Relación de ejercicios 2.2

1. Determine y represente el dominio de los siguientes campos:
$$a)\ f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad b)\ g(x,y)=\log\frac{y}{x^2+y^2-1}.$$

2. Utilice software matemático para determinar y representar las curvas de nivel de los siguientes campos escalares.
$$a)\ f(x,y)=y+\cos 2x, \quad b)\ g(x,y)=\mathrm{e}^{y-x^2}, \quad c)\ h(x,y)=\frac{2x^2+y^2}{x-2y}.$$

3. Halle el vector gradiente de los siguientes campos.
$$a)\ f(x,y)=\log(\operatorname{sen} xy) \qquad b)\ g(x,y,z)=x^2y^3z^4$$

4. Calcule la derivada direccional del campo $f(x,y)=x^3+3xy$ en el punto $(1,1)$ a lo largo de la recta $y=x$ y en la dirección de decrecimiento de x, de dos formas distintas:

   a) Utilizando la definición de derivada direccional.

   b) Utilizando una de las aplicaciones del gradiente.

5. Consideremos el campo escalar $f(x,y)=x\mathrm{e}^{1-y}$ y el punto $P=(3,1)$.

   a) Calcule la derivada direccional máxima de f en P.

   b) Comprobar que la derivada direccional de f en P en dirección al punto $(0,0)$ es 0, y justifique este resultado.

6. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al grafo del campo $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x+y}$ en el punto $(2,2,1)$.

7. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $x\operatorname{sen} y+x^2\mathrm{e}^z=4$ en el punto $(2,\pi,0)$.

8. Determine la ecuación general de la recta tangente a la curva $y^2-2y-x=0$ en el punto $(0,0)$, de dos maneras distintas:

   a) Utilice una parametrización de la curva.

   b) Utilice las propiedades del vector gradiente.

9. Consideramos la curva
$$9x^2+4xy+6y^2-14x+8y+10=0$$

   a) Halle la recta tangente a la curva en el punto $\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$.

   b) Halle los puntos de la curva cuya tangente es horizontal.