

Содержание

1	Текстовые задачи	2
2	Задачи с параметрами	3
3	Ряды, произведения	4
4	Дифференциальные уравнения	5
5	Интегралы	6
6	Задачи на вероятность	7
7	Задачи линейной алгебры	8
8	Комплексные числа, ТФКП	9
9	Теоремы и леммы	10
10	Все задачи	16

1 Текстовые задачи

Задача 1(1) Найти, на какую цифру заканчивается десятичная запись числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$.

Задача 2(2) На ребрах и вершинах куба стоят натуральные числа от 2001 до 2020 (все числа различные). Может ли быть, что числа, стоящие на каждом ребре, являются средними арифметическими чисел в соответствующих вершинах?

Задача 3(5) За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C . За какое время он остынет до 25°C , если температура воздуха в комнате 20°C , а скорость остывания пропорциональна разности температур чая и среды?

2 Задачи с параметрами

Задача 1(16) Найти максимальное значение действительного параметра a , зависящее от натурального числа n , что для линейного оператора $\mathcal{F}: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ – n -мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{\delta_{i+1, j}\}$, и $\delta_{i, j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

3 Ряды, произведения

Задача 1(3) Доказать неравенство $\frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$.

Подсказка: Использовать разложение функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора

Задача 2(4) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Задача 3(12) Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(2n)!}$

Задача 4(13) Вычислить: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \cdot \dots$

Задача 5(14) Решить уравнение: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n+1} = \frac{1}{4084441}$

Задача 6(17) Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;

2. $\left\lceil \frac{X}{Y} \right\rceil$.

Задача 7(19) Найти произведение

$$\prod_{a \in A} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
2. $A = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Задача 8(21) Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) dx$$

4 Дифференциальные уравнения

Задача 1(5) За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C . За какое время он остынет до 25°C , если температура воздуха в комнате 20°C , а скорость остывания пропорциональная разности температур чая и среды?

Задача 2(6) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y = xy' + x^2y''$, $x > 0$

Задача 3(7) Решить дифференциальное уравнение

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$$

Задача 4(10) Решить задачу Коши: $(y')^2 + (y' - y)e^x = y^2$, $y(0) = -\frac{1}{2}$

Задача 5(11) Решить дифференциальное уравнение: $y' + y'' + y''' + \dots = x$, $y(0) = 0$

5 Интегралы

Задача 1(7) Решить дифференциальное уравнение

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$$

Задача 2(8) Вычислить

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^3 + y^3}, \quad \text{где } D: \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Задача 3(9) Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \arcsin x \arccos x \, dx$

Задача 4(15) Вычислить двойной интеграл $\iint_D |\cos(x+y)| \, dS$, где $D: 0 \leq x+y \leq \pi \wedge xy \geq 0$

Задача 5(20) Найти наибольшую площадь круга, вписанного в ограниченную область D , такую что $\forall (x, y) \in D \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 y^2 + xy$.

Задача 6(21) Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) dx$$

6 Задачи на вероятность

Задача 1(17) Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;

2. $\left\lceil \frac{X}{Y} \right\rceil$.

7 Задачи линейной алгебры

Задача 1(16) Найти максимальное значение действительного параметра a , зависящее от натурального числа n , что для линейного оператора $\mathcal{F}: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ — n -мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{\delta_{i+1, j}\}$, и $\delta_{i, j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Задача 2(19) Найти произведение

$$\prod_{a \in A} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
2. $A = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

8 Комплексные числа, ТФКП

Задача 1(18) Докажите, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ три попарно различных комплексных числа $a, b, c \in \mathbb{C}$ такие, что $|a| = |b| = |c| = 1$, удовлетворяющие уравнению $a^3 + b^3 + c^3 = \lambda \cdot abc$, образуют равнобедренный треугольник в комплексной плоскости. Найдите все значения параметра λ , при котором верна гипотеза выше, а также найдите угол θ при вершине равнобедренного треугольника.

9 Теоремы и леммы

Теорема 1.

Пусть A, B, C — матрицы размера $n \times n$ над полем \mathbb{C} , причем A, B — коммутирующие матрицы, а матрица C выражается как линейная комбинация A и B :

$$C = a \cdot A + b \cdot B$$

где $a, b \in \mathbb{C}$.

Числа λ_k, μ_k являются соответственно собственными числами матриц A и B и соответствуют одному собственному вектору. Тогда собственные значения матрицы C имеют вид $a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k$, $k = \overline{1, n}$

Доказательство:

Без потери общности рассмотрим собственные векторы матрицы A . Собственному числу λ_k соответствует какой-нибудь собственный вектор \mathbf{x}_k . По определению собственных чисел и векторов выходит следующее верное равенство:

$$A \cdot \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$$

Умножим равенство на матрицу B слева:

$$B \cdot (A \cdot \mathbf{x}_k) = B \cdot (\lambda_k \mathbf{x}_k) = [A \cdot B = B \cdot A] = A \cdot (B \cdot \mathbf{x}_k) = \lambda_k (B \cdot \mathbf{x}_k)$$

Стало быть, вектор $B \cdot \mathbf{x}_k$ также является собственным вектором матрицы A , причём соответствует тому же собственному числу. Такое возможно тогда и только тогда, когда векторы $B \cdot \mathbf{x}_k$ и \mathbf{x}_k линейно-зависимы:

$$\exists! \mu_k: B \cdot \mathbf{x}_k = \mu_k \mathbf{x}_k$$

Это есть определение собственного числа для матрицы B — вектор \mathbf{x}_k является собственным для этой матрицы. Значит, собственные подпространства матриц A, B совпадают, т.к. эти матрицы коммутируют.

Домножим матрицу C на вектор \mathbf{x}_k :

$$C \cdot \mathbf{x}_k = (a \cdot A + b \cdot B) \cdot \mathbf{x}_k = a \cdot A \cdot \mathbf{x}_k + b \cdot B \cdot \mathbf{x}_k = (a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k) \cdot \mathbf{x}_k$$

Получили определение собственного числа $a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k$ матрицы C , что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Собственные числа λ_k симметричной трёхдиагональной матрицы размера $n \times n$ вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

находятся как $\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right)$, $k = \overline{1, n}$

Доказательство:**1. Оценка спектрального радиуса матрицы.**

Обозначим матрицу в условии как A_n . Возьмём произвольную матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размера $n \times n$. Оценим спектральный радиус $\rho(A_n)$ матрицы. Воспользуемся тем, что для любой **индуцированной** нормы матрицы $\|\cdot\|$ верно равенство.

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Рассмотрим векторное пространство, снабженное нормой $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Тогда индуцированной матричной формой матрицы A будет

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Получим оценку $\rho(A_n) \leq \|A_n\|_1 = \max(1, 1+1, \dots, 1) = 2$. Поскольку спектральный радиус матрицы определяется как $\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$, где $\sigma(A)$ — спектр матрицы A , то

$$\forall \lambda \in \sigma(A_n) \Rightarrow |\lambda| \leq 2 \quad (1)$$

2. Вывод рекуррентного соотношения для определителя.

Собственные числа матрицы A_n вычисляются из уравнения

$$\det(A_n - \lambda E) = 0$$

$$A_n - \lambda E = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Обозначим через f_n определитель $\det(A_n - \lambda E)$. Вычислим первые два определителя:

$$f_1 = \det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda$$

$$f_2 = \det(A_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Вычислим определитель матрицы $A_n - \lambda E$ разложением по первой строке:

$$\det(A_n - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} (-\lambda) f_{n-1} + (-1)^{1+2} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot f_{n-2} = -\lambda f_{n-1} - f_{n-2}$$

Получаем линейное однородное рекуррентное уравнение 2^{го} порядка:

$$f_n = -\lambda \cdot f_{n-1} - f_{n-2} \quad (2)$$

Начальные условия для уравнения (2): $f_0 = 1, {}^1f_1 = -\lambda$.

3. Решение рекуррентного соотношения.

Можно решить это уравнение (2) разными способами, но мы выберем метод генеративных функций. Положим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

Умножим обе части уравнения (2) на z^n :

$$\begin{aligned} f_n z^n &= -\lambda \cdot f_{n-1} z^n - f_{n-2} z^n \\ f_n z^n &= -\lambda z \cdot f_{n-1} z^{n-1} - z^2 f_{n-2} z^{n-2} \end{aligned}$$

Просуммируем последнее равенство по всем натуральным $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n &= -\lambda z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} - z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 &= -\lambda z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - f_0 z^0 \right) - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \\ (1 + \lambda z + z^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n &= 1 - \lambda z + \lambda z \cdot 1 \\ (1 + \lambda z + z^2) \cdot G(z) &= 1 \\ G(z) &= \frac{1}{1 + \lambda z + z^2} \end{aligned}$$

Знаменателем этой дроби является многочлен 2-ой степени. Пусть z_1, z_2 являются корнями этого многочлена. Разложим дробь, используя метод неопределенных коэффициентов

$$G(z) = \frac{1}{1 + \lambda z + z^2} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = \frac{(A + B)z - (Az_2 + Bz_1)}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad (3)$$

Получим систему относительно неизвестных A, B :

$$\begin{aligned} z^0: & \begin{cases} A + B = 0 \\ Az_2 + Bz_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Наша система совместна и определена, если $z_1 \neq z_2$.

Условие $z_1 \neq z_2$ требует ненулевого дискриминанта у многочлена $z^2 + \lambda z + 1$.

$$D = \lambda^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$$

$$\lambda^2 \neq 4$$

$$\lambda \neq \pm 2$$

Объединив последнее неравенство с неравенством (1), получим ограничение в виде строго неравенства

$$\forall \lambda \in \sigma(A_n) \Rightarrow |\lambda| < 2 \quad (4)$$

Из первого уравнения системы получаем $A = -B$. Подставим это выражение в уравнение (3).

$$G(z) = \frac{-B}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = B \left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} \right)$$

¹ $f_2 = -\lambda \cdot f_1 - f_0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - f_0 \Rightarrow f_0 = 1$

Затем преобразуем это выражение и разложим получившиеся дроби в ряд.

$$G(z) = B \left(\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} - \frac{1}{z_2} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}} \right) = B \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_2^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} B \left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1} \right) \cdot z^n$$

Сравним определение генеративной функции $G(z)$ и последнее выражение, получим что

$$f_n = B \left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1} \right)$$

Теперь, согласно алгоритму поиска собственного числа, необходимо решить уравнение

$$\begin{aligned} \det(A_n - \lambda E) &= 0 \\ f_n &= B \left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1} \right) = 0 \\ z_1^{-n-1} &= z_2^{-n-1} \end{aligned}$$

4. Анализ корней z_1, z_2 и переход к экспоненциальной форме.

Воспользуемся формулой Эйлера для того, чтобы представить числа z_1, z_2 в экспоненциальной форме

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= |z_2| e^{i\varphi_2} \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi; \pi]$ — аргументы соответственно чисел z_1, z_2 .

Покажем, что $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 = \overline{z_2}$. Вспомним, что z_1, z_2 — корни уравнения $1 + \lambda z + z^2$, тогда

$$\begin{aligned} D &= \lambda^2 - 4 < 0, \quad \text{т.к. } |\lambda| < 2 \Rightarrow \operatorname{Im}(z_{1,2}) \neq 0 \\ z_{1,2} &= -\frac{\lambda}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \\ |z_{1,2}| &= \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

Имеем $z_1 z_2 = 1$ по теореме Виета и $|z_1| = |z_2| = 1$, тогда $z_1 = \overline{z_2}$.

На основании этого имеем

$$\begin{aligned} z_1^{-n-1} &= z_2^{-n-1} \\ |z_1|^{-n-1} e^{-(n+1)i\varphi_1} &= |z_2|^{-n-1} e^{-(n+1)i\varphi_2} \\ e^{-(n+1)i\varphi_1} &= e^{-(n+1)i\varphi_2} \end{aligned}$$

Так как $z_1 = \overline{z_2}$, то $\varphi_1 = -\varphi_2$. Сделаем замену $\varphi_1 = \varphi$ и $\varphi_2 = -\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{-(n+1)i\varphi} &= e^{-(n+1)i(-\varphi)} \\ e^{-2(n+1)i\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

Представим число 1 в экспоненциальной форме:

$$1 = e^{0i}$$

Так как комплексная экспонента периодична с основным периодом $2\pi i$, получаем

$$\begin{aligned} -2(n+1)i\varphi &= (0 + 2\pi k)i, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \varphi &= -\frac{\pi k}{n+1} \end{aligned}$$

5. Получение явного вида λ_k и симметризация.

Заметим, что $\operatorname{Re}(z_1) = \cos \varphi_1 = \cos \varphi = -\frac{\lambda}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos \left(-\frac{\pi k}{n+1} \right) \\ -\frac{\lambda}{2} &= \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \\ \lambda &= -2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right)\end{aligned}$$

Так как (4) и функция \cos периодична, то можно ограничиться выбором чисел k до набора $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим собственное значение на этом множестве как $\lambda(k)$, тогда

$$\lambda(k) = -2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) = 2 \cos \left(\pi - \frac{\pi k}{n+1} \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi(n-k+1)}{n+1} \right) = -\lambda(n-k+1)$$

Поскольку замена $k \mapsto n-k+1$ меняет только порядок элементов набора A , то знак « $-$ » можно опустить в силу того, что значения функции $\lambda(k)$ на первой половине набора отличается только знаком от значений этой же функции на второй половине набора.

Окончательно, собственные числа матрицы A_n находятся как

$$\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right), \quad k = \overline{1, n}.$$

Теорема 3.

Пусть Ω — счётное множество, и $\{f_i\}_{i=1}^n$ — система функций, определенных на Ω . Тогда система функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ *линейно независима* на Ω тогда и только тогда, когда найдётся набор $\{\omega_i\} \subseteq \Omega$ из n точек, на котором эта система линейно независима, то есть ранг матрицы $A = (f_j(\omega_i))_{i,j=1}^n$ равен n .

Доказательство:

10 Все задачи

Текстовые задачи

Задача 1.

Найти, на какую цифру заканчивается десятичная запись числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$.

Решение: Хорошо известно, что несократимая дробь вида $\frac{a}{b}$ представляется в десятичном виде в виде непериодической дроби тогда и только тогда, когда все делители числа b являются какой-либо степенью делителей числа 10. Так как 5^{2020} является степенью делителя числа 10, тогда наше число $x = \frac{7^{2019}}{5^{2020}}$ представляется в виде конечной десятичной дроби.

Тогда можно домножить наше число x таким образом на степень 10, чтобы оно стало натуральным, причем последняя цифра была не нулём. Именно она является последней цифрой десятичной записи нашего числа x .

Домножим x на 10^{2020} , получим:

$$A = x \cdot 10^{2020} = \frac{7^{2019} \cdot 10^{2020}}{5^{2020}} = 2 \cdot 14^{2019}$$

Тогда нам остается узнать, на какую цифру оканчивается число A . Поступим следующим образом:

$$A \equiv 2 \cdot 14^{2019} \stackrel{(*)}{\equiv} 2 \cdot 4^{2019} \equiv 2 \cdot 2^{4038} \equiv 2^{4039} \pmod{10} \quad (1)$$

Сравнение $(*)$ справедливо, так как $14 \equiv 4 \pmod{10}$.

Для того, чтобы найти остаток деления 2^{4039} , составим таблицу остатков степеней двойки при делении на 10.

k	2^k	$2^k \pmod{10}$	i
0	1	1	-
1	2	2	0
2	4	4	1
3	8	8	2
4	16	6	3
5	32	2	0
6	64	4	1
7	128	8	2
8	256	6	3

Очевидно, что остатки степеней двойки подчиняются простому периодическому закону.

Найдем остаток i деления числа 4039 на 4, за вычетом 1, которому служит первая строка с $k = 0$:

$$4039 - 1 \equiv 4038 \equiv 4036 + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

Таким образом, числу 4039 соответствует остаток $i = 2$, тогда, подставим результат в (1):

$$A \equiv 2^{4039} \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

Стало быть, число A заканчивается на цифру 8, но это значит, что десятичная запись нашего исходного числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$ заканчивается на ту же цифру.

Ответ: 8.

Текстовые задачи

Задача 2.

На ребрах и вершинах куба стоят натуральные числа от 2001 до 2020 (все числа различные). Может ли быть, что числа, стоящие на каждом ребре, являются средними арифметическими чисел в соответствующих вершинах?

Решение: Предположим, что утверждение верно. Пусть X — множество чисел, данных в задании. Нетрудно показать, что $|X| = 20$. Хорошо известно, что у куба 12 ребер и 8 вершин, а сумма их количества в точности равна $12 + 8 = 20$, что равно $|X|$. Значит, каждому числу из X соответствует единственное ребро или единственная вершина куба. Следовательно, числа 2001 и 2020 обязательно будут использоваться для обозначения двух вершин, потому что оба числа не могут быть средним арифметическим двух других различных чисел из X .

Далее, так как на ребрах и вершинах стоят числа из $X \subset \mathbb{N}$, то любые две смежные вершины должны иметь числа одной четности для того, чтобы их среднее арифметическое было натуральным. Тогда возможно только два случая: все вершины несут только четные числа или только нечетные числа. Однако, выше мы показали, что числа 2001 и 2020 обязательно будут на двух вершинах, а они разной четности, и мы получили противоречие. Следовательно, изначальное утверждение неверно.

Ответ: Нет, не может.

Ряды, произведения

Задача 3.

Доказать неравенство $\frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$.

Подсказка: Использовать разложение функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора

Решение: Выведем выражение ряда Маклорена (частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$) для функции $y = \ln(1+x)$. Для этого необходимо найти общую формулу производной n -го порядка в точке $x_0 = 0$. Найдем несколько первых производных этой функции:

$$\begin{aligned} y &= \ln(1+x) \\ y' &= (1+x)^{-1} \\ y'' &= (-1) \cdot (1+x)^{-2} \\ y''' &= (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3} \\ y^{(4)} &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4} \\ &\dots \\ y^{(n)} &= (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n} \end{aligned}$$

Последняя строчка представляет собой предположение формулы для $n \in \mathbb{N}$. Докажем эту формулу методом мат. индукции:

База индукции: $y^{(1)} = (-1)^{1-1} (1-1)! (1+x)^{-1} = (1+x)^{-1} = y'$

Шаг индукции: $y^{(n+1)} = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1}$

По формуле вычисления производной высших порядков:

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) (1+x)^{-n-1} = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1}$$

Стало быть, шаг индукции доказан. Следовательно, формула справедлива для $\forall n \in \mathbb{N}$ по методу мат. индукции.

Вычислим $y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$ а также $y^{(0)}(0) = y(0) = \ln 1 = 0$.

Тогда ряд Маклорена для нашей функции примет вид: $y = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

Так оценим число $\ln \frac{2020}{2019}$ сверху:

$$\ln \frac{2020}{2019} = \frac{1}{2019} - \frac{1}{2 \cdot 2019^2} + \dots$$

Ряд знакопеременный, и каждый последующий член меньше по модулю предыдущего согласно теореме Лейбница, следовательно справедливо равенство:

$$\ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019} \quad (1)$$

Оценим выражение снизу, для этого оценим аргумент логарифма снизу. Перепишем его в виде:

$$\frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019} > 1 + \frac{1}{1! \cdot 2020} + \frac{1}{2! \cdot 2020^2} + \frac{1}{3! \cdot 2020^3} + \dots = e^{\frac{1}{2020}}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой ряд Маклорена функции e^x в точке $x = \frac{1}{2020}$. Прологарифмируем его и получим оценку снизу:

$$e^{\frac{1}{2020}} < \frac{2020}{2019} \Leftrightarrow \frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем окончательную оценку: $\frac{1}{2020} < \ln \frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$, что и требовалось доказать.

Ряды, произведения

Задача 4.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Решение: Обозначим сумму как S и преобразуем ее следующим образом:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = \left[\begin{array}{l} n+1=p \Rightarrow n=p-1 \\ n=1 \Rightarrow p=2 \\ n \rightarrow \infty \Rightarrow p \rightarrow \infty \end{array} \right] = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p}{3^{p-1}} \stackrel{(*)}{=} 3 \cdot \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{3^p} - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}}_K - 1$$

Последнее равенство справедливо, так как не важно, как называется переменная суммирования, поэтому можно просто переобозначить ее снова как n . Равенство $(*)$ верное, так как можно вынести множитель из суммы и добавить дополнительный член суммы. Обозначим сумму в последнем равенстве как K . Выразим ее через S :

$$S = 3K - 1 \Rightarrow K = \frac{S+1}{3}$$

Еще немного преобразуем сумму S :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}}_K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (1)$$

Подставим в (1) выражение для K и выразим S :

$$S = \frac{S+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \Rightarrow S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (2)$$

Остается найти последнюю сумму. Хорошо известно, что это разложение функции $\frac{x}{1-x}$ в ряд. Воспользуемся этим фактом, чтобы вычислить эту сумму:

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Подставим получившееся значение в (2), и мы получим окончательный ответ:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Ответ: 1.25

Текстовые задачи Дифференциальные уравнения

Задача 5.

За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C . За какое время он остынет до 25°C , если температура воздуха в комнате 20°C , а скорость остывания пропорциональна разности температур чая и среды?

Решение: Пусть $T(t)$ — функция температуры чая от времени в минутах и $T_0 = 20$ — температура окружающей среды (*воздуха*). Тогда условие скорости остывания можно записать в виде:

$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ — Д.У. 1^{го} порядка с разделяющимися переменными, где k — какая-то постоянная.

Решим его, разделив переменные:

$$\frac{dT}{T - T_0} = k dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{T - T_0} = \int k dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln |T - T_0| = kt + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = T_0 + Ce^{kt}$$

Решим задачу Коши. Подставим начальные условия $T_0 = 20$, $T(0) = 100$, $T(10) = 60$ в получившееся уравнение.

Получим:

$$\begin{cases} 100 = 20 + Ce^{k \cdot 0} \\ 60 = 20 + Ce^{k \cdot 10} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 80 = C \\ 40 = Ce^{k \cdot 10} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C = 80 \\ e^k = 2^{-0.1} \end{cases}$$

Тогда наше уравнение зависимости температуры от времени примет вид:

$$T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-0.1t}$$

Вычислим искомое значение времени, за которое чай остынет до температуры 20°C :

$$25 = 20 + 80 \cdot 2^{-0.1t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{16} = 2^{-0.1t} \quad \Rightarrow \quad 2^{-4} = 2^{-0.1t} \quad \Rightarrow \quad t = 40 \text{ мин.}$$

Ответ: 40 мин.

Дифференциальные уравнения

Задача 6.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y = xy' + x^2y''$, $x > 0$

Решение:

Способ 1. Перепишем наше дифференциальное уравнение в виде: $x^2y'' + xy' - y = 0$. Видно, что мы имеем дело с ЛОДУ 2^{го} порядка.

Его решение представляется в виде: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные константы, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – две линейно-независимые функции, которые являются частными решениями ЛОДУ.

Найдем их с помощью метода подбора. Заметим, что функции $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ являются частными решениями этого Д.У. Действительно:

$$\begin{array}{l} (y = x) \\ \left(y = \frac{1}{x}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 \cdot x'' + x \cdot x' - x = 0 + x - x = 0 \\ x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'' + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \end{array}$$

Также заметим, что две эти функции линейно-независимы. И вправду $\frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2 \neq \text{const}$.

Стало быть, эти две функции образуют фундаментальную систему решений нашего ЛОДУ. Тогда общее решение этого Д.У. запишется в виде:

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

Способ 2. Это дифференциальное уравнение Эйлера, сделаем замену $x = e^t$, соответственно получим $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}$ и $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_t \cdot t'_x)'_x = y''_{tt} (t'_x)^2 + y'_t \cdot t''_{xx} = e^{-2t} \cdot (y''_{tt} - y'_t)$.

Тогда наше уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} y''(t) - y'(t) + y'(t) - y &= 0 \\ y''(t) - y &= 0 \end{aligned}$$

Это ЛОДУ 2^{го} порядка. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корнями будут $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Запишем общее решение, сделав обратную замену:

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y(x) &= C_1x + \frac{C_2}{x} \end{aligned}$$

Ответ: $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$

Дифференциальные уравнения Интегралы

Задача 7.

Решить дифференциальное уравнение

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$$

Решение: Чтобы найти решение этого дифференциального уравнения, необходимо вычислить соответствующий интеграл:

$$\int \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \left[\begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \end{array} \right] = \frac{1}{16} \int \frac{du}{1 + \frac{9}{16} u^2} = \frac{1}{16} \int \frac{\frac{4}{3} d\left(\frac{3u}{4}\right)}{1 + \left(\frac{3u}{4}\right)^2} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3 \sin t}{4}$$

Тогда наше уравнение примет следующий вид:

$$\int_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \, dt}{16 + 9 \sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3 \sin t}{4} \Big|_0^{y'} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3 \sin y'}{4} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$$

Теперь воспользуемся тем, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ строго монотонная на \mathbb{R} , значит если значения функций равны, то и аргументы функций обязаны быть равны:

$$\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{3 \sin y'}{4} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \frac{3 \sin y'}{4} = x \Leftrightarrow \sin y' = \frac{4x}{3}$$

Это уравнение имеет решение только при $\left| \frac{4x}{3} \right| \leq 1$, т.е. при $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$. Разрешим его относительно производной как обычное тригонометрическое уравнение с синусом:

$$\sin y' = \frac{4x}{3} \Leftrightarrow y' = (-1)^k \arcsin \frac{4x}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \int \left((-1)^k \arcsin \frac{4x}{3} + \pi k \right) dt = C + \pi k x + \frac{3(-1)^k}{4} \int \arcsin \left(\frac{4x}{3} \right) d \left(\frac{4x}{3} \right)$$

Остается только найти интеграл от арксинуса. Сделаем это отдельно:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x & \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = x \end{array} \right] = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x \arcsin x + \int d \left(\sqrt{1-x^2} \right) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Тогда остается подставить полученный интеграл и получим наш ответ:

$$y = C + \pi k x + \frac{3(-1)^k}{4} \left(\frac{4x}{3} \arcsin \frac{4x}{3} + \sqrt{1 - \left(\frac{4x}{3} \right)^2} \right)$$

$$y = C + \pi k x + (-1)^k \left(x \arcsin \frac{4x}{3} + \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 - x^2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

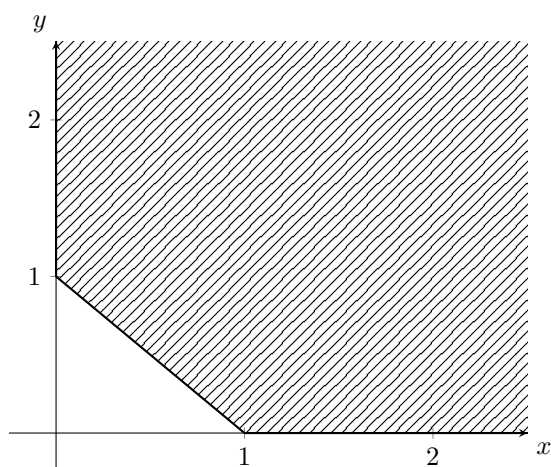
Ответ: $y = C + \pi k x + (-1)^k \left(x \arcsin \frac{4x}{3} + \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 - x^2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$

Интегралы

Задача 8.

Вычислить

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^3 + y^3}, \quad \text{где } D: \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Решение:Область D в прямоугольной системе координат

Построим нашу область D . Очевидно, что она неограничена. Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \text{где } r > 0, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Вычислим якобиан J этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

Якобиан J этого отображения не равен нулю в области D , поэтому это отображение определяет биекцию (взаимно-однозначное соответствие) между всеми точками области D и всеми точками его образа \hat{D} , поэтому можно сделать замену переменных в нашем интеграле:

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^3 + y^3} = \iint_{\hat{D}} \frac{|J| \cdot drd\varphi}{r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = \iint_{\hat{D}} \frac{drd\varphi}{r^2(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} \quad (1)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нам необходимо определить границы области \hat{D} по переменным r и φ .

Прямые линии $x = 0$ и $y = 0$ соответствуют своим значениям $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0$.

Так как фигура неограничена и правильная относительно переменной r , то можно сказать, что верхней границей интегрирования по r будет $+\infty$. Определимся с нижней границей. Она соответствует прямой $x + y = 1$. Найдем ее выражение в полярных координатах. Так как $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, то

$$r \cos \varphi + r \sin \varphi = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}$$

Это выражение для r как раз и будет нижней границей интегрирования. Подставим найденные выражения в интеграл (1):

$$\iint_{\hat{D}} \frac{drd\varphi}{r^2(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \quad (2)$$

Внутренний интеграл представляет собой несобственный интеграл 1^{го} рода. Вычислим его отдельно:

$$\int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} \Big|_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{+\infty} = -0 + (\cos \varphi + \sin \varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi$$

При подстановке верхнего предела в выражение первообразной мы получили ноль, потому что по $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{r}\right) = 0$. Подставим получившееся выражение в интеграл (2):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi} = \left[\begin{array}{ll} \theta = 2\varphi & \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \rightarrow \pi \\ d\varphi = \frac{1}{2} d\theta & \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0 \end{array} \right] = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta} \quad (3)$$

Равенство (*) справедливо в силу того, что мы знаменатель разложили на множители по формуле суммы кубов.

Для того, чтобы решить крайний правый интеграл (3), мы используем универсальную тригонометрическую замену, где за t обозначим $\tan \frac{\theta}{2}$, при этом известно, что в таких обозначениях верны равенства $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ и $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$. Так же определим границы интегрирования: $\theta \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 - \frac{2t}{1+t^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - t + t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

Интегралы

Задача 9.

Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \arcsin x \arccos x \, dx$

Решение: Заметим, что $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и заменим переменные: $\arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t$.
Выразим дифференциал: $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dx = \cos t \, dt$. Вычислим новые границы интегрирования:
 $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$

$$\int_0^1 \arcsin x \arccos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi t}{2} - t^2 \right) \cos t \, dt$$

Правый интеграл возьмем по частям и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi t}{2} - t^2 \right) \cos t \, dt &= \left[\begin{array}{cc} u & dv \\ + & \frac{\pi t}{2} - t^2 & \cos t \\ - & \frac{\pi t}{2} - 2t & \sin t \\ + & -2 & -\cos t \\ - & 0 & -\sin t \end{array} \right] = \left(\frac{\pi t}{2} - t^2 \right) \cdot \sin t - \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \cdot (-\cos t) + (-2) \cdot (-\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(0 \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 1 \right) - \left(0 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 0 \right) = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $2 - \frac{\pi}{2}$

Дифференциальные уравнения

Задача 10.

Решить задачу Коши: $(y')^2 + (y' - y)e^x = y^2$, $y(0) = -\frac{1}{2}$

Решение: Перенесем y^2 в левую часть уравнения. Раскроем скобки и перегруппируем:

$$(y')^2 + exy' - y(ex + y) = 0$$

Заметим, что полученное уравнение является квадратным относительно y' . Разложим выражение слева на множители:

$$(y' + e^x + y)(y' - y) = 0$$

Таким образом, уравнение распадается на совокупность двух ДУ:

$$\begin{cases} y' + e^x + y = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + y = -e^x & (1) \\ y' - y = 0 & (2) \end{cases}$$

ДУ (1) представляет собой ЛНДУ 1^{го} порядка с правой частью вида $P_n(x)e^{kx}$. Решим его:

$\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ – решение характеристического уравнения

$y = C_1 e^{-x} + Ae^x$, где Ae^x – частное решение, соответствующее правой части ЛНДУ

$$(Ae^x)' + Ae^x = -e^x \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$y = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x \text{ – общее решение ДУ (1)}$$

Решение ДУ (2) не представляется сложным, поэтому запишем сразу его общее решение: $y = C_2 e^x$

Подставим $y(0) = -\frac{1}{2}$. Имеем:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x \\ y = C_2 e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = C_1 - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}e^x$$

Тогда решением нашей задачи будет единственная функция $y = -\frac{1}{2}e^x$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}e^x$

Дифференциальные уравнения

Задача 11.

Решить дифференциальное уравнение: $y' + y'' + y''' + \dots = x$, $y(0) = 0$

Решение: Имеем наше уравнение. Продифференцируем его:

$$\begin{aligned}y' + y'' + y''' + \dots &= x \\y'' + y''' + y^{(4)} + \dots &= 1\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned}y' + (y'' - y'') + (y''' - y''') + \dots &= x - 1 \\y' &= x - 1\end{aligned}$$

Решим последнее уравнение:

$$y' = x - 1 \Leftrightarrow y = \int (x - 1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C$$

Подставим начальное условие $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{0^2}{2} - 0 + C \Leftrightarrow C = 0$$

Итого, решением исходного уравнения будет функция $y = \frac{x^2}{2} - x$.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - x$

Ряды, произведения

Задача 12.

Исследовать сходимость ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(2n)!}$$

Решение: Обозначим изначальный ряд как (1).

Оценим общий член ряда, учитывая что $k! \leq n!$ ($k = \overline{1, n}$):

$$\frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(2n)!} \leq \frac{n! + n! + n! + \dots + n!}{(2n)!} = \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$$

Тогда исходный ряд меньше ряда (2):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(2n)!}.$$

Исходный ряд будет сходиться по признаку сравнения, если мы докажем, что ряд (2) сходится. Применим ко второму ряду признак д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)! \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^3} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд (2) сходится.}$$

Так как ряд (2) сходится и $(1) \leq (2)$, то по признаку сравнения ряд (1) сходится.

Ответ: сходится.

Ряды, произведения

Задача 13.

Вычислить: $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \dots$

Решение: Перепишем наше бесконечное произведение в свернутом виде:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \dots = \prod_{n=1}^{\infty} (3^n)^{\frac{1}{3^n}}$$

Упростим наше произведение, пользуясь правилами степеней:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (3^n)^{\frac{1}{3^n}} = \prod_{n=1}^{\infty} 3^{\frac{n}{3^n}} = 3^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}} = 3^S, \quad \text{где } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Необходимо вычислить S . Введем новую функцию:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \tag{1}$$

Нужно определиться при каких x ряд (1) сходится. Применим признак д'Аламбера для сходимости ряда:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim \frac{n+1}{n} \cdot |x| = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Таким образом, ряд сходится, если $-1 < x < 1$.

Число $\frac{1}{3}$ лежит в области сходимости этого ряда. Тогда, $S = f\left(\frac{1}{3}\right)$. Найдем замкнутое выражение для функции $f(x)$. Для этого рассмотрим производную другого ряда:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ \left(\frac{x}{1-x} \right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \end{aligned}$$

Отсюда видно, чему равняется ряд (1):

$$f(x) = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Тогда мы можем вычислить S :

$$S = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

Окончательно можем сказать, что

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{9} \cdot \sqrt[27]{27} \cdot \sqrt[81]{81} \dots = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$$

Ответ: $\sqrt[4]{27}$

Ряды, произведения

Задача 14.

Решить уравнение: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n+1} = \frac{1}{4084441}$

Решение: Рассмотрим ряд (1): $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Найдем его область сходимости. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nx^n|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = |x| \cdot 1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Преобразуем ряд (1), и заметим, что он сводится к производной обычного геометрического ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = x \cdot \frac{d}{dx} \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Заметим, что исходный ряд получается из ряда (1) заменой $x \mapsto -x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n+1} = (-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = (-x) \cdot \frac{-x}{(1+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

Этот ряд сходится в той же области, что и ряд (1).

Остается решить уравнение

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{4084441}$$

Заметим, что $4084441 = 2021^2$, и возьмем квадратный корень из обеих частей уравнения. Тогда наше уравнение легко преобразуется:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2021^2} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2021^2}} \\ \left| \frac{x}{1+x} \right| = \frac{1}{2021} &\Leftrightarrow \frac{-1+1+x}{1+x} = \pm \frac{1}{2021} \\ 1 - \frac{1}{1+x} = \pm \frac{1}{2021} &\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{2021 \pm 1}{2021} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1+x = \frac{2021}{2021+1} \\ 1+x = \frac{2021}{2021-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2021-2022}{2022} \\ x = \frac{2021-2020}{2020} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2022} \\ x = \frac{1}{2020} \end{cases}$$

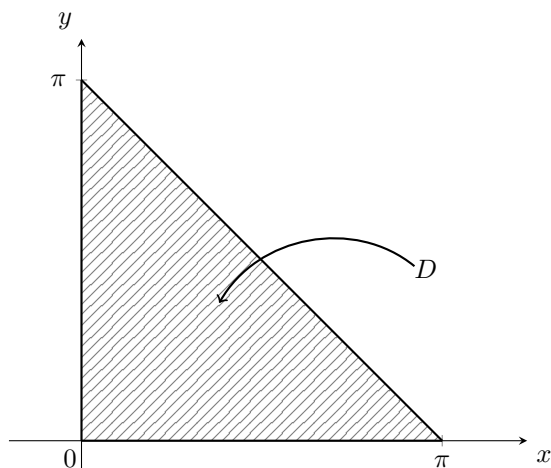
Нетрудно проверить, что оба корня лежат в области сходимости ряда: $-1 < x < 1$.

Ответ: $-\frac{1}{2022}; \frac{1}{2020}$

Интегралы

Задача 15.

Вычислить двойной интеграл $\iint_D |\cos(x+y)| dS$, где $D: 0 \leq x+y \leq \pi \wedge xy \geq 0$

Решение:

Область D в прямоугольной системе координат.

Наша область D , лежащая в I четверти координатной плоскости, представляет собой прямоугольный треугольник.

Введём замену координат

$$\begin{cases} x+y=u \\ y=vx \end{cases}$$

Выражая x, y из этой системы, получим

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

В таких координатах область D будет выражаться следующим образом:

$$D^{uv} = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \pi \wedge v \geq 0 \right\}$$

Для того, чтобы перейти к новым координатам в наших интегралах, необходимо вычислить Якобиан J преобразования координат:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+v)^3} \begin{vmatrix} 1 & v \\ -u & u \end{vmatrix} = \frac{-u(v+1)}{(1+v)^3} = \frac{-u}{(1+v)^2}$$

Теперь можно¹ перейти к координатам (u, v) в интеграле:

$$\iint_D |\cos(x+y)| dS = \iint_{D^{uv}} |\cos(u)| \cdot |J| du dv = \iint_{D^{uv}} \left| \frac{-u \cos u}{(1+v)^2} \right| du dv = [u \geq 0] = \iint_{D^{uv}} \frac{u |\cos u|}{(1+v)^2} du dv$$

Раскроем этот интеграл как повторный и решим его, не забывая про модуль при косинусе

$$\begin{aligned} \iint_{D^{uv}} \frac{u |\cos u|}{(1+v)^2} du dv &= \int_0^\pi du \int_0^{+\infty} \frac{u |\cos u|}{(1+v)^2} dv = \int_0^\pi u |\cos u| du \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v)^2} = \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cos u du - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi u \cos u du \right) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{d(1+v)}{(1+v)^2} = \begin{bmatrix} D & I \\ + & u & \cos u \\ - & 1 & \sin u \\ + & 0 & -\cos u \end{bmatrix} = \\ &= \left((u \sin u - \cos u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - (u \sin u - \cos u) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \cdot \left(\frac{1}{1+v} \Big|_{+\infty}^0 \right) = \\ &= \left(\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right) - (0 - 1) - (\pi \cdot 0 - (-1)) + \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{1+0} - 0 \right) = \pi \end{aligned}$$

Ответ: π

¹Рассуждая более строго, достаточным условием перехода к новым координатам является $\forall (u, v) \in D^{uv} \Rightarrow J(u, v) \neq 0$. В нашем же случае, при $u = 0$, оно не соблюдается. Для разрешения этой ситуации предлагается взять число $\varepsilon > 0$ и рассмотреть интеграл по области $D_\varepsilon^{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq u \leq \pi \wedge v \geq 0\}$. Затем вычислить предел интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Задачи с параметрами Задачи линейной алгебры

Задача 16.

Найти максимальное значение действительного параметра a , зависящее от натурального числа n , что для линейного оператора $\mathcal{F}: \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ — n -мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{\delta_{i+1, j}\}$, и $\delta_{i, j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Решение: Очевидно, что все матрицы в этом задании размера $n \times n$, где n — размерность линейного пространства.

Преобразуем немного неравенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x}) &\geq 0 \\ \mathbf{x}^T \cdot E \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot a \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{x} &\geq 0 \\ Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (E - a \mathcal{A}_{\mathcal{F}}) \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Последнее неравенство четко показывает, что мы имеем дело с квадратичной формой, причем ее матрицей не будет матрица $E - a \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$, а будет матрица \mathcal{A}_Q , определяемая как:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_Q &= \frac{(E - a \mathcal{A}_{\mathcal{F}}) + (E - a \mathcal{A}_{\mathcal{F}})^T}{2} = E - \frac{a}{2} \cdot (\mathcal{A}_{\mathcal{F}} + \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^T) = [B = \mathcal{A}_{\mathcal{F}} + \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^T] = \\ &= E - \frac{a}{2} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 & -\frac{a}{2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{где } E = \{\delta_{i, j}\} \text{ — единичная матрица, и } B = \{\delta_{|i-j|, 1}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как нам требуется, чтобы квадратичная форма была неотрицательной: $Q(\mathbf{x}) \geq 0$, нам необходимо, чтобы матрица этой квадратичной формы \mathcal{A}_Q была **положительно полуопределенной**. Воспользуемся тем, что матрица положительно полуопределена тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неотрицательны. Обозначим собственные числа матрицы \mathcal{A}_Q как μ_k , а собственные числа матрицы B как λ_k , где $k = \overline{1, n}$.

Так как матрицы E, B **коммутируют**, то по [Теореме 1](#) получим, что

$$\mu_k = 1 - \frac{a}{2} \lambda_k \quad (1)$$

По [Теореме 2](#) собственные значения матрицы B находятся как

$$\lambda_k = 2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right), \quad k = \overline{1, n} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и потребуем неотрицательности **всех** собственных значений:

$$\mu_k = 1 - a \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \geq 0, \quad \forall k = \overline{1, n} \quad (3)$$

Это неравенство должно выполняться для всех k .

Заметим, что при $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$ косинус меньше или равен 0, а значит

$$\mu_k \geq 1 - a \cdot 0 = 1 \geq 0$$

Неравенство заведомо верное, т.е. все собственные числа μ_k под номерами $\frac{n+1}{2} \leq k \leq n$ неотрицательны.

Рассмотрим $1 \leq k < \frac{n+1}{2}$. При таких условиях $\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) > 0$. Выразим a из неравенства (3):

$$a \geq \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}$$

И наконец заметим, что при наложенном нами условии на величину k функция $f(k) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}$ возрастает, а значит максимальное значение a , при котором верно это неравенство, соответствует минимальному числу k , то есть $k = 1$:

$$\max a = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

Ответ: $a = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$

Задачи на вероятность Ряды, произведения

Задача 17.

Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;

2. $\left\lceil \frac{X}{Y} \right\rceil$.

Решение: РЕШЕНИЕ**Ответ:** 1) $\frac{\ln 2}{2}$; 2) $\frac{\pi-1}{4}$

Комплексные числа, ТФКП

Задача 18.

Докажите, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ три попарно различных комплексных числа $a, b, c \in \mathbb{C}$ такие, что $|a| = |b| = |c| = 1$, удовлетворяющие уравнению $a^3 + b^3 + c^3 = \lambda \cdot abc$, образуют равнобедренный треугольник в комплексной плоскости. Найдите все значения параметра λ , при котором верна гипотеза выше, а также найдите угол θ при вершине равнобедренного треугольника.

Решение: РЕШЕНИЕ

Задачи линейной алгебры Ряды, произведения

Задача 19.

Найти произведение

$$\prod_{a \in A} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
2. $A = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: 1) $\frac{3}{2\pi^2} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; 2) $\frac{\sinh \pi}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Интегралы

Задача 20.

Найти наибольшую площадь круга, вписанного в ограниченную область D , такую что $\forall (x, y) \in D \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 y^2 + xy$.

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: $\frac{\pi}{32}$

[Интегралы](#) [Ряды, произведения](#)

Задача 21.

Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) dx$$

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: сходится, равен $1 - \gamma$