Aproximação de Trajetórias Ortogonais em relação à uma Família de Curvas

Julia Graziosi Ortiz - 11797810
Katlyn Ribeiro Almeida - 14586070
Matheus Araujo Pinheiro - 14676810

São Carlos, 2024

1 Objetivos

Neste trabalho iremos determinar a equação diferencial que define as trajetórias ortogonais em relação a família de curvas representadas pela equação $xy = c$, onde c é uma constante real na região $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$, procurando uma solução aproximada a partir de métodos numéricos.

Ao final do trabalho, espera-se obter uma aproximação razoavelmente precisa em relação às obtidas visualizando as soluções numericamente e analisando sua forma e comportamento. Através dos métodos numéricos será possível observar a intersecção entre as duas famílias de curvas, confirmando a ortogonalidade entre elas.

2 Procedimentos adotados

As trajetórias ortogonais de uma família de curvas são curvas que interceptam cada curva da família com ângulo reto, isto é, as retas tangentes são perpendiculares. Dessa forma, dada uma família de curvas, é possível encontrar a derivada das trajetórias ortogonais. Escolhendo um ponto de uma das curvas da família original, temos um Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A solução exata pode ser calculada a partir da derivada obtida. Para encontrar a solução numérica do PVI, vamos utilizar o Método de Euler (explícito de 1 passo), com iterações dadas por

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + hf_k \quad \text{e} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Com os pares de pontos (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, obtidos pelo PVI vamos determinar a Spline Cúbica $S_3(x)$ correspondente utilizando a função *CubicSpline* da biblioteca *scipy.interpolate* do Python 3. No fim, comparar a solução obtida com o esperado (solução exata). Decidimos utilizar como condição de cortorno para as Splines cúbicas calculadas a segunda derivada nas extremidades igual a zero, ou seja, c.c. naturais.

3 Resultados

Dada a família de curvas, definida em $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$

$$xy = c\ ;\ c \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

graficamente, temos

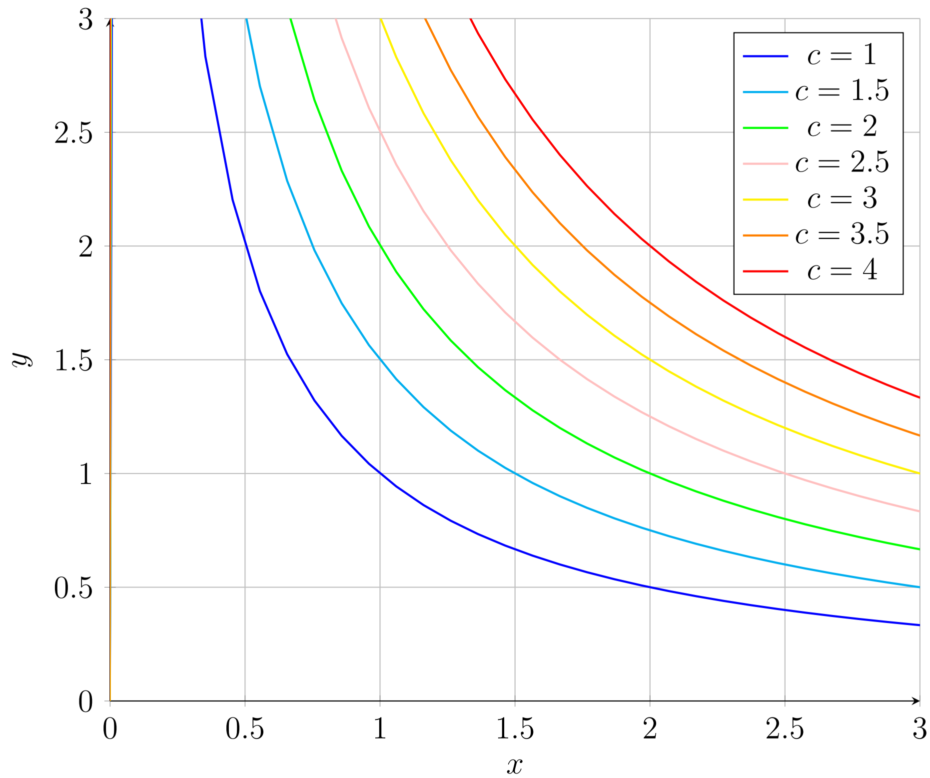

Figura 1: Família de Curvas $xy = c$ na região $[0, 3] \times [0, 3]$

Para iniciar, podemos obter y em função de x e derivar em relação a x os dois lados da equação para obter

$$xy = c \implies y = \frac{c}{x} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}.$$

Como $c = xy$, subtituimos na equação acima

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x},$$

ou seja, temos a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das curvas da família (1). Sejam m_1 e m_2 as inclinações das retas tangente das famílias original e ortogonal, respectivamente,

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \implies m_2 = -\frac{1}{\frac{-y}{x}} = \frac{x}{y}$$

Para determinar a solução aproximada, temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(x_0) = \frac{c}{x_0} \end{cases}$$

Em todos os casos iremos aplicar o Método de Euler até o primeiro ponto que pertencer ou ultrapassar a curva $xy = 4$ (indicado em vermelho na tabela), considerando um ponto inicial da curva $xy = 1$ e um passo de $h = 0,1$. Assim, as iterações são da forma

$$x_{k+1} = x_k + 0,1; \qquad y_{k+1} = y_k + 0,1 f_k; \qquad f_k = f(x_k, y_k) = \frac{x_k}{y_k} \qquad (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3].$$

Com os $n + 1$ pontos obtidos, para obter a Spline Cúbica correspondente precisamos definir as condições de contorno. Na função utilizada em Pyhton, as possíveis condições são: *natural*, *clamped*, e *default*. Como visto nos procedimentos adotados consideramos as condições de contorno naturais, ou seja, $S''(x_0) = 0$ e $S''(x_{n+1}) = 0$. Essa escolha elimina a necessidade de especificar valores de derivada nas bordas, tornando o método mais simples para problemas em que tais valores não são conhecidos. Ainda, as trajetórias ortogonais são calculadas a partir de um campo de direções que representa a ortogonalidade às curvas. A suavidade das curvas é importante para refletir o comportamento contínuo e derivável do campo vetorial subjacente. Além de que a condição natural evita oscilações artificiais nas extremidades das curvas e garante transições suaves entre as trajetórias, já que a segunda derivada nula implica que a curvatura tende a ser mínima nas extremidades. Portanto, o uso de condições de contorno naturais no contexto do código é ideal para obter trajetórias suaves, visualmente agradáveis e matematicamente coerentes para representar as curvas ortogonais calculadas.

Nas tabelas, os resultados foram aproximados com 4 casas decimais.

- PVI 1: $\begin{cases} f(x, y) = \frac{x}{y} \\ y(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$

k	x_k	y_k	f_k	$x_k y_k$
0	2,0000	0,5000	4,0000	1,0000
1	2,1000	0,9000	2,3333	1,8900
2	2,2000	1,1333	1,9412	2,4933
3	2,3000	1,3274	1,7327	3,0530
4	2,4000	1,5007	1,5993	3,6017
5	2,5000	1,6606	1,5055	4,1515

Tabela 1: Iterações do Método de Euler para resovler o PVI 1.

Com isso, podemos determinar a spline cúbica dos pontos (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, 5$.

$[x_i, x_j]$	a	b	c	d
$[2,0; 2,1]$	-42,1778	0,0000	4,4218	0,5000
$[2,1; 2,2]$	44,2226	-12,6534	3,1564	0,9000
$[2,2; 2,3]$	-7,2615	0,6134	1,9524	1,1333
$[2,3; 2,4]$	3,1858	-1,5650	1,8573	1,3275
$[2,4; 2,5]$	2,0310	-0,6093	1,6399	1,5007

$$S_{3,i} = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i) + d$$
$$i = 0, 1, \dots, 4$$

Tabela 2: Spline Cúbica Natural da trajetória ortogal com condicão inicial $y(2) = \frac{1}{2}$.

- PVI 2: $\begin{cases} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

k	x_k	y_k	f_k	$x_k y_k$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	1,1000	1,1000	1,0000	1,2100
2	1,2000	1,2000	1,0000	1,4400
3	1,3000	1,3000	1,0000	1,6900
4	1,4000	1,4000	1,0000	2,8000
5	1,5000	1,5000	1,0000	2,2500
6	1,6000	1,6000	1,0000	2,5600
7	1,7000	1,7000	1,0000	2,8900
8	1,8000	1,8000	1,0000	3,2400
9	1,9000	1,9000	1,0000	3,6100
10	2,0000	2,000	1,0000	4,0000

Tabela 3: Iterações do Método de Euler para resovler o PVI com $y(1) = 1$.

Com isso, podemos determinar a spline cúbica dos pontos (x_k, y_k), $k = 0, \dots, 10$.

$[x_i, x_{i+1}]$	a	b	c	d
$[1,0;1,1]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000
$[1,1;1,2]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,1000
$[1,2;1,3]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,2000
$[1,3;1,4]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,3000
$[1,4;1,5]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,4000
$[1,5;1,6]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,5000
$[1,6;1,7]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,6000
$[1,7;1,8]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,7000
$[1,8;1,9]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,8000
$[1,9;2,0]$	0,0000	0,0000	1,0000	1,9000

$$S_{3,i} = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i) + d$$
$$i = 0, 1, \ldots, 9$$

Tabela 4: Spline Cúbica Natural da trajetória ortogonal com condição inicial para $y(1) = 1$.

- PVI 3: $\begin{cases} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ y(\frac{1}{2}) = 2 \end{cases}$

k	x_k	y_k	f_k	$x_k y_k$
0	0,5000	2,0000	0,2500	1,0000
1	0,6000	2,0250	0,2963	1,2150
2	0,7000	2,0546	0,3407	1,4382
3	0,8000	2,0887	0,3830	1,6710
4	0,9000	2,1270	0,4231	1,9143
5	1,0000	2,1693	0,4610	2,1693
6	1,1000	2,2154	0,4965	2,4369
7	1,2000	2,2651	0,5298	2,7181
8	1,3000	2,3181	0,5608	3,0135
9	1,4000	2,3742	0,5897	3,3239
10	1,5000	2,4332	0,6165	3,6498
11	1,6000	2,4949	0,6413	3,9918
12	1,7000	2,5590	0,6643	4,3503

Tabela 5: Iterações do Método de Euler para resovler o PVI com $y(\frac{1}{2}) = 2$.

Com isso, podemos determinar a spline cúbica dos pontos (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, 12$.

$[x_i, x_j]$	a	b	c	d
$[0,5; 0,6]$	0,9867	0,0000	0,2401	2,0000
$[0,6; 0,7]$	-0,3036	0,2960	0,2697	2,0250
$[0,7; 0,8]$	0,0380	0,2050	0,3198	2,0546
$[0,8; 0,9]$	-0,0564	0,2163	0,3619	2,0887
$[0,9; 1,0]$	-0,0327	0,1994	0,4035	2,1270
$[1,0; 1,1]$	-0,0400	0,1900	0,4424	2,1693
$[1,1; 1,2]$	-0,0371	0,1776	0,4791	2,2154
$[1,2; 1,3]$	-0,0400	0,1665	0,5135	2,2651
$[1,3; 1,4]$	-0,0267	0,1545	0,5456	2,3180
$[1,4; 1,5]$	-0,0693	0,1465	0,5757	2,3741
$[1,5; 1,6]$	0,09749	0,1257	0,6030	2,4331
$[1,6; 1,7]$	-0,5165	0,1549	0,6310	2,4947

$$S_{3,i} = a(x-x_i)^3 + b(x-x_i)^2 + c(x-x_i) + d$$
$$i = 0, 1, \ldots, 11$$

Tabela 6: Spline Cúbica Natural da trajetória ortogonal com condicão inicial $y(\frac{1}{2}) = 2$.

Graficamente, a Ortogonalidade é facilmente percebida, apesar das aproximações:

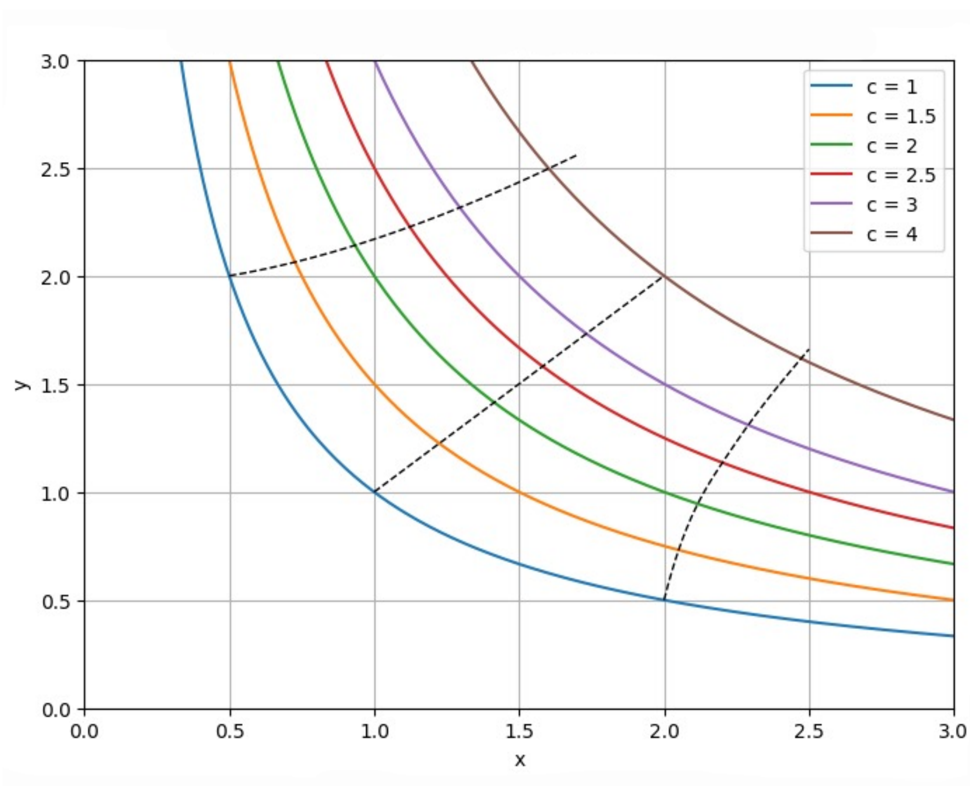

Figura 2: Gráfico das Splines cúbicas (Linha pontilhada preta) calculadas para vizualização da ortogonalidade. Plotada a partir do matplotlib em python

- Soluções exatas

  Sabendo que para a família ortogonal temos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ podemos encontrar a solução exata e determinar a equação da família de curvas ortogonais, como é separável, temos

$$\int y dy = \int x dx \implies \frac{y^2}{2} + C_y = \frac{x^2}{2} + C_x \implies y^2 - x^2 = C,$$

  onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto, as trajetórias ortogonais, definidas na mesma região R, são

$$y^2 - x^2 = C \ ; \ C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

  Note que, pela equação obtida, as trajetórias ortogonais são hipérboles, então espera-se que a solução numérica seja semelhante.

  PVI 1:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ y(2) = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2^2 = C \implies C = -\frac{15}{4}$$

  PVI 2:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \implies 1^2 - 1^2 = C \implies C = 0$$

  PVI 3:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x}{y} \\ y(\frac{1}{2}) = 2 \end{cases} \implies 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = C \implies C = \frac{15}{4}$$

  Gráfico das soluções exatas:

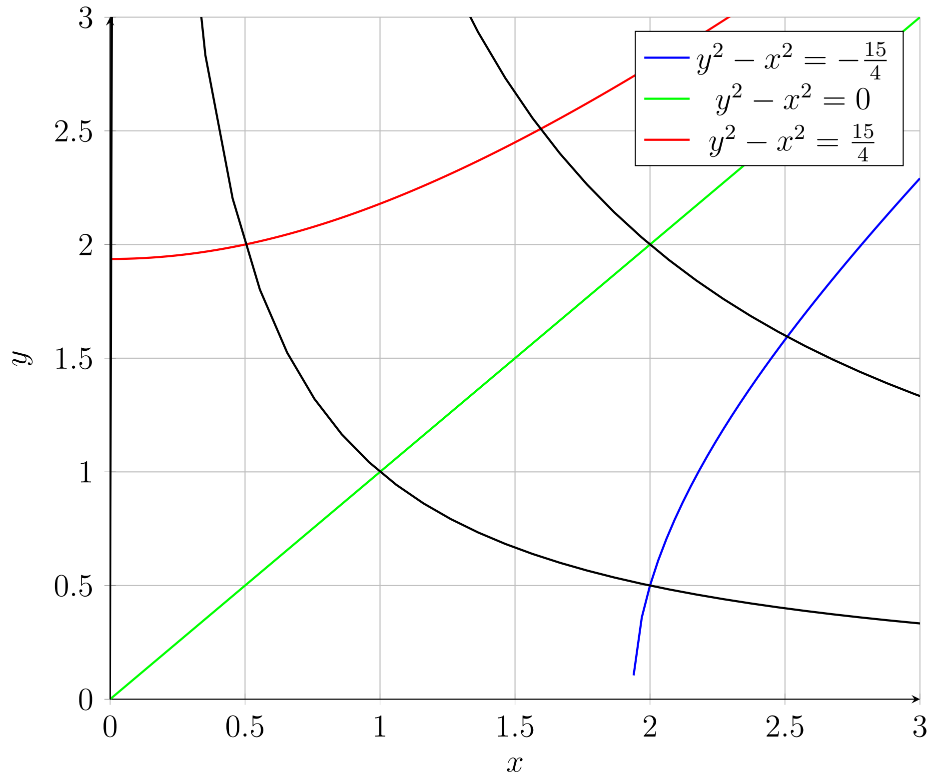

Figura 3: Família de Curvas Ortogonais a $xy = c$ na região $[0, 3] \times [0, 3]$

4 Conclusão

É possível notar que a coleção de curvas xy=c corresponde a um grupo de hipérboles, enquanto as curvas ortogonais conectadas representam uma outra série de hipérboles, mas com os eixos invertidos. Com base nisso, podemos afirmar que a propriedade de ortogonalidade entre essas famílias é mantida, uma vez que as retas tangentes em cada curva das família formam ângulos retos nos pontos onde se cruzam, percebe-se que os gráficos reforçam ainda mais essa ortogonalidade entre as diferentes famílias de curvas e demonstram como as soluções numéricas se aproximam das trajetórias analíticas das hipérboles ortogonais.

Quando aplicamos o Método de Euler para estimar trajetórias ortogonais levando em conta diferentes condições iniciais, percebemos que esse método gera uma aproximação que é suficientemente precisa para o problema em questão apesar de ter ordem baixa, ou seja, não ser considerado tão eficiente. No entanto, ele também apresenta um erro, resultado de sua abordagem linear. Para aprimorar a qualidade da solução obtida, utilizamos Splines Cúbicas, oferecendo assim uma representação visual mais clara dos resultados. Esse erro pode ser vizualizado graficamente com mais facilidade:

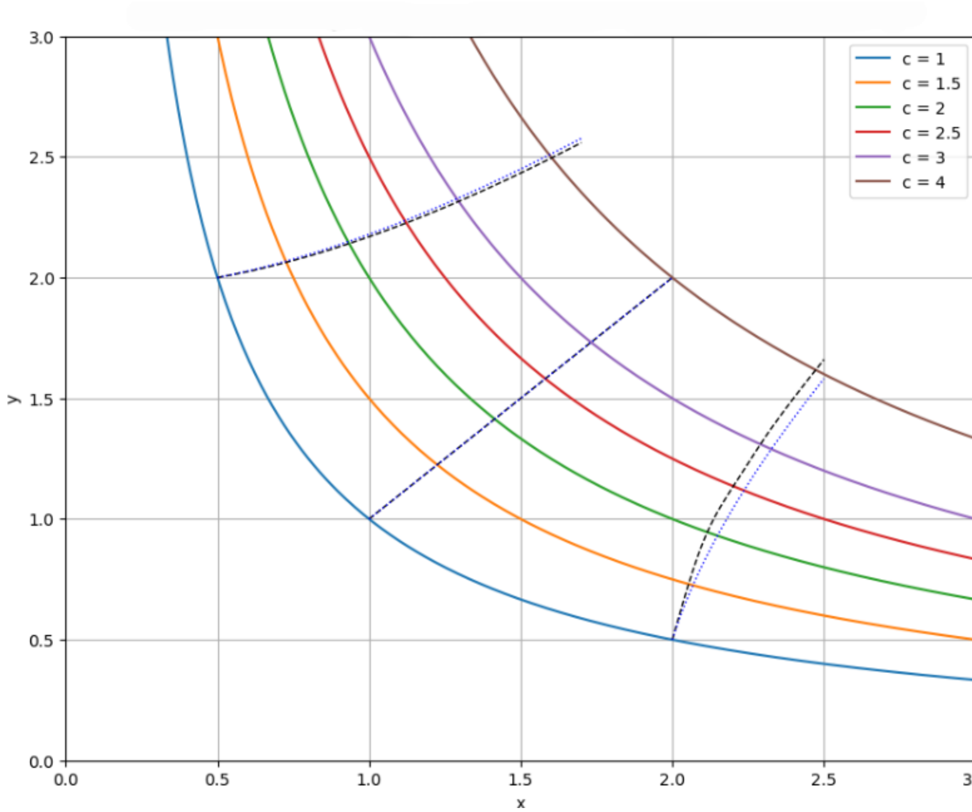

Figura 4: Gráfico das Splines cúbicas (Linha pontilhada preta) calculadas sob a Solução exata obtida (Linha pontilhada azul). Plotada a partir do matplotlib em python

A solução exata das curvas ortogonais demonstra que os valores de C correspondentes a cada Problema de Valor Inicial (PVI) estão de acordo com as condições iniciais aplicadas. Ao examinarmos os gráficos das soluções numéricas e exatas, nota-se que o Método de Euler, quando o passo $h \leq 0,1$ produz uma aproximação razoavelmente próxima da nossa solução exata, essa aproximação se mostra suficiente para o entendimento da ortogonalidade e compreensão do problema.

5 Referências

Referências

[1] Burden, R. L., & Faires, J. D. *Análise Numérica*. Thompson Books, 2001.

[2] Farrer, H., & Becker, C. G. *Algoritmos Estruturados: programação estruturada de computadores*. Guanabara Dois, 1986.

[3] Franco, N. B. *Cálculo Numérico*. Editora Pearson Education, 2006.