Trabalho #1 - Equações Elípticas

1. Um pouco de contexto

A aplicação de equações diferenciais é fundamental na modelagem matemática de fenômenos físicos em diversas áreas, sendo empregadas em variadas situações, como para descrever a propagação de calor em superfícies, o escoamento de fluidos em meios porosos ou a distribuição de contaminantes em reservatórios.

Daremos início à discussão com um modelo clássico mencionado em sala: a equação de Laplace. A formulação $\nabla^2 u = 0$ surge naturalmente em problemas como o potencial eletrostático e o calor estacionário. O avanço das técnicas numéricas possibilitou a consideração de meios anisotrópicos (o comportamento das propriedades nesse tipo de meio não é o mesmo em todas as direções), onde a difusão de quantidades físicas depende da direção - formalizada por $\nabla \cdot (D\nabla u)$, onde D é um tensor de difusão. A discretização desses problemas requer cuidados adicionais, pois a orientação da malha em relação à anisotropia pode afetar fortemente a acurácia e a estabilidade da solução.

Avançando em complexidade, a introdução de um termo de arraste $\mathbf{v} \cdot \nabla u$ gera a equação de convecção-difusão:

$$-\nabla \cdot (D\nabla u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f, \tag{1}$$

em que D é o tensor de difusão anisotrópico, $\mathbf{v}$ representa o vetor de velocidade de transporte (arraste) e f corresponde a uma função fonte. Em regime estacionário, a variável temporal é desconsiderada, restando uma equação que descreve o equilíbrio entre os efeitos locais de transporte (convecção), dispersão (difusão) e eventuais fontes ou sumidouros. A ausência de termos temporais inibe as amplificações numéricas, permitindo, em muitos casos, o uso de esquemas simples para as derivadas de primeira ordem. Contudo, em problemas com convecção dominante, diferenças centradas podem causar oscilações espúrias (instabilidades numéricas que não refletem o comportamento esperado). Problemas transientes, nos quais a presença dessas instabilidades é natural, serão estudados em tópicos futuros da disciplina.

Para propósito puramente ilustrativo, consideraremos uma situação estacionária na qual queremos descobrir a distribuição de temperatura constante em uma placa retangular, sem geração interna de calor ($f = 0$). Suponha que a condutividade térmica D_y paralela a Oy difere de seu valor D_x paralelo a Ox, com uma razão 3, sendo representada de modo simplificado por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Isso indica um meio anisotrópico onde a difusão vertical é três vezes maior que a horizontal.

De maneira também hipotética, vamos escolher $\mathbf{v}$ na forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix},$$

o que sugere que há um transporte (ou "arraste") na direção y, como uma especie de fluxo externo atuando nesta direção, a exemplo do resultado de um resfriamento por corrente de ar.

Ao introduzir as suposições descritas eo modelo em (1), obtemos:

$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = 0, \tag{2}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

Na próxima seção, a proposta do trabalho será especificada, incluindo as informações introdutórias sobre o problema de interesse e os principais experimentos computacionais esperados.

2. Especificações sobre o trabalho

Considere o problema estacionário no domínio retangular $\Omega = [0,1] \times [-1,1]$, definido pela equação de convecção-difusão anisotrópica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

com as seguintes condições de contorno:

- Nas fronteiras verticais ($x = 0$ e $x = 1$):

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad \forall y \in [-1,1].$$

- Nas fronteiras horizontais:

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x,-1)} = e\sin(2\pi x), \quad (\nabla u \cdot \mathbf{n} + u)|_{(x,1)} = 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

Por conveniência, vamos fixar $c = 4\pi^2 - 3$ em todos os experimentos numéricos. Vale ressaltar que apesar da constante escolhida parecer artificial, valores como esses são típicos em experimentos e problemas acadêmicos de engenharia ajustados. Além disso, essa escolha de c possibilita a definição da solução analítica particular para o problema dado:

$$u(x,y) = e^{-y}\sin(2\pi x). \tag{5}$$

Tarefas:

1. Discretize o problema acima utilizando uma malha uniforme com espaçamento genérico h, adotando esquemas de diferenças finitas de segunda ordem. Implemente este problema usando MATLAB/OCTAVE ou Python e produza uma superfície que represente a solução obtida para um valor $h \leq 0.1$.

   Sugestões de visualização:

   - Em MATLAB/Octave: funções `meshgrid` e `surf`;
   - Em Python: funções `meshgrid` (NumPy) e `plot_surface` (Matplotlib).

2. Também produza uma superfície representando a solução analítica do problema, avaliada nos mesmos pontos utilizados para plotar a solução numérica no item anterior. Indique quais evidências ou observações permitem concluir que a solução estimada é uma boa aproximação para o problema proposto. Em seguida, calcule os erros absolutos locais, isto é, a diferença ponto a ponto entre a solução numérica obtida no item (1.) e a solução analítica correspondente. Analise a distribuição espacial desses erros e observe que eles são maiores em determinadas regiões. Explique por que esse comportamento ocorre.

3. Realize um estudo de convergência numérica, comparando com a solução de referência fornecida. Para isso, utilize ao menos cinco malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada. Lembre-se que a visualização gráfica adequada para este estudo deve estar em escala logarítmica.

4. Redija um documento em PDF que contenha: as representações gráficas solicitadas; uma descrição concisa sobre construção da matriz dos coeficientes do sistema linear, enfatizando como as condições de contorno foram tratadas. Inclua também, neste PDF, comentários que julgar pertinentes.

Entregue o **relatório produzido em pdf** e **os códigos** utilizados para atender as especificações do trabalho.