1 77958167N David Navarro Jimena Folio 1 de 5

$\cos 5\theta = a\cos^5\theta + b\cos^3\theta + c\cos\theta$

La formula de moivre nos dice que

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$

Si $n=5$, tendriamos $\cos 5\theta$ en la parte real, lo cual seria igual a lo que buscamos. Asi que, usando el binomio de Newton expandimos

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5$

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5 = \cos^5\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^0 + 5\cos^4\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)$
$+ 10\cos^3\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 10\cos^2\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 +$
$5\cos\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^4 + \cos^0\theta\,(i\,\mathrm{sen}\,\theta)^5 =$

$\cos^5\theta + 5\cos^4\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, i - 10\cos^3\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$
$-10\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^3\theta\, i + 5\cos\theta\,\mathrm{sen}^4\theta\, i + \mathrm{sen}^5\theta\, i$

He expandido con la ayuda del triangulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Tras esto, separemos la real de lo imaginario

$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^5 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta +$

$5\cos\theta \operatorname{sen}^4\theta + 5\cos^4\theta \operatorname{sen}\theta i - 10\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta i +$

$\operatorname{sen}^5\theta i$

La parte real sera igual a $\cos 5\theta$

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta \operatorname{sen}^4\theta$

Ahora, solo falta eliminar los senos con la siguiente igualdad $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) +$

$5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$

Tras expandir y simplificar, nos queda:

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

$\cos 5\theta = a\cos^5\theta - b\cos^3\theta + c\cos\theta$

$a = 16 \qquad b = -20 \qquad c = 5$

Se nos queda con una estructura igual a la del enunciado, por lo que podemos saber el valor de a, b, c

$$\boxed{a = 16 \quad b = -20 \quad c = 5}$$

2.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \quad 2iw - 4u = 4 \\ \text{II} \quad zi - w = -8+6i \\ \text{III} \quad z - w + u = 2 - i \end{array}\right\}$$

Multiplicamos III $\cdot\, i$

$$zi - wi + ui = 2i + 1$$

Restemos II - III

$$\begin{array}{rl} & zi - w = -8+6i \\ - & zi - wi + ui = 2i+1 \\ \hline & -w + wi - ui = -9+4i \quad \text{IV} \end{array}$$

Ahora tendriamos estas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \quad 2iw - 4u = 4 \\ \text{IV} \quad -w + wi - ui = -9+4i \end{array}\right\}$$

Despejemos u en I y lo sustituimos en IV

$$u = \frac{-4+2iw}{4}$$

$$-w + wi - \left(\frac{-4+2iw}{4}\right)i = -9+4i$$

Multiplico IV por 4 para quitarme la fracción y desarrollo todo lo que puedo la ecuación

$$-4w + 4wi - 4i + 2w = -36 + 16i \to$$

$$-2w + 4wi = 36 + 12i$$

Ahora, divido entre 2 para simplificar y sustituyo

$$w = a + bi$$

$$-(a+bi) + 2(a+bi)i = -18+6i \to$$

$$-a - bi + 2ai - 2b = -18+6i$$

Ahora, creamos un sistema de ecuaciones desde la anterior

$$\left.\begin{aligned} -a - 2b &= -18 \\ 2a - b &= 6 \end{aligned}\right\} \; b = 2a - 6$$

$$-a - 2(2a-6) = -18 \to$$

$$-a - 4a + 12 = -18 \to$$

$$-5a = -30 \to a = 6$$

$$b = 2 \cdot 6 - 6$$

$$b = 6$$

Con las respuestas anteriores obtenemos que

$$w = a + bi \qquad \boxed{w = 6+6i}$$

Ahora, con w sustituimos para sacar u en (I)

$$u = \frac{-4+2wi}{+4} = \frac{-4+2(6+6i)i}{+4} = \frac{-4+12i-12}{+4} =$$

$$\frac{-16+12i}{+4} = -4+3i$$

Y ahora conseguimos la z

$$z - w - u = 2 - i$$

$$z - 6 - 6i + 4 + 3i = 2 - i \Rightarrow z = 12 + 2i$$

$$\boxed{w = 6+6i \quad u = -4+3i \quad z = 12+2i}$$

A) $w = 6 + 6i$ $\quad w = a + bi$

$\overline{w} = 6 - 6i$ $\quad \overline{w} = a - bi$

Primero necesitamos pasar de forma trigonometrica a forma exponencial

$w = r e^{\theta i}$ $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \tan \theta = \frac{b}{a}$

$r = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} =$

$6\sqrt{2}$

$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{-6}{6} = -1$

La $\tan \theta$ ~~de~~ $= -1$ vale siempre $2\pi - \frac{\pi}{4}$

Ademas, añadimos $2k\pi$ para indicar las posibles vueltas

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

Ya tenemos $\overline{w}$ en forma exponencial

$$\cancel{\overline{w} = 6\sqrt{2}\, e^{(2\pi - \frac{\pi}{4})i}}$$

$$\overline{w} = 6\sqrt{2}\, e^{(2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}$$

Ahora necesitamos la ~~forma trigonometrica~~ raiz cubica, por lo que tendremos

$$r^3 = 6\sqrt{2}$$

$$\theta^3 = 2\pi - \frac{\pi}{4} \overset{+2k\pi}{} \rightarrow 3\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Bajamos el 3 exponencial multiplicando a esta, ya que esta ~~elevado~~ como exponente e, por lo que por las propiedades de los exponentes, se tienen que multiplica. Ahora despejamos θ y r

$$r = \pm\sqrt[3]{6\sqrt{2}}$$

$$\cancel{\theta = \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{3}} = \theta = \frac{2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$$

Folio 56

Ahora, para encontrar la θ en el cuarto cuadrante sustituimos k por 0, 1 y 2 para un numero distinto de vueltas.

$k=0$

$$\frac{2\pi - \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\frac{7\pi}{4}}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$k=1$

$$\frac{2\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} = \frac{4\pi - \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\frac{15\pi}{4}}{3} = \frac{15\pi}{12} =$$

$$\pi + \frac{3\pi}{12}$$

$k=2$

$$\frac{2\pi - \frac{\pi}{4}\cancel{2} + 4\pi}{3} = \frac{6\pi - \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{\frac{23\pi}{4}}{3} = \frac{23\pi}{12} =$$

$$\pi + \frac{11\pi}{12}$$

Si pasamos cada uno de estos valores a grados, vemos que solo $\pi + \frac{11\pi}{12}$ esta en el cuarto cuadrante. Con esta informacion, escribimos $\overline{w}$ en forma trigonometrica

$$\overline{w} = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\boxed{\overline{w} = \pm\sqrt[3]{6\sqrt{2}}\left(\cos\left(\pi + \frac{11\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(\pi + \frac{11\pi}{12}\right)\right)}$$