Содержание

1 Текстовые задачи

Задача 1(1) Найти, на какую цифру заканчивается десятичная запись числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$.

Задача 2(2) На ребрах и вершинах куба стоят натуральные числа от 2001 до 2020 (все числа различные). Может ли быть, что числа, стоящие на каждом ребре, являются средними арифметическими чисел в соответствующих вершинах?

Задача 3(5) За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C. За какое время он остынет до 25°C, если температура воздуха в комнате 20°C, а скорость остывания пропорциональная разности температур чая и среды?

2 Задачи с параметрами

Задача 1(16) Найти максимальное значение действительного параметра a, зависящее от натурального числа n, что для линейного оператора $\mathcal{F}\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geqslant \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ – n-мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \left\{\delta_{i+1,\,j}\right\}$, и $\delta_{i,\,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

3 Ряды, произведения

Задача 1(3) Доказать неравенство $\frac{1}{2020} < \ln\frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$.

Подсказка: Использовать разложение функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора

Задача 2(4) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Задача 3(12) Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(2n)!}$

Задача 4(13) Вычислить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdot\ldots$

Задача 5(14) Решить уравнение: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1} = \frac{1}{4084441}$

Задача 6(17) Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0,1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;
2. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rceil$.

Задача 7(19) Найти произведение

$$\prod_{a\in A}\begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;
2. $A = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Задача 8(21) Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right) dx$$

4 Дифференциальные уравнения

Задача 1(5) За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C. За какое время он остынет до 25°C, если температура воздуха в комнате 20°C, а скорость остывания пропорциональная разности температур чая и среды?

Задача 2(6) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y = xy' + x^2y''$, $x > 0$

Задача 3(7) Решить дифференциальное уравнение

$$\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \; dt}{16 + 9\sin^2 t} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} x$$

Задача 4(10) Решить задачу Коши: $(y')^2 + (y' - y)e^x = y^2, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

Задача 5(11) Решить дифференциальное уравнение: $y' + y'' + y''' + ... = x, \quad y(0) = 0$

5 Интегралы

Задача 1(7) Решить дифференциальное уравнение

$$\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t \ dt}{16+9\sin^2 t} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x$$

Задача 2(8) Вычислить

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^3+y^3}, \quad \text{где } D\colon \begin{cases} x+y \geqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача 3(9) Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 \arcsin x \arccos x \ dx$

Задача 4(15) Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \big|\cos(x+y)\big| \, dS$, где $D\colon\ 0 \leqslant x+y \leqslant \pi \ \wedge \ xy \geqslant 0$

Задача 5(20) Найти наибольшую площадь круга, вписанного в ограниченную область D, такую что $\forall (x,y) \in D \Rightarrow$
$x^3 + y^3 \leqslant x^2y^2 + xy$.

Задача 6(21) Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) dx$$

6 Задачи на вероятность

Задача 1(17) Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;
2. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rceil$.

7 Задачи линейной алгебры

Задача 1(16) Найти максимальное значение действительного параметра a, зависящее от натурального числа n, что для линейного оператора $\mathcal{F}\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geqslant \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ – n-мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \left\{\delta_{i+1,\,j}\right\}$, и $\delta_{i,\,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Задача 2(19) Найти произведение

$$\prod_{a\in A} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;
2. $A = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

8 Комплексные числа, ТФКП

Задача 1(18) Докажите, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ три попарно различных комплексных числа $a, b, c \in \mathbb{C}$ такие, что $|a| = |b| = |c| = 1$, удовлетворяющие уравнению $a^3 + b^3 + c^3 = \lambda \cdot abc$, образуют равнобедренный треугольник в комплексной плоскости. Найдите все значения параметра λ, при котором верна гипотеза выше, а также найдите угол θ при вершине равнобедренного треугольника.

9 Теоремы и леммы

Теорема 1.

Пусть A, B, C — матрицы размера $n \times n$ над полем $\mathbb{C}$, причем A, B — коммутирующие матрицы, а матрица C выражается как линейная комбинация A и B:

$$C = a \cdot A + b \cdot B$$

где $a, b \in \mathbb{C}$.

Числа $\lambda_k,\ \mu_k$ являются соответственно собственными числами матриц A и B и соответствуют одному собственному вектору. Тогда собственные значения матрицы C имеют вид $a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k, \quad k = \overline{1, n}$

Доказательство:

Без потери общности рассмотрим собственные векторы матрицы A. Собственному числу λ_k соответствует какой-нибудь собственный вектор $\mathbf{x}_k$. По определению собственных чисел и векторов выходит следующее верное равенство:

$$A \cdot \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$$

Умножим равенство на матрицу B слева:

$$B \cdot (A \cdot \mathbf{x}_k) = B \cdot (\lambda_k \mathbf{x}_k) = [A \cdot B = B \cdot A] = A \cdot (B \cdot \mathbf{x}_k) = \lambda_k (B \cdot \mathbf{x}_k)$$

Стало быть, вектор $B \cdot \mathbf{x}_k$ также является собственным вектором матрицы A, причём соответствует тому же собственному числу. Такое возможно тогда и только тогда, когда векторы $B \cdot \mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}_k$ линейно-зависимы:

$$\exists!\ \mu_k \colon B \cdot \mathbf{x}_k = \mu_k \mathbf{x}_k$$

Это есть определение собственного числа для матрицы B — вектор $\mathbf{x}_k$ является собственным для этой матрицы. Значит, собственные подпространства матриц A, B совпадают, т.к. эти матрицы коммутируют.

Домножим матрицу C на вектор $\mathbf{x}_k$:

$$C \cdot \mathbf{x}_k = (a \cdot A + b \cdot B) \cdot \mathbf{x}_k = a \cdot A \cdot \mathbf{x}_k + b \cdot B \cdot \mathbf{x}_k = (a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k) \cdot \mathbf{x}_k$$

Получили определение собственного числа $a \cdot \lambda_k + b \cdot \mu_k$ матрицы C, что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Собственные числа λ_k симметричной трёхдиагональной матрицы размера $n \times n$ вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

находятся как $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \quad k = \overline{1, n}$

Доказательство:

1. Оценка спектрального радиуса матрицы.

Обозначим матрицу в условии как A_n. Возьмём произвольную матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размера $n \times n$. Оценим спектральный радиус $\rho(A_n)$ матрицы. Воспользуемся тем, что для любой **индуцированной** нормы матрицы $\|\cdot\|$ верно равенство.

$$\rho(A) \leqslant \|A\|$$

Рассмотрим векторное пространство, снабженное нормой $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Тогда индуцированной матричной формой матрицы A будет

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Получим оценку $\rho(A_n) \leqslant \|A_n\|_1 = \max(1, 1+1, \dots, 1) = 2$. Поскольку спектральный радиус матрицы определяется как $\rho(A) = \max\limits_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$, где $\sigma(A)$ — спектр матрицы A, то

$$\forall \lambda \in \sigma(A_n) \Rightarrow |\lambda| \leqslant 2 \tag{1}$$

2. Вывод реккурентного соотношения для определителя.

Собственные числа матрицы A_n вычисляются из уравнения

$$\det(A_n - \lambda E) = 0$$

$$A_n - \lambda E = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Обозначим через f_n определитель $\det(A_n - \lambda E)$. Вычислим первые два определителя:

$$f_1 = \det(A_1 - \lambda E) = \left\| -\lambda \right\| = -\lambda$$

$$f_2 = \det(A_2 - \lambda E) = \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Вычислим определитель матрицы $A_n - \lambda E$ разложением по первой строке:

$$\det(A_n - \lambda E) = \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = (-1)^{1+1}(-\lambda) f_{n-1} + (-1)^{1+2}(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot f_{n-2} = -\lambda f_{n-1} - f_{n-2}$$

Получаем линейное однородное реккурентное уравнение $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка:

$$f_n = -\lambda \cdot f_{n-1} - f_{n-2} \tag{2}$$

Начальные условия для уравнения (2): $f_0 = 1,$[1] $f_1 = -\lambda.$

3. Решение реккурентного соотношения.

Можно решить это уравнение (2) разными способами, но мы выберем метод генеративных функций. Положим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

Умножим обе части уравнения (2) на z^n:

$$f_n z^n = -\lambda \cdot f_{n-1} z^n - f_{n-2} z^n$$
$$f_n z^n = -\lambda z \cdot f_{n-1} z^{n-1} - z^2 f_{n-2} z^{n-2}$$

Просуммируем последнее равенство по всем натуральным $n \geqslant 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = -\lambda z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} - z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - f_0 z^0 - f_1 z^1 = -\lambda z \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n - f_0 z^0 \right) - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$
$$\left(1 + \lambda z + z^2\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = 1 - \lambda z + \lambda z \cdot 1$$
$$\left(1 + \lambda z + z^2\right) \cdot G(z) = 1$$
$$G(z) = \frac{1}{1 + \lambda z + z^2}$$

Знаменателем этой дроби является многочлен 2-ой степени. Пусть z_1, z_2 являются корнями этого многочлена. Разложим дробь, используя метод неопределенных коэффициентов

$$G(z) = \frac{1}{1 + \lambda z + z^2} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = \frac{(A + B)\, z - (A z_2 + B z_1)}{(z - z_1)\,(z - z_2)} \tag{3}$$

Получим систему относительно неизвестных A, B:

$$\begin{matrix} z^0: \\ z^1: \end{matrix} \begin{cases} A + B = 0 \\ A z_2 + B z_1 = 1 \end{cases}$$

Наша система совместна и определена, если $z_1 \neq z_2$.
Условие $z_1 \neq z_2$ требует ненулевого дискриминанта у многочлена $z^2 + \lambda z + 1$.

$$D = \lambda^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$$
$$\lambda^2 \neq 4$$
$$\lambda \neq \pm 2$$

Объединив последнее неравенство с неравенством (1), получим ограничение в виде строго неравенства

$$\forall \lambda \in \sigma(A_n) \Rightarrow |\lambda| < 2 \tag{4}$$

Из первого уравнения системы получаем $A = -B$. Подставим это выражение в уравнение (3).

$$G(z) = \frac{-B}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = B \left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z} \right)$$

[1] $f_2 = -\lambda \cdot f_1 - f_0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = (-\lambda) \cdot (-\lambda) - f_0 \Rightarrow f_0 = 1$

Затем преобразуем это выражение и разложим получившиеся дроби в ряд.

$$G(z) = B\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} - \frac{1}{z_2}\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}\right) = B\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B\left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1}\right)\cdot z^n$$

Сравним определение генеративной функции $G(z)$ и последнее выражение, получим что

$$f_n = B\left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1}\right)$$

Теперь, согласно алгоритму поиска собственного числа, необходимо решить уравнение

$$\det\left(A_n - \lambda E\right) = 0$$
$$f_n = B\left(z_1^{-n-1} - z_2^{-n-1}\right) = 0$$
$$z_1^{-n-1} = z_2^{-n-1}$$

4. Анализ корней z_1, z_2 и переход к экспоненциальной форме.

Воспользуемся формулой Эйлера для того, чтобы представить числа z_1, z_2 в экспоненциальной форме

$$z_1 = |z_1|\, e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = |z_2|\, e^{i\varphi_2}$$

где $\varphi_1, \varphi_1 \in (-\pi; \pi]$ — аргументы соответственно чисел z_1, z_2.

Покажем, что $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 = \overline{z_2}$. Вспомним, что z_1, z_2 — корни уравнения $1 + \lambda z + z^2$, тогда

$$D = \lambda^2 - 4 < 0, \quad \text{т.к. } |\lambda| < 2 \Rightarrow \operatorname{Im}\left(z_{1,2}\right) \neq 0$$
$$z_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$
$$\left|z_{1,2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 1} = 1$$

Имеем $z_1 z_2 = 1$ по теореме Виета и $|z_1| = |z_2| = 1$, тогда $z_1 = \overline{z_2}$.
На основании этого имеем

$$z_1^{-n-1} = z_2^{-n-1}$$
$$|z_1|^{-n-1}\, e^{-(n+1)i\varphi_1} = |z_2|^{-n-1}\, e^{-(n+1)i\varphi_2}$$
$$e^{-(n+1)i\varphi_1} = e^{-(n+1)i\varphi_2}$$

Так как $z_1 = \overline{z_2}$, то $\varphi_1 = -\varphi_2$. Сделаем замену $\varphi_1 = \varphi$ и $\varphi_2 = -\varphi$. Тогда

$$e^{-(n+1)i\varphi} = e^{-(n+1)i(-\varphi)}$$
$$e^{-2(n+1)i\varphi} = 1$$

Представим число 1 в экспоненциальной форме:

$$1 = e^{0i}$$

Так как комплексная экспонента периодична с основным периодом $2\pi i$, получаем

$$-2(n+1)i\varphi = (0 + 2\pi k)i, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi = -\frac{\pi k}{n+1}$$

5. Получение явного вида λ_k и симметризация.

Заметим, что $\operatorname{Re}(z_1) = \cos\varphi_1 = \cos\varphi = -\frac{\lambda}{2}$. Тогда

$$\cos\varphi = \cos\left(-\frac{\pi k}{n+1}\right)$$
$$-\frac{\lambda}{2} = \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$$
$$\lambda = -2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$$

Так как (4) и функция cos периодична, то можно ограничиться выбором чисел k до набора $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим собственное значение на этом множестве как $\lambda(k)$, тогда

$$\lambda(k) = -2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) = 2\cos\left(\pi - \frac{\pi k}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi\,(n-k+1)}{n+1}\right) = -\lambda(n-k+1)$$

Поскольку замена $k \mapsto n-k+1$ меняет только порядок элементов набора A, то знак «$-$» можно опустить в силу того, что значения функции $\lambda(k)$ на первой половине набора отличается только знаком от значений этой же функции на второй половине набора.

Окончательно, собственные числа матрицы A_n находятся как

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \quad k = \overline{1, n}.$$

Теорема 3.

Пусть Ω — счётное множество, и $\{f_i\}_{i=1}^n$ — система функций, определенных на Ω. Тогда система функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ *линейно независима* на Ω тогда и только тогда, когда найдётся набор $\{\omega_i\} \subseteq \Omega$ из n точек, на котором эта система линейно независима, то есть ранг матрицы $A = (f_j(\omega_i))_{i,j=1}^n$ равен n.

Доказательство:

10 Все задачи

Текстовые задачи

Задача 1.

Найти, на какую цифру заканчивается десятичная запись числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$.

Решение: Хорошо известно, что несократимая дробь вида $\frac{a}{b}$ представляется в десятичном виде в виде непериодической дроби тогда и только тогда, когда все делители числа b являются какой-либо степенью делителей числа 10. Так как 5^{2020} является степенью делителя числа 10, тогда наше число $x = \frac{7^{2019}}{5^{2020}}$ представляется в виде конечной десятичной дроби.

Тогда можно домножить наше число x таким образом на степень 10, чтобы оно стало натуральным, причем последняя цифра была не нулём. Именно она является последней цифрой десятичной записи нашего числа x.

Домножим x на 10^{2020}, получим:

$$A = x \cdot 10^{2020} = \frac{7^{2019} \cdot 10^{2020}}{5^{2020}} = 2 \cdot 14^{2019}$$

Тогда нам остается узнать, на какую цифру оканчивается число A. Поступим следующим образом:

$$A \equiv 2 \cdot 14^{2019} \overset{(*)}{\equiv} 2 \cdot 4^{2019} \equiv 2 \cdot 2^{4038} \equiv 2^{4039} \pmod{10} \tag{1}$$

Сравнение $(*)$ справедливо, так как $14 \equiv 4 \pmod{10}$.

Для того, чтобы найти остаток деления 2^{4039}, составим таблицу остатков степеней двойки при делении на 10.

k	2^k	$2^k \mod 10$	i
0	1	1	-
1	2	2	0
2	4	4	1
3	8	8	2
4	16	6	3
5	32	2	0
6	64	4	1
7	128	8	2
8	256	6	3
	...	...	...

Очевидно, что остатки степеней двойки подчиняются простому периодичному закону.

Найдем остаток i деления числа 4039 на 4, за вычетом 1, которому служит первая строка с $k = 0$:

$$4039 - 1 \equiv 4038 \equiv 4036 + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

Таким образом, числу 4039 соответствует остаток $i = 2$, тогда, подставим результат в (1):

$$A \equiv 2^{4039} \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

Стало быть, число A заканчивается на цифру 8, но это значит, что десятичная запись нашего исходного числа $\frac{7^{2019}}{5^{2020}}$ заканчивается на ту же цифру.

Ответ: 8.

Текстовые задачи

Задача 2.

На ребрах и вершинах куба стоят натуральные числа от 2001 до 2020 (все числа различные). Может ли быть, что числа, стоящие на каждом ребре, являются средними арифметическими чисел в соответствующих вершинах?

Решение: Предположим, что утверждение верно. Пусть X — множество чисел, данных в задании. Нетрудно показать, что $|X| = 20$. Хорошо известно, что у куба 12 ребер и 8 вершин, а сумма их количества в точности равна $12+8 = 20$, что равно $|X|$. Значит, каждому числу из X соответствует единственное ребро или единственная вершина куба. Следовательно, числа 2001 и 2020 обязательно будут использоваться для обозначения двух вершин, потому что оба числа не могут быть средним арифметическим двух других различных чисел из X.

Далее, так как на ребрах и вершинах стоят числа из $X \subset \mathbb{N}$, то любые две смежные вершины должны иметь числа одной четности для того, чтобы их среднее арифметическое было натуральным. Тогда возможно только два случая: все вершины несут только четные числа или только нечетные числа. Однако, выше мы показали, что числа 2001 и 2020 обязательно будут на двух вершинах, а они разной четности, и мы получили противоречие. Следовательно, изначальное утверждение неверно.

Ответ: Нет, не может.

Ряды, произведения

Задача 3.

Доказать неравенство $\dfrac{1}{2020} < \ln\dfrac{2020}{2019} < \dfrac{1}{2019}$.

Подсказка: Использовать разложение функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора

Решение: Выведем выражение ряда Маклорена *(частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$)* для функции $y = \ln(1+x)$. Для этого необходимо найти общую формулу производной n-го порядка в точке $x_0 = 0$. Найдем несколько первых производных этой функции:

$$\begin{aligned} y &= \ln(1+x) \\ y' &= (1+x)^{-1} \\ y'' &= (-1)\cdot(1+x)^{-2} \\ y''' &= (-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3} \\ y^{(4)} &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(1+x)^{-4} \\ &\dots \\ y^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \end{aligned}$$

Последняя строчка представляет собой предположение формулы для $n \in \mathbb{N}$. Докажем эту формулу методом мат. индукции:

База индукции: $y^{(1)} = (-1)^{1-1}(1-1)!\,(1+x)^{-1} = (1+x)^{-1} = y'$
Шаг индукции: $y^{(n+1)} = (-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1}$
По формуле вычисления производной высших порядков:
$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(-n)(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1}$

Стало быть, шаг индукции доказан. Следовательно, формула справедлива для $\forall n \in \mathbb{N}$ по методу мат. индукции.
Вычислим $y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ а также $y^{(0)}(0) = y(0) = \ln 1 = 0$.
Тогда ряд Маклорена для нашей функции примет вид: $y = \ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
Так оценим число $\ln\dfrac{2020}{2019}$ сверху:

$$\ln\frac{2020}{2019} = \frac{1}{2019} - \frac{1}{2\cdot 2019^2} + \dots$$

Ряд знакочередующийся, и каждый последующий член меньше по модулю предыдущего согласно теореме Лейбница, следовательно справедливо равенство:

$$\ln\frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019} \tag{1}$$

Оценим выражение снизу, для этого оценим аргумент логарифма снизу. Перепишем его в виде:

$$\frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019} > 1 + \frac{1}{1!\cdot 2020} + \frac{1}{2!\cdot 2020^2} + \frac{1}{3!\cdot 2020^3} + \dots = e^{\frac{1}{2020}}$$

Правая часть этого неравенства представляет собой ряд Маклорена функции e^x в точке $x = \frac{1}{2020}$. Прологарифмируем его и получим оценку снизу:

$$e^{\frac{1}{2020}} < \frac{2020}{2019} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2020} < \ln\frac{2020}{2019} \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем окончательную оценку: $\frac{1}{2020} < \ln\frac{2020}{2019} < \frac{1}{2019}$, что и требовалось доказать.

Ряды, произведения

Задача 4.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Решение: Обозначим сумму как S и преобразуем ее следующим образом:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = \begin{bmatrix} n+1 = p \Rightarrow n = p-1 \\ n = 1 \Rightarrow p = 2 \\ n \to \infty \Rightarrow p \to \infty \end{bmatrix} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p}{3^{p-1}} \overset{(*)}{=} 3 \cdot \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{3^p} - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}}_{\text{K}} -1$$

Последнее равенство справедливо, так как не важно, как называется переменная суммирования, поэтому можно просто переобозначить ее снова как n. Равенство $(*)$ верное, так как можно вынести множитель из суммы и добавить дополнительный член суммы. Обозначим сумму в последнем равенстве как K. Выразим ее через S:

$$S = 3K - 1 \Rightarrow K = \frac{S+1}{3}$$

Еще немного преобразуем сумму S:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}}_{\text{K}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \tag{1}$$

Подставим в (1) выражение для K и выразим S:

$$S = \frac{S+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \tag{2}$$

Остается найти последнюю сумму. Хорошо известно, что это разложение функции $\dfrac{x}{1-x}$ в ряд. Воспользуемся этим фактом, чтобы вычислить эту сумму:

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Подставим получившееся значение в (2), и мы получим окончательный ответ:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Ответ: 1.25

Текстовые задачи Дифференциальные уравнения

Задача 5.

За 10 минут чай охладился от 100°C до 60°C. За какое время он остынет до 25°C, если температура воздуха в комнате 20°C, а скорость остывания пропорциональная разности температур чая и среды?

Решение: Пусть $T(t)$ — функция температуры чая от времени в минутах и $T_0 = 20$ — температура окружающей среды *(воздуха)*. Тогда условие скорости остывания можно записать в виде:

$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_0)$ — Д.У. $1^{\underline{\text{го}}}$ порядка с разделяющимися переменными, где k — какая-то постоянная.

Решим его, разделив переменные:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_0} = k\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T - T_0} = \int k\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \ln|T - T_0| = kt + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = T_0 + Ce^{kt}$$

Решим задачу Коши. Подставим начальные условия $T_0 = 20,\ T(0) = 100,\ T(10) = 60$ в получившиеся уравнение.

Получим:

$$\begin{cases} 100 = 20 + Ce^{k\cdot 0} \\ 60 = 20 + Ce^{k\cdot 10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80 = C \\ 40 = Ce^{k\cdot 10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 80 \\ e^k = 2^{-0.1} \end{cases}$$

Тогда наше уравнение зависимости температуры от времени примет вид:

$$T(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-0.1t}$$

Вычислим искомое значение времени, за которое чай остынет до температуры 20°C:

$$25 = 20 + 80 \cdot 2^{-0.1t}$$

$$\frac{1}{16} = 2^{-0.1t} \ \Rightarrow\ 2^{-4} = 2^{-0.1t} \ \Rightarrow\ t = 40 \text{ мин.}$$

Ответ: 40 мин.

Дифференциальные уравнения

Задача 6.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y = xy' + x^2y'',\ x > 0$

Решение:

Способ 1. Перепишем наше дифференциальное уравнение в виде: $x^2y'' + xy' - y = 0$. Видно, что мы имеем дело с ЛОДУ $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка.

Его решение представляется в виде: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1, C_2 – произвольные константы, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – две линейно-независимые функции, которые являются частными решениями ЛОДУ.

Найдем их с помощью метода подбора. Заметим, что функции $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ являются частными решениями этого Д.У. Действительно:

$$(y = x) \qquad x^2 \cdot x'' + x \cdot x' - x = 0 + x - x = 0$$

$$\left(y = \frac{1}{x}\right) \qquad x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'' + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Также заметим, что две эти функции линейно-независимы. И вправду $\dfrac{x}{\frac{1}{x}} = x^2 \neq \text{const}$.

Стало быть, эти две функции образуют фундаментальную систему решений нашего ЛОДУ. Тогда общее решение этого Д.У. запишется в виде:

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

Способ 2. Это дифференциальное уравнение Эйлера, сделаем замену $x = e^t$, соответственно получим $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}$ и $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_t \cdot t'_x\right)'_x = y''_{tt}\left(t'_x\right)^2 + y'_t \cdot t''_{xx} = e^{-2t} \cdot \left(y''_{tt} - y'_t\right)$.

Тогда наше уравнение примет вид:

$$y''(t) - y'(t) + y'(t) - y = 0$$

$$y''(t) - y = 0$$

Это ЛОДУ $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корнями будут $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Запишем общее решение, сделав обратную замену:

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

$$y(x) = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

Ответ: $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$

Дифференциальные уравнения Интегралы

Задача 7.

Решить дифференциальное уравнение

$$\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t\ dt}{16+9\sin^2 t} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x$$

Решение: Чтобы найти решение этого дифференциального уравнения, необходимо вычислить соответствующий интеграл:

$$\int \frac{\cos t\ dt}{16+9\sin^2 t} = \begin{bmatrix} u = \sin t \\ du = \cos t dt \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\int \frac{du}{1+\frac{9}{16}u^2} = \frac{1}{16}\int \frac{\frac{4}{3}d\left(\frac{3u}{4}\right)}{1+\left(\frac{3u}{4}\right)^2} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3\sin t}{4}$$

Тогда наше уравнение примет следующий вид:

$$\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos t\ dt}{16+9\sin^2 t} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3\sin t}{4}\Bigg|_0^{y'} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3\sin y'}{4} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x$$

Теперь воспользуемся тем, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ строго монотонная на $\mathbb{R}$, значит если значения функций равны, то и аргументы функций обязаны быть равны:

$$\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3\sin y'}{4} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x \ \Leftrightarrow\ \frac{3\sin y'}{4} = x \ \Leftrightarrow\ \sin y' = \frac{4x}{3}$$

Это уравнение имеет решение только при $\left|\frac{4x}{3}\right| \le 1$, т.е. при $\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. Разрешим его относительно производной как обычное тригонометрическое уравнение с синусом:

$$\sin y' = \frac{4x}{3} \ \Leftrightarrow\ y' = (-1)^k \arcsin\frac{4x}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \int \left((-1)^k \arcsin\frac{4x}{3} + \pi k\right) dt = C + \pi k x + \frac{3(-1)^k}{4}\int \arcsin\left(\frac{4x}{3}\right) d\left(\frac{4x}{3}\right)$$

Остается только найти интеграл от арксинуса. Сделаем это отдельно:

$$\int \arcsin x\ dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & \Rightarrow & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\arcsin x + \int d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Тогда остается подставить полученный интеграл и получим наш ответ:

$$y = C + \pi k x + \frac{3(-1)^k}{4}\left(\frac{4x}{3}\arcsin\frac{4x}{3} + \sqrt{1-\left(\frac{4x}{3}\right)^2}\right)$$

$$y = C + \pi k x + (-1)^k\left(x\arcsin\frac{4x}{3} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $y = C + \pi k x + (-1)^k\left(x\arcsin\frac{4x}{3} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

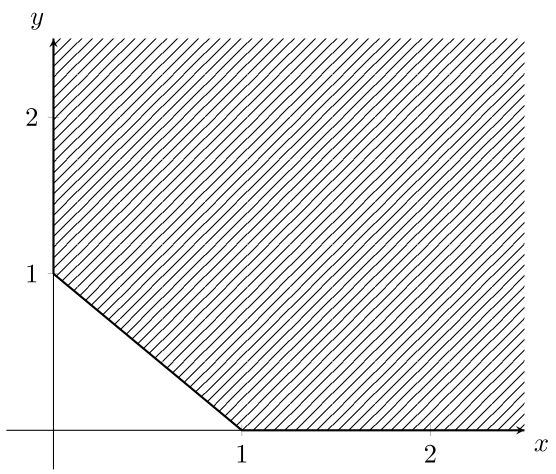
Интегралы

Задача 8.

Вычислить

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^3+y^3}, \quad \text{где } D\colon \begin{cases} x+y \geqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение:



Область D в прямоугольной системе координат

Построим нашу область D. Очевидно, что она неограничена. Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \text{ где } r>0,\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Вычислим якобиан J этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Якобиан J этого отображения не равен нулю в области D, поэтому это отображение определяет биекцию (взаимно-однозначное соответствие) между всеми точками области D и всеми точками его образа $\hat{D}$, поэтому можно сделать замену переменных в нашем интеграле:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^3+y^3} = \iint\limits_{\hat{D}} \frac{|J|\cdot drd\varphi}{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} = \iint\limits_{\hat{D}} \frac{drd\varphi}{r^2(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} \tag{1}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нам необходимо определить границы области $\hat{D}$ по переменным r и φ.

Прямые линии $x=0$ и $y=0$ соответствуют своим значениям $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\varphi=0$.

Так как фигура неограничена и правильная относительно переменной r, то можно сказать, что верхней границей интегрирования по r будет $+\infty$. Определимся с нижней границей. Она соответствует прямой $x+y=1$. Найдем ее выражение в полярных координатах. Так как $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, то

$$r\cos\varphi + r\sin\varphi = 1 \ \Leftrightarrow\ r = \frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$$

Это выражение для r как раз и будет нижней границей интегрирования. Подставим найденные выражения в интеграл (1):

$$\iint\limits_{\hat{D}} \frac{drd\varphi}{r^2(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \tag{2}$$

Внутренний интеграл представляет собой несобственный интеграл 1$^{\underline{\text{го}}}$ рода. Вычислим его отдельно:

$$\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}=-\frac{1}{r}\Bigg|_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{+\infty}=-0+(\cos\varphi+\sin\varphi)=\cos\varphi+\sin\varphi$$

При подстановке верхнего предела в выражение первообразной мы получили ноль, потому что по $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(-\frac{1}{r}\right)=0$. Подставим получившееся выражение в интеграл (2):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\overset{(*)}{=}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi}=\begin{bmatrix}\theta=2\varphi & \varphi\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta\to\pi\\ d\varphi=\frac{1}{2}d\theta & \varphi\to 0\Rightarrow\theta\to 0\end{bmatrix}=\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta}\tag{3}$$

Равенство $(*)$ справедливо в силу того, что мы знаменатель разложили на множители по формуле суммы кубов.

Для того, чтобы решить крайний правый интеграл (3), мы используем универсальную тригонометрическую замену, где за t обозначим $\tan\frac{\theta}{2}$, при этом известно, что в таких обозначениях верны равенства $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$ и $d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}$. Так же определим границы интегрирования: $\theta\to\pi\ \Rightarrow\ t\to+\infty$, $\theta\to 0\ \Rightarrow\ t\to 0$.

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2-\frac{2t}{1+t^2}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1-t+t^2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

Интегралы

Задача 9.

Вычислить определенный интеграл: $\int\limits_0^1 \arcsin x \arccos x \; dx$

Решение: Заметим, что $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и заменим переменные: $\arcsin x = t \;\Rightarrow\; x = \sin t$. Выразим дифференциал: $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;\Rightarrow\; dx = \cos t \; dt$. Вычислим новые границы интегрирования: $x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \quad x = 1 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_0^1 \arcsin x \arccos x \; dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos t \; dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi t}{2} - t^2\right)\cos t \; dt$$

Правый интеграл возьмем по частям и окончательно получим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi t}{2} - t^2\right)\cos t \; dt = \begin{bmatrix} & u & dv \\ + & \frac{\pi t}{2} - t^2 & \cos t \\ - & \frac{\pi}{2} - 2t & \sin t \\ + & -2 & -\cos t \\ - & 0 & -\sin t \end{bmatrix} = \left(\frac{\pi t}{2} - t^2\right)\cdot \sin t - \left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\cdot(-\cos t) + (-2)\cdot(-\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(0\cdot 1 - \frac{\pi}{2}\cdot 0 + 2\cdot 1\right) - \left(0\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\cdot 1 + 2\cdot 0\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $2 - \frac{\pi}{2}$

Дифференциальные уравнения

Задача 10.

Решить задачу Коши: $(y')^2 + (y' - y)e^x = y^2, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

Решение: Перенесем y^2 в левую часть уравнения. Раскроем скобки и перегруппируем:

$$(y')2 + exy' - y(ex + y) = 0$$

Заметим, что полученное уравнение является квадратным отностительно y'. Разложим выражение слева на множители:

$$(y' + e^x + y)(y' - y) = 0$$

Таким образом, уравнение распадается на совокупность двух ДУ:

$$\left[\begin{aligned} &y' + e^x + y = 0 \\ &y' - y = 0 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &y' + y = -e^x \qquad (1) \\ &y' - y = 0 \qquad (2) \end{aligned}\right.$$

ДУ (1) представляет собой ЛНДУ $1^{\underline{\text{го}}}$ порядка с правой частью вида $P_n(x)e^{kx}$. Решим его:

$\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1$ – решение характеристического уравнения

$y = C_1e^{-x} + Ae^x$, где Ae^x – частное решение, соответствующее правой части ЛНДУ

$$(Ae^x)' + Ae^x = -e^x \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{2}$$

$y = C_1e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^x$ – общее решение ДУ (1)

Решение ДУ (2) не представляется сложным, поэтому запишем сразу его общее решение: $y = C_2e^x$

Подставим $y(0) = -\frac{1}{2}$. Имеем:

$$\left[\begin{aligned} &y = C_1e^{-x} - \frac{1}{2}e^x \\ &y = C_2e^x \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2} = C_1 - \frac{1}{2} \\ &-\frac{1}{2} = C_2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &C_1 = 0 \\ &C_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}e^x$$

Тогда решением нашей задачи будет единственная функция $y = -\frac{1}{2}e^x$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}e^x$

Дифференциальные уравнения

Задача 11.

Решить дифференциальное уравнение: $y' + y'' + y''' + ... = x, \quad y(0) = 0$

Решение: Имеем наше уравнение. Продифференцируем его:

$$y' + y'' + y''' + ... = x$$
$$y'' + y''' + y^{(4)} + ... = 1$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$y' + (y'' - y'') + (y''' - y''') + ... = x - 1$$
$$y' = x - 1$$

Решим последнее уравнение:

$$y' = x - 1 \;\Leftrightarrow\; y = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C$$

Подставим начальное условие $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{0^2}{2} - 0 + C \;\Leftrightarrow\; C = 0$$

Итого, решением исходного уравнения будет функция $y = \frac{x^2}{2} - x$.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - x$

Ряды, произведения

Задача 12.

Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(2n)!}$

Решение: Обозначим изначальный ряд как (1).

Оценим общий член ряда, учитывая что $k! \leqslant n! \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$:

$$\frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(2n)!} \leqslant \frac{n!+n!+n!+\ldots+n!}{(2n)!} = \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$$

Тогда исходный ряд меньше ряда (2): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot n!}{(2n)!}$.

Исходный ряд будет сходится по признаку сравнения, если мы докажем, что ряд (2) сходится. Применим ко второму ряду признак д'Аламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\cdot(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n \cdot n!} = \lim \frac{(n+1)^2}{n(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n^2}{4n^3} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ ряд (2) сходится.}$$

Так как ряд (2) сходится и (1) $\leqslant$ (2), то по признаку сравнения ряд (1) сходится.

Ответ: сходится.

Ряды, произведения

Задача 13.

Вычислить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdot\ldots$

Решение: Перепишем наше бесконечное произведение в свернутом виде:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}(3^n)^{\frac{1}{3^n}}$$

Упростим наше произведение, пользуясь правилами степеней:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(3^n)^{\frac{1}{3^n}}=\prod_{n=1}^{\infty}3^{\frac{n}{3^n}}=3^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=3^S,\quad \text{где } S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$$

Необходимо вычислить S. Введем новую функцию:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \tag{1}$$

Нужно определиться при каких x ряд (1) сходится. Применим признак д'Аламбера для сходимости ряда:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim\frac{n+1}{n}\cdot|x|=|x|<1\ \Leftrightarrow\ -1<x<1$$

Таким образом, ряд сходится, если $-1<x<1$.

Число $\frac{1}{3}$ лежит в области сходимости этого ряда. Тогда, $S=f\left(\frac{1}{3}\right)$. Найдем замкнутое выражение для функции $f(x)$. Для этого рассмотрим производную другого ряда:

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

Отсюда видно, чему равняется ряд (1):

$$f(x)=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x\cdot\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

Тогда мы можем вычислить S:

$$S=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Окончательно можем сказать, что

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{9}\cdot\sqrt[27]{27}\cdot\sqrt[81]{81}\cdot\ldots=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$$

Ответ: $\sqrt[4]{27}$

Ряды, произведения

Задача 14.

Решить уравнение: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1} = \dfrac{1}{4084441}$

Решение: Рассмотрим ряд (1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. Найдем его область сходимости. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nx^n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = |x| \cdot 1 < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1$$

Преобразуем ряд (1), и заметим, что он сводится к производной обычного геометрического ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Заметим, что исходный ряд получается из ряда (1) заменой $x \mapsto -x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1} = (-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = (-x) \cdot \frac{-x}{(1+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

Этот ряд сходится в той же области, что и ряд (1).
Остается решить уравнение

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{4084441}$$

Заметим, что $4084441 = 2021^2$, и возьмем квадратный корень из обоих частей уравнения. Тогда наше уравнение легко преобразуется:

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2021^2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2021^2}}$$

$$\left|\frac{x}{1+x}\right| = \frac{1}{2021} \;\Leftrightarrow\; \frac{-1+1+x}{1+x} = \pm\frac{1}{2021}$$

$$1 - \frac{1}{1+x} = \pm\frac{1}{2021} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1+x} = \frac{2021 \pm 1}{2021}$$

$$\left[\begin{aligned} 1+x &= \frac{2021}{2021+1} \\ 1+x &= \frac{2021}{2021-1} \end{aligned}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{aligned} x &= \frac{2021-2022}{2022} \\ x &= \frac{2021-2020}{2020} \end{aligned}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{aligned} x &= \frac{-1}{2022} \\ x &= \frac{1}{2020} \end{aligned}\right.$$

Нетрудно проверить, что оба корня лежат в области сходимости ряда: $-1 < x < 1$.

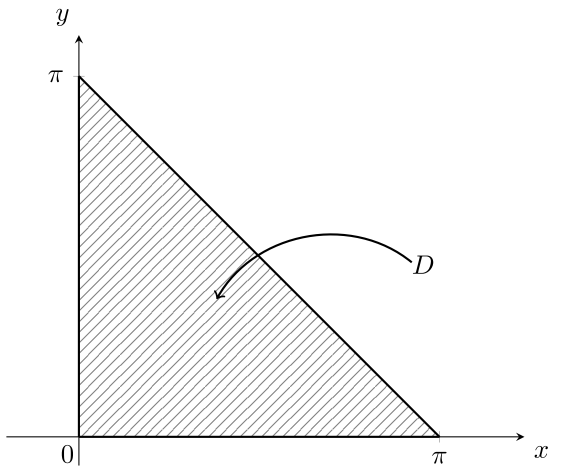
Ответ: $\frac{-1}{2022}$; $\frac{1}{2020}$

Интегралы

Задача 15.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \big|\cos(x+y)\big|\,dS$, где $D\colon\ 0 \leqslant x+y \leqslant \pi\ \wedge\ xy \geqslant 0$

Решение:



Область D в прямоугольной системе координат.

Наша область D, лежащая в I четверти координатной плоскости, представляет собой прямоугольный треугольник.

Введём замену координат

$$\begin{cases} x+y=u \\ y=vx \end{cases}$$

Выражая x, y из этой системы, получим

$$\begin{cases} x=\frac{u}{1+v} \\ y=\frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

В таких координатах область D будет выражаться следующим образом:

$$D^{uv}=\Big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\colon 0\leqslant u\leqslant\pi\wedge v\geqslant 0\Big\}$$

Для того, чтобы перейти к новым координатам в наших интегралах, необходимо вычислить Якобиан J преобразования координат:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}=\frac{1}{(1+v)^3}\begin{vmatrix} 1 & v \\ -u & u \end{vmatrix}=\frac{-u(v+1)}{(1+v)^3}=\frac{-u}{(1+v)^2}$$

Теперь можно[1] перейти к координатам (u,v) в интеграле:

$$\iint\limits_D \big|\cos(x+y)\big|\,dS=\iint\limits_{D^{uv}}\big|\cos(u)\big|\cdot|J|dudv=\iint\limits_{D^{uv}}\left|\frac{-u\cos u}{(1+v)^2}\right|dudv=[u\geqslant 0]=\iint\limits_{D^{uv}}\frac{u|\cos u|}{(1+v)^2}dudv$$

Раскроем этот интеграл как повторный и решим его, не забывая про модуль при косинусе

$$\iint\limits_{D^{uv}}\frac{u|\cos u|}{(1+v)^2}dudv=\int\limits_0^{\pi}du\int\limits_0^{+\infty}\frac{u|\cos u|}{(1+v)^2}dv=\int\limits_0^{\pi}u|\cos u|\,du\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{dv}{(1+v)^2}=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}u\cos udu-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}u\cos udu\right)\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(1+v)}{(1+v)^2}=\begin{bmatrix} & D & I \\ + & u & \cos u \\ - & 1 & \sin u \\ + & 0 & -\cos u\end{bmatrix}=$$

$$=\left((u\sin u-\cos u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-(u\sin u-\cos u)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+v}\Bigg|_{+\infty}^{0}\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1-0\right)-(0-1)-\big(\pi\cdot 0-(-1)\big)+\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1-0\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{1+0}-0\right)=\pi$$

Ответ: π

[1] Рассуждая более строго, достаточным условием перехода к новым координатам является $\forall(u,v)\in D^{uv}\ \Rightarrow\ J(u,v)\neq 0$. В нашем же случае, при $u=0$, оно не соблюдается. Для разрешения этой ситуации предлагается взять число $\varepsilon>0$ и рассмотреть интеграл по области $D^{uv}_{\varepsilon}=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\colon\varepsilon\leqslant u\leqslant\pi\wedge v\geqslant 0\big\}$. Затем вычислить предел интеграла при $\varepsilon\to 0$.

Задачи с параметрами   Задачи линейной алгебры

Задача 16.

Найти максимальное значение действительного параметра a, зависящее от натурального числа n, что для линейного оператора $\mathcal{F}\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^n$, заданного матрицей $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ в тривиальном базисе этого пространства и для любого вектора $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R})$, будет верно неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \geqslant \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x})$$

где $\mathcal{L}^n(\mathbb{R})$ – n-мерное линейное пространство, и $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \left\{\delta_{i+1,\,j}\right\}$, и $\delta_{i,\,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Решение: Очевидно, что все матрицы в этом задании размера $n \times n$, где n — размерность линейного пространства.

Преобразуем немного неравенство:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{F}(a \cdot \mathbf{x}) \geqslant 0$$
$$\mathbf{x}^T \cdot E \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot a\mathcal{A}_F \cdot \mathbf{x} \geqslant 0$$
$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left(E - a\mathcal{A}_F\right) \mathbf{x} \geqslant 0$$

Последнее неравенство четко показывает, что мы имеем дело с квадратичной формой, причем ее матрицей не будет матрица $E - a\mathcal{A}_F$, а будет матрица $\mathcal{A}_Q$, определяемая как:

$$\mathcal{A}_Q = \frac{(E - a\mathcal{A}_F) + (E - a\mathcal{A}_F)^T}{2} = E - \frac{a}{2} \cdot (\mathcal{A}_F + \mathcal{A}_F^T) = \left[B = \mathcal{A}_F + \mathcal{A}_F^T\right] =$$
$$= E - \frac{a}{2} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 & -\frac{a}{2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

где $E = \left\{\delta_{i,\,j}\right\}$ — единичная матрица, и $B = \left\{\delta_{|i-j|,\,1}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Так как нам требуется, чтобы квадратичная форма была неотрицательной: $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$, нам необходимо, чтобы матрица этой квадратичной формы $\mathcal{A}_Q$ была **положительно полуопределенной**. Воспользуемся тем, что матрица положительно полуопределена тогда и только тогда, когда все ее собственные значения неотрицательны. Обозначим собственные числа матрицы $\mathcal{A}_Q$ как μ_k, а собственные числа матрицы B как λ_k, где $k = \overline{1, n}$.

Так как матрицы E, B **коммутируют**, то по *Теореме 1* получим, что

$$\mu_k = 1 - \frac{a}{2}\lambda_k \tag{1}$$

По *Теореме 2* собственные значения матрицы B находятся как

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \quad k = \overline{1, n} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и потребуем неотрицательности **всех** собственных значений:

$$\mu_k = 1 - a\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \geqslant 0, \quad \forall k = \overline{1, n} \tag{3}$$

Это неравенство должно выполнятся для всех k.

Заметим, что при $\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$ косинус меньше или равен 0, а значит

$$\mu_k \geqslant 1 - a \cdot 0 = 1 \geqslant 0$$

Неравенство заведомо верное, т.е. все собственные числа μ_k под номерами $\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$ неотрицательны.

Рассмотрим $1 \leqslant k < \frac{n+1}{2}$. При таких условиях $\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) > 0$. Выразим a из неравенства (3):

$$a \geqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}$$

И наконец заметим, что при наложенном нами условии на величину k функция $f(k) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)}$ возрастает, а значит максимальное значение a, при котором верно это неравенство, соответствует минимальному числу k, то есть $k = 1$:

$$\max a = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

<u>**Ответ:**</u> $a = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{(n+1)}}$

Задачи на вероятность Ряды, произведения

Задача 17.

Две независимые непрерывные случайные величины X, Y равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти вероятности того, что нечётными являются величины

1. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rfloor$;
2. $\left\lfloor \frac{X}{Y} \right\rceil$.

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: 1) $\frac{\ln 2}{2}$; 2) $\frac{\pi - 1}{4}$

Комплексные числа, ТФКП

Задача 18.

Докажите, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ три попарно различных комплексных числа $a, b, c \in \mathbb{C}$ такие, что $|a| = |b| = |c| = 1$, удовлетворяющие уравнению $a^3 + b^3 + c^3 = \lambda \cdot abc$, образуют равнобедренный треугольник в комплексной плоскости. Найдите все значения параметра λ, при котором верна гипотеза выше, а также найдите угол θ при вершине равнобедренного треугольника.

Решение: РЕШЕНИЕ

Задачи линейной алгебры Ряды, произведения

Задача 19.

Найти произведение

$$\prod_{a\in A}\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & 1\\ 1 & \frac{1}{a^2}\end{bmatrix}$$

в двух случаях:

1. $A=\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;
2. $A=\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: 1) $\frac{3}{2\pi^2}\begin{bmatrix}7 & 3\\ 3 & 7\end{bmatrix}$; 2) $\frac{\sinh\pi}{2\pi}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

Интегралы

Задача 20.

Найти наибольшую площадь круга, вписанного в ограниченную область D, такую что $\forall(x, y) \in D \Rightarrow x^3 + y^3 \leqslant x^2y^2 + xy$.

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: $\frac{\pi}{32}$

Интегралы Ряды, произведения

Задача 21.

Доказать сходимость интеграла, и если он сходится, найти его значение

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right) dx$$

Решение: РЕШЕНИЕ

Ответ: сходится, равен $1 - \gamma$