Relación de ejercicios 3.4 - REPASO

1. Calcule las siguientes integrales utilizando los métodos de integración inmediata o por cambio de variable directo:

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+4)^4}$ *c*) $\displaystyle\int x(3x^2-5)^7\,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int \sqrt[5]{5x+6}\,\mathrm{d}x$ *e*) $\displaystyle\int \frac{6x^2}{x^3-2}\,\mathrm{d}x$ *f*) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3-7)\,\mathrm{d}x$

2. Calcule las siguientes integrales con el cambio de variable indicado:

   a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \quad x=t^2.$

   b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}, \quad \mathrm{e}^x=t.$

   c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{e}^x+1=t.$

3. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\mathrm{d}x$ aplicando los siguientes métodos:

   a) Integración inmediata o cambio de variable directo.

   b) Integración por partes.

4. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

   a) $\displaystyle\int x^2\log x\,\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$ *c*) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

5. Calcule las siguientes integrales racionales:

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

6. Calcule las siguientes integrales trigonométricas utilizando la forma compleja de las funciones trigonométricas:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int \cos^6 x\,\mathrm{d}x$

7. Resuelva las siguientes integrales utilizando el cambio de variable adecuado según lo explicado en la sección 3.1.4.1.

   a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ *c*) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x-\operatorname{sen} x}$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $(2+x)y'=3y$ *b*) $yy'=\operatorname{sen} x$ *c*) $y'=\exp(3x+2y)$

9. Compruebe que las siguientes ecuaciones son exactas y resuélvalas:

   a) $(3y^2+10xy^2)+(6xy-2+10x^2y)y'=0$

   b) $(\operatorname{sen} xy+xy\cos xy)+(x^2\cos xy)y'=0$

10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

    a) $y' + 2y = \operatorname{sen} x$ *b*) $y' + 5y = \mathrm{e}^{5x}$

11. Resuelva la ecuación $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$ utilizando el cambio de variable $u = y - 2x + 3$.

12. Resuelva la ecuación $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ utilizando el cambio de variable $y = x \cdot u$.

13. Resuelva la ecuación $y' + y^2 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ utilizando el cambio de variable $\dfrac{1}{u} = y + \dfrac{1}{x}$.

14. Halle el área determinada por las curvas $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$.

15. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

    a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ *b*) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *c*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$ *d*) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{tg} x\, dx$

    e) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x} \cos ax\, dx$ *f*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ *g*) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$ *h*) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$

16. Las integrales que introducimos en este ejercicio se denominan *p-integrales.*

    a) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

    b) Determine los valores de p para que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, para $a > 0$, sea convergente y calcule su valor.

17. Determine si las siguientes integrales impropias (sección 3.3.1.3) son básicas o no, estudie su convergencia y, en su caso, calcule su valor:

    (a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{dx}{x \log x}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x \log x}$

18. La *longitud de una curva parametrizada* diferenciable $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas en $[a, b]$, se calcula así:

    $$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t$$

    y, en particular, la *longitud del grafo de una función* f definida en $[a, b]$ es:

    $$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x$$

    Utilice este resultado anterior para hallar

    a) Un cable eléctrico soportado por dos postes distantes 200 metros adopta la forma de una catenaria (coseno hiperbólico) de ecuación $y = 150 \cosh \dfrac{x}{150}$. Calcule la longitud del cable entre esos dos postes.

b) Halle la distancia recorrida por un móvil entre $t = 0$ y $t = 2$, sabiendo que su posición en cada instante está dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen} t - t \cos t \end{cases}$$

c) Las coordenadas de un punto móvil vienen dadas en el instante t por las ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$. Encuentre la longitud del espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 2$.

19. Halle las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint_R y^3 \cos^2 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, en donde $R = [-\pi/2, \pi] \times [1, 2]$.

b) $\displaystyle\iint_R \left(xy + \frac{x}{y+1} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, en donde $R = [1, 4] \times [1, 2]$.

20. Esboce la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$ *b*) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

21. Halle el área de la región encerrada por la curva $\rho = 4 + \cos\theta$.

22. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar la integral

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

en donde D es el interior de la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ en $x \geq 0$.

23. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar el área encerrada por la cardioide de ecuación $\rho = 3(1 + \cos\theta)$.

24. Exprese la siguiente integral en coordenadas polares y calcúlela:

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

25. Consideremos la región R delimitada por el eje OX y la curva

$$x(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad y(t) = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Utilice el cambio de variable $\boldsymbol{T}(s, t) = (x(t), s \cdot y(t))$, $s \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$, para calcular la integral $\displaystyle\iint_R y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.