Relación de ejercicios 2.1

1. Represente gráficamente las funciones utilizando software matemático: [1]

   a) $f(x) = x^3 + 2x^2$ *b*) $g(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^3}$ *c*) $h(x) = \dfrac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$

   d) $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *e*) $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Parametrización de curvas:

   a) Defina una parametrización del segmento que va del punto $P = (-2, -1)$ al punto $Q = (3, 0)$.

   b) Utilice el resultado obtenido en el apartado anterior para determinar la ecuación general de la recta que pasa por P y Q.

   c) Determine una parametrización del grafo de la función $f(x) = \ln x$

   d) Defina un par de parametrizaciones del grafo de $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in [0, 4]$, a partir de la propia función ($y = f(x)$) y la de su inversa ($x = g(y)$).

3. Consideramos la curva definida por la función vectorial

$$f(t) = (t^2 - t, t^3 - 3t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

   a) Dibuje la curva a mano.

   b) Determine la ecuación general de la recta tangente y de la recta normal (perpendicular) a la curva en el punto $(0, 0)$.

   c) Determine la ecuación general de las rectas tangentes a la curva en el punto $(2, 2)$. Justifique la existencia de dos rectas tangentes distintas en un mismo punto.

   d) Determine todos los puntos de tangencia horizontal y vertical de la curva.

   e) Pruebe que la curva es regular (regular en todos sus puntos).

4. Consideramos la curva definida por la siguiente parametrización:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \qquad t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

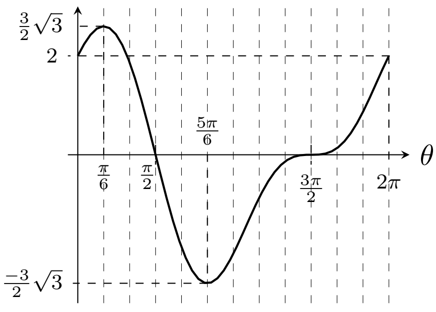
   a) Determine los puntos de tangencia horizontal y vertical.

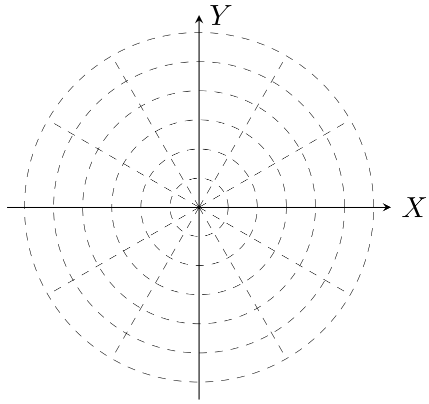
   b) Compruebe que $y = -x - 1$ es una asíntota de la curva.

   c) Dibuje la curva utilizando software matemático para comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

5. La gráfica de la función $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ es la que se muestra abajo. A partir de esa gráfica, dibuje la curva polar $r = f(\theta)$.

[1] El alumno debe saber representar gráficamente, a mano, funciones reales a partir del estudio formal de su dominio, los puntos de corte, el crecimiento/decrecimiento, los máximos/mínimos y las asíntotas. Utilice este ejercicio para recordar este contenido.





6. Utilice el grafo de la función $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x)$ para dibujar la curva polar $r = 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, y determine la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 2)$.

7. Consideremos la curva polar $r = 2 - \sec\theta$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

   a) Aplique la proposición 2.1.18 para hallar el punto donde la curva sea tangente a una circunferencia centrada en el origen.

   b) Aplique la proposición 2.1.19 para determinar la recta o rectas tangentes a la curva en el punto de coordenadas cartesianas $(0, 0)$.

   c) Compruebe que $x = -1$ es una asíntota de la curva polar.

   d) Utilice software matemático para representar la curva, comprobar los resultados obtenidos en los apartados anteriores y determinar si existen puntos de tangencia horizontal y vertical.

8. Identifique los siguientes lugares geométricos, determine sus características principales, dibújelos y proporcione una parametrización.

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ *b*) $x^2 + y^2 - 6x + 10 = 0$

   c) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$ *d*) $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$

   e) $x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0$ *f*) $y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

9. Determine una parametrización de la elipse centrada en el punto $(3, 0)$, sabiendo que pasa por por el origen de coordenadas, y que el punto $(3, 4)$ es uno de sus focos.

10. Probar que $|z| + |z + 2| = 4$, con $z \in \mathbb{C}$, determina la curva:

$$3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$$

siendo "x" e "y", respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de "z". Enumerar sus principales características y dar una parametrización de la curva.