Aplicação de Métodos Numéricos Iterativos em uma Equação Não Linear

Julia Graziosi Ortiz - 11797810
Katlyn Ribeiro Almeida - 14586070
Matheus Araujo Pinheiro - 14676810

São Carlos, 2024

1 Introdução

Equações não lineares podem apresentar inumeras soluções, uma solução ou até mesmo nenhuma solução. Dependendo da equação pode ser difícil prever sua solução sem fazer cálculos detalhados, e com isso encontrar soluções exatas se torna complexo. Mas há maneiras que com métodos numéricos possamos encontrar soluções aproximadas, por exemplo, através de métodos iterativos.

Nesse trabalho, será realizado a análise completa de cada método utilizado relatando suas vantagens e desvantagens e assim, apresentando qual método utilizado pode se enquadrar como o melhor e mais vantajoso, tanto na parte teórica quanto na parte computacional. Evidênciando a qualidade de seus resultados e suas ordens de convergência teóricas comparadas com as numéricas.

2 Métodos

No intuito de encontrar uma aproximação da solução exata de uma equação não linear utilizamos Métodos Iterativos, nos quais dado um chute inicial x_0 é possível gerar uma sequência de iterações $\{x_0, x_1, \dots\}$ em que cada x_k gera uma nova aproximação x_{k+1} da solução do problema. Caso a sequência convirja, o método se diz convergente e caso contrário, divergente.

A eficiência do método é determinada pela sua capacidade de chegar à solução ideal levando em conta o número de iterações. Deve-se ter em mente que nem todos os métodos iterativos garantem a convergência para todas as equações, e que a escolha da estimativa inicial pode interferir no sucesso do método. De acordo com o Teorema de Ostrowski, para termos a ordem de convergência (p) que pode ser aproximada por

$$p \approx \frac{ln\left(\frac{|x_{k+1}-x|}{|x_k-x|}\right)}{ln\left(\frac{|x_k-x|}{|x_{k-1}-x|}\right)} \tag{1}$$

. A ordem varia com o método e a função utilizados. No caso da Bisseção possui ordem fixa igual a 1 (linear), já no de Newton a ordem pode ser até 2 (quadrática) quando a derivada não se anula no intervalo analisado. Por fim, nas Secantes a ordem de convergência é aproximadamente $1,65$ (super linear), ou seja, converge mais rápido que a Bisseção e mais devagar que Newton.

Uma forma de descobrir se existe raiz em um intervalo é através do *Teorema do Valor Intermediário*, o qual afirma que: dado um intervalo $[a, b]$ onde a função $f(x)$ é contínua, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ se $f(a) \cdot f(b) < 0$. Além disso, no caso em que f possui uma raiz α com multiplicidade $m > 1$, é possível obter uma função equivalente $p(x)$ em que α é uma raiz simples:

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x),\ q(\alpha) \neq 0 \ \Rightarrow\ p(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} = (x-\alpha)q(x)$$

A implementação dos métodos foi realizada em Python usando Jupyter Notebook (.jupy), tendo como critério de parada uma combinação dos erros absoluto e relativo: $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon(1 + |x_k|)$, onde ϵ é a precisão adotada. Nos resultados, o erro foi calculado a partir da raiz exata α, sendo $e_k = |x_k - \alpha|$.

Abaixo se encontram todos os métodos que serão trabalhados para determinar as aproximações das raizes da equação disponibilizada:

2.1 Método da Bisseção

A estratégia deste método para encontrar uma aproximação da raiz α de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ consiste em reduzir este pela metade a cada iteração e verificar em qual subintervalo a raiz se encontra, com base no Teorema do Valor Intermediário. As condições para aplicação desse método são:

- $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$;
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Satisfeitas as condições, se considerarmos $a_0 = a$, $b_0 = b$ e $x_0 = \frac{a+b}{2}$, as iterações seguintes serão definidas como

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k, & \text{se } f(a_k) \cdot f(x_k) < 0 \\ x_k, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{2}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k, & \text{se } f(b_k) \cdot f(x_k) < 0 \\ x_k, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \tag{3}$$

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} \tag{4}$$

O Método da Bisseção garante que a sequência de iterados converge para a solução, logo pode ser considerado simples e intuitivo. Além disso, se definirmos ϵ como a precisão adotada, podemos estimar quantas iterações serão necessárias para chegar na aproximação da raiz da seguite maneira:

$$\frac{b-a}{2^k} \geq \epsilon \tag{5}$$

Dessa forma, como a precisão não depende da função, o método pode ser pouco eficiente e lento.

2.2 Método de Newton

Este método é um caso particular do Método do Ponto Fixo, no qual dada uma função $f(x)$ definimos uma função $g(x)$ de forma que ambas possuam as mesmas raizes em um intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$f(x) = 0 \iff x = g(x).$$

Assim, a partir de um chute inicial x_0 a sequência de iterados é dada por

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

A função $g(x)$ gerada a partir de $f(x)$ não é única, então a condição sobre g para garantir que exista um ponto fixo $\alpha \in [a, b]$ é:

$$g \in C([a, b]) \text{ e } \; g(x) \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]$$

Além disso, também é possível garantir que o método convirja para α qualquer que seja o chute inicial $x_0 \in [a, b]$. Para isso, é necessário que exista $g'(x)$, $\forall x \in [a, b]$ e uma constante $\rho < 1$ tal que $|g'(x)| < \rho, \quad \forall x \in (a, b)$. Essa constante é inversamente proporcional à taxa de convergência do método, ou seja, a convergência será mais rápida quanto menor for ρ.

Com isso, o Método de Newton é um caso especial pois utiliza uma função g específica para acelerar a taxa de convergência, isto é, define a função de forma que $|g'(\alpha)| = 0$. Se $x_0 \in [a, b]$ é o chute inicial, as iterações são definidas como:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6}$$

A principal dificuldade desse método é a necessidade de existir e conhecer a primeira derivada da função no intervalo, o que nem sempre ocorre ou é trivial.

2.3 Método das Secantes

A ideia deste método é adaptar o Método de Newton para que seja possível obter uma função $g(x)$ sem ser necessário existir ou conhecer a primeira derivada da função original $f(x)$. Para isso, aproxima-se $f'(x)$ através da Expansão de Taylor de modo que

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Assim, não precisamos calcular a derivada da função mas precisamos de dois valores iniciais para poder gerar a sequência $\{x_k\}$. Se x_0 e x_1 são os valores iniciais, as iterações do Método das Secantes são dadas por:

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{7}$$

Caso as iterações saiam do intervalo $[a, b]$, uma forma de resolver isso é aplicando o Método da Falsa Posição, que combina os métodos das seccantes e da bisseção.

3 Resultados

3.1 Análise de $f(x)$

Considere a equação não linear

$$f(x) = 63x^5 - 381x^4 + 496x^3 + 204x^2 - 544x + 192, \tag{8}$$

e os intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

Por $f(x)$ ser um polinômio de grau 5, sabemos que tanto a função quanto suas derivadas são contínuas, e que existem no máximo 5 raizes (distintas ou não). Nesse caso, uma maneira de determinar as raizes exatas α de $f(x)$ é através da sua forma fatorada:

$$f(x) = (x + 1)(x - 4)(3x - 2)^2(7x - 12).$$

Assim, $\{-1;\ 4;\ \frac{2}{3};\ \frac{12}{7}\}$ é o conjunto das raizes de $f(x)$ e

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{12}{7} \in [1, 2].$$

Note que a multiplicidade de α_1 é 2, o que pode interferir na eficiência e aplicação dos métodos. Analiticamente, verificamos que $f(x)$ possui pelo menos uma raiz nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$, agora observe a Figura 1 abaixo:

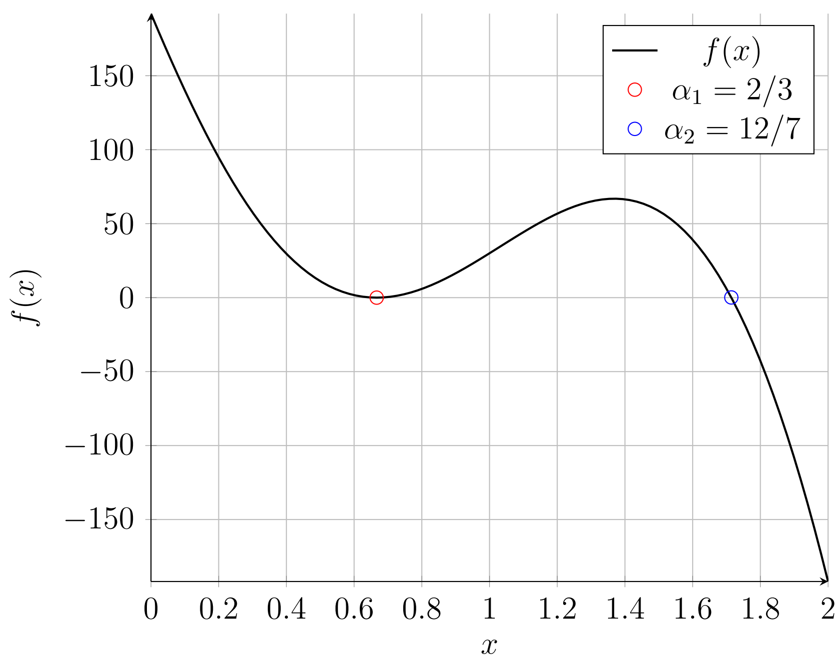

Figura 1: Gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, 2]$

Graficamente, também garantimos a existência de pelo menos uma raiz pois vemos que a função tangencia (em $[0, 1]$) e cruza (em $[1, 2]$) o eixo x. No primeiro intervalo, vemos que a função só assume valores não-negativos e assim, não cumpre a condição necessária para aplicar o Método da Bisseção. Já no segundo, não há problemas em relação a esse método.

Sabemos que todas as derivadas de f são contínuas, então para o Método de Newton precisamos analisar o comportamento da primeira derivada da função:

$$f'(x) = 315x^4 - 1524x^3 + 1488x^2 + 408x - 544 \tag{9}$$

Nos extremos dos intervalos, temos:

$$f'(0) = -544, \quad f'(1) = 143 \;\text{ e }\; f'(2) = -928$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, $f'(x)$ se anula nos dois intervalos. Ou seja, não há garantia de convergência para a raiz independente do chute inicial nos Métodos de Newton e das Secantes. Ainda é possível aplicar esses métodos usando a função f, pois garantimos que existe uma raiz, testando chutes iniciais distintos ou reduzindo o intervalo até obter uma solução adequada.

Conforme explicado anteriormente, a multiplicidade da raiz $\alpha_1 \in [0, 1]$ interfere na eficiência e aplicação dos métodos nesse intervalo, portanto, convém definir uma nova função p equivalente a $f(x)$ tal que α_1 seja uma raiz simples, ou seja,

$$p(x) = \frac{f(x)}{(3x-2)} \;\Rightarrow\; p(x) = 21x^4 - 113x^3 + 90x^2 + 128x - 96 \tag{10}$$

Com essa nova função, temos que $p(0) \cdot p(1) = -96 \cdot 30 < 0$, então podemos substituir $f(x)$ por $p(x)$ para aplicar o Método da Bisseção em $[0, 1]$. Além disso,

$$p'(x) = 84x^3 - 339x^2 + 180x + 128 \tag{11}$$

A derivada de p não se anula nesse intervalo pois $p'(0) \cdot p'(1) = 128 \cdot 53 > 0$, logo também podemos substituir $f(x)$ por $p(x)$ para aplicar os Métodos de Newton e das Secantes.

3.2 Método da Bisseção

Dada a precisão de 10^{-6} vamos estimar a quantidade de iterações necessárias para encontrar a solução aproximada. Ambos os intervalos tem tamanho 1, então o máximo de iterações será igual:

$$\frac{1-0}{2^k} = \frac{2-1}{2^k} \geq 10^{-6} \Rightarrow k \leq 6\log_2(5) + 6 \approx 20$$

Como descrito anteriormente, usaremos a função $p(x)$ (Eq. 3) para aplicar esse método no primeiro intervalo e a função original $f(x)$ (Eq. 1) para o segundo. Os resultados obtido estão dispostos, respecivamente, na Tabela 1 e Tabela 2.

k	a	$p(a)$	b	$p(b)$	x_k	$p(x_k)$	e_k
1	0.00000000	-96.00000000	1.00000000	30.00000000	0.50000000	-22.31250000	0.16666667
2	0.50000000	-22.31250000	1.00000000	30.00000000	0.75000000	9.59765625	0.08333333
3	0.50000000	-22.31250000	0.75000000	9.59765625	0.62500000	-5.22729492	0.04166667
4	0.62500000	-5.22729492	0.75000000	9.59765625	0.68750000	2.51106262	0.02083333
5	0.62500000	-5.22729492	0.68750000	2.51106262	0.65625000	-1.28176403	0.01041667
6	0.65625000	-1.28176403	0.68750000	2.51106262	0.67187500	0.63439590	0.00520833
7	0.65625000	-1.28176403	0.67187500	0.63439590	0.66406250	-0.31882856	0.00260417
8	0.66406250	-0.31882856	0.67187500	0.63439590	0.66796875	0.15900776	0.00130208
9	0.66406250	-0.31882856	0.66796875	0.15900776	0.66601562	-0.07960565	0.00065104
10	0.66601562	-0.07960565	0.66796875	0.15900776	0.66699219	0.03977740	0.00032552
11	0.66601562	-0.07960565	0.66699219	0.03977740	0.66650391	-0.01989506	0.00016276
12	0.66650391	-0.01989506	0.66699219	0.03977740	0.66674805	0.00994594	0.00008138
13	0.66650391	-0.01989506	0.66674805	0.00994594	0.66662598	-0.00497337	0.00004069
14	0.66662598	-0.00497337	0.66674805	0.00994594	0.66668701	0.00248658	0.00002035
15	0.66662598	-0.00497337	0.66668701	0.00248658	0.66665649	-0.00124332	0.00001017
16	0.66665649	-0.00124332	0.66668701	0.00248658	0.66667175	0.00062165	0.00000509
17	0.66665649	-0.00124332	0.66667175	0.00062165	0.66666412	-0.00031083	0.00000254
18	0.66666412	-0.00031083	0.66667175	0.00062165	0.66666794	0.00015541	0.00000127
19	0.66666412	-0.00031083	0.66666794	0.00015541	0.66666603	-0.00007771	0.00000064
20	0.66666603	-0.00007771	0.66666794	0.00015541	0.66666698	0.00003886	0.00000032

Tabela 1: Iterações do Método da Bisseção no intervalo [0, 1].

k	a	$f(a)$	b	$f(b)$	x_k	$f(x_k)$	e_k
1	1.00000000	30.00000000	2.00000000	-192.00000000	1.50000000	58.59375000	0.21428571
2	1.50000000	58.59375000	2.00000000	-192.00000000	1.75000000	-16.33886719	0.03571429
3	1.50000000	58.59375000	1.75000000	-16.33886719	1.62500000	32.20687866	0.08928571
4	1.62500000	32.20687866	1.75000000	-16.33886719	1.68750000	10.92908192	0.02678571
5	1.68750000	10.92908192	1.75000000	-16.33886719	1.71875000	-1.93078968	0.00446429
6	1.68750000	10.92908192	1.71875000	-1.93078968	1.70312500	4.68964237	0.01116071
7	1.70312500	4.68964237	1.71875000	-1.93078968	1.71093750	1.42743798	0.00334821
8	1.71093750	1.42743798	1.71875000	-1.93078968	1.71484375	-0.23962526	0.00055804
9	1.71093750	1.42743798	1.71484375	-0.23962526	1.71289062	0.59691308	0.00139509
10	1.71289062	0.59691308	1.71484375	-0.23962526	1.71386719	0.17939633	0.00041853
11	1.71386719	0.17939633	1.71484375	-0.23962526	1.71435547	-0.02992627	0.00006975
12	1.71386719	0.17939633	1.71435547	-0.02992627	1.71411133	0.07478207	0.00017439
13	1.71411133	0.07478207	1.71435547	-0.02992627	1.71423340	0.02243966	0.00005232
14	1.71423340	0.02243966	1.71435547	-0.02992627	1.71429443	-0.00374036	0.00000872
15	1.71423340	0.02243966	1.71429443	-0.00374036	1.71426392	0.00935038	0.00002180
16	1.71426392	0.00935038	1.71429443	-0.00374036	1.71427917	0.00280519	0.00000654
17	1.71427917	0.00280519	1.71429443	-0.00374036	1.71428680	-0.00046754	0.00000109
18	1.71428680	-0.00046754	1.71429443	-0.00374036	1.71428299	0.00116884	0.00000272
19	1.71428299	0.00116884	1.71428680	-0.00046754	1.71428490	0.00035065	0.00000082

Tabela 2: Iterações do Método da Bisseção no intervalo [1, 2].

A quantidade de iterações foi compatível com o esperado em ambos os intervalos. As aproximações calculadas no intervalo $[0, 1]$ e no $[1, 2]$ foram, respectivamente:

$$\beta_1 \approx 0.666667 \ \text{ e } \ \beta_2 \approx 1.714285$$

Se aproximarmos as raizes exatas com a mesma quantidade de casas decimais, temos

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \approx 0.666667 \ \text{ e } \ \alpha_2 = \frac{12}{7} \approx 1.714286$$

Logo, apesar da quantidade de iterações ser relativamente grande, o Método da Bisseção se mostrou eficiente para aproximar a raiz da função em ambos os intervalos.

3.3 Método de Newton

Para implementar esse método, utilizaremos as funções $p(x), p'(x)$ no intervalo $[0, 1]$ e $f(x), f'(x)$ em $[1, 2]$. As iterações são calculadas conforme definido anteriormente (Eq. 5) e a mesma precisão de 10^{-6} será considerada. O valor inicial x_0 escolhido foi 1 para os intervalos $[0, 1]$, a Tabelas 3 os resultados obtidos.

k	x_k	$p(x_k)$	$p'(x_k)$	e_k
0	1.00000000	30.00000000	50.00000000	0.26666667
1	0.40000000	-37.09440000	150.94400000	0.02091725
2	0.64574942	-2.59102956	124.68557792	0.00013674
3	0.66652992	-0.01671445	121.35575577	0.00000099
4	0.66666766	0.00012084	121.33317119	0.00000001
5	0.66666666	-0.00000130	121.33333452	0.00000001

Tabela 3: Iterações do Método de Newton no intervalo [0, 1].

Apesar de $f'(x)$ se anular em $[1, 2]$, sabemos que existe uma raiz no intervalo então tomemos o chute inicial $x_0 = 2$, já que é mais próximo da raiz exata α_2. Os resultados se encontram na tabela abaixo:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	e_k
0	2.00000000	-192.00000000	-928.00000000	0.07881773
1	1.79310345	-38.83713077	-558.00839553	0.00921819
2	1.72350390	-4.02158501	-443.58696617	0.00015213
3	1.71443785	-0.06527747	-429.20810386	0.00000004
4	1.71428576	-0.00001826	-428.96799722	0.00000000
5	1.71428571	-0.00000000	-428.96793003	0.00000000

Tabela 4: Iterações do Método de Newton no intervalo [1, 2].

Do primeiro intervalo, temos a aproximação $\beta_1 \approx 0.666667$ e do segundo, $\beta_2 \approx 1.714286$. Ambos foram alcançados em apenas 5 iterações, o que explicita a eficiência deste método quando comparado com o anterior, em que foram necessárias 20 iterações para chegar no resultado.

3.4 Método das Secantes

Neste último método, continuamos usando a precisão de 10^{-6}. A função $p(x)$ foi utilizada para o intervalo $[0, 1]$, e os valores iniciais adotados foram $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, as iterações estão registradas na Tabela 5:

k	x_k	$p(x_k)$	e_k
0	0.00000000	-96.00000000	0.66666667
1	1.00000000	30.00000000	0.09523810
2	0.76190476	10.86707699	0.03999473
3	0.62667193	-5.01251109	0.00269252
4	0.66935919	0.32850517	0.00006700
5	0.66673366	0.00818811	0.00000012
6	0.66666655	-0.00001455	0.00000000

Tabela 5: Iterações do Método das Secantes no intervalo [0, 1].

Os chutes iniciais $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 2$, considerando a função $f(x)$, foram escolhidos para verificar se as iterações continuariam no intervalo $[1, 2]$. A tabela abaixo contém os resultados:

k	x_k	$f(x_k)$	e_k
0	1.50000000	58.59375000	0.21428571
1	2.00000000	-192.00000000	0.09737588
2	1.61690984	34.54543555	0.03895926
3	1.67532645	15.53028653	0.00875147
4	1.72303718	-3.81472759	0.00065682
5	1.71362890	0.28141379	0.00001045
6	1.71427527	0.00448226	0.00000001
7	1.71428573	-0.00000542	0.00000000

Tabela 6: Iterações do Método das Secantes no intervalo [1, 2].

Os resultados encontrados foram:

$$\beta_1 \approx 0.666667 \quad \text{e} \quad \beta_2 \approx 1.714286$$

A diferença encontrada na quantidade de interações em ambos os intervalos foi de apenas uma, onde [0,1] resultou em 0.666667 com 7 iterações e o intervalo $[1, 2]$ resultou em 1.714286 com 8 iterações, demonstrando que o intervalo $[1, 2]$ possa ter encontrado uma certa dificuldade porém nada de extrema relevância que possa impossibilitar encontrar a raíz. Este método é de extrema eficácia e sua convergencia é rápida, perdendo apenas para o método de Newton, que como apresentado anteriormente converge em apenas 6 iterações.

4 Concluões

Após análise dos resultados podemos afirmar que os Métodos Iterativos são de extrema eficácia na resolução de equações não lineares, já que com eles se torna possível aproximar de raízes de funções complicadas de serem resolvidas . Todos os resultados obtidos a partir de cada Método foram condizentes a aproximação por seis casas decimais das raízes exatas calculadas teoricamente, levando em consideração um erro $\pm 0,000001$.

Pode-se concluir que o Método mais eficiente foi o de Newton, apesar do Método da Secante ter um número de iterações bastante próximas. Ainda, a velocidade de convergência como dito anteriormente depende de cada método, de cada função, como o intervalo em que as raízes se encontravam eram problemáticos, ou seja, possuiam derivadas nulas, isso pode ter afetado a velocidade de convergência de Newton. Porém em casos mais extremos, torna-se perceptível a diferença da velocidade de convergência entre métodos com convergência quadrática e super linear.

5 Referências

Referências

[1] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica.* 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] FRANCO, Neide Bertoldi. *Cálculo numérico.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[3] SERRANO, Pedro. *Matemática aplicada e análise numérica: uma introdução com Octave.* Lisboa: Universidade Aberta, 2017.