8}, a_{7,8})/2 + \text{I}(a_{15,15}, a_{15,1}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{15,15}, a_{15,2}, a_{4,4}) \\
 & - \text{I}(a_{15,12}, a_{12,8}, a_{7,8})/2 - \text{I}(a_{15,12}, a_{11,12}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{15,5}, a_{5,2}, a_{4,4}) \\
 & - 3 \text{I}(a_{15,2}, a_{7,8}, a_{7,8})/4 - \text{I}(a_{15,2}, a_{4,4}, a_{4,4}) - \text{I}(a_{15,8}, a_{8,8}, a_{7,8})/2 \\
 & + 3 \text{I}(a_{15,1}, a_{7,8}, a_{7,8})/4 + \text{I}(a_{15,1}, a_{4,4}, a_{4,4}) \\
 & + 2 \left[3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,12}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,12}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,12}) \right. \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,12}) - \text{I}(a_{15,15}, b_{15,12}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,12}) - \text{I}(b_{15,12}, a_{12,12}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,12}) - \text{I}(a_{15,12}) \left. \right] \text{Cl}_2(\pi/3) + \left[\text{I}(b_{15,12}, a_{11,12}) + \text{I}(a_{15,1}) \right] \pi^2/6 \\
 & + \text{I}(b_{15,12}) \left[24 i \text{Li}_3(i/\sqrt{3})/5 - 24 i \text{Li}_3(-i/\sqrt{3})/5 + 41 \pi^3/135 + \pi \log^2(3)/5 \right] \\
 & + 2 \left[3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) \right. \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, a_{15,2}) + 3 \text{I}(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,5}, a_{5,2}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,15}, a_{15,2}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,5}, a_{5,2}) - \text{I}(a_{15,15}, b_{15,5}, a_{5,2}) - \text{I}(b_{15,5}, a_{5,5}, a_{5,2}) \\
 & + 3 \text{I}(b_{15,5}, a_{14,5}, a_{5,2}) - \text{I}(b_{15,13}, a_{13,15}, a_{15,2}) - \text{I}(a_{15,15}, a_{15,2}) - \text{I}(a_{15,5}, a_{5,2}) \left. \right] \left[G(i; x_3) \right. \\
 & \left. + G(-i; x_3) - G(0; x_3) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \left[6I(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,5}) + 3I(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,15}, b_{15,10}) - 2I(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,5}) \right. \\
 & + 6I(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,5}) + 3I(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,10}) - I(b_{15,13}, a_{13,15}, b_{15,10}) \\
 & + 6I(b_{15,5}, a_{14,15}, b_{15,5}) + 3I(b_{15,5}, b_{14,13}, a_{13,10}) + 3I(b_{15,5}, a_{14,10}) - 2I(a_{15,15}, b_{15,5}) \\
 & + 6I(b_{15,5}, a_{14,5}) - 2I(b_{15,5}, a_{5,5}) - I(b_{15,13}, a_{13,10}) - I(a_{15,15}, b_{15,10}) - 2I(b_{15,13}, a_{13,5}) \\
 & \left. - 2I(a_{15,5}) - I(a_{15,10}) \right] \left[G(0, i; x_3) + G(0, -i; x_3) - G(0, 0; x_3) - \pi^2/24 \right] \\
 & + 4 \left[I(b_{15,5}, a_{5,2}) + I(a_{15,2}) \right] \left[G(i, i; x_3) + G(i, -i; x_3) - G(i, 0; x_3) + G(-i, i; x_3) \right. \\
 & + G(-i, -i; x_3) - G(-i, 0; x_3) - G(0, i; x_3) - G(0, -i; x_3) + G(0, 0; x_3) \left. \right] \\
 & - \left[3I(b_{15,5}, b_{14,13}) - I(b_{15,13}) \right] \left[\right. \\
 & - 6iG(c_1, 0, i; x_3) + 6iG(-c_1, 0, i; x_3) - 6iG(c_1, 0, -i; x_3) + 6iG(-c_1, 0, -i; x_3) \\
 & + 6iG(c_2, 0, i; x_3) - 6iG(-c_2, 0, i; x_3) + 6iG(c_2, 0, -i; x_3) - 6iG(-c_2, 0, -i; x_3) \\
 & + 6iG(c_1, 0, 0; x_3) - 6iG(-c_1, 0, 0; x_3) - 6iG(c_2, 0, 0; x_3) + 6iG(-c_2, 0, 0; x_3) \\
 & + 4iG(i, 0, i; x_3) - 4iG(-i, 0, i; x_3) + 4iG(i, 0, -i; x_3) - 4iG(-i, 0, -i; x_3) \\
 & - 4iG(i, 0, 0; x_3) + 4iG(-i, 0, 0; x_3) \\
 & + i\pi^2/12G(c_1; x_3) - i\pi^2/12G(-c_1; x_3) - 5i\pi^2/12G(c_2; x_3) + 5i\pi^2/12G(-c_2; x_3) \\
 & - i\pi^2/6G(i; x_3) + i\pi^2/6G(-i; x_3) - 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(c_1; x_3) + 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(-c_1; x_3) \\
 & \left. - 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(c_2; x_3) + 3i\text{Li}_2(-ic_2)G(-c_2; x_3) \right] + I(b_{15,10}) \left[\right. \\
 & - 8G(i, 0, i; x_3) - 8G(-i, 0, i; x_3) - 8G(i, 0, -i; x_3) - 8G(-i, 0, -i; x_3) \\
 & - 8G(0, i, i; x_3) - 8G(0, -i, i; x_3) - 8G(0, i, -i; x_3) - 8G(0, -i, -i; x_3) \\
 & + 8G(-i, 0, 0; x_3) + 8G(i, 0, 0; x_3) + 8G(0, i, 0; x_3) + 8G(0, -i, 0; x_3) \\
 & - 16G(1, 0, i; x_3) - 16G(-1, 0, i; x_3) - 16G(1, 0, -i; x_3) - 16G(-1, 0, -i; x_3) \\
 & + 16G(-1, 0, 0; x_3) + 16G(1, 0, 0; x_3) + 32G(0, 0, i; x_3) + 32G(0, 0, -i; x_3) \\
 & - 32G(0, 0, 0; x_3) \\
 & + 2\pi^2/3G(1; x_3) + 2\pi^2/3G(-1; x_3) + \pi^2/3G(i; x_3) + \pi^2/3G(-i; x_3) \\
 & \left. - 2\pi^2/3G(0; x_3) + 4\zeta(3) \right] + I(b_{15,5}) \left[\right. \\
 & - 36G(c_1, 0, i; x_3) - 36G(-c_1, 0, i; x_3) - 36G(c_1, 0, -i; x_3) - 36G(-c_1, 0, -i; x_3) \\
 & - 36G(c_2, 0, i; x_3) - 36G(-c_2, 0, i; x_3) - 36G(c_2, 0, -i; x_3) - 36G(-c_2, 0, -i; x_3) \\
 & + 36G(c_2, 0, 0; x_3) + 36G(c_1, 0, 0; x_3) + 36G(-c_1, 0, 0; x_3) + 36G(-c_2, 0, 0; x_3) \\
 & - 16G(0, i, i; x_3) - 16G(0, -i, i; x_3) - 16G(0, i, -i; x_3) - 16G(0, -i, -i; x_3) \\
 & + 16G(0, i, 0; x_3) + 16G(0, -i, 0; x_3) + 64G(1, 0, i; x_3) + 64G(-1, 0, i; x_3) \\
 & + 64G(1, 0, -i; x_3) + 64G(-1, 0, -i; x_3) - 64G(1, 0, 0; x_3) - 64G(-1, 0, 0; x_3) \\
 & + 24G(0, 0, i; x_3) + 24G(0, 0, -i; x_3) - 24G(0, 0, 0; x_3) \\
 & + \pi^2/2G(c_1; x_3) + \pi^2/2G(-c_1; x_3) + 5\pi^2/2G(c_2; x_3) + 5\pi^2/2G(-c_2; x_3) \\
 & \left. - 8\pi^2/3G(1; x_3) - 8\pi^2/3G(-1; x_3) - \pi^2/3G(0; x_3) - 18\text{Li}_2(-ic_2)G(c_1; x_3) \right]
 \end{aligned}$$

$$-18 \operatorname{Li}_2(-ic_2) G(-c_1; x_3) + 18 \operatorname{Li}_2(-ic_2) G(c_2; x_3) + 18 \operatorname{Li}_2(-ic_2) G(-c_2; x_3) - 4 \zeta(3) \Big] \Big\} \quad (\text{B.7})$$

其中, $c_1 = e^{i\pi/6}$ 和 $c_2 = e^{-i\pi/6}$, $\operatorname{Cl}_2(x)$ 表示 Clausen 函数。迭代积分 I 的定义为

$$I(f_1, f_2, \dots, f_n) = \int_0^1 d\kappa_1 f_1(\kappa_1) \int_0^{\kappa_1} d\kappa_2 f_2(\kappa_2) \cdots \int_0^{\kappa_{n-1}} d\kappa_n f_n(\kappa_n). \quad (\text{B.8})$$

$a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$ 分别为 \mathbb{A} 和 \mathbb{B} 的矩阵元, 它们来自于微分方程

$$\frac{d}{d\kappa} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \epsilon) = (\mathbb{B} + \epsilon \mathbb{A}) \mathbf{g}. \quad (\text{B.9})$$

致 谢

岁月匆匆，光阴荏苒，我站在了毕业的十字路口。读研究生的这段时间将会成为我人生难以忘怀的一段经历，也是我人生宝贵的财富。一路上有许许多多帮助过我的师长和朋友，在此请允许我向各位表示真挚的感谢。

感谢马文淦老师，您对科研的热情使我敬佩，即使退休也坚持参加组会，也关注 and 科研的前沿问题。感谢张仁友老师，您严谨的治学态度深刻影响着我，值得我学习，您始终对我保持高要求，让我能不断进步，感谢您能不断指出和包容我的错误和缺点，您不论在生活还是学习上，都给与了我很大的帮助。感谢新加坡国立大学的王清海老师为我文章提供的宝贵建议。

感谢实验室各位，曾经指导过我的朱剑文、李和意、龙明明、王帅帅师兄，感谢你们耐心地教会我各种知识和技能，给了我有很大的帮助。还要感谢一起奋斗的黎哲，李书香，张知行，王晓峰，魏相杰，李攀峰，刘忠源，王一师兄师弟，和你们在实验室一起运动，一起解决问题的日子都值得我怀念。

感谢曾经的室友钟志城，冯名扬，何思齐，王博，感谢你们对我的关心，也想念一起聚餐、打球还有宿舍畅聊的时光。

感谢背后支持我的家人和朋友，始终让我的心灵感受到温暖。还要感谢我的女友赵子惠，每次都能将鼓舞我从低谷中走出来，是我不断坚持下去的动力。

何文杰

2024 年 03 月 22 日

中国科学技术大学

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. Zhe Li, Ren-You Zhang, Shu-Xiang Li, Xiao-Feng Wang, **Wen-Jie He**, Liang Han, Yi Jiang and Qing-hai Wang, Mixed QCD-EW corrections to W -pair production at electron-positron colliders, arXiv:2401.01323 [hep-ph]
2. Zhi-Xing Zhang, Ren-You Zhang, Zhe Li, Shu-Xiang Li, **Wen-Jie He**, Liang Han and Qing-hai Wang, Mixed QCD \otimes EW corrections to charged Higgs pair production in THDM at electron-positron colliders, arXiv:2312.17207 [hep-ph]

待发表论文

1. **Wen-Jie He**, Ren-You Zhang, Liang Han, Zhe Li, Xiao-Feng Wang, Shu-Xiang Li, Pan-Feng Li and Qing-hai Wang, Two-loop planar master integrals for NNLO QCD corrections to W -pair production in quark-antiquark annihilation, in preparation