Trabalho 1 - Equações Elípticas

Julia Graziosi Ortiz
Matheus Araujo Pinheiro

São Carlos, 2025

1 Dados do problema

Considere o problema estacionário no domínio retangular $\Omega = [0,1] \times [-1,1]$, definido pela equação de convecção-difusão anisotrópica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial u}{\partial y}$$

com as seguites condições de contorno:

- Nas fronteiras verticais ($x = 0$ e $x = 1$):

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \ \forall y \in [-1, 1]$$

- Nas fronteiras horizontais:

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x,-1)} = e \ sen(2\pi x), \ \forall x \in [0, 1]$$

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u)|_{(x,1)} = 0, \ \forall x \in [0, 1]$$

Fixando $c = 4\pi^2 - 3$, a solução analítica particular para o problema dado é:

$$u(x, y) = e^{-y}\text{sen}(2\pi x)$$

2 Discretização

No domínio retangular $\Omega = [0,1] \times [-1,1]$, vamos definir uma malha uniforme com espaçamento genérico h utilizando os pares de pontos (x_i, y_j) definidos por:

$$x_i = x_0 + ih, \ i \in \{0, 1, \cdots, n\} \qquad y_j = y_0 + h, \ j \in \{0, 1, \cdots, m\}$$
$$x_0 = 0 \ \text{ e } \ x_n = 1 \qquad y_0 = -1 \ \text{ e } \ y_m = 1$$

com $h = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{m+1}$.

Dessa forma, temos $N = (n+1)(m+1)$ pontos discretos para aproximar a função $u(x, y)$.

Seja $u(x_i, y_j) = u_{ij} \approx U_{ij}$.

Para os pontos fora da fronteira, adotamos diferenças centrais de segunda ordem pra aproximar as derivadas parciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_i,y_j) &\approx \frac{1}{h^2}[U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}] \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x_i,y_j) &\approx \frac{1}{h^2}[U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}] \\
\frac{\partial}{\partial y}u(x_i,y_j) &\approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação do problema:

$$
\frac{1}{h^2}[U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}] + 3\left(\frac{1}{h^2}[U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}]\right) = c\left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h}\right)
$$
$$
\frac{1}{h^2}[U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 8U_{ij} + 3U_{i,j+1} + 3U_{i,j-1} - ChU_{i,j} + ChU_{i,j-1}] = 0
$$
$$
(3+Ch)U_{i,j-1} + U_{i-1,j} - 8U_{ij} + U_{i+1,j} + (3-Ch)U_{i,j+1} = 0
$$

com $C = \frac{c}{2}$.

Para ilustrar as condições de contorno do problema, considere a figura abaixo:

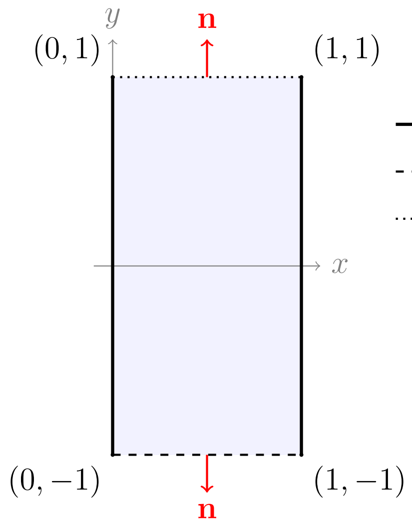

Figura 1: Condições de contorno no domínio Ω.

Fronteiras verticais

Nas fronteiras verticais temos condições de Dirichlet:

$$u(0,y) = u(1,y) = 0 \ \forall y \in [-1,1]$$

Então,

$$U_{0,j} = U_{n,j} = 0, \ \forall j \in \{0,\cdots,m\}$$

Fronteiras horizontais

Para lidar com essas condições, iremos adotar esquemas de diferenças finitas que usam somente os pontos que pertencem à malha.

Na fronteira inferior, conforme a Figura 1 temos $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$:

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x,-1)} = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,-1) = e \ sen(2\pi x), \ \forall x \in [0,1]$$

Usando diferença progressiva com 3 pontos:

$$-\frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_0) \approx -\left(\frac{-3U_{i,0} + 4U_{i,1} - U_{i,2}}{2h} \right) = e \ sen(2\pi x_i), \ \forall i \in \{1, \cdots, n-1\}$$
$$\left(\frac{3U_{i,0} - 4U_{i,1} + U_{i,2}}{2h} \right) = e \ sen(2\pi x_i)$$
$$3U_{i,0} - 4U_{i,1} + U_{i,2} = 2he \ sen(2\pi x_i)$$

Na fronteira superior temos $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u)|_{(x,1)} = \frac{\partial}{\partial y} u(x,1) + u(x,1) = 0, \ \forall x \in [0,1]$$

Usando diferença regressiva com 3 pontos:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_m) + u(x_i, y_m) \approx \frac{U_{i,m-2} - 4U_{i,m-1} + 3U_{i,m}}{2h} + U_{i,m} = 0, \ \forall i \in \{1, \cdots, n-1\}$$
$$\frac{U_{i,m-2} - 4U_{i,m-1} + 3U_{i,m} + 2hU_{i,m}}{2h} = 0$$
$$U_{i,m-2} - 4U_{i,m-1} + (3+2h)U_{i,m} = 0$$

3 Sistema Linear

Analisadas as condições de contorno, vamos construir a matriz do sistema linear $AU = b$.

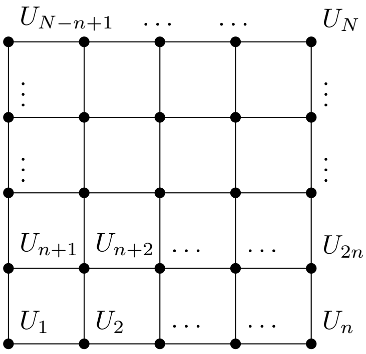

Figura 2: Numeração das incógnitas do problema.

Considere $k = (i+1) + nj$, $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$, $\forall j \in \{0, \cdots, m\}$. Assim, os pontos da malha são numerados da forma padrão por linha (ilustrado na Figura 2) e o sistema é da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Vamos usar a notação A_k para indicar a k-ésima linha da matriz A.

(i) Nos pontos com condição de Dirichlet ($k = nj + 1$ e $k = nj + n$):

$$b_k = \big[0\big]$$

$$\begin{array}{cc} \textit{coluna} & \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & k & \cdots & N \end{array} \\ A_k = & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

OBS: Nos encontros das condições de Dirichlet com Neumann e Dirichlet com Robin, prevalecem as condições de Neumann e Robin, respectivamente.

(ii) Nos pontos com condição de Neumann ($1 < k < n$):

$$b_k = \big[2hesen(2\pi x_i)\big]$$

$$\begin{array}{cc} \textit{coluna} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & k & \cdots & k+n & \cdots & k+2n & \cdots & N \end{array} \\ A_k = & \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & 3 & \cdots & -4 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(iii) Nos pontos com condição de Robin ($N - n + 1 < k < N$)

$$b_k = \big[0\big]$$

$$\begin{array}{cc} \textit{coluna} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & k-2n & \cdots & k-n & \cdots & k & \cdots & N \end{array} \\ A_k = & \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & 1 & \cdots & -4 & \cdots & (3+2h) & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(iv) Nos outos pontos:

$$b_k = \big[0\big]$$

$$\begin{array}{cc} \textit{coluna} & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & \cdots & k-n & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & k+n & \cdots & N \end{array} \\ A_k = & \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \cdots & (3+Ch) & \cdots & 1 & -8 & 1 & \cdots & (3-Ch) & \cdots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

4 Resultados

A implementação do método apresentado com espaçamento $h = 0.1$ resultou nas superfícies da Figura 4 abaixo:

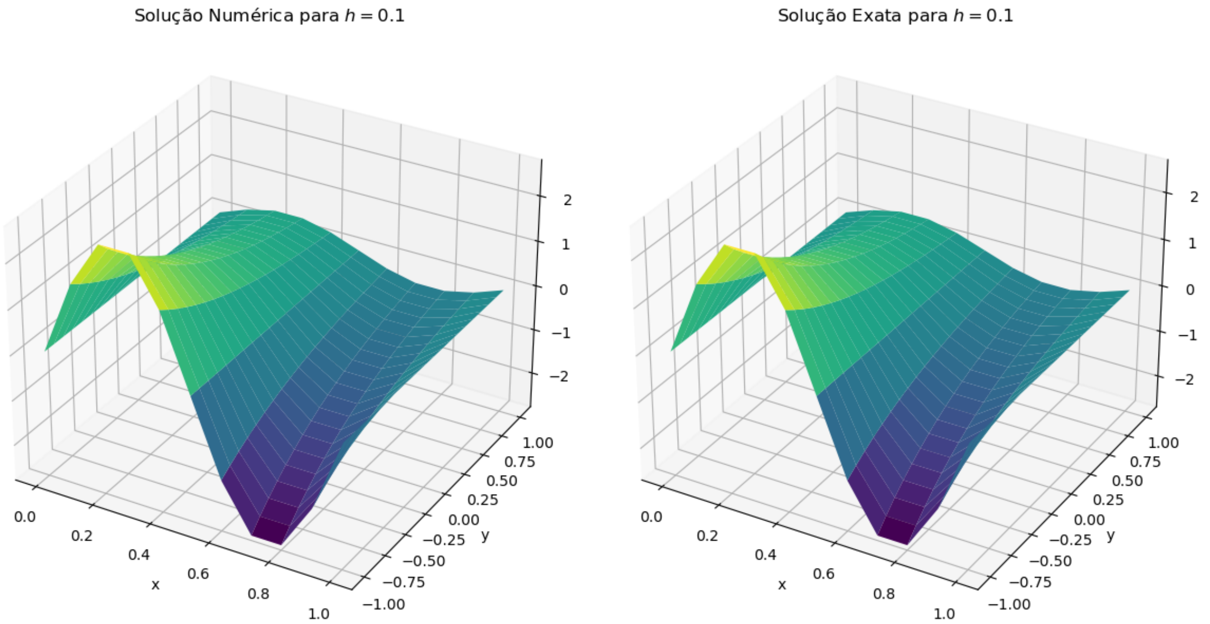

Figura 3: Superfície das soluções numérica e analítica avaliadas nos pontos da $h = 0.1$.

Comparando visualmente as soluções, as superfícies se assemelham em toda a malha, incluindo as bordas e os pontos críticos. Portanto, podemos assumir que a solução numérica é uma boa aproximação para o problema proposto.

Ainda com essa malha, calculamos os erros absolutos ponto a ponto:

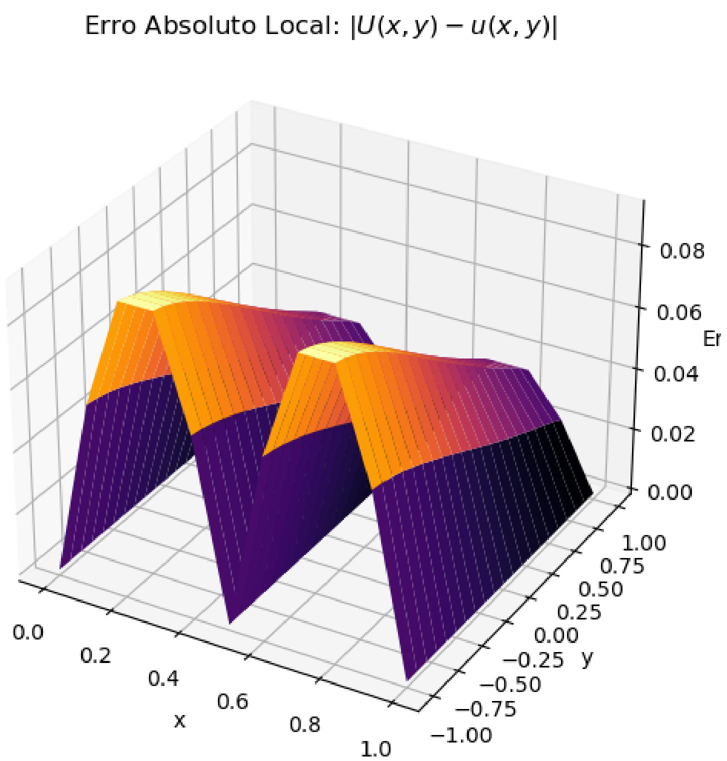

Figura 4: Erro absoluto local para $h = 0.1$.

O gráfico acima (Figura 4) indica um erro maior próximos aos pontos críticos da solução no intervalo, isso ocorre porque em regiões com variações rápidas, os métodos numéricos tendem a apresentar maiores erros, pois têm dificuldade em capturar mudanças bruscas da função. As condições de contorno, como as de Neumann e Robin, também afetam a precisão, podendo propagar erros para o interior. Assim, os maiores erros ocorrem nos pontos críticos devido à combinação das variações locais intensas e da influência das bordas. Ainda assim, os erros locais são da ordem de h^2, como esperado.

Para verificar se a ordem de convergência teórica condiz com a do método implementado, foi utilizado uma reta referência $O(h^2)$ em um gráfico $log - log$ e erro L2-norm, para os seguintes tamanhos de h: $\{0.0125, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1\}$

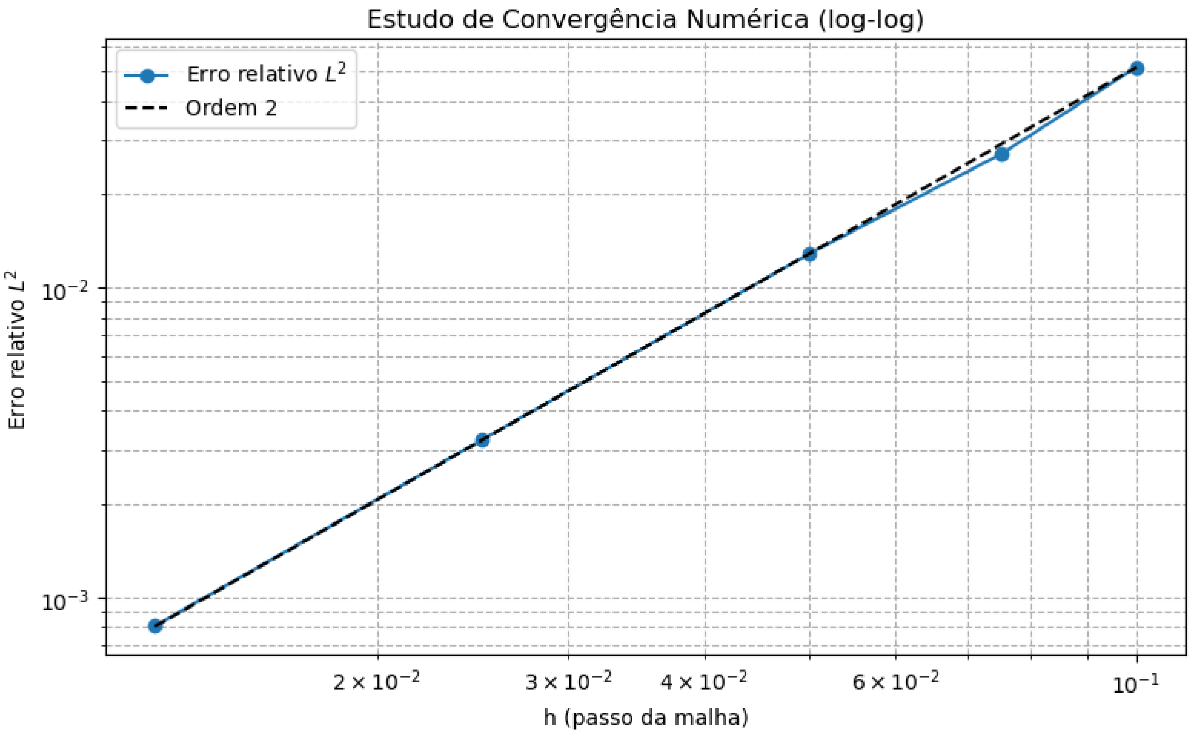

Figura 5: Comportamento assintótico do erro.

A ordem calculada foi de $p = 1.9821$, a qual se aproxima da ordem $p = 2$ esperada quando $h \to 0$.

Logo, conclui-se que de fato a solução numérica é suficientemente próxima, isto é, de ordem $p = 2$, como desejado, da solução analitica previamente obtida.

5 Referências

1. https://numpy.org/doc/stable/reference/index.html

2. https://matplotlib.org/

3. Leveque 1995, Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations