现代控制理论

一、 线性离散时间控制系统

1. 零阶保持器

原信号$e(kT)$，输出

$$e_{h(t)}=\sum_{k-0}^{\infty}e(kT)[u(t-kT)-u(t-kT-T)].$$

给定输入$e(kT)=\delta(t)$，输出为$g_h(t)=u(t)-u(t-T)$，从而传递函数

$$H_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}.$$

2. Z 变换和 Z 反变换

分式展开时一定要注意极点的正负号！

(1) 正变换：留数法

$L\to Z:F(z)=\hat{F}(z)+\beta$，已知$F(s)$，则$\hat{F}(z)$可以通过

$$单根:\lim_{s\to p_i}(s-p_i)F(s)\cdot\frac{z}{z-e^{p_iT}}$$

$$q重根:\frac{1}{(q-1)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}[(s-p_i)^qF(s)]\cdot\frac{z}{z-e^{p_iT}}$$

- 余项: $\beta=\lim_{s\to\infty}sF(s)-\lim_{z\to\infty}\hat{F}(z)$

[1] 滞后（右移） $\mathcal{Z}[y(t-kT)]=z^{-k}Y(z)$

[2] 超前（左移） $\mathcal{Z}[y(t+kT)]=z^kY(z)-y(0)z^k-y(1\cdot T)z^{k-1}\cdots-y[(k-1)T]z^1$

[3] 初值 $y(0)=\lim_{z\to\infty}(Y(z))$

[4] 终值 $y(\infty)=\lim_{z\to 0}(1-z^{-1})Y(z)$

(要判稳：$(1-z^{-1})Y(z)$在圆及圆外无极点)

(2) 反变换：分式展开

若$X(z)$有极点p_i(留一个z出来)，则

$$单根:x(kT)=\lim_{z\to p_i}\left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]\cdot(p_i)^k$$

$$q重根:X(z)=\frac{1}{(q-1)!}\lim_{z\to p_i}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[(z-p_i)^q\frac{X(z)}{z}\right]\cdot\frac{1}{(z-p_i)^q}$$

$$+\cdots+\lim_{z\to p_i}\left[(z-p_i)^q\frac{X(z)}{z}\right]\cdot\frac{1}{z-p_i}$$

再查表求反变换。

3. 用 Z 变换求解差分方程

4. 微分方程离散化

一阶惯性环节$T_1\frac{dy}{dt}+y=Kx$，在$nT<t<(n+1)T$，有$x(t)\equiv x(nT)$，其连续的解为

$$y=c\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+Kx(nT)$$

利用初值$y(nT)$求待定系数后可得

$$y=\frac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-\frac{nT}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+Kx(nT)$$

再取终值$t=(n+1)T$，可得

$$y((n+1)T)=\frac{y(nT)-Kx(nT)}{e^{-\frac{nT}{T_1}}}\cdot e^{-\frac{(n+1)T}{T_1}}+Kx(nT)$$

$$y[(n+1)T]-e^{-\frac{T}{T_1}}y[nT]=\left(1-e^{-\frac{T}{T_1}}\right)Kx[nT]$$

5. 方块图求解系统脉冲传递函数*

$E^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}E(s-kj\omega_s)\Rightarrow E^*(s-kj\omega_s)=E^*(s)$

$$[G(s)E^*(s)]^*=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(s-jk\omega_s)E^*(s-jk\omega_s)$$

$$=E^*(s)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(s-jk\omega_s)=E^*(s)G^*(s)$$

使用**视差法**求反馈回路。部分环能够先考虑。保留 s（连续）表达，最后用 z 表达（采样）。若要反变换，分母复杂时可用**长除法**。

（一） 离散系统的状态空间模型

1. 从连续到离散

使用零阶保持器得到

$$x[(k+1)T]=G(T)x[kT]+H(T)u(kT)$$

$$G(T)=e^{AT}=\{\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]\}|_{t=T},H(T)=\int_0^T e^{A\tau}Bd\tau$$

注意上面是拉式反变换后再代入$t=T$.

2. 状态方程→脉冲传递函数

消去输出表达里的$X(z)$，得

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

注意到连续状态的为$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$.

3. Z 变换求离系状态方程的解（和拉式变换平行）

$$R(z)=zx(0)+BU(z),X(z)=(zI-A)^{-1}R(z),x(k)=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

其中$\Phi(k)=A^k=\mathcal{Z}^{-1}[(zI-A)^{-1}z]$，注意留数展开后每一项前面的正负号。连续为$R(s)=x(0)+bU(s),X(s)=(sI-A)^{-1}R(s),x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$

（二） 离散系统的分析设计

1. 稳定性

1. 稳定充要条件：特征方程根位于单位圆内。
2. 劳斯、Nyquist 判据：双线性变换$z=\frac{w+1}{w-1}$后再做

2. 稳态误差

1. 求$Y(z)$，再求$E(z)=X(z)-Y(z)$，再用终值定理
2. 根据单位负反馈型别判断

3. 无稳态误差的最小拍系统

$$e(\infty)=\lim_{z\to 0}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 0}(1-z^{-1})\Phi_e(z)X(z)$$

则$\Phi_e(z)=\left(1-z^{-1}\right)^m,\Phi(z)=1-\left(1-z^{-1}\right)^m$，再求补偿器传递函数。若是书上的图，则有 $D(z)=\frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$

二、 状态空间分析法

1. 能控性 $Q_c = (B\ \ AB\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B)$ **Rank**$(Q_c) = n$**能控。**

2. 能观性 $Q_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ **Rank**$(Q_o) = n$**能观。**

3. 状态反馈 $\dot{x} = Ax + b(u - Kx)$

(1) 设计$|sI - A + BK| = \prod_{p_i}(s - p_i)$**再求得**$K$**.**

(2) 能控标准型设计。

求Q_c判断能控，写原系统特征多项式Δ_{ori}及其系数$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$。**注意两个特征多项式都不能解错！**

令$\hat{x} = T_c^{-1}x$，系统相关参数变为(3 阶为例)

$$A_c = T_c^{-1}AT_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$b_c = T_c^{-1}b = (0\ \ 0\ \ 1)^T \quad c_c = cT_c$$

其中$T_c = Q_cL, L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，再求$T_c^{-1}$。

然后再求期望得特征多项式Δ_{ex}，得到其系数$\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{n-1}^*$，然后根据$\alpha_i + k_{ci} = \alpha_i^*$求得$k_{ci}$。

由$\dot{\hat{x}} = (A_c - b_cK_c)\hat{x} + b_c$，回代$x$，得到$K = K_cT_c^{-1}$。然后再求得状态反馈后的系统。要会画**反馈的状态图**。

4. 全维状态观测器 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + H(y - \hat{y})$

(1) 设计$|sI - A + HC| - \prod_{p_i}(s - p_i)$**再求得**$H$**.**

(2) 能观标准型设计。

求Q_o判断能观，写原系统的特征多项式Δ_{ori}及其系数$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$。

令$\hat{x} = T_o^{-1}x$，系统相关参数变为(3 阶为例)

$$A_o = T_o^{-1}AT_o = \begin{pmatrix} 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$c_o = cT_o = (0\ \ 0\ \ 1) \quad b_o = T_o^{-1}b$$

其中$T_o^{-1} = LQ_o, L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，再求$T_o$。

然后再求期望得特征多项式，得到其系数$\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_{n-1}^*$，然后根据$\alpha_i + h_{oi} = \alpha_i^*$求得$h_{oi}$。

由$\dot{\hat{x}} = (A_o - H_oc_o)\hat{x} + b_o$，回代$x$，得到$H = T_oH_o$。然后再求得状态观测后的系统。要会画**有观测的状态图**。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad u = r - K\hat{x} \text{ 状态反馈} \\ \dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + (B - HD)u + Hy \text{ 状态观测} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ HC & A-BK-HC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}r \\ y = (C-DK)(x\ \ \hat{x})^T + Dr \end{cases}$$

三、 非线性系统分析

1. 描述函数法

输入输出特性为奇函数。

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\cos(\omega t)d(\omega t), B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$N(A) = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A}$.

(1) 稳定性判据

$G(s)$无右平面极点，$P_R = 0, N = P_R - Z_R = 0$，故$G(j\omega)$不能包围$-\frac{1}{N(A)}$曲线。

2. 李雅普诺夫稳定性分析

第一判别法：$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{x = x_e}$，$\dot{x} = Ax$. 若$A$特征值均为负实部，则稳定；有一个正实部，则不稳定；零特征值则由高阶项决定。

第二判别法：定义能量函数$V(x) = (x_1 - x_{e1})^2 + (x_2 - x_{e2})^2$，求$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x_2}$为负定。

四、 附录

1. 常见 Z 变换

可以先将拉氏变换转化为时域，然后再转 Z 域。

$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$	$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$
1	$\delta(kT)$	1	e^{-nTs}	$\delta((k-n)T)$	z^{-n}
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}/\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}/\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-aT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$			

$Y(s)$	$y(kT)$	$Y(z)$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-aT}}{1}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{b-a}{(s-a)(s-b)}$	$e^{-aT} - e^{-bT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(aKT)$	$\frac{z\sin(aT)}{z^2-2z\sin(aT)+1}$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(akT)$	$\frac{z\cos(aT)}{z^2-2z\cos(aT)+1}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-aT}\cos(bkT)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(bT)+e^{-2aT}}$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-aT}\sin(bkT)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2ze^{-aT}\sin(bT)+e^{-2aT}}$

2. 二阶系统响应指标

超调$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$，峰值时间$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$，调节时间$T_s = \frac{3(\Delta=5\%)\sim 4(\Delta=2\%)}{\zeta\omega_n}$，衰减比$n = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = e^{\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

3. 能控/能观子空间分解

求得 $\mathrm{rank}(Q_c(Q_o)) = q$，选取其中线性无关的$q$列(行)和$n - q$任意线无列(行)，组成$T(T^{-1})$，求得$T^{-1}(T)$，令$\hat{x} = T^{-1}x$，从而

$$\hat{x} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}b, \quad y = cT\hat{x} + Du$$

再选取$\hat{x}_c, y_c, \hat{x}_{\bar{c}}, y_{\bar{c}}(\hat{x}_o, y_o, \hat{x}_{\bar{o}}, y_{\bar{o}})$.

4. 内外稳定

内稳定：A的特征值位于左半开平面。 **外稳定：**$G(s)$的极点位于左半开平面。