

Cálculo para la computación

Curso 2022-2023

E.T.S. de Ingeniería Informática



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA



Cálculo para la computación. Curso 2022-2023. E.T.S. de Ingeniería Informática.

©2022, Sixto Sánchez Merino y Agustín Valverde Ramos, en colaboración con profesores del departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, en especial, con los profesores Concepción Carretero Campos, Carlos Guerrero García, Yadira Hernández Solano y Sergio Ortega Acosta.




Este trabajo está editado con licencia “Creative Commons” del tipo:

Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España.

Usted es libre de:

-  Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
-  Hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

-  **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
-  **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
-  **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Preliminares

Contenidos.

- LECCIÓN 1.1: FUNCIONES REALES. Funciones elementales. Límites y continuidad. Derivabilidad. Integración. Funciones hiperbólicas.
- LECCIÓN 1.2: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES. Resolución de ecuaciones y sistemas. Sistemas de ecuaciones no lineales.
- LECCIÓN 1.3: BINOMIO DE NEWTON. Números combinatorios y propiedades. Triángulo de Tartaglia. Binomio de Newton. Compleción de cuadrados.
- LECCIÓN 1.4: LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Definición de número complejo. Representación gráfica. Funciones destacadas sobre los números complejos. Exponencial compleja. Fórmula de De Moivre y aplicaciones.

Prerrequisitos. Gran parte del contenido de este tema debe ser conocido por el alumno, por lo que uno de los objetivos es recordar algunos conocimientos: saber manejar con soltura expresiones algebraicas (resolución de ecuaciones, simplificación, ...) en las que aparezcan funciones elementales de tipo polinómico, potenciales, logarítmicas y trigonométricas. También será necesario saber derivar funciones de una variable y calcular primitivas inmediatas.

Objetivos. Los objetivos fundamentales del tema son recordar y reforzar la manipulación de expresiones algebraicas, en especial los polinomios; recordar y reforzar las técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones; saber operar con números complejos; y saber utilizar los números complejos como herramienta en la resolución de problemas con números reales.

Resultados de aprendizaje.

- Operaciones básicas con números complejos en forma binómica y exponencial.
- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, con o sin funciones específicas de complejos. Resolución de ecuaciones y factorización de polinomios que requieran el cálculo de raíces complejas.

- Conversión de funciones tipo $\cos nz$ o $\sen nz$. Conversión de funciones tipo $\cos^n z$ o $\sen^n z$.

Los contenidos de este primer tema giran alrededor de dos nociones básicas: los *polinomios* y los *números complejos*. Sin embargo, el tema está concebido para que gran parte del trabajo necesario para su estudio sea repasar y reforzar conceptos y técnicas que el alumno debe conocer al iniciar unos estudios universitarios. El contenido y los objetivos de este tema son, por lo tanto, fundamentalmente transversales; aparte del trabajo de repaso, los métodos y conceptos nuevos que se aprenden se utilizarán de forma instrumental a lo largo del resto del curso.

Los números complejos no representan un tema especialmente difícil de forma aislada, pero requiere que el alumno recuerde propiedades y técnicas de manipulación de potencias, logaritmos y funciones trigonométricas. Además, hay tener en cuenta que con este primer tema el alumno empieza a enfrentarse a un texto científico estructurado siguiendo unos convenios a los que debe adaptarse y cuyo aprendizaje también es importante para su formación posterior. Destacamos aquí algunos aspectos importantes:

- Las definiciones, teoremas, ejemplos,... se numeran para poder localizarlos fácilmente cuando se haga referencia a ellos en otras partes del libro. De la misma forma, también se numeran algunas fórmulas y expresiones destacadas.
- Los enunciados etiquetados con “Observación” se usarán para recoger aclaraciones sobre lenguaje matemático, símbolos y notaciones. El alumno debe aprender a utilizar con corrección el lenguaje matemático, lo que también repercutirá en su evaluación.

LECCIÓN 1.1

Funciones reales

Los conceptos y resultados que recogemos en esta lección deben ser conocidos por el alumno y, por lo tanto, su objetivo es que sirva para repasar y como referencia para el resto del curso.

Una *función real de variable real* es una relación que, a cada número de un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, que se llama *dominio*, le asocia un único número real. Si llamamos f a la función, escribimos

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

y usamos $f(x)$ para representar al único número real asociado por f al número x . Habitualmente, las funciones se determinan mediante fórmulas que describen esta relación. Así por ejemplo, presentaremos una función diciendo:

$$\text{“sea } f: (1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}\text{”}.$$

En este caso, el intervalo $(1, 2]$ es el dominio de f , lo que podemos indicar igualmente escribiendo $\text{Dom}(f) = (1, 2]$.

Aunque normalmente necesitaremos especificar el dominio de la función en el que vamos a trabajar, también es habitual que nos centremos solamente en la fórmula que define la función; en estos casos, consideramos que el dominio es el mayor conjunto sobre el que está definida dicha fórmula. Por ejemplo, si presentamos una función diciendo “sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ” entendemos que $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$.

El *recorrido* o *imagen* de una función es el conjunto de los posibles valores que toma la función, es decir: $\text{Im}(f) = \{f(x); x \in \text{Dom}(f)\}$.

OBSERVACIÓN 1.1.1 Antes de continuar, es conveniente hacer algunas observaciones sobre determinados aspectos de la notación utilizada hasta ahora.

1. En las expresiones matemáticas, se utilizan letras para representar variables y constantes, ya sea para denotar números o funciones. Para distinguir entre constantes y variables, es habitual utilizar letras cursivas para variables e incógnitas (x, y, \dots) y letras en redonda para representar constantes (por ejemplo, el número e o la unidad imaginaria i). El mismo criterio se sigue para las funciones: $f(x)$ representa una función arbitraria, mientras que $\cos(x)$ es la función coseno y $\exp(x)$ es la función exponencial. Este tipo de convenios tiene su contrapartida en los lenguajes de programación, que pueden utilizar determinadas restricciones para expresar objetos constantes y objetos variables.
2. Tal y como hemos visto antes, la notación $f(x)$ indica que f es el nombre dado a la función y (x) indica la letra usada en la expresión como variable *independiente*. De esta forma, siempre que queramos sustituir esta variable por un

número o expresión, lo escribiremos delimitado por los paréntesis. Por lo tanto, deberemos escribir, por ejemplo, $\cos(\theta)$, $\exp(2x)$, $\log(x+1)$,... Sin embargo, es habitual en el lenguaje matemático prescindir de los paréntesis siempre y cuando esto no provoque confusión o ambigüedad. Así, podremos escribir $\cos \theta$ o $\exp 2x$ y entenderemos que $\log x + 1$ es igual a $1 + \log(x)$. Tendremos que prestar mucha atención a este tipo de simplificaciones y añadir los paréntesis cuando no estemos seguros de que su ausencia provoque ambigüedades.

1.1.1. Funciones elementales

En este curso, vamos a trabajar principalmente con funciones definidas en *términos de funciones elementales*, es decir, funciones determinadas por la composición y por operaciones algebraicas (suma, resta, producto y división) entre funciones elementales. Recordamos a continuación la lista de funciones que conocemos como *funciones elementales*:

- *Funciones polinómicas.*
- *Funciones potenciales:* $p_\alpha(x) = x^\alpha$, siendo α cualquier número real. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la correspondiente función potencial es un polinomio. El dominio de estas funciones depende de α .
- *Función exponencial:* $\exp(x) = e^x$. Solo consideremos como elemental a la de base e, ya que el resto se pueden definir a partir de ella (ver el ejemplo siguiente).
- *Función logaritmo neperiano:* $\log(x) = \ln(x) = L(x)$. Estas son las tres notaciones habituales para el logaritmo con base e, aunque en este documento utilizaremos principalmente \log . El resto de los logaritmos no se consideran como elementales, ya que se pueden definir a partir del neperiano (ver el ejemplo siguiente). El dominio de la función logaritmo es $(0, +\infty)$.
- *Función seno:* $\sin(x)$
- *Función coseno:* $\cos(x)$
- *Función tangente:* $\tan(x)$
- *Función arcoseno:* $\arcsin(x)$, que es la función *inversa* del seno. Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y consideramos que su recorrido es $[-\pi/2, \pi/2]$
- *Función arcocoseno:* $\arccos(x)$, que es la función *inversa* del coseno. Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y consideramos que su recorrido es $[0, \pi]$
- *Función arcotangente:* $\arctan(x)$, que es la función *inversa* de la tangente. Su dominio es el intervalo \mathbb{R} y consideramos que su recorrido es $[-\pi/2, \pi/2]$

EJEMPLO 1.1.2 Aunque solo llamaremos elementales a las funciones que acabamos de definir, hay otras funciones importantes con nombre propio:

1. Las funciones exponenciales con base distinta de e se pueden definir fácilmente a partir de la función exponencial:

$$a^x = \exp(\log(a^x)) = \exp(x \log a)$$

2. De la misma forma, los logaritmos con base distinta de e , se pueden definir a partir del logaritmo neperiano:

$$\begin{aligned} y &= \log_a(x) \\ a^y &= x \\ \log(a^y) &= \log(x) \\ y \log(a) &= \log(x) \\ y &= \frac{\log x}{\log a} \\ \log_a(x) &= \frac{\log x}{\log a} \end{aligned}$$

3. Es conveniente conocer el resto de las funciones trigonométricas, su definición a partir del seno y el coseno y las propiedades fundamentales de todas ellas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

4. Podremos manejar expresiones potenciales en donde la variable aparece tanto en la base como en el exponente, como por ejemplo: $f(x) = (1+x)^{2x}$. Estas expresiones se definen a partir de las funciones exponencial y logaritmo como sigue:

$$g(x)^{h(x)} = \exp(\log g(x)^{h(x)}) = \exp(h(x) \log g(x)),$$

siempre que $g(x)$ sea estrictamente positivo para todo x . □

1.1.2. Funciones hiperbólicas

Otras funciones importantes con nombre propio son las *funciones hiperbólicas* que se definen a continuación:

Las funciones *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* se definen como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Estas funciones tienen algunas características que nos recuerdan a las funciones circulares (trigonométricas):

1. Valor de las funciones hiperbólicas en 0:

$$\cosh(0) = 1 \quad \text{y} \quad \sinh(0) = 0$$

2. Derivada de las funciones hiperbólicas:

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

3. Ecuación fundamental de la trigonometría hiperbólica:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

De manera similar a lo que ocurre con las funciones trigonométricas, se pueden definir el resto de funciones hiperbólicas, de la siguiente manera:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

1.1.3. Polinomios

Los polinomios son posiblemente las funciones elementales más importante. Están determinados por las operaciones más básicas (suma, resta y producto) y, por sus propiedades, son fáciles de estudiar. Incluso, como iremos viendo a lo largo del curso, son una herramienta importante para trabajar con las otras funciones elementales.

La *forma expandida* o *normalizada* de un polinomio es la siguiente:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Cualquier expresión algebraica dada con sumas y productos entre números y una variable, debe ser considerada polinomio, ya que las propiedades de estas operaciones permiten transformarla hasta llegar a la forma expandida. El número n debe ser *natural* y se denomina *grado* del polinomio; los *coeficientes* a_k pueden ser reales o complejos y x es la variable. Para cada k , el *monomio* $a_k x^k$ se denomina *término* k -ésimo o término de grado k y el número a_k se denomina *coeficiente* k -ésimo.

La propiedad que enunciamos en el siguiente teorema justifica la técnica denominada *identificación de coeficientes*.

TEOREMA 1.1.3 *La función polinómica*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es nula (es decir, $P(x) = 0$ para todo x) si y solo si $a_k = 0$ para todo k .

EJEMPLO 1.1.4 ¿Cuál es el valor de a si la siguiente igualdad es válida para todo x ?

$$x^2 + ax + 4 = (x - 2)^2$$

Obsérvese que, al decir que la igualdad debe ser válida para todo x , estamos estableciendo algo más fuerte que una ecuación, estamos estableciendo una identidad

entre funciones.

$$\begin{aligned}
 x^2 + ax + 4 &= (x - 2)^2 \\
 x^2 + ax + 4 - (x - 2)^2 &= 0 \\
 x^2 + ax + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\
 (a + 4)x &= 0
 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior a la última identidad entre funciones, podemos deducir que $a = -4$. El proceso seguido para el desarrollo de este ejemplo se denomina *identificación de coeficientes*, ya que podemos abreviarlo diciendo que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden los coeficientes de los términos del mismo grado. \square

El teorema anterior nos puede llevar a la conclusión de que la mejor forma de trabajar con un polinomio es a través de su forma expandida. Sin embargo, existen otras formas normales para una expresión polinómica que pueden ser más adecuadas según el ejercicio concreto que queramos abordar. Por ejemplo, como veremos en la siguiente lección, la *forma factorizada* es conveniente para la resolución de ecuaciones polinómicas.

División de polinomios. Método de Ruffini. Una operación que tendremos que hacer frecuentemente es la división de polinomios, por ejemplo, para factorizar polinomios o para transformar una función racional en suma de funciones racionales simples. Siempre podemos utilizar el método de la “caja”, similar al que utilizamos para la división de números naturales, como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^6} \qquad \qquad \qquad -2 \mid x^4 + x^2 \\
 \hline
 \cancel{x^6} \quad -x^4 \qquad \qquad \qquad x^2 - 1 \\
 \hline
 \qquad \cancel{x^4} \qquad \qquad \qquad -2 \\
 \qquad \hline
 \qquad \cancel{x^4} \quad +x^2 \\
 \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad +x^2 \quad -2
 \end{array}$$

En este ejemplo, el *dividendo* es $D(x) = x^6 - 2$, el *divisor* es $d(x) = x^4 + x^2$, el *cociente* resultante es $c(x) = x^2 - 1$ y el *resto* resultante es $r(x) = x^2 - 2$, cuyo grado es estrictamente menor que el grado del divisor. Una vez completada la división se obtiene la siguiente igualdad:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Si el cociente es de la forma $c(x) = x - a$, la división se puede realizar de una forma más simple con el *Método de Ruffini*. El proceso es exactamente el mismo que con la división por la caja, pero se simplifica la representación prescindiendo de la variable. Por ejemplo, la división entre $D(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ y $d(x) = x + 1$ se escribe de la siguiente forma usando el Método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -4 & 1 \\
 -1 & & -2 & -1 & 5 \\
 \hline
 & 2 & 1 & -5 & 6
 \end{array}$$

Los números 2, 1 y -5 son los coeficientes del cociente y 6 es el resto de la división; es decir:

$$D(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x + 1)(2x^2 + x - 5) + 6$$

A partir de esta igualdad, es fácil observar otra importante utilidad del método de Ruffini. Si evaluamos el polinomio $D(x)$ en -1 obtenemos:

$$D(-1) = \cancel{(-1 + 1)(2(-1)^2 + (-1) - 5)} + 6 = 6$$

Es decir, el resto de la división entre $x - a$ coincide con el valor del polinomio en a . De hecho, esta es la forma más eficiente de evaluar un polinomio, ya que requiere menos operaciones. Concretamente, tantos productos y sumas como el grado del polinomio, mientras que si evaluamos desde la forma expandida, necesitaremos hacer muchos más productos, concretamente tantos como el cuadrado del grado. Cuando se utiliza el método de Ruffini para evaluar polinomios también se le conoce como *Método de Horner*.

1.1.4. Límites y continuidad

Recordemos la definición de límite de una función real de variable real.

DEFINICIÓN 1.1.5 Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que el límite de f cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}$ es $\ell \in \mathbb{R}$ si: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En tal caso, escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

También podemos calcular límites cuando x tiene a $+\infty$ o a $-\infty$ así como concluir que el valor de un límite sea $+\infty$ o $-\infty$. No incluimos la definición detallada de todas las situaciones posibles, ya que entendemos que deben ser conocidas por el alumno.

En cualquier caso, estas definiciones no establecen métodos para decidir si un límite existe o no y en tal caso, determinarlo. La propiedad de *continuidad* de las funciones elementales y las propiedades algebraicas del operador límite son las herramientas básicas para el estudio y cálculo de límites.

DEFINICIÓN 1.1.6 Decimos que la función f es continua en $a \in \text{Dom}(f)$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Todas las funciones elementales son continuas en su dominio, así como todas las que se pueden definir en términos de funciones elementales.

TEOREMA 1.1.7 *Si una función está definida, en un entorno de un punto a , por una única expresión determinada por la composición y operaciones algebraicas (suma, producto y cociente) entre funciones elementales, entonces la función es continua en a .*

Este resultado permite concluir que el interés práctico del estudio de cálculo de límites está exclusivamente en aquellos puntos que quedan fuera del dominio y en $\pm\infty$. En estos casos, las propiedades algebraicas que enunciamos a continuación y el teorema de L'Hôpital que recordaremos más adelante serán suficientes para calcular estos límites.

PROPOSICIÓN 1.1.8

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) + (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ si ambos límites son reales.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ si ambos límites son reales.
3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
4. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$

En los tres primeros apartados de esta proposición, solo consideramos límites reales. Para los límites infinitos se verifican también estas propiedades con algunas excepciones; vemos a continuación las operaciones válidas entre estos límites:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ y $a \pm \infty = \pm\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ si $a \neq 0$. En ambos casos, aplicamos la regla de los signos para determinar el signo correcto.
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$. En donde, 0^+ indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es positiva y 0^- indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es negativa.

Las situaciones que no están consideradas en las igualdades anteriores son:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad (+\infty) - (+\infty)$$

La indeterminación $(+\infty) - (+\infty)$ se denota más brevemente por $(\infty - \infty)$ y puede aparecer tanto en una suma, $(+\infty) + (-\infty)$ como en una resta $(+\infty) - (+\infty)$.

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*; necesitaremos, por lo tanto, realizar transformaciones algebraicas que conviertan la expresión de la función en otra que sí permita calcular el límite, o bien aplicar otras técnicas, como la sustitución de *infinitésimos equivalentes* o la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 1.1.9

1. No podemos calcular el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1)$ como suma de los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 1) = -\infty,$$

ya que nos encontramos con una indeterminación $(\infty - \infty)$. Sin embargo, si sacamos el factor común x^3 , convertimos la expresión en un producto, cuyo límite sí se puede calcular con las propiedades algebraicas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = (+\infty \cdot 1) = +\infty$$

2. La idea utilizada en el apartado anterior permite calcular los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de cualquier función racional.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2}{x^3 + 3x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = (-\infty \cdot 1) = -\infty \quad \square \end{aligned}$$

Debemos recordar que en muchas ocasiones necesitaremos calcular *límites laterales* para estudiar algunos límites.

EJEMPLO 1.1.10 Evaluando el siguiente límite como cociente de funciones, nos encontramos una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Esto significa que los dos polinomios son divisibles por $x - 1$; por lo tanto, podemos factorizar numerador y denominador y simplificar el factor $x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1} = \left(\frac{2}{0}\right)$$

Para poder terminar la evaluación del límite, debemos determinar el signo de la función alrededor del punto 1 y, para ello, debemos evaluar límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} &= \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} &= \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite inicial no existe. □

Tal y como hemos visto antes, para trabajar con expresiones de la forma $f(x)^{g(x)}$ debemos expresarlas como funciones exponenciales a través de la igualdad

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \log f(x)),$$

y teniendo en cuenta que $f(x)$ debe ser estrictamente positivo para todo x . De esta forma, las indeterminaciones que podemos obtener al calcular límites sobre este tipo de funciones, se derivan de las indeterminaciones que obtengamos en el producto que queda dentro de la función exponencial. Concretamente, las posibles indeterminaciones son

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 0^\infty$$

1.1.5. Derivabilidad

Recordamos ahora la noción de derivabilidad de funciones reales, sus propiedades más importantes y sus aplicaciones.

DEFINICIÓN 1.1.11 *Decimos que f es derivable en $a \in \text{Dom}(f)$ si el siguiente límite existe y es un número real*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En tal caso, este límite se denota por $f'(a)$, que se denomina derivada de f en a .

Otra forma equivalente de expresar el límite que define la derivada en un punto es la siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una notación alternativa de la derivada es la conocida como notación Leibniz:

$$\frac{df}{dx}(x).$$

Mientras que la notación “comilla” solo se puede utilizar sobre el nombre dado a la función ($f'(x)$, $\cos'(x)$, $\exp'(x)\dots$), la notación de Leibniz se puede usar también sobre expresiones; por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^3 - \sin x).$$

Siendo en este segundo caso en donde es especialmente útil. Cuando queremos expresar la derivada en un punto concreto, podemos utilizar las siguientes notaciones:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=a}$$

Para las derivadas n -ésimas también disponemos de los dos tipos de notación:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

En la mayoría de los casos, es suficiente con las propiedades algebraicas de la derivación y las derivadas de las funciones elementales para calcular la derivada de cualquier función.

EJEMPLO 1.1.12 Mostramos en este ejemplo las derivadas de las funciones elementales:

- $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Obsérvese que si $0 < \alpha < 1$, la función potencial es continua en $x = 0$ pero no es derivable.
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$
- $\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$ □

PROPOSICIÓN 1.1.13 (PROPIEDADES ALGEBRAICAS)

1. *Linealidad:* $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, para todo par de números reales α, β .
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
4. *Regla de la cadena:* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Aunque es consecuencia de la regla del cociente, también es útil recordar la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

EJEMPLO 1.1.14 Vamos a calcular las derivadas de algunas funciones introducidas anteriormente.

- $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \exp(x \log a) = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a$.
- $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{\log a} \right) = \frac{1}{x \log a}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

- $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1+x)^{2x} &= \frac{d}{dx} \exp(2x \log(1+x)) = \\ &= \exp(2x \log(1+x)) \cdot \left(2 \log(1+x) + \frac{2x}{1+x}\right) = \\ &= (1+x)^{2x} \left(2 \log(1+x) + \frac{2x}{1+x}\right) \end{aligned}$$
- Las derivadas de la función $\operatorname{arctg} x$ (y del resto de las funciones inversas) se determinan usando las propiedades algebraicas y el procedimiento llamado *derivación implícita*.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{tg}(f(x)) &= x \end{aligned}$$

Dado que estas funciones son iguales, sus derivadas también son iguales. En el lado izquierdo, derivamos usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{tg}(f(x)) &= \frac{d}{dx}(x) \\ (1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) f'(x) &= 1 \\ (1 + x^2) f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned} \quad \square$$

TEOREMA 1.1.15 (DE L'HÔPITAL)

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

EJEMPLO 1.1.16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad \square$$

Otra importante aplicación de la derivada es que nos permite estudiar la monotonía y la concavidad de las funciones usando los siguientes resultados.

TEOREMA 1.1.17 Si I es un intervalo y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I . Análogamente, si I es un intervalo y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I .

TEOREMA 1.1.18 Si I es un intervalo y $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I (con forma de \smile). Análogamente, si I es un intervalo y $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I (con forma de \frown).

1.1.6. Primitivas

El cálculo de primitivas es la parte del cálculo integral que consiste en buscar una función cuya derivada coincida con una expresión dada. Por esta razón, se dice que el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 3x^2$, el objetivo es encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$; en este caso, podemos considerar la función $F(x) = x^3$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Sin embargo, a diferencia del cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas no es un proceso automático. Es más, en muchos casos no es posible calcular una primitiva de una expresión en términos de funciones elementales, por ejemplo, para las funciones $f(x) = e^{-x^2}$ o $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ se sabe que existen primitivas pero no es posible expresarlas en términos de funciones elementales.

DEFINICIÓN 1.1.19 Una función F es una primitiva de f en el intervalo I si verifica que $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

Obsérvese que cualquier otra función construida a partir de la función $F(x)$ sumándole una constante también sería una primitiva, pues la derivada de cualquier función constante es 0. Así, $F_C(x) = x^3 + C$ es también una primitiva de $f(x) = 3x^2$ ya que $F'_C(x) = 3x^2 = f(x)$.

PROPOSICIÓN 1.1.20 Si F es una primitiva de f en un intervalo I entonces la función G es primitiva de f si y sólo si G es de la forma:

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para todo } x \text{ en } I$$

donde C es una constante.

De esta forma, llamamos *integral indefinida* a la familia de todas las primitivas de una función y escribimos

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

siendo F una primitiva de f . En esta expresión, $f(x)$ se llama *integrando*, dx se lee *diferencial de x* e indica la variable de integración y C se denomina *constante de integración*. La relación que existe entre los conceptos de derivada y primitiva permite deducir fácilmente las propiedades de linealidad del operador, tal y como establecemos en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.1.21 La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración	
$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$	$\int (f(x))^\alpha f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int \frac{1}{x} dx = \log x $ $\int e^x dx = e^x$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) $ $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)}$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\frac{d}{dx}(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \cos x dx = \sin x$ $\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x$	$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x))$ $\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x))$ $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctg f(x)$

Figura 1.1: Derivadas e integrales inmediatas.

EJEMPLO 1.1.22 La integral indefinida de la función $15x^2 - 3 \sin x$ es

$$\begin{aligned}
 \int (15x^2 - 3 \sin x) dx &= \int (5(3x^2) + 3(-\sin x)) dx = \\
 &= 5 \int 3x^2 dx + 3 \int -\sin x dx = \\
 &= 5x^3 + 3 \cos x + C
 \end{aligned}$$

□

En este curso, dedicaremos un tema a la integración y en él aprenderemos varias técnicas para calcular primitivas en términos de funciones elementales. Todas ellas requieren identificar, en algún momento, lo que se denominan *integrales inmediatas*, es decir, aquellas primitivas que pueden determinarse aplicando de forma inversa una regla de derivación. La tabla [1.1](#) recoge las integrales inmediatas básicas.

1.1.7. Trigonometría

En esta sección vamos a identificar algunas cuestiones que debemos repasar relativas a los ángulos y a las funciones circulares o trigonométricas.

- **Ángulos:** Definición y medidas del ángulo sobre la circunferencia: grados y radianes (relación: $360^\circ = 2\pi$ radianes). Equivalencia de ángulos: ángulos mayores a 360° y ángulos negativos.

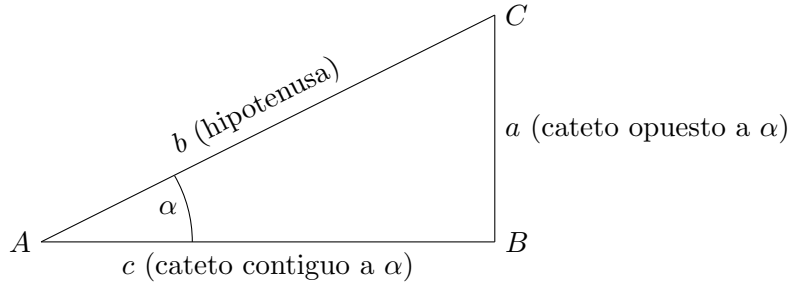
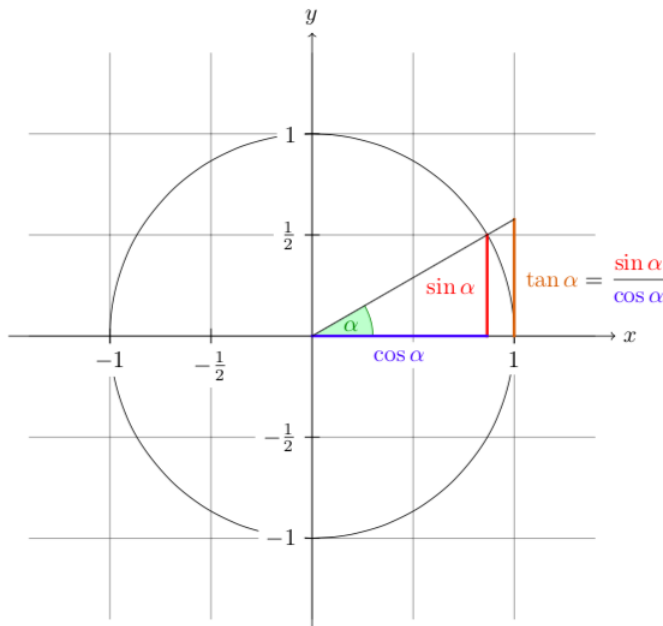


Figura 1.2: Ángulos y lados del triángulo

- **Razones trigonométricas:** A partir del triángulo (ver figura 1.2) se definen las razones trigonométricas del ángulo α como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}, & \cos \alpha &= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c}, & \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a} \\ \sec \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}, & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$



The angle α is 30° in the example ($\pi/6$ in radians). The sine of α , which is the height of the red line, is

$$\sin \alpha = 1/2.$$

By the Theorem of Pythagoras we have $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Thus the length of the blue line, which is the cosine of α , must be

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - 1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

This shows that $\tan \alpha$, which is the height of the orange line, is

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1/\sqrt{3}.$$

Figura 1.3: Representación de razones trigonométricas

En la figura 1.3¹, se muestra la representación de algunas razones trigonométricas en la circunferencia de radio unidad, de donde se deduce (aplicando el teorema de pitágoras) la Fórmula Fundamental de la Trigonometría:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

¹Imagen extraída de “The TikZ and PGF Packages”. Manual for ver 2.10, by Till Tantau, 2010

■ **Funciones trigonométricas principales (seno y coseno)**

- Dominio: \mathbb{R}
- Valores de las funciones para los ángulos: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

α DEG	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α RAD	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\text{cos}(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\text{tg}(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

- Características (representación gráfica):
 - Acotación: $-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1$, $-1 \leq \text{cos}(\alpha) \leq 1$
 - Simetría: $\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(-\alpha)$ [impar] , $\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(-\alpha)$ [par]
 - Periodicidad: $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha + 2\pi)$, $\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\alpha + 2\pi)$
- Propiedades:
 - Fórmula Fundamental de la Trigonometría:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$

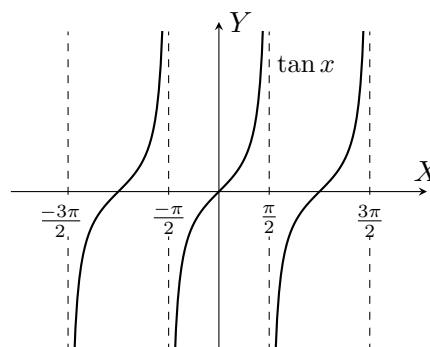
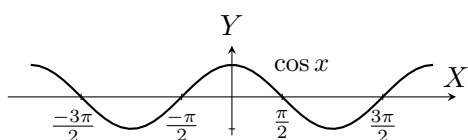
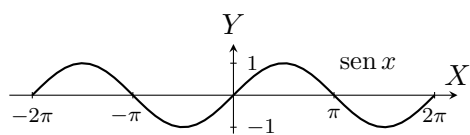
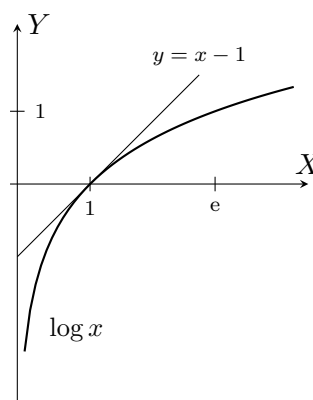
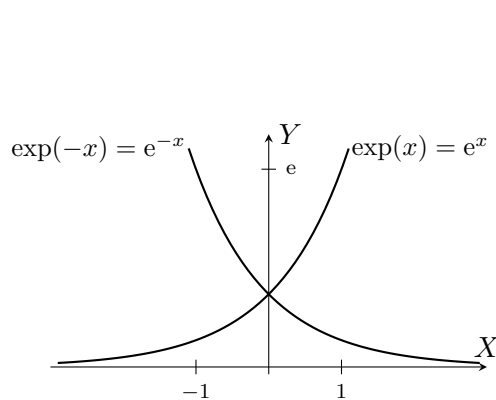
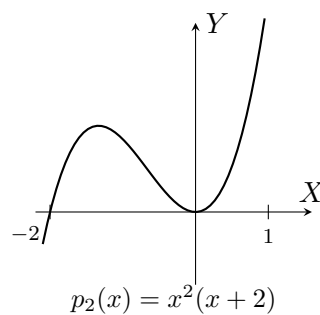
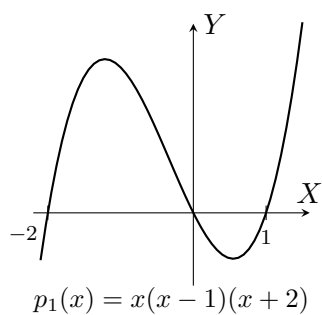
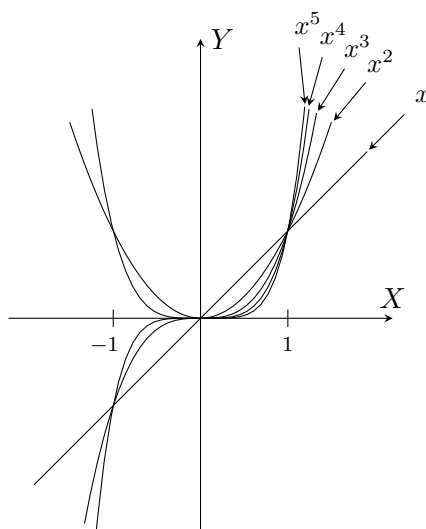
- Relación del seno ($\text{sen } x$) y coseno ($\text{cos } x$) de los ángulos opuesto ($-x$), complementario ($90^\circ - x$) y suplementario ($180^\circ - x$)
- A partir de estas dos fórmulas
 - ◊ $\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \text{cos } y + \text{cos } x \text{sen } y$
 - ◊ $\text{cos}(x + y) = \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y$
 podemos deducir otras fórmulas: $\text{sen}(2x)$, $\text{cos}(2x)$, $\text{sen}(x - y)$, etc.

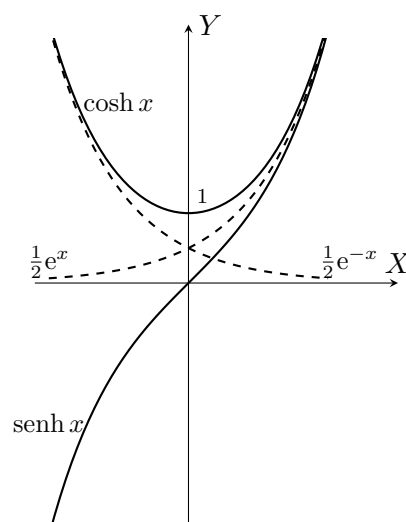
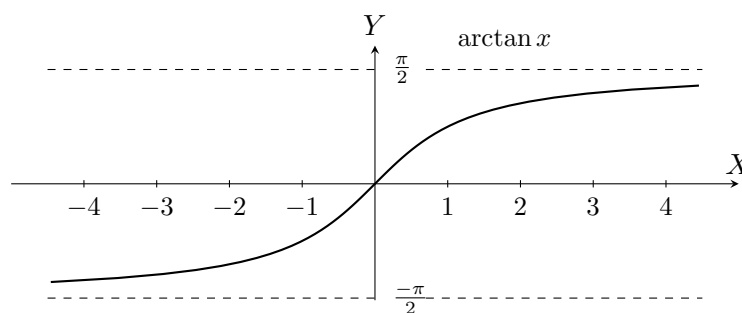
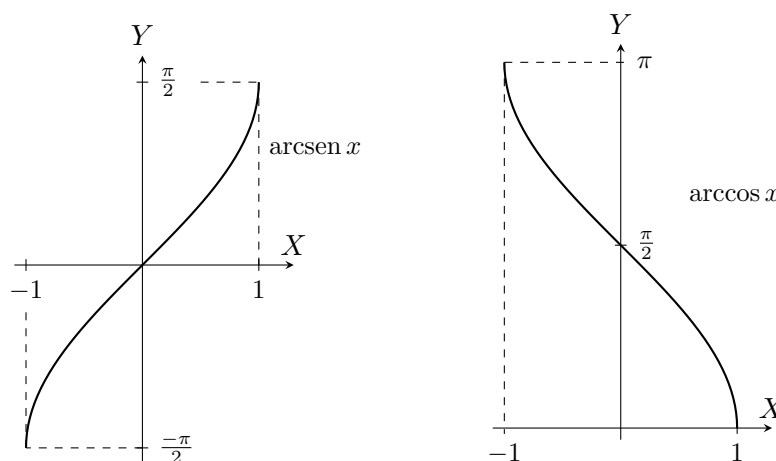
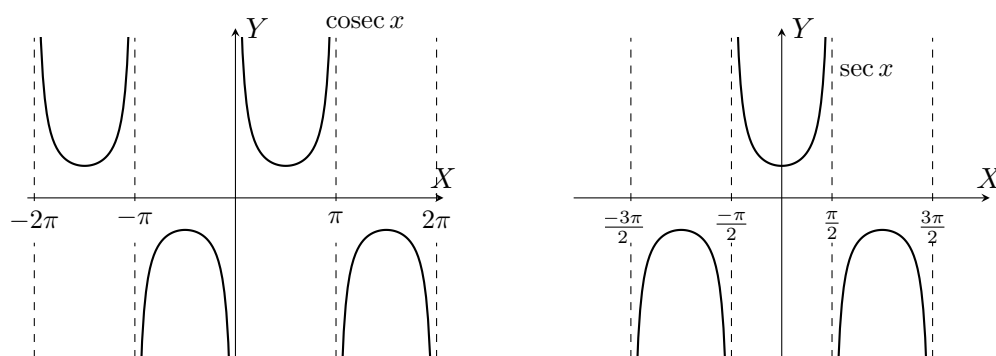
■ **Funciones trigonométricas derivadas**

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} , \quad \text{cotg } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x} , \quad \text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x} , \quad \text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

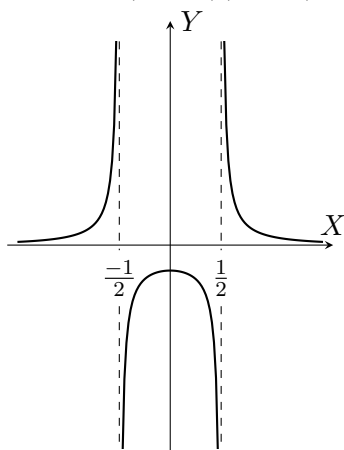
1.1.8. Funciones elementales: gráficas

Cerramos esta lección recogiendo las gráficas de las funciones elementales para que el alumno tenga un lugar de referencia cuando necesite recordarlas o resolver alguna duda. En el caso de las funciones polinómicas y de las racionales, solo hemos incluido algunos ejemplos. También añadimos las gráficas de otras funciones que, aunque no son elementales, sí será habitual su uso y por lo tanto también conviene visualizar rápidamente, como las funciones hiperbólicas.

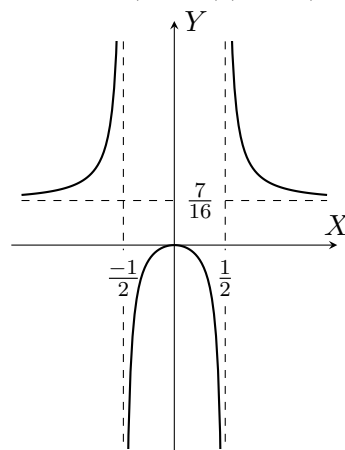




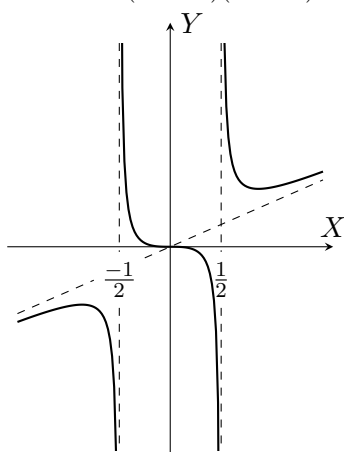
$$f(x) = \frac{1}{4(2x-1)(2x+1)}$$



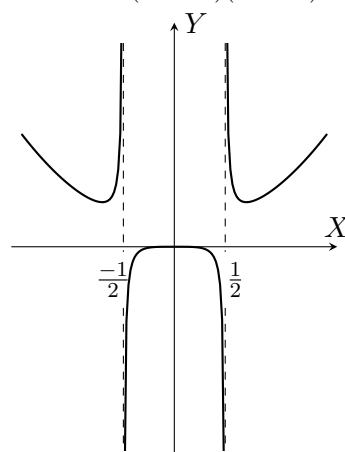
$$f(x) = \frac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$f(x) = \frac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$$



$$f(x) = \frac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$$



LECCIÓN 1.2

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones es una herramienta básica en el desarrollo de múltiples ejercicios tanto de matemáticas como de otras materias científicas. Las técnicas de resolución se basan en las propiedades básicas de las operaciones algebraicas. Aunque el alumno debe conocer las técnicas básicas para el estudio de ecuaciones, en los ejemplos que componen esta sección establecemos algunas pautas, indicaciones y advertencias.

EJEMPLO 1.2.1 Vamos a resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Antes de empezar, recordemos que, cuando trabajamos con números reales, \sqrt{x} representa la raíz positiva; de esta forma, si queremos expresar la raíz negativa, escribiremos $-\sqrt{x}$.

El primer paso en la resolución es elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar las raíces, pero además tendremos que descartar las soluciones que lleven a radicandos negativos, es decir, la ecuación es equivalente a:

$$x = x^2 + x - 1, \quad x \geq 0,$$

De la misma forma, la raíz cuadrada “cancela” un cuadrado, pero el resultado debe ser positivo, por lo que el resultado debe escribirse con valor absoluto:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Siguiendo con la ecuación del ejemplo:

$$x = x^2 + x - 1, \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 1, \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Obsérvese que, en el último paso, hemos descartado la raíz negativa de 1. En general, se recomienda comprobar siempre las soluciones de una ecuación, pero será imprescindible hacerlo en las ecuaciones irracionales, como en este ejemplo, para evitar radicandos negativos. \square

EJEMPLO 1.2.2 Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + x = 0.$$

Un error bastante frecuente es efectuar directamente la siguiente simplificación:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Hacemos esto porque dividimos ambos lados entre x , pero para hacer esto, debemos suponer que $x \neq 0$. Es preferible razonar de la siguiente forma: sacando factor común x en la ecuación, obtenemos

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0,$$

Dado que el producto de dos números es cero si y solo si uno de los dos lo es, esta ecuación se convierte en dos ecuaciones que debemos estudiar por separado:

$$x = 0 \quad , \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

La primera es trivial y la segunda lleva a la solución $x = 1$.

La factorización de expresiones es, en general, una técnica bastante útil para la resolución de ecuaciones, como iremos comprobando en el curso. \square

EJEMPLO 1.2.3 De los sistemas de ecuaciones, solo los denominados *sistemas lineales* son resolubles de manera mecánica; es decir, siempre es posible decidir si tienen o no soluciones y, en tal caso, determinarlas. Entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica asociada a estos sistemas, así que solo vamos a resolver un ejemplo para insistir en que el método más simple y eficiente para resolverlos es el denominado *método de Gauss* o *reducción*.

En el desarrollo siguiente, utilizamos etiquetas para indicar para las operaciones realizadas: $(e2) - (e1) \rightarrow (e2)$ indica que restamos la primera a la segunda ecuación y que el resultado pasa a ser la nueva segunda ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + 3z = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(e2)-(e1) \rightarrow (e2)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ -x + y + 3z = -2 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(e3)+(e1) \rightarrow (e3)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2y + 2z = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(e3)-2*(e2) \rightarrow (e3)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2y + 6z = 2 \\ -4z = -3 \end{array} \right\}$$

El objetivo ha sido obtener un sistema “triangular”, que se resuelve fácilmente de abajo hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} (e3) \Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{4}} \\ (e2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 6\frac{3}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{4}} \left. \begin{array}{l} \\ (e1) \end{array} \right\} \Rightarrow x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

\square

1.2.1. Sistemas de ecuaciones no lineales

Para los sistemas no lineales, no disponemos de algoritmos similares al de Gauss para calcular, si existe, la solución de cualquier sistema. En estos casos, solo podemos utilizar “heurísticas”, es decir, reglas que, sin ser generales, son aplicables a muchos casos y, por lo tanto, es recomendable utilizarlas en primer lugar. No obstante, solo la experiencia y la intuición ayudarán a abordar con éxito este tipo de problemas.

1. *Sustitución*: Buscamos una ecuación que permita despejar fácilmente una variable, directamente o a partir de una factorización que divida el sistema en varios casos. La variable despejada se sustituye en el resto de las ecuaciones, obteniendo uno o varios sistemas con menos variables.
2. *Igualación*: Si una de las variables se puede despejar en todas las ecuaciones en las que aparece, podemos hacerlo y a partir de ahí, generar por igualación un sistema equivalente pero con menos variables.
3. *Reducción*: Este método de simplificación consiste en sumar o restar ecuaciones, posiblemente multiplicadas por constantes o por expresiones; el proceso es similar al utilizado en sistemas lineales. Aunque no consigamos eliminar una variable, intentaremos reducir de esta forma la complejidad de las ecuaciones antes de aplicar las otras técnicas.

En los ejemplos siguientes mostramos cómo aplicar las técnicas anteriores.

EJEMPLO 1.2.4 Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

nos fijamos en la segunda ecuación, que permite despejar fácilmente una variable en función de la otra. Después, la variable despejada se sustituye en la primera ecuación, obteniendo una ecuación de segundo grado.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(e2)} \Rightarrow y = 3x - 1 \\ \text{(e1)} x^2 - y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4, x = -1$$

Debemos tener cuidado al escribir las soluciones de un sistema y asociar correctamente los distintos valores que tome cada variable. En este ejemplo, $x = 4$ conduce a $y = 11$, mientras que $x = -1$ conduce a $y = -4$; por lo tanto, debemos escribir las soluciones dejando claras las asociaciones correctas:

$$\{x_1 = 4, y_1 = 11\}, \quad \{x_2 = -1, y_2 = -4\}. \quad \square$$

En los sistemas de ecuaciones lineales caben tres posibilidades: que no tengan solución, que tengan solamente una solución o que tengan infinitas soluciones. Como podemos ver en el ejemplo anterior, en los sistemas no lineales tenemos más posibilidades y puede haber más de una solución aunque estas no sean infinitas.

EJEMPLO 1.2.5 En el sistema

$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ x - yz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

elegimos en primer lugar la primera ecuación para factorizarla, sacando x como factor común:

$$0 = 2x - xy = x(2 - y).$$

De esta forma, obtenemos dos posibilidades, o bien $x = 0$, o bien $y = 2$, lo que permite simplificar las otras ecuaciones para obtener dos sistemas más sencillos:

$$(1) \begin{cases} x = 0 \\ yz = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y = 2 \\ x - 2z = 0 \\ x^2 + 4 + z^2 = 1 \end{cases}$$

La segunda ecuación de (1), conduce a dos posibilidades, o bien $y = 0$, o bien $z = 0$, que generan dos sistemas triviales:

$$(1.1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 = 1 \end{cases} \quad (1.2) \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas a partir de estos son

$$\{x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = -1\}, \quad \{x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1\}, \\ \{x_3 = 0, y_3 = -1, z_3 = 0\}, \quad \{x_4 = 0, y_4 = 1, z_4 = 0\}.$$

El sistema (2) no tiene soluciones en \mathbb{R} , ya que su tercera ecuación es equivalente a $x^2 + z^2 = -3$.

Obsérvese el procedimiento empleado de dividir el sistema en casos más sencillos, a partir de la factorización de las ecuaciones. \square

EJEMPLO 1.2.6 Vamos a resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = yz \\ y = xz + 1 \end{cases}$$

La variable z aparece en las ecuaciones segunda y tercera, y en ambas podemos despejarla fácilmente:

$$z = \frac{x}{y} \quad z = \frac{y-1}{x} \quad (1.1)$$

Dado que hemos dividido entre x e y , posteriormente tendremos que analizar los casos en que $x = 0$ o $y = 0$. Aplicando *igualación* en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{y-1}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 + y = 0,$$

por lo que nuestro sistema inicial se ha convertido en

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos simplificar fácilmente el término x^2 restando las dos ecuaciones, para llegar a una ecuación en y :

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1, y = -\frac{1}{2}.$$

Utilizando la primera ecuación, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, y que $z = \frac{x}{y}$, completamos la resolución:

$$\begin{aligned} \{x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0\}, \quad \{x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_2 = \frac{-1}{2}, z_2 = -\sqrt{3}\}, \\ \{x_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2}, y_3 = \frac{-1}{2}, z_3 = \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Finalmente, debemos analizar qué ocurre si $x = 0$ o $y = 0$. El caso $x = 0$ conduce fácilmente a la primera solución obtenida anteriormente. Por la segunda ecuación, si $y = 0$, entonces $x = 0$, lo cual es imposible atendiendo a la primera ecuación del sistema inicial. \square

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

LECCIÓN 1.3

El binomio de Newton

La fórmula del binomio de Newton permite expandir cualquier potencia de una suma de expresiones, es decir, vamos a generalizar la igualdad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a cualquier exponente natural. Para expandir una potencia como $(a + b)^7$, bastaría con multiplicar siete veces la expresión $(a + b)$, eliminando los paréntesis adecuadamente con la propiedad distributiva; el binomio de Newton es simplemente una fórmula que nos “ahorra” parte de ese trabajo.

1.3.1. La Fórmula del Binomio de Newton

En la fórmula del Binomio de Newton vamos a utilizar unos cuantos elementos que debemos introducir previamente: *factorial*, *números combinatorios* y *sumatorios*.

DEFINICIÓN 1.3.1 (FACTORIAL) *Definimos el factorial de un número natural n , denotado por $n!$, como sigue:*

$$0! = 1$$

$$n! = (n - 1)! \cdot n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Esta forma de definir una función se denomina *recursiva*: la definición llama al mismo operador que se define, pero aplicado a un número menor, hasta llegar a un *caso base*, en este caso $0!$. Otra forma de escribir la definición del operador es

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

EJEMPLO 1.3.2

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 = 3\,628\,800$$

□

DEFINICIÓN 1.3.3 (NÚMEROS COMBINATORIOS) *Sean n y k dos números naturales tales que $0 \leq k \leq n$. Se define el número combinatorio $\binom{n}{k}$, que se lee “ n sobre k ”, como*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

EJEMPLO 1.3.4

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \\
& \blacksquare \binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 \\
& \blacksquare \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\
& \blacksquare \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\
& \blacksquare \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \square
\end{aligned}$$

La forma habitual de calcular los números combinatorios es la que se ha utilizado en el primer apartado del ejemplo anterior, es decir, se expande parcialmente el factorial del numerador y se simplifica con el denominador. Esto lo podemos hacer de forma general para obtener una expresión alternativa para los números combinatorios.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} = \\
&= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}
\end{aligned}$$

Obsérvese que en el numerador de la expresión obtenida hay exactamente k factores.

La siguiente propiedad es la más importante de los números combinatorios, siendo el fundamento del *triángulo de Tartaglia-Pascal*, que veremos a continuación, y permite calcular los números combinatorios de forma recursiva.

TEOREMA 1.3.5 (DE PASCAL) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

EJEMPLO 1.3.6 En este ejemplo, mostramos cómo se llega a esta igualdad en un caso particular; por esta razón, evitamos la realización de la mayoría de los cálculos intermedios. Este tipo de desarrollos nos ayudan a entender demostraciones generales, en las que manejamos variables y parámetros en lugar de números concretos.

$$\begin{aligned}
\binom{8}{3} + \binom{8}{4} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \\
&= \frac{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{(4+5) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \binom{9}{4} \quad \square
\end{aligned}$$

Triángulo de Tartaglia-Pascal. El teorema de Pascal permite calcular los números combinatorios usando una representación geométrica que se denomina *triángulo de Tartaglia* o *triángulo de Tartaglia-Pascal*. Construimos este triángulo colocando en el vértice superior, el número $\binom{0}{0}$ y debajo de él colocamos los números $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$; formamos así un primer triángulo con solo tres números. A partir de aquí, vamos añadiendo nuevas filas usando la siguiente regla: debajo de cada par de números, colocamos su suma:

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} & \end{array} \quad \text{T. Pascal} \quad \begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

Adicionalmente, cada fila se comienza con $\binom{n}{0} = 1$ y se termina con $\binom{n}{n} = 1$. Vemos a continuación el triángulo resultante hasta la quinta fila, a la izquierda con los números combinatorios indicados y a la derecha con los valores resultantes.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & & & 1 \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & 1 & 1 \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & 1 & 2 & 1 \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Operador sumatorio. El operador \sum o *sumatorio* se utiliza para expresar sumas con un cantidad variable de sumandos:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Los sumandos se expresan en función de una variable k que tomará valores consecutivos entre dos números naturales m y n tales que $m \leq n$. Por ejemplo,

$$\sum_{k=2}^5 (2k-1)^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$$

La variable utilizada como *índice* de cada sumando no influye en el resultado y podremos cambiarla por la letra que deseemos siempre que no interfiera en el resto del problema. Por ejemplo, en los sumatorios siguientes utilizamos índices distintos pero obtenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \\ \sum_{j=1}^{10} j &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \end{aligned}$$

El operador sumatorio es frecuente en los lenguajes de programación, en los que toma una sintaxis similar a

$$\text{sum}(f(k), k, m, n)$$

Binomio de Newton. Ya tenemos todos los elementos necesarios para expresar la fórmula del binomio de Newton.

TEOREMA 1.3.7 (FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON) *Para todo par de números a y b y todo número natural n , se verifica que*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

También podemos escribir la fórmula del binomio usando “puntos suspensivos”:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3.8

- $(x - y)^2 = \binom{2}{0} x^2 (-y)^0 + \binom{2}{1} x (-y) + \binom{2}{2} x^0 (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(s + t)^3 = \binom{3}{0} s^3 t^0 + \binom{3}{1} s^2 t + \binom{3}{2} s t^2 + \binom{3}{3} s^0 t^3 = s^3 + 3s^2 t + 3s t^2 + t^3$
- $(z - 2)^6 = z^6 - 12z^5 + 60z^4 - 160z^3 + 240z^2 - 192z + 64$
- $2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ □

1.3.2. Compleción de cuadrados

A lo largo del curso, vamos a necesitar realizar una transformación sobre polinomios de segundo grado que se denomina *compleción de cuadrados*. Aunque es una transformación bastante simple, permite resolver muchos problemas: resolución de ecuaciones e inecuaciones de segundo grado, estudio y representación de cónicas, simplificación de expresiones, clasificación de extremos, cálculo de primitivas, etc.

El objetivo de la transformación es que, en la expresión resultante, la variable aparezca solo una vez, expresando el polinomio de segundo grado de alguna de estas dos maneras:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x + B)^2 + C \\ ax^2 + bx + c &= (Ax + B)^2 + C \end{aligned}$$

Por ejemplo, si consideramos la identidad

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$$

observamos que, en la expresión de la derecha, la variable x aparece escrita solo una vez, en $(x + 1)^2$. Naturalmente, dado que estamos trabajando con polinomios, en la expresión transformada solo podrán aparecer sumas, restas y productos.

EJEMPLO 1.3.9 El primer método para conseguir esta transformación es utilizar identificación de coeficientes. Por ejemplo, para completar cuadrados en el polinomio $2x^2 - 3x + 1$ podemos buscar parámetros A y B tales que:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x + A)^2 + B$$

A partir de aquí, expandiendo la expresión de la derecha e identificando coeficientes, obtenemos un sistema de ecuaciones que permite determinar la expresión buscada.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x + A)^2 + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x^2 + 2Ax + A^2) + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2x^2 + 4Ax + 2A^2 + B \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4A = -3 &\Rightarrow A = \frac{-3}{4} \\ 2A^2 + B = 1 &\Rightarrow B = 1 - 2\frac{9}{16} = \frac{-1}{8}, \end{aligned}$$

y de ahí: $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$. □

Debemos acostumbrarnos, no obstante, a realizar esta transformación de una forma más rápida. Si nos fijamos en el caso particular $x^2 + bx$ y recordamos la fórmula del cuadrado de un binomio, es fácil concluir que la compleción de cuadrados tendrá la siguiente forma:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \dots$$

Si elevamos al cuadrado “mentalmente”, nos aparece el número $b^2/4$, que no está en el lado izquierdo, y por lo tanto debemos “eliminarlo”, es decir:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Si aprendemos a desarrollar mentalmente la igualdad anterior, el proceso de compleción de cuadrados podrá hacerse sin necesidad de recurrir a ecuaciones.

EJEMPLO 1.3.10 Vamos a transformar el polinomio $2x^2 - 4x - 1$ usando el proceso explicado anteriormente:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 4x - 1 &= 2 \left(\underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2 - 1} - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= 2 \left(\underbrace{((x-1)^2 - 1)}_{(x-1)^2 - 2} - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= 2(x-1)^2 - 2 - 1 = \\
 &= 2(x-1)^2 - 3 \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3.11 En el ejemplo anterior, hemos sacado factor común al coeficiente de x^2 para que los cálculos siguientes sean más simples. En algunos casos será más sencillo proceder directamente sin hacer este paso.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{4x^2 - 3x}_{(2x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16}} + 1 &= \left(\underbrace{\left(\left(2x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right)}_{(2x - \frac{3}{4})^2 - \frac{7}{16}} + 1 \right) = \\
 &= \left(2x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}
 \end{aligned}$$

También podemos obtener otras expresiones en las condiciones indicadas:

$$4x^2 - 3x + 1 = \left(2x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} = \frac{(8x-3)^2}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{16} \left((8x-3)^2 + 7 \right) \quad \square$$

LECCIÓN 1.4

Los números complejos

En principio, los *números complejos* que introducimos en esta lección fueron definidos para cubrir una carencia de los números reales: hay ecuaciones polinómicas que no tienen solución en \mathbb{R} . Por ejemplo, no hay ningún número real x , tal que $x^2 + 1 = 0$. Aunque esta propiedad los determina, también los utilizaremos para resolver o analizar otros problemas geométricos y trigonométricos. En el campo de la ingeniería electrónica, los números complejos se usan en la descripción de señales periódicas y en el estudio de redes eléctricas.

Conjuntos numéricos. Antes de introducir los números complejos, es conveniente recordar algunos conceptos. En concreto, vamos a repasar los conjuntos numéricos y las propiedades que rigen las operaciones dentro de ellos. En la asignatura de *Estructuras algebraicas para la computación* estudiaremos con detalle la estructura y propiedades de los siguientes conjuntos, aquí nos limitamos a recordar su denominación y notación.

- *Números naturales:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- *Números enteros:* $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- *Números racionales:* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \text{ enteros primos entre sí, } q \neq 0 \right\}$.

Finalmente, el conjunto de los *números reales* se denota por \mathbb{R} , pero no es posible hacer una descripción constructiva de ellos tal y como hemos hecho con los otros. Tanto el conjunto de los números racionales como el de los reales con las operaciones de suma y producto, tienen estructura de *cuerpo ordenado*, es decir, en ellos se verifican las propiedades que enunciaremos a continuación.

- *Asociatividad:* Todos los números reales a , b y c verifican

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- *Existencia de elemento neutro y de unidad:* el número 0 es el elemento neutro para la suma y el número 1 es la unidad para el producto, es decir, para todo número real a

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- *Existencia de elementos opuestos e inversos:* el número $-a$ es el opuesto de a respecto de la suma, es decir, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ para todo número real a . El número $a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el inverso de a respecto del producto, es decir, $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, para todo número real $a \neq 0$.

- *Conmutatividad:* Todos los números reales a y b verifican

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

- *Distributividad:* Todos los números reales a , b y c verifican

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Si aplicamos estas igualdades de derecha a izquierda, decimos que *sacamos un factor común*.

- *Ley de tricotomía:* Cada par de números reales a y b verifica una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a$$

Esta propiedad también se enuncia diciendo que el orden entre números reales es *total*.

- *La suma es cerrada para el orden:* Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
- *El producto es cerrado para el orden:* Si $a > b$, $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

La última propiedad no se verifica si $c < 0$, pero es fácil deducir lo que ocurre en ese caso. Si $a > b$, $c < 0$, entonces $0 = c - c < 0 - c = -c$ y $a \cdot (-c) > b \cdot (-c)$; sumando $a \cdot c$ y $b \cdot c$ en ambos lados, obtenemos que $b \cdot c > a \cdot c$

El alumno debe conocer estas propiedades, ya que las habrá usado para resolver ecuaciones e inecuaciones y para simplificar expresiones algebraicas en la resolución de múltiples ejercicios. Es conveniente que, a partir de ahora, se vaya acostumbrando a sus denominaciones y a entender su significado.

Como ya hemos dicho, no es posible describir fácilmente a los números reales para distinguirlos de los números racionales. Ambos conjuntos numéricos comparten las propiedades que acabamos de recordar, pero el conjunto de los números reales posee una propiedad adicional que no tiene el de los racionales y que recogemos en el resultado siguiente.

TEOREMA 1.4.1 *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

En el tema dedicado a las *sucesiones* y *series* de números reales estudiaremos el significado y las consecuencias de esta propiedad.

OBSERVACIÓN 1.4.2

1. La operación producto se expresa indistintamente con los símbolos ‘ \cdot ’ o ‘ \times ’, aunque en este curso, solo usaremos ‘ \cdot ’. Incluso omitiremos este símbolo si ello no conduce a error. Esta omisión es habitual porque, normalmente, utilizamos un único carácter para representar variables; de esta forma si, por ejemplo,

nos encontramos la expresión ab , necesariamente tiene que corresponder al producto de a por b . Sin embargo, en los programas y lenguajes informáticos, es habitual utilizar variables con varios caracteres, por lo que se hace imprescindible hacer explícito el operador producto. También será imprescindible usar explícitamente el operador para expresar el producto de dos números, por ejemplo, $2 \cdot 3 = 6$. Y en general lo escribiremos siempre que sea necesario para evitar confusiones.

2. A lo largo del curso vamos a usar muchas veces la palabra *algebraico*: hablamos de *expresiones algebraicas* para referirnos a expresiones en las que solo intervienen las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente entre números y variables. Por otra parte, hablamos de *propiedades algebraicas* de un concepto, de una función o de un operador, para referirnos a las propiedades en relación con esas mismas operaciones.

1.4.1. Los números complejos (forma binómica)

En el conjunto de los números reales, podemos formular ecuaciones polinómicas sin solución. Por ejemplo, dado que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no existe ningún número real tal que $x^2 = -1$, es decir, tal que $x^2 + 1 = 0$. Los números complejos se introducen para cubrir esta limitación, y la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es la base de su definición.

DEFINICIÓN 1.4.3 *El conjunto de los números complejos, que se denota por \mathbb{C} , es el menor cuerpo que contiene a \mathbb{R} y al número i que verifica $i^2 = -1$.*

Esta definición debe considerarse intuitiva e informal; la introducción formal queda fuera de los objetivos de este curso.

El número $i \notin \mathbb{R}$ se denomina *unidad imaginaria*. La definición anterior establece que los números complejos son expresiones algebraicas que involucran a la unidad imaginaria i y a cualquier número real. Sin embargo, las propiedades de cuerpo y la identidad $i^2 = -1$ permitirán simplificar estas expresiones hasta llegar a una del tipo $a + b \cdot i$, en donde, a y b son números reales:

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} \text{ entonces } z = x + yi \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

y esta forma de escribir los números complejos se denomina *binómica* o *rectangular*.

EJEMPLO 1.4.4 Vemos a continuación dos ejemplos de como simplificar cualquier expresión algebraica con complejos hasta reducirla a su forma binómica.

$$\begin{aligned} (2 + i)(1 - 2i) &= 2 - 4i + i - 2i^2 \quad (\text{distributividad}) \\ &= 2 - 4i + i + 2 \cdot (-1) \quad (\text{definición de } i) \\ &= 4 - 3i \end{aligned}$$

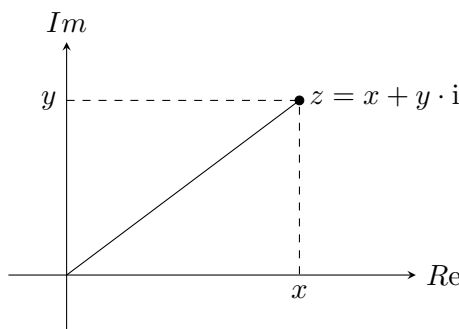


Figura 1.4: Representación gráfica de los números complejos

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, el número x se denomina *parte real* de z , $\text{Re}(z) = x$, mientras que y se denomina *parte imaginaria*, $\text{Im}(z) = y$. La figura 1.4 muestra la representación habitual de los números complejos como puntos en el plano, de forma que la abscisa se corresponde con la parte real y la ordenada se corresponde con la parte imaginaria.

DEFINICIÓN 1.4.5 En los apartados siguientes, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

- *Conjugado de un número complejo:*

$$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \overline{x + iy} = x - iy$$

- *Parte real de un número complejo:*

$$\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Re}(x + iy) = x, \quad \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z)$$

- *Parte imaginaria de un número complejo:*

$$\text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Im}(x + iy) = y, \quad \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

EJEMPLO 1.4.6 Para simplificar divisiones entre números complejos, utilizaremos un simple “truco”: multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

$$\frac{3 + i}{1 - 2i} = \frac{(3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \quad \square$$

En general, la resolución de ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones puede hacerse utilizando los mismos métodos que empleamos para ecuaciones y sistemas en el cuerpo de los reales. Esto se debe a que las transformaciones y simplificaciones necesarias son consecuencia de las propiedades de cuerpo. En particular, podemos utilizar la fórmula que nos ayuda a resolver las ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO 1.4.7 Resolvemos en \mathbb{C} la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ utilizando la fórmula para la resolución de ecuaciones de segundo grado

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4 \cdot i}{2} = 3 \pm 2i$$

Por lo tanto, las dos soluciones de la ecuación son $x_1 = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$. \square

EJEMPLO 1.4.8 En este ejemplo, vamos a resolver en \mathbb{C} un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de *reducción*.

$$\begin{cases} ix - y = 2 \\ 2x + y = i \end{cases}$$

$$\begin{matrix} ix - y = 2 \\ 2x + y = i \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2*(e1) \rightarrow (e1) & 2ix - 2y = 4 \\ i*(e2) \rightarrow (e2) & 2ix + iy = -1 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(e2)-(e1)} (2+i)y = -5$$

Terminamos de despejar y :

$$y = \frac{-5}{2+i} = \frac{-10+5i}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10+5i}{4+1} = -2+i$$

Y utilizando la segunda ecuación inicial, determinamos x :

$$x = \frac{i-y}{2} = \frac{i+2-i}{2} = 1 \quad \square$$

Las técnicas que hemos repasado en la lección dedicada a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones también son aplicables a sistemas de ecuaciones en los que sea posible obtener soluciones complejas.

EJEMPLO 1.4.9 Vamos a resolver en \mathbb{C} el sistema

$$\begin{cases} xy^2 - y + 1 = 0 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases}$$

usando el método de *reducción*. Si multiplicamos la primera ecuación por x y la segunda por y , obtenemos

$$\begin{aligned} x^2y^2 - xy + x &= 0 \\ x^2y^2 - xy + 2y &= 0 \end{aligned}$$

(Esta operación puede añadir soluciones tales que $x = 0$ o $y = 0$, que deberemos comprobar sobre el sistema inicial). Ahora podemos eliminar los términos x^2y^2 y xy restando las dos ecuaciones para llegar a que $2y - x = 0$. Esta ecuación es más simple que cualquiera de las iniciales y, en particular, permite expresar x en función de y : $x = 2y$; llevando esta igualdad a la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos

$$2y^3 - y + 1 = 0$$

Recordando que en un polinomio con coeficientes enteros, los divisores del término independiente son candidatos a raíz del polinomio, buscamos soluciones enteras de esta ecuación con el método de Ruffini, y deducimos que $y = -1$ es una solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -2 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$0 = 2y^3 - y + 1 = (y + 1)(2y^2 - 2y + 1)$$

Para resolver la ecuación $2y^2 - 2y + 1 = 0$ utilizamos la fórmula que ya conocemos para ecuaciones de segundo grado:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\{y_1 = -1, x_1 = -2\}, \quad \{y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, x_2 = 1 + i\}, \quad \{y_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, x_3 = 1 - i\}. \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.10 Vamos a expresar en forma binómica el número $(1 - i)^5$.

$$\begin{aligned} (1-i)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-i)^k \cdot 1^{5-k} = (-i)^0 + 5(-i)^1 + 10(-i)^2 + 10(-i)^3 + 5(-i)^4 + (-i)^5 = \\ &= 1 - 5i + 10i^2 - 10i^3 + 5i^4 - i^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i \quad \square \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.4.11 En la primera lección hemos recordado el método de Ruffini que nos sirve para dividir polinomios entre un divisor de la forma $x - a$ y para evaluar de forma eficiente los polinomios. El método también se puede utilizar cuando trabajamos con polinomios con coeficientes en \mathbb{C} . Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ entre $x - i$, obtenemos

	1	2	2	1
i		i	2i - 1	-2 + i
	1	2 + i	2i + 1	-1 + i

De donde deducimos que $P(i) = -1 + i$. \square

1.4.2. Teorema fundamental del álgebra

Este resultado recoge la propiedad que anunciábamos al principio de la lección y que caracteriza al cuerpo de los números complejos.

TEOREMA 1.4.12 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA) *Toda ecuación polinómica de grado mayor o igual que 1 y con coeficientes en \mathbb{C} tiene solución en \mathbb{C} . Equivalentemente, todo polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes en \mathbb{C} puede factorizarse en factores de grado menor o igual a 1:*

$$P(z) = z_0(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_n)^{m_n},$$

en donde, $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Los números complejos z_1, \dots, z_n en el teorema anterior son las raíces o ceros del polinomio P y son igualmente las soluciones de la ecuación polinómica $P(z) = 0$. Para cada z_i , el número natural m_i se denomina *multiplicidad* de la raíz o cero.

Entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica sobre polinomios y en particular la relación entre factorización de polinomios y ecuaciones polinómicas que se utiliza en el teorema fundamental del álgebra.

DEFINICIÓN 1.4.13 Decimos que un polinomio está factorizado en \mathbb{R} si está escrito como producto de polinomios irreducibles, de grado menor o igual que 2 y con coeficientes en \mathbb{R} . Decimos que está factorizado en \mathbb{C} si está escrito como producto de polinomios de grado menor o igual a 1 con coeficientes en \mathbb{C} .

EJEMPLO 1.4.14 El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en \mathbb{R} , pero admite la siguiente factorización en \mathbb{C} :

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i) \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.15 La identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, que también hemos usado en el ejemplo anterior, es suficiente para factorizar el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 - (-1))(x + 1)(x - 1) = \\ &= (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Y a partir de ella, resolvemos la ecuación polinómica $x^4 - 1 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.16 Para factorizar $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ intentamos buscar alguna raíz entre los divisores del término independiente usando el método de Ruffini; en este caso, encontramos que $x = -1$ es una de sus raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x + 1$:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Resolviendo la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, vemos que sus soluciones son complejas, por lo que podemos afirmar que la anterior es la factorización en \mathbb{R} .

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, la factorización en \mathbb{C} es:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = \left(x + 1\right) \left(x + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \square$$

En el ejemplo anterior, obsérvese que el polinomio de grado 2 que aparece en la factorización en \mathbb{R} coincide con el producto de factores en \mathbb{C} correspondiente a una raíz compleja y a su conjugada:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Este hecho no es una casualidad sino una consecuencia de la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 1.4.17 *El operador conjugado verifica las siguientes propiedades:*

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

La demostración de esta proposición es una simple comprobación que debería ser fácilmente desarrollada por el estudiante. La principal consecuencia de esta propiedad es la siguiente.

PROPOSICIÓN 1.4.18 *Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en \mathbb{R} y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P , entonces \bar{z} también es raíz de P .*

La demostración del resultado es bastante simple; supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

y que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P ; en el desarrollo siguiente, solo utilizamos la proposición anterior y que el conjugado de un número real es él mismo:

$$\begin{aligned} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 &= 0 \\ \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} &= 0 \\ \overline{a_n} \cdot \bar{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_0} &= 0 \\ a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente \bar{z} también es raíz del polinomio.

Por otro lado, el producto de dos factores correspondientes a una raíz compleja y a su conjugada da lugar a un polinomio de segundo grado con coeficientes reales:

$$(x - z) \cdot (x - \bar{z}) = ax^2 + bx + c$$

siendo $z \in \mathbb{C}$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Este resultado nos permite determinar la factorización en \mathbb{R} de un polinomio a partir de su factorización en \mathbb{C} como vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.4.19 Vamos a factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + 4$ en \mathbb{C} y en \mathbb{R} . Introduciendo números complejos, podemos realizar fácilmente la siguiente factorización:

$$x^4 + 4 = x^4 - (2i)^2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i).$$

Para seguir factorizando, resolvemos las ecuaciones $x^2 - 2i = 0$ y $x^2 + 2i = 0$. Para la primera, buscamos $x = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $(a + bi)^2 = 2i$, es decir,

$$a^2 - b^2 + 2abi = 2i$$

A partir de esta igualdad, comparando las partes reales e imaginarias, construimos el siguiente sistemas de ecuaciones en \mathbb{R} :

$$a^2 - b^2 = 0, \quad ab = 1,$$

cuyas soluciones son $\{a_1 = 1, b_1 = 1\}$, $\{a_2 = -1, b_2 = -1\}$; es decir, las soluciones de $x^2 - 2i = 0$ son

$$1 + i, \quad -1 - i$$

Siguiendo el mismo método, obtenemos las soluciones de $x^2 + 2i = 0$:

$$1 - i, \quad -1 + i$$

En consecuencia, la factorización en \mathbb{C} del polinomio $x^4 + 1$ es

$$x^4 + 1 = (x - 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)$$

Para obtener la factorización en \mathbb{R} basta multiplicar los factores correspondientes a las raíces conjugadas. De esa forma, la identidad $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ elimina la unidad imaginaria.

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= ((x + 1) - i)((x + 1) + i)((x - 1) - i)((x - 1) + i) = \\ &= ((x + 1)^2 + 1)((x - 1)^2 + 1) = \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned} \quad \square$$

El esquema seguido en este último ejemplo es muy habitual en matemáticas: para resolver un problema en \mathbb{R} , lo estudiamos antes en \mathbb{C} para aprovecharnos de las propiedades adicionales; posteriormente volvemos a \mathbb{R} para dar las soluciones deseadas. A lo largo del tema veremos más ejemplos de esta metodología.

1.4.3. Los números complejos (forma exponencial)

Si consideramos la representación gráfica de un número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tal y como aparece en la figura 1.5, la longitud del segmento que une el origen de coordenadas y el número complejo se denomina *módulo* y el ángulo que forma este segmento con la parte positiva del eje OX , se denomina *argumento principal*.

DEFINICIÓN 1.4.20 En los siguientes apartados, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

- *Módulo de un número complejo:*

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

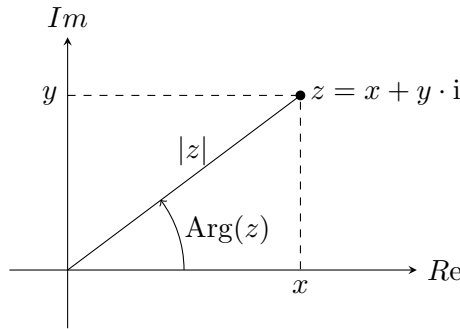


Figura 1.5: Representación gráfica de los números complejos

- *Argumento principal de un número complejo:* $\text{Arg}: \mathbb{C}^* \rightarrow [0, 2\pi)$.
Si $x = 0$, entonces

$$\text{Arg}(iy) = \frac{\pi}{2}, \text{ si } y > 0, \quad \text{Arg}(iy) = \frac{3\pi}{2}, \text{ si } y < 0;$$

si $y = 0$, entonces

$$\text{Arg}(x) = 0, \text{ si } x > 0, \quad \text{Arg}(x) = \pi, \text{ si } x < 0;$$

en cualquier otro caso, $\text{Arg}(x + iy) = \theta$, en donde $\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$,

$$\theta \in [0, \pi] \text{ si } y \geq 0,$$

$$\theta \in (\pi, 2\pi) \text{ si } y < 0.$$

Hemos hecho uso de la siguiente notación: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En general, el superíndice $*$ sobre cualquier conjunto numérico, indica que excluimos al número 0.

Obsérvese que, por su definición, el módulo de un número complejo es siempre positivo y su argumento principal es un ángulo entre 0 y 2π .

EJEMPLO 1.4.21

- $\text{Re}(3 - 2i) = 3$
- $\text{Im}(-1 + i) = 1$
- $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$. Los dos ángulos entre 0 y 2π cuyas tangentes son -1 son $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$, pero dado que la parte imaginaria es positiva, el argumento principal es el primero de ellos. \square

Las definiciones anteriores permiten representar un número complejo ($z = x + iy$) en forma binómica utilizando el módulo ($r = |z|$) y el argumento ($\theta = \text{Arg}(z)$), de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \quad z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

Exponencial compleja y fórmula de De Moivre Una representación alternativa para los números complejos se obtiene al usar la función exponencial. Para introducirla, necesitamos en primer lugar, extender la definición de esta función a todos los números complejos.

DEFINICIÓN 1.4.22 *Definimos la función exponencial en el cuerpo de los números complejos como:*

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Es evidente que esta definición es coherente con la exponencial sobre números reales, ya que si $y = 0$:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$$

La otra razón por la que esta función se denomina exponencial es que comparte las propiedades algebraicas de su versión real.

PROPOSICIÓN 1.4.23

1. $e^z e^w = e^{z+w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$
2. $(e^z)^n = e^{nz}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$

La segunda propiedad es una consecuencia de la primera y la demostración de la primera hace uso, solamente, de las fórmulas del seno y coseno de la suma de ángulos. Consideramos $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\ &\quad + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z+w} \end{aligned}$$

Forma exponencial. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, entonces

$$z = re^{i\theta}$$

La expresión $re^{i\theta}$ se denomina *forma exponencial* del número z , y es consecuencia inmediata de la representación binómica de un número complejo a partir de su módulo y de su argumento ($x + iy = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta$), y de la definición de función exponencial aplicada a un número complejo puro ($e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$):

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}$$

Una representación alternativa a partir del módulo y argumento de un número complejo es la *forma polar*, que se suele escribir como $r\theta$; las dos representaciones son equivalentes en cuanto a sus consecuencias prácticas, pero preferimos utilizar la forma exponencial, ya que la manipulación de la misma se basa en las propiedades conocidas de la función exponencial.

EJEMPLO 1.4.24 Expresamos números complejos en forma exponencial:

- $-1 = e^{i\pi}$, ya que $|-1| = 1$ y $\text{Arg}(-1) = \pi$
- $-5i = 5e^{i3\pi/2}$, ya que $|-5i| = 5$ y $\text{Arg}(-5i) = 3\pi/2$
- $1 - i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$, ya que $|1 - i| = \sqrt{2}$ y $\text{Arg}(1 - i) = 7\pi/4$ □

La igualdad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$, se conoce como *igualdad de Euler* y en el caso particular $\theta = \pi$ conduce a una identidad que relaciona las constantes matemáticas más importantes:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Por las propiedades de las potencias, obtenemos que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ y a partir de aquí, deducimos la fórmula de De Moivre.

COROLARIO 1.4.25 (FÓRMULA DE DE MOIVRE) *Para todo número natural n y todo real θ :*

$$(\cos \theta + i \sen \theta)^n = \cos n\theta + i \sen n\theta.$$

Una importante aplicación de esta fórmula es obtener expresiones para simplificar funciones trigonométricas, según mostramos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.4.26 Si expandimos la igualdad de De Moivre para $n = 2$ obtenemos:

$$\cos 2\theta + i \sen 2\theta = (\cos \theta + i \sen \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \sen \theta \cos \theta - \sen^2 \theta$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos la siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sen^2 \theta \\ \sen 2\theta &= 2 \sen \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido expresiones para escribir el seno y el coseno del doble de un ángulo en terminos del seno y el coseno del mismo ángulo. □

En combinación con el binomio de Newton, podemos obtener fórmulas similares para cualquier múltiplo, que nos ayudarán a simplificar expresiones en las que aparezcan distintos múltiplos de un mismo ángulo.

EJEMPLO 1.4.27 Si expandimos la igualdad de De Moivre para $n = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \sen 3\theta &= (\cos \theta + i \sen \theta)^3 = \\ &= \binom{3}{0} \cos^3 \theta + \binom{3}{1} i \cos^2 \theta \sen \theta + \binom{3}{2} i^2 \cos \theta \sen^2 \theta + \binom{3}{3} i^3 \sen^3 \theta = \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sen \theta - 3 \cos \theta \sen^2 \theta - i \sen^3 \theta\end{aligned}$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos la siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta\end{aligned}\quad \square$$

En otras ocasiones, nos interesará un proceso opuesto al del ejemplo anterior, es decir, reducir potencias de funciones trigonométricas a expresiones en términos del seno y coseno de múltiplos del ángulo. Para deducir estas expresiones partimos de las igualdades

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}\quad (1.2)$$

que se deducen fácilmente sumando y restando respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x\end{aligned}$$

Vemos a continuación un ejemplo de como usar la definición compleja de las funciones trigonométricas para el objetivo buscado.

EJEMPLO 1.4.28 Vamos a transformar $\sin^2 \theta$ en una expresión sin potencias:

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{-1}{4} (e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{4} (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{4} ((e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2) = \\ &= \frac{-1}{4} (2 \cos(2\theta) - 2) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}\quad \square$$

En combinación con el binomio de Newton, podemos obtener fórmulas similares para cualquier potencia.

EJEMPLO 1.4.29 Vamos a transformar $\sin^3 \theta$ en una expresión sin potencias:

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \\ &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) = \\ &= \frac{-1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \cdot 2i \sin \theta) = \\ &= \frac{-1}{4} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta)\end{aligned}\quad \square$$

EJEMPLO 1.4.30 Otra de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es el cálculo de las raíces de los números complejos, que nos aparecen en la resolución de ecuaciones polinómicas. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular los números complejos w , tales que $w^4 = -4$; es decir, las *raíces cuartas* de -4 y raíces del polinomio $P(z) = z^4 + 4$. Para calcularlas, partimos de la forma exponencial de -4 ,

$$-4 = 4 \cdot e^{\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, el ángulo π no es el único que permite obtener una igualdad similar a la anterior; en general tenemos que:

$$-4 = 4 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}$$

Las raíces $w = re^{i\theta}$ que buscamos verifican entonces que:

$$w^4 = r^4 e^{4i\theta} = -4 = 4 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

De donde deducimos que

$$r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad 4i\theta = i(\pi + 2k\pi)$$

De la segunda igualdad, deducimos que solo cuatro valores de θ son argumentos principales de números complejos, los correspondientes a $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

En consecuencia, -4 tiene cuatro raíces cuartas, cuyas representaciones gráficas en el plano complejo se pueden ver en la figura [1.6](#).

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2}e^{i\theta_0} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i \\ w_1 &= \sqrt{2}e^{i\theta_1} = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 + i \\ w_2 &= \sqrt{2}e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{5i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 - i \\ w_3 &= \sqrt{2}e^{i\theta_3} = \sqrt{2}e^{7i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - i \end{aligned}$$

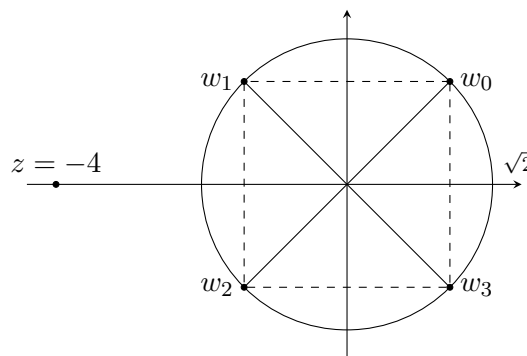


Figura 1.6: Raíces cuartas de $z = -4$

Con estas raíces podemos factorizar el polinomio $P(z)$, tanto en \mathbb{C} como en \mathbb{R} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i) \longrightarrow \text{factorización en } \mathbb{C} \\ &= (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 1) \longrightarrow \text{factorización en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obsérvese que en el ejemplo 1.4.19 (página 44), resolvimos el mismo problema a partir de la ecuación polinómica. Debemos acostumbrarnos a que un mismo problema puede resolverse de varias formas y debemos aprender a elegir la forma más adecuada según los datos concretos. \square

TEOREMA 1.4.31 *Para cada número complejo $z = re^{i\theta}$ existen n números complejos distintos w_0, \dots, w_{n-1} que verifican $w_k^n = z$. Estos números complejos son:*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Hemos utilizado en este enunciado una notación alternativa para la función exponencial

$$\exp(x) = e^x$$

que es de gran ayuda cuando escribimos expresiones grandes en el exponente.