

# 广义相对论下 N 体问题的一阶近似

付乃锋

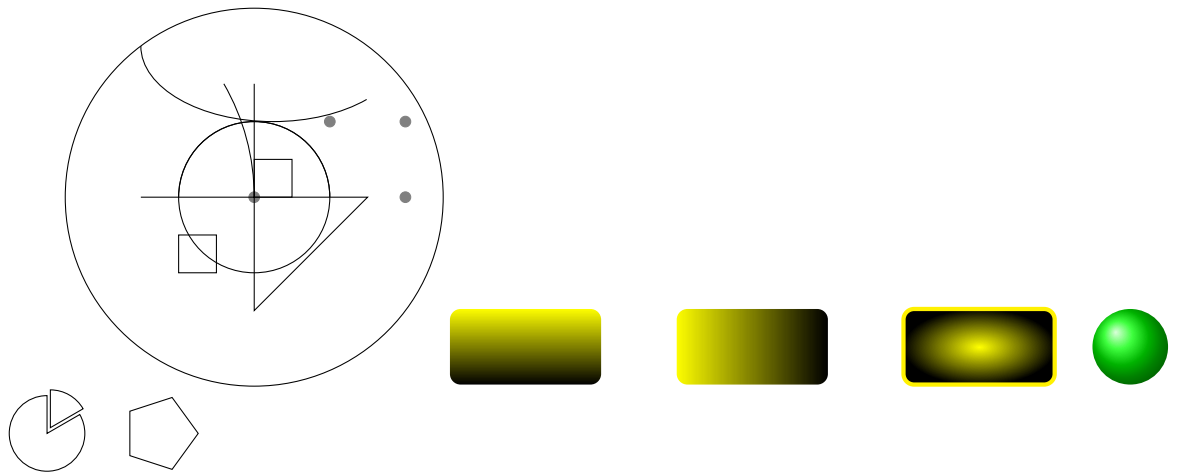
2020 年 6 月 12 日

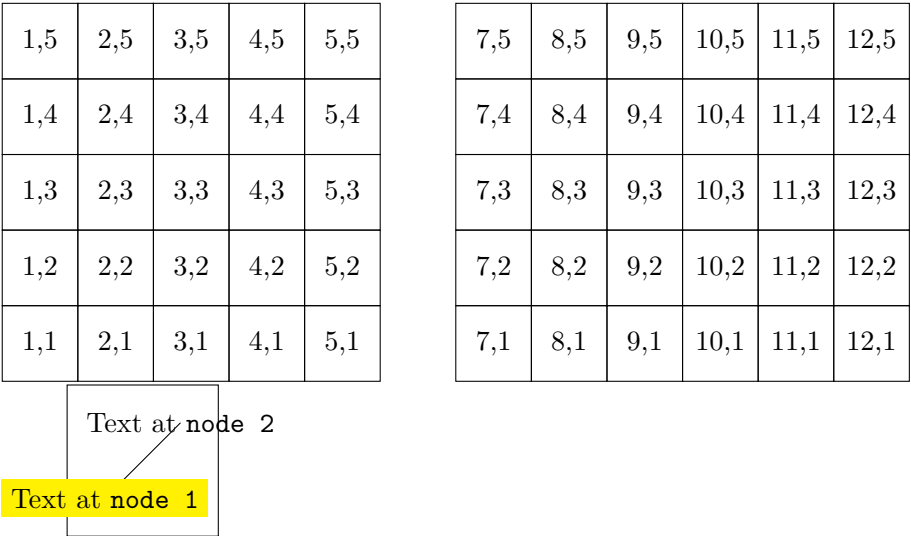
## 摘要

众所周知，天文学研究已历经几千年，催生出了许许多多数学及物理知识与应用，自伽利略、牛顿以来，是构建经典物理学体系的先导。如今，现代物理学研究中，天文学中的 N 体问题依然没有获得解析解，依然是新的物理理论的检验方式，新的数学知识的应用天地。自上世纪初，爱因斯坦提出狭义相对论与广义相对论，天文学的研究进入了新的阶段，相对论已经广泛应用于卫星控制及天体观测等方面，特别是 GPS 应用中授时与精确定位等方面相对论效应改正。本文探讨的是广义相对论下 N 体问题的一阶近似问题，又称为一阶后牛顿近似。

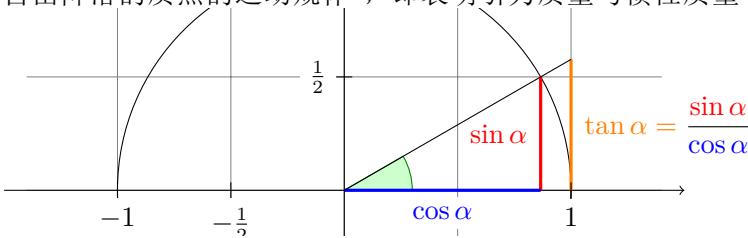
**Keywords:** Einstein-field-function,DXS

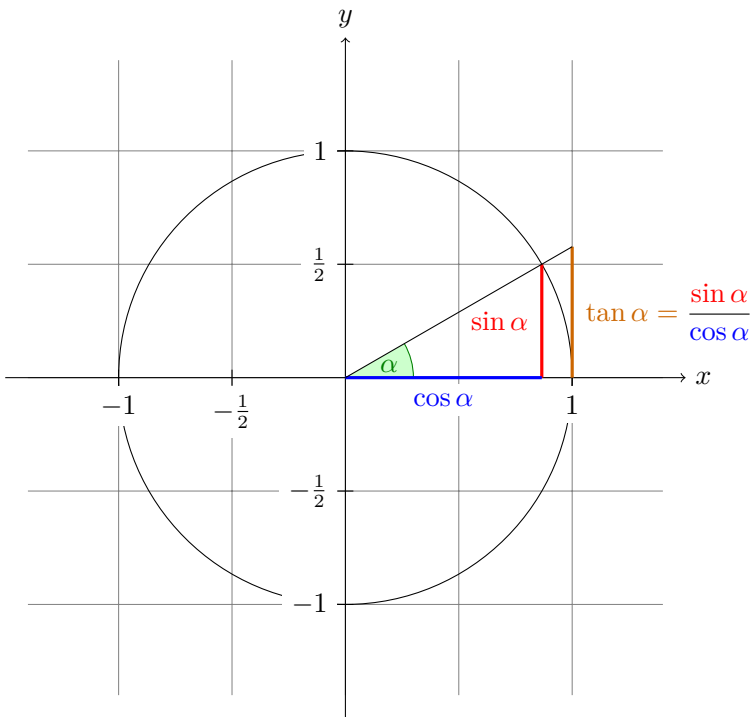
## 1 Introduction





广义相对论建立在引力和惯性力等效的原理上，它告诉我们一个任意的物理系统对于外界引力场将作何反应，具体可以表述为：在任意引力场里的每一个时空点，有可能选择一个”局部惯性系”，使得所讨论的那一点附近的邻域内，自然规律的形式，与没有引力场时在未加速的 Descartes 坐标系里具有相同的形式，即在时空的任一点，我们可以建立一个使物质满足狭义相对论规律的局部惯性系。如上为强等效原理描述，认为引力质量支配引力对所有物理系统的效应；弱等效原理，则只表明自然规律仅指”自由降落的质点的运动规律”，即表明引力质量与惯性质量等价。

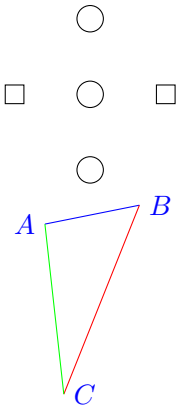


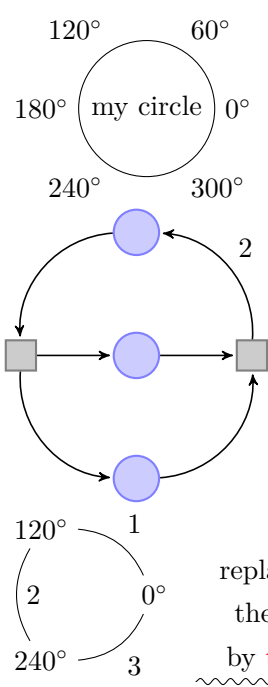
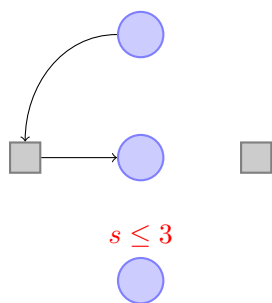


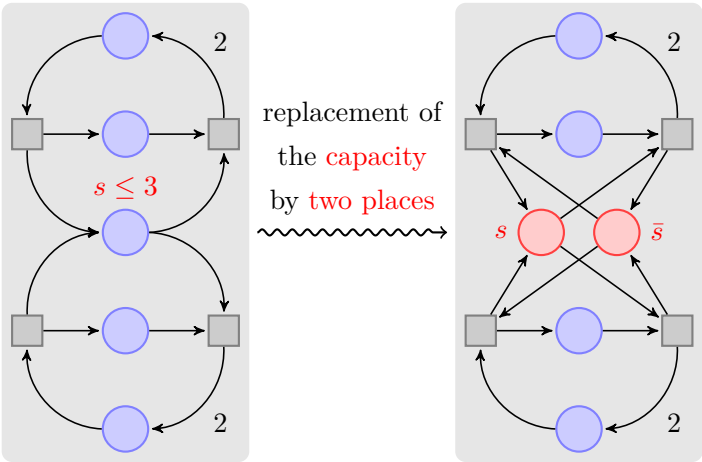
The angle  $\alpha$  is  $30^\circ$  in the example ( $\pi/6$  in radians). The sine of  $\alpha$ , which is the height of the red line, is

$$\sin \alpha = 1/2.$$

By the Theorem of Pythagoras ...



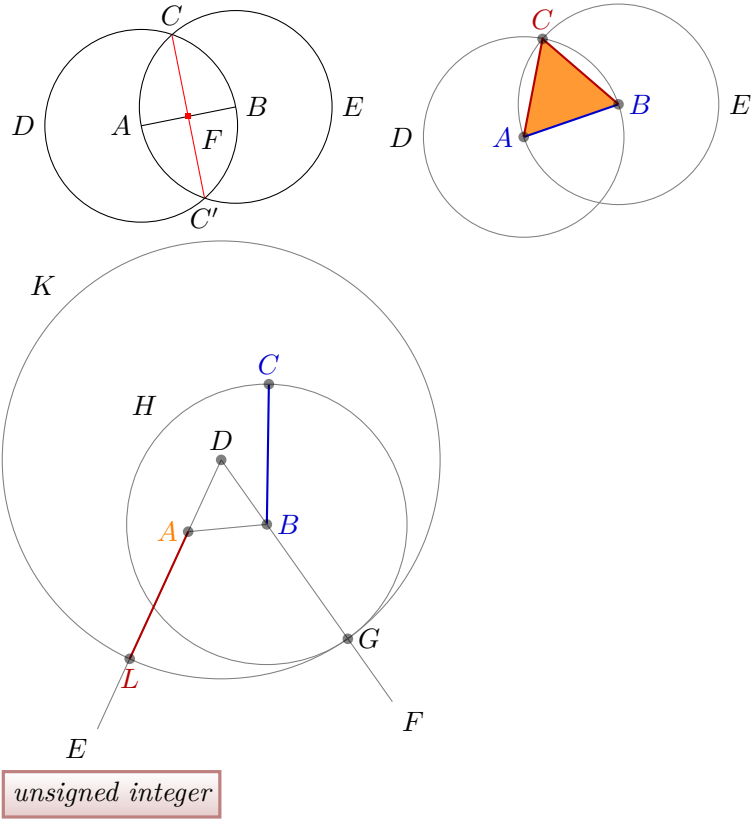


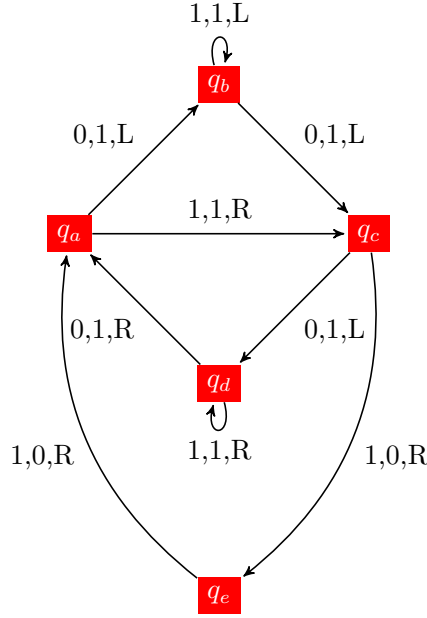


**Proposition I**

To construct an *equilateral triangle*

Let  $AB$  be the given *finite straight line*





The current candidate for the busy beaver for five states. It is presumed that this Turing machine writes a maximum number of 1's before halting among all Turing machines with five states and the tape alphabet  $\{0, 1\}$ . Proving this conjecture is an open research problem.

可用爱因斯坦场方程来表示引力质量及其运动对于周围时空的影响：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

其中  $G_{\mu\nu}$  称爱因斯坦张量， $R_{\mu\nu}$  为黎曼张量缩并所得的里奇曲率张量， $R$  为空间曲率标量， $g_{\mu\nu}$  为四维时空的度规张量， $T_{\mu\nu}$  为能量-动量-应力张量， $G$  为引力常数。对于在纯引力作用下自由运动的一个粒子，根据等效原理，可知存在一个自由降落的坐标系  $\xi^\lambda$ ，其在这个坐标系中的运动方程是时空中的一条直线，可表示为：

$$\begin{cases} 0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\tau$  为原时，由度规张量  $g_{\mu\nu}$  决定； $x^\lambda$ ， $x^\mu$ ， $x^\nu$  为运动轨迹； $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  为仿射联络，决定引力场。我们用几何的方式可以把运动方程表述为：在称为引力场的弯曲时空中一个自由降落的指点将沿着两点间最短可能的路径运动，“长度”由原时来度量的。这样的路径称为测地线。



图 1: 地球, 如图为地球, 其中大圈表示卫星轨道。

## 2 Method

为了描述相对论下引力  $N$  体问题, 我们需要引入  $N+1$  个坐标系: 一个全局坐标系  $x^\mu = (ct, x^i)$ , 其中包含了所有  $N$  个引力体并且可以用来描述全局的动力学 [1-4]; 另外还有  $N$  个局部坐标系  $X^\alpha = (cT_A, X_A)$ ,  $A = 1, \dots, N$ , 这里坐标系  $X_A^\alpha$  被假设随天体  $A$  一起运动。

在本文中, 大部分情况下, 全局坐标系  $\Sigma_{glob}$  指 BCRS[5] (barycentric celestial reference system, 一个以太阳质心为坐标原点的坐标, 适用于整个太阳系范围), 局部坐标系  $\Sigma_{loc}$  指 GCRS[6] (geocentric celestial reference system, 一个以地球质心为坐标原点的坐标, 适用于地球附近范围)。两种坐标系的度规形式假定相同, 不同的是势函数, 分别为  $w^\mu = (w, w^i)$   $W^\alpha = (W, W^\alpha)$ 。进一步假定全局能动张量满足:

$$\begin{cases} T^{00} = O(c^2), T^{0i} = O(c^1), T^{ij} = O(c^0) \\ \partial_0 = \frac{\partial}{\partial ct} = O_1 * \partial_i \end{cases} \quad (3)$$

局部坐标类似。现在可以得到  $X^\alpha \rightarrow x^\mu$  写成以下形式:

$$x^\mu(X^\alpha) = z^\mu(T) + e_\alpha^\mu(T)X^\alpha + \xi^\mu(T, X^\alpha) \quad (4)$$

其中  $\xi^\mu$  至少为  $X^\alpha$  的二次项,  $z^\mu(T)$  描述所研究天体上当前选择的点的世



图 2: 地球, 如图为地球, 其中大圈表示卫星轨道。

界线，既是该天体的中心世界线，也是天体的后牛顿质心。

引力  $N$  体问题的全局运动方程来自于局部演化方程

$$T_{\mu;\nu}^\nu = T_{\mu,\nu}^\nu + \nu \delta^\nu T_\mu^\delta - \Gamma_{\mu\nu}^\delta T_\delta^\nu = 0 \quad (5)$$

式 (5) 称能量-动量-应力张量的守恒方程， $T_\mu^\nu$  称能量-动量-应力张量。

在任何局部系中，局部演化方程 (5) 在  $\mu = 0$  时取如下形式： 5

$$\frac{\partial}{\partial T} \Sigma + \frac{\partial}{\partial X^a} \Sigma^a = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial T} T^{bb} - \frac{1}{c^2} \Sigma \frac{\partial}{\partial T} W + O_4 \quad (6)$$

在  $\mu = a$  时取如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial T} [(1 + \frac{4}{c^2}) \Sigma^a] + \frac{\partial}{\partial X^b} (1 + \frac{4}{c^2} W) T^{ab} = F^a + O_4 \quad (7)$$

其中  $\Sigma$ ,  $\Sigma^a$  是局部系的能量密度和流， $F^a = \Sigma E_a + \frac{1}{c^2} B_{ab} \Sigma^b$ 。此式即是后牛顿的欧拉方程。现在固定一天体  $E$  (为引力  $N$  题系统中一员) 的中心世界线，即  $X^a = 0$ ，与后牛顿质心重合  $M_a^E(T) = 0$ ，和牛顿力学的情形类似，现在相应的达朗贝尔原理也会导出引力  $N$  体问题中全局平移运动方程。

### 3 Conclusion

$$\begin{aligned} a_A^{(LD)} = & \Sigma_{B \neq A} \frac{GM_B}{r_{AB}^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [\nu_a^2 + 2\nu_b^2 - 4\nu_A \nu_B - \frac{3}{2} (n_{AB} \cdot \nu_B)^2] \right. \\ & - 4\Sigma_{C \neq A} \frac{GM_C}{c^2 r_{AC}} - \Sigma_{C \neq B} \frac{GM_C}{C^2 r_{BC}} [1 + \frac{1}{2} \frac{r_{AC}}{r_{BC}} n_{AB} \cdot n_{CB}] \} \\ & - \frac{7}{2} \Sigma_{B \neq A} \Sigma_{C \neq B} n_{BC} \frac{G^2 M_B M_C}{c^2 r_{AB} r_{CB}^2} \\ & + \Sigma_{B \neq A} (\nu_A - \nu_B) \frac{GM_B}{c^2 r_{AB}} (4n_{AB} \dot{\nu}_A - 3n_{AB} \cdot \nu_B) \end{aligned} \quad (8)$$

其中：

$$\begin{cases} r_{AB} \equiv |z_A(t) - z_B(t)| \\ n_{AB} \equiv \frac{z_A(t) - z_B(t)}{r_{AB}} \end{cases} \quad (9)$$

依据 EIH 方程，我们可以用数值方法通过 Ruger-Kutta [1] 计算出  $N$  体问题引体系统，如太阳系内的天体运动。著名的 DE 历表就是 JPL 通过 EIH 计算得到太阳系内大行星运动状态的。



如上文，简要介绍了广义相对论下  $N$  个质量单极体运动的一阶近似解，即多体问题的后牛顿 1pN 解，并没有考虑到运动物体的多极距与引电潮汐偶极距。同时，也有学者研究了后牛顿 1.5pN，2.5pN 形式及引电潮汐偶极距的影响。

## 参考文献

- [1] Rosa M Ruger Kutta, Juan M Ruiz, Pablo C Garcia, Luis R López-Lefebre, Esteban Sánchez, and Luis Romero. Resistance to cold and heat stress: accumulation of phenolic compounds in tomato and watermelon plants. *Plant Science*, 160(2):315–321, 1997.