现代控制理论

一、 线性离散时间控制系统

1. 零阶保持器

原信号$e(kT)$，输出

$$e_{h(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)[u(t-kT)-u(t-kT-T)].$$

给定输入$e(kT)=\delta(t)$，输出为$g_h(t)=u(t)-u(t-T)$，从而传递函数

$$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}.$$

2. Z 变换和 Z 反变换

(1) 正变换：留数法

$L\to Z: F(z)=\hat{F}(z)+\beta$，已知$F(s)$，则$\hat{F}(z)$可以通过

- 单根: $\lim\limits_{s\to p_i}(s-p_i)F(s)\cdot\frac{z}{z-e^{p_iT}}$
- q重根: $\frac{1}{(q-1)!}\lim\limits_{s\to p_i}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\left[(s-p_i)^qF(s)\right]\cdot\frac{z}{z-e^{p_iT}}$
- 余项: $\beta=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)-\lim\limits_{z\to\infty}\hat{F}(z)$

[1] 滞后（右移） $\mathcal{Z}[y(t-kT)]=z^{-k}Y(z)$

[2] 超前（左移） $\mathcal{Z}[y(t+kT)]=z^kY(z)-y(0)z^k-y(1\cdot T)z^{k-1}\cdots-y[(k-1)T]z^1$

[3] 初值 $y(0)=\lim\limits_{z\to\infty}(Y(z))$

[4] 终值 $y(\infty)=\lim\limits_{z\to 0}(1-z^{-1})Y(z)$

(要判稳：$(1-z^{-1})Y(z)$在圆及圆外无极点)

(2) 反变换：分式展开

若$X(z)$有极点p_i，则

- 单根: $x(kT)=\lim\limits_{z\to p_i}\left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]\cdot z^k$
- q重根: $x(kT)=\frac{1}{(q-1)!}\lim\limits_{z\to p_i}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[(z-p_i)^q\frac{X(z)}{z}\right]\cdot z^k$

3. 用 Z 变换求解差分方程

4. 微分方程离散化

一阶惯性环节$T_1\frac{dy}{dt}+y=Kx$，在$nT<t<(n+1)T$，有$x(t)\equiv x(nT)$，其连续的解为

$$y=c\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+Kx(nT)$$

利用初值$y(nT)$求待定系数后可得

$$y=\frac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-\frac{nT}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+Kx(nT)$$

再取终值$t=(n+1)T$，可得

$$y((n+1)T)=\frac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-\frac{nT}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{(n+1)T}{T_1}}+Kx(nT)$$

$$y[(n+1)T]-e^{-\frac{T}{T_1}}y[nT]=\left(1-e^{-\frac{T}{T_1}}\right)Kx[nT]$$

5. 方块图求解系统脉冲传递函数*

（一） 离散系统的状态空间模型

1. 从连续到离散

使用零阶保持器得到

$$x[(k+1)T]=G(T)x[kT]+H(T)u(kT)$$

$$G(T)=e^{AT}=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right],H(T)=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau$$

2. Z 变换求离系状态方程的解

$$x(k)=\mathcal{Z}^{-1}[x(0)+(zI-A)^{-1}BU(z)]$$

其中$\Phi(k)=A^k=\mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-A)^{-1}z\right]$

3. 状态方程→脉冲传递函数

消去输出表达里的$X(z)$，得

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

（二） 离散系统的分析设计

1. 稳定性

1. 稳定充要条件：特征方程根位于单位圆内。
2. 劳斯、Nyquist 判据：双线性变换$z=\frac{w+1}{w-1}$后再做

2. 稳态误差

1. 求$Y(z)$，再求$E(z)=X(z)-Y(z)$，再用终值定理
2. 根据单位负反馈型别判断

3. 无稳态误差的最小拍系统

稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 0}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 0}(1-z^{-1})(1-\Phi(z))X(z)$$

则$\Phi(z)=1-\left(1-z^{-1}\right)^m$，再求补偿器传递函数。

4. 附：常见 Z 变换

$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$	$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$
1	$\delta(kT)$	1	e^{-nTs}	$\delta((k-n)T)$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}/\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}/\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-aT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$			

$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-aT}}{1}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s-a)(s-b)}$	$e^{-aT}-e^{-bT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(aKT)$	$\frac{z\sin(aT)}{z^2-2z\sin(aT)+1}$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(akT)$	$\frac{z\cos(aT)}{z^2-2z\cos(aT)+1}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-aT}\cos(bkT)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-aT}\sin(bkT)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\sin(bT)+e^{-2aT}}$

二、 状态空间分析法

1. 能控性

$$Q_c=(B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B)$$

$\mathrm{Rank}(Q_c) = n$即系统能控。

2. 能观性

$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ $\mathrm{Rank}(Q_o) = n$即系统能观。