Задача 1.

Известно, что единичная окружность ω с центром в начале координат касается в двух различных точках верхней полуплоскости графика уравнение $L : |x|^{2n}y^2 = a^2$.

1) Найти значения констант $a,\ b$;
2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями ω и L.

(Если в задании присутствует несобственный интеграл, необходимо указать его тип и доказать его сходимость)

Ответ: $n = \frac{1}{2},\quad a = \sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{3}{4}},\quad S = \sqrt{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 2.

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *Системой Фабера-Шаудера*, если функции этой системы определяются следующим образом:

1. $\varphi_n : [0,1] \to [0,1] \quad (\forall n)$
2. $\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ \max\left(0,\ 1 - \left|x\cdot 2^{k_n+1} - 2i_n + 1\right|\right), & n \geqslant 2 \end{cases}$

   где $\quad k_n = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor,\quad i_n = n - 2^{k_n}$

Хорошо известно, что любую непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ можно единственным образом разложить в функциональный ряд по функциям системы Фабера-Шаудера:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi_n(x)$$

Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *коэффициентами разложения* функции $f(x)$ в ряд выше.

Также можно обобщить это разложение на случай произвольного отрезка $[x_{min},\ x_{max}]$, введя обозначение $L = x_{max} - x_{min}$:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi\left(\frac{x - x_{min}}{L}\right)$$

Обозначив $x_n^{(-)} = \frac{i_n - 1}{2^{k_n}},\quad x_n^{(+)} = \frac{i_n}{2^{k_n}}.\quad x_n^{(0)} = \frac{x_n^{(+)} - x_n^{(+)}}{2}$, коэффициенты a_n вычисляются следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} f(x_{min}), & n = 0 \\ f(x_{max}) - f(x_{min}), & n = 1 \\ f(x_n^{(0)}\cdot L + x_{min}) - \frac{1}{2}\left(f\left(L\cdot x_n^{(+)} + x_{min}\right) + f\left(L\cdot x_n^{(-)} + x_{min}\right)\right), & n \geqslant 2 \end{cases}$$

Пусть $p \in \mathbb{R} : p > 0$, и числа a_n являются коэффициентами разложения функции $f(x) = x^2$ на $[-p, p]$ по системе Фабера-Шаудера.

1. Вычислить коэффициенты a_n при $p = 1$.
2. Выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi_n(x)$ абсолютно и равномерно.
3. Вычислить $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ для всех допустимых p.

Ответ: 1) $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_n = -4^{-\lfloor \log_2(n-1)\rfloor},\quad n \geqslant 2,\quad$ 2) сходится абсолютно и равномерно *признак Вейерштрасса*, $\quad$ 3) $-\,p^2$.