TEMA 3

Cálculo integral

Contenido:

- LECCIÓN 3.1: CÁLCULO DE PRIMITIVAS. Integración por partes. Cambios de variable.
- LECCIÓN 3.2: ECUACIONES DIFERENCIALES. Ecuaciones de variables separables. Ecuaciones exactas. Ecuaciones lineales. Cambios de variables.
- LECCIÓN 3.3: INTEGRACIÓN DOBLE. Integración de funciones de una variable: Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow, y aplicaciones geométricas. Integración doble: Teorema de Fubini y consecuencias, Teorema de cambio de variable, y aplicaciones.

Prerrequisitos: Aunque el tema es autocontenido, es conveniente haber trabajado previamente con primitivas e integrales definidas, en particular, las primitivas se han estudiado en el primer tema.

Objetivos: Conocer y saber aplicar las técnicas fundamentales del cálculo de primitivas y de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, identificando modelos básicos en ambos problemas. Saber calcular integrales definidas en un variable y en dos variables, y en este caso utilizando tanto el teorema de Fubini como cambios de variable. Saber calcular algunas magnitudes geométricas usando integración.

Resultados de aprendizaje:

- Identificar y resolver algunos tipos concretos de primitivas: integrales inmediatas, potencias de funciones trigonométricas, funciones racionales, casos básicos resolubles con integración por partes, funciones racionales en seno y coseno.
- Saber aplicar cambios de variables para resolver primitivas.
- Identificar y resolver los tipos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: separables, exactas y lineales. Ya sea para encontrar soluciones generales o particulares.
- Saber aplicar cambios de variable para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Ya sea para encontrar soluciones generales o particulares.
- Calcular áreas de regiones planas delimitadas por gráfos de funciones reales, volúmenes de revolución, longitudes de curvas parametrizadas.
- Identificar, estudiar la convergencia y calcular integrales impropias.
- Calcular integrales dobles usando el teorema de Fubini, tanto en regiones rectangulares como en regiones delimitadas por grafos.
- Saber aplicar el teorema de cambio de variable para calcular integrales dobles. Reconocer si es adecuado utilizar coordenadas polares para calcular una integral doble.

LECCIÓN 3.1

Cálculo de primitivas

El cálculo de primitivas es la parte del cálculo integral que consiste en buscar una función cuya derivada coincida con una expresión dada. Por esta razón, se dice que el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 3x^2$, el objetivo es encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$; en este caso, podemos considerar la función $F(x) = x^3$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Sin embargo, a diferencia del cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas no es un proceso automático. Es más, en muchos casos no es posible calcular la primitiva de una expresión en términos de funciones elementales, por ejemplo, para las funciones $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ o $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se sabe que existen primitivas pero no es posible expresarlas en términos de funciones elementales.

En esta lección, repasamos los tres métodos básicos de integración (identificación de integrales inmediatas, integración por partes y sustitución o cambio de variable) y proporcionaremos las estrategias necesarias para abordar el cálculo de la primitiva de algunos tipos de funciones (racionales, irracionales y trigonométricas).

Definición 3.1.1 *F es una primitiva de f en el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.*

Obsérvese que cualquier otra función construida a partir de la función $F(x)$ sumándole una constante también valdría, pues la derivada de cualquier función constante es 0. Así, $F_C(x) = x^3 + C$ es también una primitiva de $f(x) = 3x^2$ ya que $F'_C(x) = 3x^2 = f(x)$.

Proposición 3.1.2 *Si F es una primitiva de f en un intervalo I entonces la función G es primitiva de f si y sólo si G es de la forma:*

$$G(x) = F(x) + C \quad \textit{para todo } x \textit{ en } I$$

donde C es una constante.

De esta forma, llamamos *integral indefinida* a la familia de todas las primitivas de una función y escribimos

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

siendo F una primitiva de f. En esta expresión, $f(x)$ se llama *integrando*, $\mathrm{d}x$ indica la variable de integración y C se denomina *constante de integración.*

El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral definida y el cálculo de primitivas, estableciendo la existencia de primitivas para cualquier función continua.

Teorema 3.1.3 (Fundamental del cálculo) *Sea f una función continua en $[a, b]$ y consideremos la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

La función F así definida es derivable en (a, b) y verifica que $F'(x) = f(x)$.

Sin embargo, tal y como comentábamos en la introducción, en esta lección nos planteamos determinar primitivas que se expresen en términos de funciones elementales.

La relación que existe entre los conceptos de derivada y primitiva permite deducir fácilmente las propiedades de linealidad del operador, tal y como establecemos en el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4 *La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{para todo } k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.1.5 La integral indefinida de la función $15x^2 - 3\,\mathrm{sen}\,x$ es

$$\begin{aligned}\int (15x^2 - 3\,\mathrm{sen}\,x)\,\mathrm{d}x &= \int \big(5(3x^2) + 3(-\,\mathrm{sen}\,x)\big)\;\mathrm{d}x = \\ &= 5\int 3x^2\,\mathrm{d}x + 3\int -\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = \\ &= 5x^3 + 3\cos x + C\end{aligned}$$

□

En el resto del tema se proporcionan algunos métodos y estrategias para el cálculo de primitivas. En primer lugar, se presentan los tres métodos básicos de cálculo de primitivas: integración inmediata, integración por partes y cambio de variable o sustitución. El objetivo en cada uno de ellos es conocer y saber aplicar el método en cada caso y así aprender a identificar qué método es más adecuado para calcular la primitiva de una función dada.

3.1.1. Integrales inmediatas.

Las fórmulas de derivación, leídas en sentido inverso, proporcionan el método básico para calcular primitivas; estas fórmulas se conocen como integrales inmediatas. Es más, el objetivo de los distintos métodos y fórmulas que veremos en el resto de la lección es transformar una función, en una o varias funciones que se puedan integrar usando integrales inmediatas.

En la figura 3.1, aparece una tabla con las derivadas, y las correspondientes integrales inmediatas, que se usan más frecuentemente en el cálculo de primitivas; en el ejemplo 3.1.5, hemos usado la propiedad de linealidad y la primitiva de las funciones polinómicas y trigonométricas que aparecen en esta tabla.

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$	$\displaystyle\int (f(x))^\alpha f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x) = \dfrac{1}{x}$	$\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$ $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log\lvert x\rvert$	$\displaystyle\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)}$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log\lvert f(x)\rvert$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x$ $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$	$\displaystyle\int \operatorname{sen}(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))$ $\displaystyle\int \cos(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(f(x))$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} f(x)$

Figura 3.1: Derivadas e integrales inmediatas.

3.1.2. Integración por partes

La fórmula de integración por partes es una consecuencia de la regla de derivación del producto de funciones:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)v(x)) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ u(x)v(x) &= \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ahora escribimos el enunciado con las condiciones necesarias para su aplicación.

Teorema 3.1.6 *Dadas dos funciones, u y v, derivables y con derivadas continuas, se verifica:*

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

Si u es una función, es frecuente utilizar la siguiente notación cuando trabajamos con integrales:

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$$

Esta notación, permitirá escribir fácilmente pasos intermedios y abreviar algunas fórmulas. Por ejemplo, usando esta notación, podemos escribir la fórmula de integración por partes como sigue:

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\,v - \int v\,\mathrm{d}u$$

Es recomendable usar integración por partes cuando el integrando está dado como producto de dos funciones de distinto "tipo". Por ejemplo, una expresión polinómica por una exponencial o por una trigonométrica.

Ejemplo 3.1.7 Para calcular la integral $\int xe^x \, dx$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x &\implies du = dx \\ dv = e^x \, dx &\implies v = e^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

La integral que queda por resolver es inmediata:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C \qquad \square$$

En algunos casos, como en el ejemplo siguiente, será necesario aplicar el método reiteradamente.

Ejemplo 3.1.8 Para calcular la integral $\int x^2 e^x \, dx$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = x^2 &\implies du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx &\implies v = e^x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x \, dx$$

La integral que hemos obtenido se resuelve también por partes, como hemos visto en el ejemplo anterior. Al final, agrupando las expresiones se obtiene:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x \, dx = x^2 e^x - 2(x-1)e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \qquad \square$$

En ocasiones, cuando se aplica reiteradamente este método volvemos a obtener la integral de partida. Este tipo de integrales se denominan cíclicas y la solución se obtiene "despejando" la integral de partida de la ecuación resultante.

Ejemplo 3.1.9 Para calcular la integral $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = e^x &\implies du = e^x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx &\implies v = -\cos x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Para calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$ que aparece en la expresión obtenida, identificamos las funciones como sigue:

$$\begin{aligned} u = \mathrm{e}^x \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \quad &\Longrightarrow \quad v = \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y volvemos a aplicar el método de integración por partes,

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x,$$

para obtener la misma integral de partida. Si agrupamos las expresiones:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x,$$

podemos despejar la expresión $\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$ y obtener el resultado final:

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x}{2} + C \qquad \square$$

Como vemos en el siguiente ejemplo, otra de las aplicaciones de este método es integrar funciones simples no inmediatas.

Ejemplo 3.1.10 Para calcular la integral $\int \log x \, \mathrm{d}x$ identificamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u = \log x \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \quad &\Longrightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

y aplicamos el método de integración por partes:

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = x \log x - x + C \qquad \square$$

3.1.3. Cambio de variable o sustitución

A partir de la regla de la cadena se deduce la fórmula general del cambio de variable que permite aplicar el método de sustitución.

Teorema 3.1.11 (De cambio de variable) *Dadas dos funciones f, g con f y g' continuas, se verifica que:*

$$\int f(g(x)) g'(x) \mathrm{d}x = F(g(x)),$$

en donde F es una primitiva de la función f.

La forma más simple de aplicar este resultado es con el siguiente proceso, denominado *sustitución directa*.

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \int f(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} F(t) \overset{(3)}{=} F(g(x)) + C$$

Es decir, en primer lugar (1) hacemos la sustitución:

$$g(x) = t$$
$$g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

A continuación, (2) hallamos la integral $\int f(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t = g(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g(x))$.

Para aplicar este método, necesitamos identificar una expresión $f(x)$ cuya derivada, $f'(x)$ aparezca multiplicando al resto de la expresión.

Ejemplo 3.1.12 Para calcular $\int x \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{d}x$ hacemos la sustitución:

$$x^2 = t$$
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{sen}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\cos(t)$$

Al final se deshace el cambio para obtener el resultado:

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cos(x^2) + C \qquad \square$$

Ejemplo 3.1.13 Para calcular $\int \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$ hacemos la sustitución

$$\operatorname{sen} x = t$$
$$\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

que nos lleva a la integral de la función logaritmo, que hemos hallado en un ejemplo anterior usando integración por partes:

$$\int \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\log t}_{u}\,\underbrace{\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v} = t\log(t) - \int t \cdot \frac{1}{t}\mathrm{d}t =$$
$$= t\log(t) - t = \operatorname{sen} x \log(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + C \qquad \square$$

Ejemplo 3.1.14 Para calcular la integral $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ podemos aplicar la sustitución

$$x^2 = t$$
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

que permite transformar la integral anterior en una integral inmediata que se resuelve aplicando la fórmula de integración de la función $\operatorname{arctg}(x)$ de la siguiente manera:

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

□

En la práctica, muchas de las integrales que se resuelven mediante una sustitución directa son resueltas “a ojo” usando las fórmulas de integración inmediata. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, un simple arreglo de constantes,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

hubiera permitido identificar la regla de derivación general de la función arco tangente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} f(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}.$$

En la tabla de la figura 3.1, también aparecen las integrales inmediatas generalizadas de esta forma.

Otra forma de aplicar el teorema de cambio de variable es mediante el siguiente esquema que se denomina *sustitución inversa*.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} F(t) \overset{(3)}{=} F(g^{-1}(x)) + C$$

Es decir, en primer lugar (1) se sustituye la variable inicial por una expresión dependiente de una nueva variable:

$$\begin{aligned} x &= g(t) \\ \mathrm{d}x &= g'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A continuación (2) hallamos la integral $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(t)$; y por último, (3) *deshaciendo* el cambio, $t = g^{-1}(x)$, se obtiene que la primitiva buscada es $F(g^{-1}(x))$.

Ejemplo 3.1.15 Para calcular la integral irracional $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ vamos a realizar el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} t \\ \mathrm{d}x &= \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

El objetivo del mismo es “eliminar” la raíz que aparece en el integrando.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

Para resolver la última integral podemos utilizar la fórmulas que aprendimos en el primer tema, para transformar las potencias de funciones trigonométricas.

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\cos(t)$$

Y finalmente, deshacemos el cambio de variable

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \qquad \square$$

Aplicaremos las sustituciones directas o inversas siguiendo los modelos que repasamos en las secciones siguientes asociadas a cada tipo de función.

3.1.4. Funciones racionales

Las funciones expresadas como cociente de polinomios se denominan *funciones racionales*. En esta sección, vamos a trabajar con polinomios con coeficientes reales y estamos interesados en la transformación de las expresiones racionales en una forma normal dada como suma de un polinomio y *fracciones simples*.

En primer lugar, hablaremos de funciones racionales *propias* si el grado del denominador es estrictamente mayor que el grado del numerador, como por ejemplo

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8}, \qquad \frac{1}{x^5-8}.$$

Hablaremos de funciones racionales *impropias* si el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador, como por ejemplo

$$\frac{x^2-x}{x+3}, \qquad \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}$$

Proposición 3.1.16 *Cualquier función racional se puede expresar como suma de un polinomio y de una función racional propia.*

La transformación necesaria para conseguir la descomposición es simplemente la división de polinomios, tras la cual llegamos a la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

en donde $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$.

Ejemplo 3.1.17 La función racional $\dfrac{x^6-2}{x^4+x^2}$ no es propia; dividimos para obtener la expresión de la proposición anterior.

$$\begin{array}{rrrl|l}
\cancel{x^6} & -2 & & & x^4+x^2 \\ \cline{5-5}
-\cancel{x^6} & -x^4 & & & x^2-1 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{x^4} & -2 & & \\
 & +\cancel{x^4} & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & +x^2 & -2 &
\end{array}$$

Mostramos, pero no explicamos, los detalles de la división, que pueden consultarse en cualquier manual de matemáticas de secundaria. Ya podemos escribir la descomposición deseada.

$$\frac{x^6-2}{x^4+x^2} = x^2 - 1 + \frac{x^2-2}{x^4+x^2} \qquad \square$$

Definición 3.1.18 (Fracción simple) *Las funciones racionales*

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

en donde, $n \in \mathbb{N}$, $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$ y ax^2+bx+c no tiene raíces reales, se denominan fracciones simples.

Por ejemplo,

$$\frac{3}{2x+1}, \qquad \frac{-5}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{-5}{(x-1)^3},$$

$$\frac{x}{2x^2+2x+1}, \qquad \frac{1-x}{x^4+8x^2+16} = \frac{1-x}{(x^2+4)^2},$$

son fracciones simples. Sin embargo,

- $\dfrac{x}{x-2}$ no es fracción simple, ya que el denominador tiene grado 1 y el numerador no es una constante;
- $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ no es simple, ya que el numerador tiene grado 2;
- $\dfrac{1}{x^3+4x}$ no es simple, ya que el denominador, $x(x^2+4)$, no se corresponde con una potencia de un polinomio de grado 1, ni con una potencia de un polinomio de grado 2;
- $\dfrac{2x+5}{(x^2-4)^3}$ no es simple, ya que el polinomio x^2-4 tiene raíces reales.

Proposición 3.1.19 *Cualquier función racional propia $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se puede expresar como suma de fracciones simples. Concretamente, si*

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p}$$
$$(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$$

es la factorización en $\mathbb{R}$ del polinomio $Q(x)$, entonces existen números reales A_{ij},

B_{ij}, C_{ij}, *tales que:*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\left(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\right)+\\ &+\left(\frac{A_{21}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\right)+\\ &+\cdots+\\ &+\left(\frac{A_{p1}}{x-a_p}+\frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2}+\cdots+\frac{A_{pn_p}}{(x-a_p)^{n_p}}\right)+\\ &+\left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}}\right)+\\ &+\left(\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{B_{2m_2}x+C_{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}\right)+\\ &+\cdots+\\ &+\left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q}+\cdots+\frac{B_{qm_q}x+C_{qm_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}}\right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

El número de sumandos de la descomposición descrita en el resultado es la suma de las multiplicidades de los factores de Q. Para cada raíz real, se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son constantes. Para cada factor de grado 2 irreducible (par de raíces complejas conjugadas), se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son polinomios de grado menor o igual a 1.

Por lo tanto, para determinar la descomposición, partimos de la factorización del denominador y planteamos la igualdad establecida en el resultado anterior para determinar, mediante identificación de coeficientes, los números A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}

Ejemplo 3.1.20 Mostramos el proceso de descomposición en fracciones simples de la función racional propia $\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2}$.

$$\begin{aligned} &\text{[Factorizamos el denominador,}\ldots\\ \frac{x^2-2}{x^4+x^2} &= \frac{x^2-2}{x^2(x^2+1)}\\ &\text{[aplicamos el esquema de descomposición,}\ldots\\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &\text{[sumamos}\ldots\\ &= \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+1)}\\ &\text{[y agrupamos.}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los polinomios de los numeradores, obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{array}{lcllr} (x^3) & \to & A+C & = & 0 \\ (x^2) & \to & B+D & = & 1 \\ (x^1) & \to & A & = & 0 \\ (x^0) & \to & B & = & -2 \end{array}$$

cuya solución es $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$ y $D = 3$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2-2}{x^4+x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2+1} \qquad \square$$

Ejemplo 3.1.21 La siguiente función racional también es propia y por lo tanto no es necesario dividir los polinomios:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2}$$

El denominador ya está factorizado, así que podemos pasar directamente a escribir la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} =$$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$$

Sumamos la expresión de la derecha tomando el denominador inicial como mínimo común múltiplo y obtenemos la siguiente igualdad de numeradores

$$\begin{aligned} &6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1 = \\ &= A(x-1)(x+2)(x^2+x+1)^2 + B(x+2)(x^2+x+1)^2 + C(x-1)^2(x^2+x+1)^2 + \\ &\quad + (Dx+E)(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1) + (Fx+G)(x-1)^2(x+2) = \\ &= (A+C+D)x^6 + (3A+B+D+E)x^5 + (3A+4B-2D+E+F)x^4 + \\ &\quad + (A+7B-2C-D-2E+G)x^3 + (-3A+8B-D-E-3F)x^2 + \\ &\quad + (-3A+5B+2D-E+2F-3G)x + (-2A+2B+C+2E+2G) \end{aligned}$$

Por lo que, igualando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de siete ecuaciones lineales con siete incógnitas:

$$\left.\begin{array}{lcrcl} x^6 & \to & 0 & = & A+C+D \\ x^5 & \to & 6 & = & 3A+B+D+E \\ x^4 & \to & 16 & = & 3A+4B-2D+E+F \\ x^3 & \to & 22 & = & A+7B-2C-D-2E+G \\ x^2 & \to & 18 & = & -3A+8B-D-E-3F \\ x^1 & \to & 20 & = & -3A+5B+2D-E+2F-3G \\ x^0 & \to & -1 & = & -2A+2B+C+2E+2G \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} A & = & 1 \\ B & = & 3 \\ C & = & -1 \\ D & = & 0 \\ E & = & 0 \\ F & = & 1 \\ G & = & -2 \end{array}\right.$$

Por tanto, la descomposición final es:

$$\frac{6x^5+16x^4+22x^3+18x^2+20x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2}=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-2}{(x^2+x+1)^2}$$

$\square$

La importancia de la descomposición en fracciones simples en integración es que sus primitivas son fáciles de obtener, tal y como vemos en los siguientes ejemplos. De esta forma, junto con la propiedad de linealidad, la descomposición en suma de fracciones simples permite calcular las primitivas de cualquier función racional cuyo denominador se pueda factorizar.

Ejemplo 3.1.22

$$\int \frac{3}{2x-7}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{2}{2x-7}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\log|2x-7|+C$$ $\square$

Ejemplo 3.1.23

$$\int\frac{2}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x=2\int(x-3)^{-5}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{-4}(x-3)^{-4}=\frac{-1}{2(x-3)^4}+C$$ $\square$

Ejemplo 3.1.24 El denominador del integrando de $\displaystyle\int\frac{4x+1}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$ es irreducible; esta integral se resuelve mediante un cambio directo que deducimos fácilmente tras completar cuadrados en el denominador:

$$x^2-6x+10=(x-3)^2-9+10=(x-3)^2+1$$

De esta forma, el cambio adecuado es:

$$t=x-3,\quad x=t+3,\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$$

El desarrollo queda entonces como sigue:

$$\begin{aligned}\int\frac{4x+1}{x^2-6x+10}\mathrm{d}x&=\int\frac{4(t+3)+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\frac{4t+13}{t^2+1}\mathrm{d}t=\\&=2\int\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int\frac{13}{t^2+1}\mathrm{d}t=\\&=2\log(t^2+1)+13\operatorname{arctg}t=\\&=2\log(x^2-6x+10)+13\operatorname{arctg}(x-3)+C\end{aligned}$$ $\square$

Ejemplo 3.1.25 Las integrales de las funciones racionales simples del tipo

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

es decir, cuyo denominador es potencia de un polinomio irreducible de grado 2 y el numerador es una constante, necesitan un poco más de trabajo. Concretamente, vamos a partir de la misma integral, pero reduciendo en una unidad el exponente; esta integral se abordará con integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{x^2+1} &\implies& \quad \mathrm{d}u = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x &\implies& \quad v = x \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

La integral del segundo miembro "se asemeja" a la integral propuesta, por lo que, a partir de ella, con unas manipulaciones algebraicas podemos obtenerla fácilmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \end{aligned}$$

Ahora, basta con "despejar" la integral buscada y completar el cálculo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

En este ejemplo, sólo ha sido necesario aplicar el procedimiento una vez, pues la integral era de grado $n = 2$; en general, tendremos que aplicar el proceso sucesivas veces para reducir el exponente unidad a unidad. □

3.1.4.1. Funciones trigonométricas

En el primer tema, aprendimos a integrar las funciones del tipo $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$ obteniendo fórmulas que convierten estas expresiones en sumas de funciones cuyas integrales son inmediatas. Vamos a aprender a integrar en esta sección funciones más generales en las que intervienen la funciones seno y coseno. Concretamente, las *racionales en seno y coseno*, es decir, funciones cuya expresión se obtiene a partir de una función racional $R(t)$, en la cual cada variable t se sustituye por $\operatorname{sen} x$ o por $\cos x$. La expresión resultante se representa habitualmente por $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Por ejemplo, las siguientes expresiones son racionales en sen y cos:

$$\frac{3\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 5}{\operatorname{sen} x + 2}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos^2 x - 1}, \qquad \operatorname{tg} 2x;$$

mientras que estas otras no lo son:

$$\frac{x^3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{\cos x}}, \qquad \frac{\operatorname{sen} \cos x}{\cos^2 x}$$

Dependiendo de la paridad de la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ respecto del seno y el coseno, aplicaremos una de las siguientes sustituciones:

1. Si $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\operatorname{sen} x = t$.

2. Si $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se usará la sustitución $\cos x = t$.

3. Si $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, tomamos $t = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, de forma que
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4. En cualquier otro caso, y como último recurso, podemos usar la sustitución $t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$, de forma que
$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Todos estos cambios, reducen el problema a integrar una función racional.

Ejemplo 3.1.26 Naturalmente, la función R puede ser polinómica, que es un caso particular de racional. Por ejemplo, para calcular la integral $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, la tabla anterior recomienda el cambio

$$\cos x = t, \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2, \quad -\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

que conduce a una función polinómica:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int -(1-t^2)t^2 \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int (t^4 - t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C \qquad \square$$

Ejemplo 3.1.27 Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x}$ utilizamos el cambio de variable $\operatorname{tg}(x/2) = t$, ya que no es posible aplicar ninguno de los otros tres, y obtenemos una integral racional:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \, \mathrm{d}t = \int \frac{2}{(t-1)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{-2}{t-1} + C =$$
$$= \frac{2}{1-\operatorname{tg}(x/2)} + C = \frac{-2}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} - 1} + C = \frac{2(1+\cos x)}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1} + C \qquad \square$$

3.1.4.2. Funciones irracionales

En general, el objetivo de un cambio de variable es simplificar o transformar la expresión del integrando para llegar a otra expresión cuya primitiva podamos resolver por otro método conocido. Vemos en esta sección algunos ejemplos de funciones que contienen una expresión de la forma

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

En estos casos, el objetivo sería un cambio de variable que "elimine" la raíz cuadrada. Una forma sencilla de hacerlo se utilizando compleción de cuadrados para transformar el polinomio cuadrático y después utilizar las igualdades

$$\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1, \qquad \cosh^2 t-\operatorname{senh}^2 t=1.$$

para determinar el cambio adecuado.

Ejemplo 3.1.28 Vamos a calcular la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x$. Empezamos completando cuadrados:

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$$

Dado que los dos sumandos son positivos, tenemos que fijarnos en las funciones hiperbólicas, cuya relación se puede escribir

$$\cosh^2 t=1+\operatorname{senh}^2 t$$

De esta forma, el cambio adecuado parece ser $x-1=2\operatorname{senh} t$, ya que permite simplificar la raíz:

$$(x-1)^2+4=(2\operatorname{senh} t)^2+4=4(1+\operatorname{senh}^2 t)=4\cosh^2 t$$

Calculamos la diferencial y completamos la resolución:

$$x=1+2\operatorname{senh} t, \quad \mathrm{d}x=2\cosh t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=\\&=\int\frac{2\cosh t}{\sqrt{4\cosh^2 t}}\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}t=t=\operatorname{argsenh}\frac{x-1}{2}+\mathrm{C}\end{aligned}$$ □

Este tipo de sustituciones no son las únicas que permiten trabajar con funciones irracionales y muchos casos será conveniente recurrir a otros cambios menos intuitivos.

EJEMPLO 3.1.29 Vamos a calcular la integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$ utilizando la sustitución $x = \dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}t}{t^2}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}}{\dfrac{1}{t^4}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int -t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int -2t(1-t^2)^{1/2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{3/2} + \mathrm{C}$$

Obsérvese que la integral en t se ha resuelto como una integral inmediata. □

LECCIÓN 3.2

Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una ecuación donde la incógnita es una función y en la expresión aparecen derivadas de la función incógnita. Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta fundamental en la resolución de muchos problemas físicos y geométricos.

Si la incógnita es una función de una variable, decimos que la ecuación diferencial es *ordinaria* y, si la incógnita es un campo escalar decimos que la ecuación diferencial es *en derivadas parciales*. En esta lección solamente estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias.

EJEMPLO 3.2.1 La igualdad
$$x^2y' - xy = 4y',$$
es una ecuación diferencial ordinaria. Sobre la variable y, aparece el operador derivada, y por lo tanto, debe ser considerada la *incógnita* de la ecuación. Sus soluciones serán de la forma $y = \varphi(x)$, es decir, x es la *variable independiente*. La función

$$y = \varphi(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

es una solución de la ecuación, según comprobamos a continuación.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sqrt{x^2-4}\\
\varphi'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\\
x^2\varphi'(x) - x\varphi(x) &= \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}} - x\sqrt{x^2-4} = \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}}\\
4\varphi'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}}\\
x^2\varphi'(x) - x\varphi(x) &= 4\varphi'(x)
\end{aligned}$$
□

EJEMPLO 3.2.2 El cálculo de primitivas, que estudiamos en la lección anterior, constituye un método de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$y' = f(x),$$

pues el objetivo era encontrar una función $y = F(x)$ que verificase $y' = f(x)$. Por ejemplo, para encontrar una solución de la ecuación diferencial $y' = \operatorname{tg} x$ calculamos la siguiente integral

$$y = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\log|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
□

Un criterio de clasificación de las ecuaciones diferenciales es el orden de derivación más alto que interviene en la ecuación, y que llamamos *orden* de la ecuación. Así,

$$\begin{array}{ll} y''' + 4y = 2 & \text{es de orden 3,} \\ y'' = -32 & \text{es de orden 2,} \\ (y')^2 - 3y = \mathrm{e}^x & \text{es de orden 1,} \\ y - \operatorname{sen} y' = 0 & \text{es de orden 1.} \end{array}$$

En esta lección, estudiamos solamente las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, expresiones de la forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

en donde F es un campo escalar de tres variables.

Definición 3.2.3 *Decimos que una función $\varphi(x)$ es una solución de la ecuación $F(x, y, y') = 0$ en D si: $\varphi(x)$ es derivable en D y $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ para todo $x \in D$.*

Si consideramos la EDO de primer orden $y' + 2y = 0$, es fácil comprobar que todas las funciones de la forma

$$\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

son *soluciones* de dicha ecuación; esta expresión se denomina *solución general* de la ecuación. En algunas ocasiones, y debido a las manipulaciones que se realizan para resolver las ecuaciones, podrán existir otras soluciones que no entren en el esquema de las soluciones generales, estas soluciones se denominan *soluciones singulares*. Por ejemplo, la ecuación $y = xy' - (y')^2$ admite como solución general:

$$\varphi_C(x) = Cx - C^2, \quad C \in \mathbb{R},$$

pero la función $\varphi(x) = x^2/4$ también es una solución y no entra en el esquema de solución general anterior (ver figura 3.2).

Por los ejemplos que hemos visto hasta ahora, es evidente que, por lo general, una ecuación diferencial admite infinitas soluciones. Sin embargo, en los problemas reales, es habitual que se incluyan determinadas condiciones adicionales que restrinjan las posibles soluciones. Por ejemplo, un problema del tipo

$$y'' + 4y = 2, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1,$$

en el que fijamos el valor de la función y de su derivada en un punto, se denomina *problema de Cauchy* o *de condiciones iniciales*. La solución de un problema con condiciones iniciales se denominan *solución particular*.

Aunque siempre es posible plantearse la existencia de soluciones de una ecuación diferencial, sólo cabe la posibilidad de plantearse la unicidad de las mismas en los problemas de condiciones iniciales. Por ejemplo, la solución general de $y' + 2y = 0$ es $\varphi_C(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$; pero si le imponemos la condición inicial $y(0) = 2$, entonces la *única* solución del problema es $\varphi_2(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$.

Por lo tanto, en el estudio de ecuaciones diferenciales podemos distinguir dos problemas fundamentales:

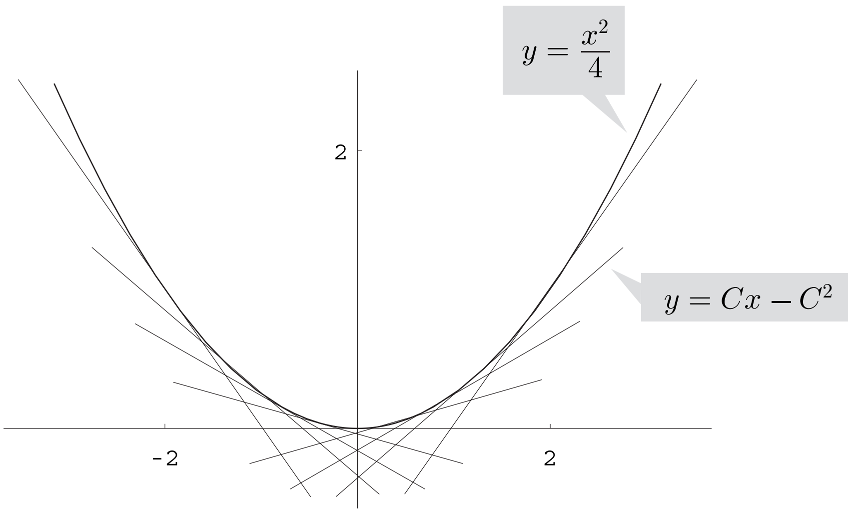


Figura 3.2: Soluciones de la ecuación $y = xy' - (y')^2$.

- Dada una ecuación diferencial con condiciones iniciales: ¿podemos afirmar que dicho problema tiene solución? y si dicho problema tiene solución, ¿es única?
- Dada una ecuación diferencial para la cual podemos afirmar que tiene solución, ¿cómo hallamos dicha solución?

El primer punto entra dentro del estudio teórico de la EDO. Aunque en el resultado siguiente solo vamos a analizar las cuestiones de existencia y unicidad, se pueden formular otro tipo de preguntas más especificas, pero que quedan fuera de los objetivos de este curso: ¿cuál es el mayor dominio que se puede considerar para la solución?, ¿existe alguna relación de dependencia entre las soluciones?, la dependencia de la solución general respecto de los parámetros ¿es continua?, ¿es diferenciable?,...

TEOREMA 3.2.4 *Consideremos el problema:*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

1. *Si f es continua en un conjunto de la forma $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, entonces el problema tiene solución definida en algún intervalo contenido en $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.*
2. *Si f es diferenciable y su parcial respecto de y es continua en un entorno de (x_0, y_0), entonces el problema tiene solución única en algún entorno de x_0.*

Es decir, si somos capaces de despejar la derivada de la incógnita y', en función de x e y, las propiedades de continuidad y diferenciabilidad se traducen en existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación. Una ecuación transformada en la forma $y' = f(x, y)$ se dice que está *resuelta respecto de la derivada.*

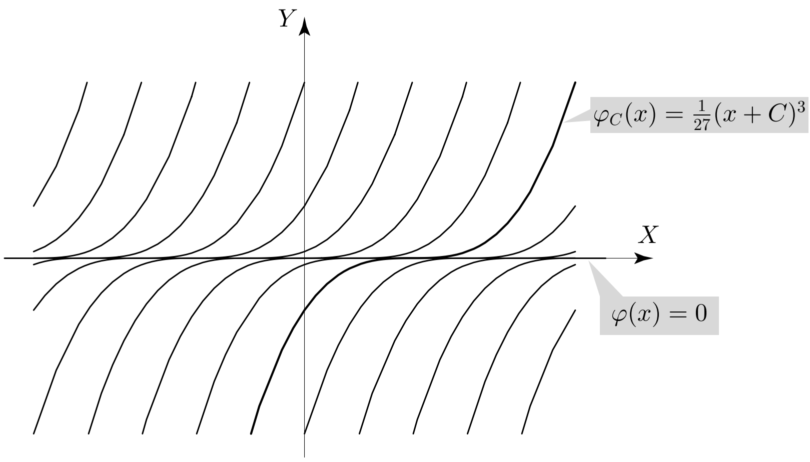


Figura 3.3: Soluciones de la ecuación $y' = y^{2/3}$

Ejemplo 3.2.5 Consideremos la ecuación

$$y' = y^2$$

La función nula es solución de esta ecuación (solución singular). Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{-1}{x+c} \qquad x \in (-\infty, -c) \cup (-c, \infty)$$

también son soluciones (solución general). Es fácil comprobar que cualquier problema de condiciones iniciales tiene solución entre alguna de las anteriores; finalmente, dado que la función $f(x, y) = y^2$ es diferenciable y sus parciales son continuas, la ecuación anterior tiene la propiedad de unicidad y por lo tanto podemos concluir que las soluciones anteriores son las únicas soluciones de la ecuación. □

Ejemplo 3.2.6 Consideremos la ecuación

$$y' = y^{2/3}$$

La función nula es solución de esta ecuación. Por otra parte, las funciones

$$\varphi_c(x) = \frac{1}{27}(x+c)^3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

son también soluciones (ver figura 3.3). Por tanto, esta ecuación no tiene la propiedad de unicidad en $\mathbb{R}^2$ pero sí tiene la propiedad de unicidad en los conjuntos $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ y $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ya que la función $f(x, y) = y^{2/3}$ es diferenciable en estos conjuntos y las parciales son continuas. □

En la secciones siguientes vamos a abordar la resolución de algunos tipos de ecuaciones. En general, el problema de encontrar las soluciones es bastante complicado;

como ocurre con el cálculo integral, sólo para algunos tipos de ecuaciones es posible obtener sus soluciones mediante métodos sencillos. Cuando no es posible determinar las soluciones analíticas se pueden aplicar técnicas de aproximación, pero estos métodos quedan fuera de los objetivos de este tema.

Los métodos se presentan como algoritmos de manipulación formal de las expresiones; algunos pasos de estos métodos pueden requerir condiciones adicionales sobre los dominios o sobre las funciones, así que *debemos asegurarnos de que tales condiciones se verifican, o bien de que tales manipulaciones pueden realizarse.*

Así mismo, algunas manipulaciones pueden alterar parcialmente los resultados finales: añadir soluciones, perder soluciones, restringir o ampliar el dominio,...: *debemos tener esto en cuenta en los problemas concretos, y hacer un estudio posterior en el que se aborden estas cuestiones.*

Por otra parte, debemos tener en cuenta que los métodos de resolución solo permitirán obtener una definición *implícita* de las soluciones. Es decir, transformarán la ecuación $F(x, y, y') = 0$ en otra ecuación equivalente (no diferencial) de la forma $U(x, y) = 0$; en este caso decimos que $U(x, y) = 0$ es la *solución implícita* de la ecuación.

3.2.1. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación de *variables separadas* es una ecuación de la forma

$$F(x) + G(y)y' = 0$$

Si, mediante operaciones algebraicas elementales, es posible transformar una ecuación en otra con la forma anterior, decimos que es una ecuación de *variables separables.*

Estas ecuaciones se resuelven de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcll}
F(x) + G(\varphi(x))\varphi'(x) & = & 0 & \text{(integración)} \\
\int (F(x) + G(\varphi(x))\varphi'(x))\,\mathrm{d}x & = & C & \text{(linealidad)} \\
\int F(x)\,\mathrm{d}x + \int G(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x & = & C & \text{(sustitución)} \\
\int F(x)\,\mathrm{d}x + \int G(y)\,\mathrm{d}y & = & C & \text{(primitiva)}
\end{array}$$

En el tercer paso hemos aplicado el método de sustitución utilizado el cambio de variable: $y = \varphi(x)$, $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Por lo tanto, si encontramos dos primitivas p y q de F y G respectivamente, las soluciones de la ecuación inicial verificarán la expresión implícita:

$$p(x) + q(y) = C$$

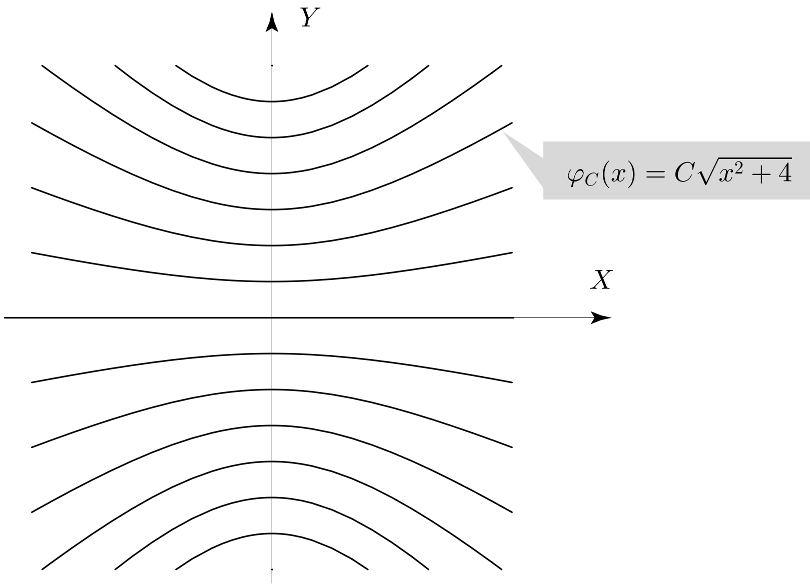


Figura 3.4: Soluciones de $(x^2+4)y' = xy$

Ejemplo 3.2.7 $(x^2+4)y' = xy$ es una ecuación de variables separables:

$$\frac{x}{x^2+4} = \frac{y'}{y}$$
$$\int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0$$
$$\frac{1}{2}\log(x^2+4) - \log|y| = C_1$$
$$|y| = \mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}$$
$$y = \pm\mathrm{e}^{-C_1}\sqrt{x^2+4}$$
$$y = C_2\sqrt{x^2+4} \qquad , \quad C_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Al separar las variables, en el primer paso de la resolución hemos efectuado una división por y, lo que excluye del proceso posterior las soluciones que se anulan en algún punto. Sin embargo, la función nula $y = 0$ es solución de la ecuación inicial y, por la propiedad de unicidad, la única que pasa por los puntos del eje de abcisas. Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\varphi_C(x) = C\sqrt{x^2+4} \quad , \quad C \in \mathbb{R} \qquad \square$$

3.2.2. Ecuaciones exactas

Una ecuación $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$ se dice *exacta* si existe un campo escalar U tal que $\nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, es decir,

$$\mathrm{D}_1U(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \mathrm{D}_2U(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

En tal caso, el campo U se denomina *potencial* de (P,Q) y la expresión

$$U(x,y) = C$$

define implícitamente las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned}
U(x,f(x)) &= C\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U(x,f(x))) &= 0\\
\frac{\partial U}{\partial x}(x,f(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,f(x))f'(x) &= 0\\
P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x) &= 0\\
P(x,y) + Q(x,y)y' &= 0
\end{aligned}$$

Pero, ¿cómo sabemos si una ecuación es exacta y cómo determinamos en tal caso su potencial? El lema de Poincaré responde a la primera pregunta y veremos en los ejemplos siguientes que el cálculo de primitivas es suficiente para determinar el potencial.

Teorema 3.2.8 (Lema de Poincaré) *Consideremos dos campos escalares P y Q, en $\mathbb{R}^2$ cuyo dominio es un conjunto en "forma de estrella". La ecuación $P(x,y) + y'Q(x,y) = 0$ es exacta si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.*

En este enunciado se exige que el dominio común de P y Q, D, tenga *forma de estrella*, es decir, que *exista un punto $(a,b) \in D$ de tal forma que los segmentos que unen este punto con cualquier otro del conjunto, está contenido en D*. En realidad, esta restricción no condiciona la aplicación del lema de Poincaré, solamente reduciría el conjunto en el cual podemos afirmar que existe solución. En la práctica, este análisis siempre lo haremos a posteriori, es decir, una vez resuelta una ecuación, debemos verificar siempre la validez de la misma y el dominio en el cual tal solución es válida.

Ejemplo 3.2.9 La ecuación

$$(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$$

es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(yx^2)$$

Para hallar el potencial, razonamos de la siguiente forma. Si $U(x,y)$ es el potencial de la ecuación, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = yx^2,$$

y por lo tanto,

$$U(x,y) = \int yx^2\,\mathrm{d}y + C.$$

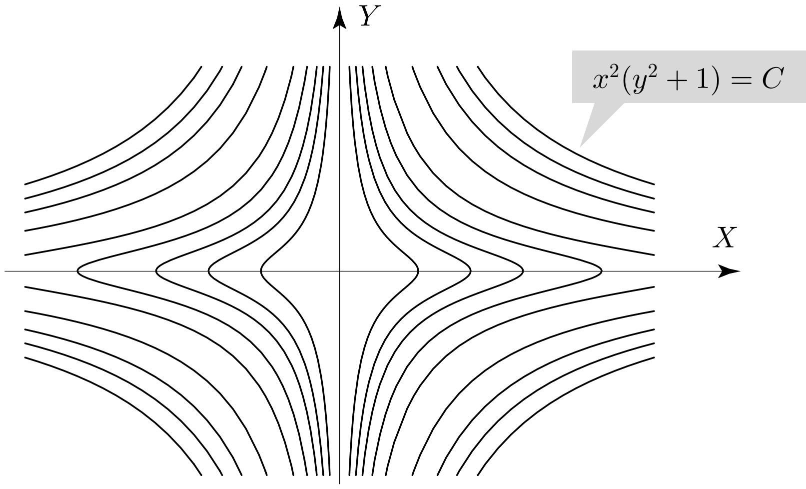


Figura 3.5: Soluciones de $(xy^2 + x) + (yx^2)y' = 0$

Ahora bien, dado que estamos trabajando con expresiones con dos variables y solo integramos respecto de y, debemos entender que la constante de integración puede incluir a la variable x; es decir, debemos considerar $C = \varphi(x)$.

$$U(x, y) = \int yx^2 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2x^2 + \varphi(x)$$

Para determinar una función $\varphi(x)$ (que no incluye a la variable y), utilizamos la otra parcial de U:

$$xy^2 + x = \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = xy^2 + \varphi'(x)$$

De la igualdad obtenida deducimos que $\varphi'(x) = x$, por lo que

$$\varphi(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$$

En consecuencia, podemos tomar $U(x, y) = \frac{1}{2}(y^2x^2 + x^2)$. Por lo tanto,

$$y^2x^2 + x^2 = C$$

es la solución general de la ecuación (ver figura 3.5). Podemos observar que $C \leq 0$ no define ninguna función y para $C > 0$ las funciones solución son:

$$f_C(x) = \sqrt{\frac{C}{x^2} - 1} \qquad g_C(x) = -\sqrt{\frac{C}{x^2} - 1}$$

También podemos observar que ninguna de las soluciones anteriores corta el eje de ordenadas; cualquier solución que pase por este eje debería ser una extensión de alguna solución f_C o g_C, lo cual es imposible, ya que estas funciones no pueden ser extendidas con continuidad al punto $x = 0$. □

3.2.3. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones de la forma

$$y' + p(x)y + q(x) = 0$$

se denominan *ecuaciones lineales de primer orden.* Si las funciones p y q son continuas y derivables, la ecuación tiene solución definida en la intersección de los dominios de las dos funciones y además, cada problema de Cauchy asociado a una ecuación lineal tiene solución única.

Si la función q es nula, decimos que la ecuación es *lineal homogénea* y estas ecuaciones son también ecuaciones en variables separables:

$$p(x)y + y' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y'}{y} = -p(x)$$

El método de resolución de las ecuaciones lineales se basa en los dos resultados que vemos a continuación.

Teorema 3.2.10 (Principio de superposición) *Si y_p es una solución (particular) de la ecuación lineal*

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{3.2}$$

e y_h es una solución de la ecuación homogénea asociada*, $y_h' + p(x)y_h = 0$, entonces*

$$y = y_p + Cy_h, \; C \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la ecuación inicial.

Ya hemos visto que las ecuaciones lineales homogéneas son ecuaciones en variables separables, que ya sabemos resolver. Por lo tanto, solo nos falta saber determinar una solución particular de cualquier ecuación lineal.

Teorema 3.2.11 (Conjetura de Lagrange) *Si y_h es una solución no nula de la ecuación $y_h' + p(x)y_h = 0$, entonces existe una función $c(x)$ tal que $y_p = c(x)y_h$ es solución (particular) de*

$$y' + p(x)y + q(x) = 0 \tag{3.3}$$

Vemos a continuación un ejemplo de cómo usamos estos resultados para resolver las ecuaciones lineales.

Ejemplo 3.2.12 Vamos a resolver la ecuación

$$y' - y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0 \tag{3.4}$$

1. En primer lugar, encontramos una solución (no nula) de la ecuación lineal homogénea asociada que es de variables separables:

$$\begin{aligned} y_h' - y_h \operatorname{sen} x &= 0 \\ \frac{y_h'}{y_h} &= \operatorname{sen} x \\ \log |y_h| &= -\cos x \\ y_h &= \mathrm{e}^{-\cos x} \end{aligned}$$

2. La conjetura de Lagrange establece que hay una solución particular de la ecuación inicial de la forma

$$y_p = c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}$$

Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial inicial podemos determinar $c(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right) - \left(c(x)\mathrm{e}^{-\cos x}\right) \operatorname{sen} x &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} + c(x) \operatorname{sen} x \mathrm{e}^{-\cos x} - c(x) \operatorname{sen} x \mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} &= -\operatorname{sen} x \\ c'(x) &= -\operatorname{sen} x \mathrm{e}^{\cos x} \\ c(x) &= \mathrm{e}^{\cos x} \end{aligned}$$

En este paso, siempre deberá simplificarse $c(x)$ y será posible despejar $c'(x)$ para poder calcular $c(x)$ mediante integración.

$$y_p = \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x} = 1$$

3. Por último, para obtenerla solución general

   - podemos utilizar el principio de superposición

$$\left.\begin{aligned} y &= y_p + C y_h \\ y_p &= 1 \\ y_h &= \mathrm{e}^{-\cos x} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \qquad y = 1 + C\mathrm{e}^{-\cos x}$$

   - o bien, podemos utilizar la conjetura de Lagrange, considerando la constante de la integración de $c'(x)$, así:

$$\left.\begin{aligned} c(x) &= \mathrm{e}^{\cos x} + C \\ y_p &= c(x)\,\mathrm{e}^{-\cos x} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \qquad \begin{gathered} y = \left(\mathrm{e}^{\cos x} + C\right)\mathrm{e}^{-\cos x} \\ y = 1 + C\mathrm{e}^{-\cos x} \end{gathered}$$

□

3.2.4. Cambios de variables

Las ecuaciones estudiadas hasta ahora, son ecuaciones básicas. Para resolver otro tipo de ecuaciones, se utilizarán diversas técnicas que las transformen en uno de estos tipos básicos. En los ejemplos que vemos a continuación haremos uso de *cambios de variables* para conseguir este objetivo.

Ejemplo 3.2.13 Una ecuación $y' = f(x,y)$ se dice que es homogénea si verifica $f(tx,ty) = f(x,y)$ para todo t. El cambio de variable $y = xu$ convierte estas ecuaciones en ecuaciones en variables separables, en donde, u será la nueva incógnita. Por ejemplo,

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{3.5}$$

es una ecuación homogénea. En este caso, $f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, por lo que

$$f(tx,ty) = \frac{ty}{tx} + \frac{tx}{ty} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = f(x,y)$$

Para completar la sustitución, nos hace falta determinar y', para lo que debemos recordar que la nueva variable u representa a una función:

$$y = xu \qquad \Longrightarrow \qquad y' = u + xu'$$

Realizamos el cambio de variable y completamos la resolución de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \\
u + xu' &= u + \frac{1}{u} \\
xu' &= \frac{1}{u} \\
uu' &= \frac{1}{x} \\
\int u\,\mathrm{d}u &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\frac{u^2}{2} &= \log|x| + C_1 \\
u^2 &= \log x^2 + C \\
\frac{y^2}{x^2} &= \log x^2 + C \\
y^2 &= x^2(\log x^2 + C)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.14 Vamos a resolver la ecuación $y' + \frac{y}{x} = xy^2$ utilizando el cambio de variable $y = 1/u$.

$$\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x} &= xy^2 \\
y = \frac{1}{u}, \quad y' &= \frac{-u'}{u^2} \\
\frac{-u'}{u^2} + \frac{1}{xu} &= \frac{x}{u^2} \\
u' - \frac{u}{x} &= -x
\end{aligned}$$

En este ejemplo, hemos llegado a una ecuación lineal en u que pasamos a resolver, empezando por la ecuación homogénea asociada.

$$\begin{aligned} u_h' - \frac{u_h}{x} &= 0 \\ \frac{u_h'}{u_h} &= \frac{1}{x} \\ \log|u_h| &= \log|x| \\ u_h &= x \end{aligned}$$

Hallamos ahora la solución particular de la forma $u_p = c(x)x$

$$\begin{aligned} u_p' - \frac{u_p}{x} &= -x \\ c'(x)x + c(x) - \frac{c(x)x}{x} &= -x \\ c'(x)x &= -x \\ c'(x) &= -1 \\ c(x) &= -x \\ u_p &= c(x)x = -x^2 \end{aligned}$$

Ya podemos completar el cálculo de la ecuación propuesta

$$\begin{aligned} u &= u_p + Cu_h = -x^2 + Cx \\ y &= \frac{1}{u} = \frac{1}{Cx - x^2} \end{aligned}$$

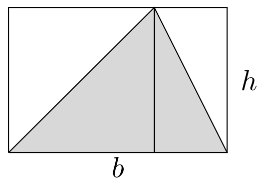
LECCIÓN 3.3

Aplicaciones del cálculo integral. Integral doble

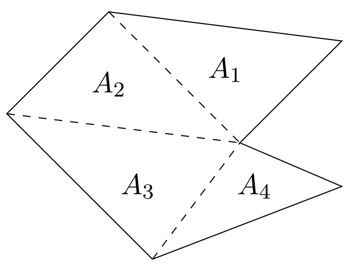
En esta lección vamos a presentar algunas aplicaciones del cálculo integral a partir de la definición de integral definida, algunas de ellas, ya conocidas. Pero el concepto más importante será el de integral doble, también introducido a partir de la integral definida.

3.3.1. Integración de funciones de una variable

El contenido de esta sección está dedicado a la *integral de Riemann* o *integral definida* de funciones de una variable. La aplicación de la integral al cálculo de áreas planas es el ejemplo más simple para entender este concepto, aunque las aplicaciones de la integral definida son múltiples, tanto en las matemáticas como en las distintas áreas de ingeniería.

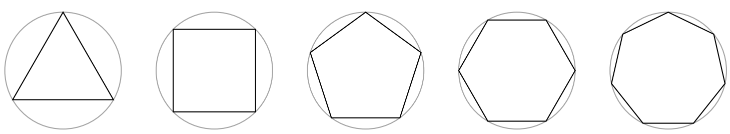


Seguramente el alumno recuerde toda una colección de fórmulas para calcular el área de polígonos. Todas esas fórmulas tienen como punto de partida la definición del área de un rectángulo: *el área de un rectángulo es el producto de sus dimensiones.* A partir de esta definición, podemos calcular el área de cualquier polígono. Por ejemplo, en la figura de la izquierda, podemos ver que el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$ (ya que el área de los dos triángulos sombreados, es igual al área de los dos triángulos sin sombrear). Además, el área de cualquier otra *región poligonal* se puede calcular dividiéndola en triángulos.

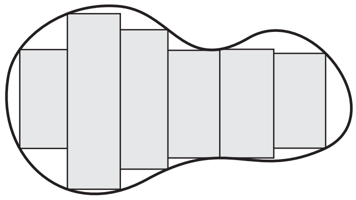


$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Pero, ¿cómo calculamos el área encerrada por una curva? No podemos obtener de forma directa una expresión para esa área, por lo que, en estos casos, buscamos un procedimiento para aproximar su valor. Por ejemplo, en la antigüedad, utilizaban polígonos regulares inscritos en un círculo para aproximar el valor de su área; cuantos más lados tomemos, mejor será esta aproximación.



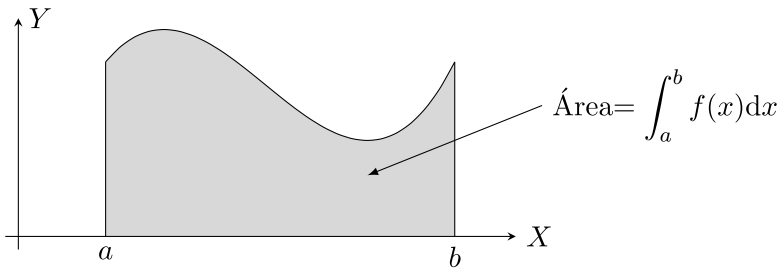
En una región arbitraria, también podemos utilizar este procedimiento, por ejemplo, inscribiendo franjas rectangulares para obtener aproximaciones que podemos mejorar tomandolas cada vez más estrechas.



De hecho, este es el punto de partida para definir las *sumas de Riemann*, que introducimos a continuación, y que son el fundamento de la *Integral de Riemann.*

3.3.1.1. Sumas de Riemann: integración numérica

Si f es una función positiva en el intervalo $[a, b]$, queremos calcular el área de la región comprendida entre el grafo de f, el eje OX y las rectas $X = a$ y $X = b$. Este área será la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$.



Con este modelo, podemos plantear fácilmente los cálculos necesarios para aproximar el valor de la integral como la suma de las áreas de varios rectángulos. Para describir estos rectángulos, elegimos un conjunto de puntos x_k, tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$

y puntos intermedios s_k tales que $x_{k-1} \leq s_k \leq x_k$, de tal forma que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ será la base de un rectángulo y $f(s_k)$ su altura. El área de cada rectángulo será $f(s_k)(x_k - x_{k-1})$ y por lo tanto, la aproximación del área de la región será la suma de las áreas de todos estos rectángulos, es decir

$$\sum_{k=1}^{m} f(s_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Esta aproximación corresponde a la región sombreada que podemos ver en la figura 3.6 y la expresión se denomina *Suma de Riemann.*

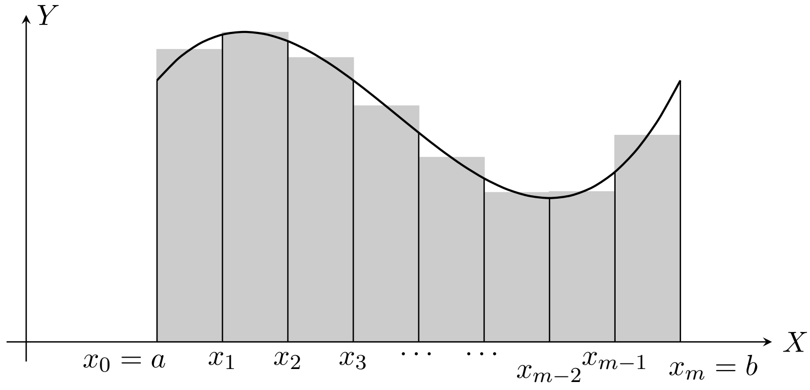


Figura 3.6: Aproximación del área bajo el grafo usando sumas de Riemann.

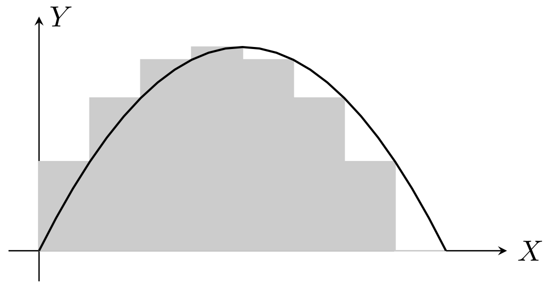


Figura 3.7: Aproximación del área del ejemplo 3.3.1.

Ejemplo 3.3.1 Consideremos la función $f(x) = 2x - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ y consideremos los puntos $x_k = \frac{k}{4}$, $s_k = \frac{k}{4}$ para cada $k = 0, 1, \ldots, 8$; con ellos, vamos a calcular una aproximación del área que queda debajo de la gráfica de f, según aparece en la figura 3.7. En primer lugar, observamos que, para cada $k = 1, \ldots, 8$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{k}{4} - \frac{k-1}{4} = \frac{1}{4},$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{m} f(s_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{8} f(\frac{k}{4})\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}(2\frac{k}{4} - \frac{k^2}{16}) =$$
$$= \frac{1}{4}((\frac{1}{2} - \frac{1^2}{16}) + (\frac{2}{2} - \frac{2^2}{16}) + (\frac{3}{2} - \frac{3^2}{16}) + (\frac{4}{2} - \frac{4^2}{16}) +$$
$$+ (\frac{5}{2} - \frac{5^2}{16}) + (\frac{6}{2} - \frac{6^2}{16}) + (\frac{7}{2} - \frac{7^2}{16}) + (\frac{8}{2} - \frac{8^2}{16})) = \frac{21}{16} \qquad \square$$

Las aproximaciones dadas por las sumas de Riemann pueden ser mejoradas aumentando el número de puntos, de forma que la amplitud de todos los subintervalos disminuya tendiendo a 0. Decimos que una función es integrable si, en estas condiciones, las sumas de Riemann convergen a un mismo valor y este valor se denomina *integral (definida)* de la función en el intervalo.

Ejemplo 3.3.2 Vamos a considerar nuevamente la función $f(x) = 2x - x^2$ del ejemplo anterior. Pero ahora, vamos a calcular las sumas de Riemann para una partición en n subintervalos iguales, es decir, de amplitud $\frac{2}{n}$, y tomando igualmente el extremo superior como punto intermedio de cada subintervalo; es decir, $s_{n,k} = x_{n,k} = \frac{2k}{n}$ para $k = 1, \dots, n$ y entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(s_{n,k})(x_{n,k} - x_{n,k-1}) &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(s_{n,k}) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k}{n}) = \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(2\frac{2k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}) = \\
&= \left(\left(\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right) - \left(\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\right) = \\
&= \left(\left(\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right) - \left(\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right) = \\
&= \frac{4n^2 - 4}{3n^2}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \lim \frac{4n^2 - 4}{3n^2} = \frac{4}{3} \qquad \square$$

En particular, las funciones continuas son integrables en cada intervalo cerrado contenido en su dominio y estas funciones serán con las que trabajaremos en el curso. Para calcular integrales definidas usamos el cálculo de primitivas (si es posible) y usamos las sumas de Riemann como método de aproximación. No obstante, debemos entender que la teoría asociada a las sumas de Riemann no es solo importante como método de aproximación, sino que además es la forma de probar que una magnitud puede definirse o calcularse mediante integrales: cualquier magnitud que se puede aproximar por sumas de Riemann de una función continua, tiene a la integral como valor exacto; más adelante, veremos algunos ejemplos intuitivos de estas ideas.

3.3.1.2. Regla de Barrow y propiedades

Ya hemos recordado en la primera lección de este tema el teorema fundamental de cálculo, que establece que si f es continua, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$. A partir de este teorema se deduce fácilmente la Regla de Barrow, que es la herramienta para cálculo de integrales basada en primitivas. Supongamos que G es cualquier primitiva de f, que habremos hallado usando los métodos vistos en la primera lección de este tema. Entonces F y G se diferencian en una constante,

$$G(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = C, \text{ para todo } x \in [a, b] \qquad (3.6)$$

En particular, tomando $x = a$ determinamos el valor de C:

$$C = G(a) - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = G(a)$$

y con él, ya podemos expresar el valor de la integral definida en terminos de G:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a).$$

De esta forma, hemos demostrado la regla de Barrow.

Teorema 3.3.3 (Regla de Barrow) *Si f es continua en $[a, b]$ y $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) \overset{\text{(Notación)}}{=} \Big[G(x)\Big]_a^b$$

Ejemplo 3.3.4 Vamos a calcular de nuevo el área de la región del ejemplo 3.3.2 usando la regla de Barrow:

$$\int_0^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \qquad \square$$

Ejemplo 3.3.5 El área de un círculo se puede calcular a partir de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si consideremos el intervalo $[0, r]$, la región entre el grafo de f y el eje OX es un cuarto de círculo y por lo tanto:

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

Hallamos en primer lugar la primitiva:

$$\begin{aligned}
A =& 4\int \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \\
& \Big[\ x = r \operatorname{sen}\theta\,,\ \mathrm{d}x = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\ \Big] \\
=& 4\int \sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, r\cos\theta\, d\theta = \\
=& 4\int r^2\cos^2\theta d\theta = 4r^2\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \\
=& 4r^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right) = r^2\left(2\theta + \operatorname{sen} 2\theta\right) = \\
=& r^2\Big(2\operatorname{arcsen}\frac{x}{r} + \operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen}\frac{x}{r})\Big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x &= \Big[r^2\Big(2\operatorname{arcsen}\frac{x}{r} + \operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen}\frac{x}{r})\Big)\Big]_0^r = \\
&= r^2\Big(2\operatorname{arcsen} 1 + \operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} 1)\Big) - r^2\Big(2\operatorname{arcsen} 0 + \operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} 0)\Big) = \\
&= r^2\Big(2\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} 2(\frac{\pi}{2})\Big) = \pi r^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

Debemos insistir en que el hecho de tener un resultado tan potente como la Regla de Barrow para calcular integrales definidas, no debe llevarnos a la conclusión errónea de que podemos olvidar la definición de integral. De hecho, la regla de Barrow solo es útil para aquellas funciones que admiten una primitiva *expresable en términos de funciones elementales*, y ya sabemos que no todas las funciones continuas admiten este tipo de primitivas.

Teorema 3.3.6 (Linealidad de la integral) *Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces:*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema 3.3.7 (Propiedad de aditividad) *Sea f una función continua en $[a,b]$ y $c\in[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Tal y como hemos definido la integral, en el operador $\displaystyle\int_a^b$ es necesario que $a\le b$. Para flexibilizar los cálculos, es conveniente admitir la situación inversa.

Definición 3.3.8 *Si f es continua en $[a,b]$, definimos la integral $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ como:*

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esta definición se hace así para que la extensión del operador siga verificando la propiedad de aditividad

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

A continuación, vamos a dar los enunciados de los teoremas de cambio de variable e integración por partes, pero para integrales definidas. Si utilizamos estos métodos para calcular integrales definidas, es preferible usarlos tal y como los enunciamos a continuación ya que, como veremos en los ejemplos, su aplicación simplifica los cálculos necesarios.

Teorema 3.3.9 (Cambio de variable directo) *Supongamos que g' es continua y en $[a,b]$ y que f es continua y biyectiva entre $g(a)$ y $g(b)$, entonces:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Corolario 3.3.10 (Cambio de variable inverso) *Sea f una función continua en $[\alpha, \beta]$. Consideremos una función $g\colon I \to [\alpha, \beta]$ biyectiva, continua y con primera derivada continua. Entonces,*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

Obsérvese que, en este teorema, hemos incluido, como condición necesaria, que el cambio de variable esté dado por una función biyectiva, es decir, monótona en el intervalo de integración.

Ejemplo 3.3.11 Vamos a repetir el cálculo del área de un círculo de radio r, que hicimos anteriormente, pero de forma más simple por la ayuda del resultado anterior:

$$\begin{aligned}
A =& 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \\
& \left[\begin{array}{l} x = r\operatorname{sen}\theta \text{ (esta función es creciente en } [0, \pi/2]) \\ \mathrm{d}x = r\cos\theta d\theta \\ x_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \operatorname{arcsen} 0 = 0 \\ x_1 = r \Rightarrow \theta_1 = \operatorname{arcsen}\frac{r}{r} = \operatorname{arcsen} 1 = \pi/2 \end{array}\right. \\
=& 4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\theta d\theta = 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \\
=& 4r^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4r^2\frac{\pi}{4} = \pi r^2
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.12 (Integración por partes) *Sean f y g dos funciones tales que f' y g' son continuas, entonces:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Ejemplo 3.3.13 Utilizamos el resultado anterior para calcular la siguiente integral definida

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \log\operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$$

Para ello, utilizamos el cambio de variable

$$t = \operatorname{sen} x, \quad \mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x$$

Los límites de integración se modifican de la siguiente forma: para $x = \pi/6$, el valor de t es $1/2$, mientras que para $x = \pi/2$ el valor de t es 1.

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \log\operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \log t\, \mathrm{d}t \\
&\qquad \left[\begin{array}{l} u = \log t \Longrightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \Longrightarrow v = t \end{array}\right. \\
&= \Big[t\log t\Big]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \mathrm{d}t = \frac{-\log(1/2)}{2} - \Big[t\Big]_{1/2}^1 = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3.3.1.3. Aplicaciones del cálculo integral

El cálculo integral tiene numerosas aplicaciones en física, química, medicina, economía, etc. Pero especialmente en las ingenierías y, por supuesto, en la informática: en la fabricación de chips, la miniaturización de componentes internos, la administración de las compuertas de los circuitos integrados, la compresión y digitalización de imágenes, sonidos y vídeos, o la investigación en inteligencia artificial, entre otras.

En este tema ya hemos aplicado el cálculo de primitivas a la resolución de ecuaciones diferenciales. En esta sección veremos algunas aplicaciones más del cálculo integral y otras muchas aparecen en los propios ejercicios autocontenidos de las relaciones de problemas que se incluyen al final del tema.

Área de regiones planas

Aunque hemos utilizado el cálculo de áreas de regiones planas para motivar el concepto de integral, debemos tener en cuenta que una integral se identifica con un área solo si el integrando es una función positiva.

Si f es una función continua y positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces el valor del área de la región comprendida entre el grafo de f y el eje OX en dicho intervalo viene dada por la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pero, ¿qué pasa si la función no es positiva? En ese caso, será necesario considerar el valor absoluto de la función

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Y, en general, si la región está comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces su área queda determinada por el valor de la integral

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo 3.3.14 Para calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $\operatorname{sen}(x)$ y el eje X en un periodo de 2π planteamos la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = 2 + 2 = 4$$

Obsérvese (ver figura 3.8) que la simetría de la función $\operatorname{sen}(x)$ nos hubiese permitido calcular el área de toda la región a partir de área de su mitad, de la siguiente manera:

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 = 4$$

Por último, observemos que si hubiésemos olvidado el valor absoluto, el resultado de la integral hubiese sido 0. ¿Por qué este resultado? ¿Qué habría ocurrido? □

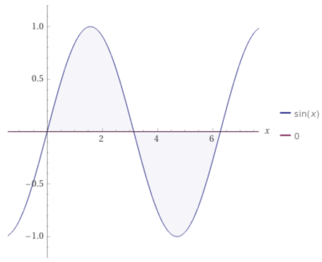


Figura 3.8: Área entre sen(x) y el eje X entre 0 y 2π
@2020 Wolfram Alpha LLC.

Ejemplo 3.3.15 Para calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ y $g(x) = 3x + 1$ primero calculamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones resolviendo la ecuación:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 3x + 1 \quad \longrightarrow \quad x = -2, 0, 1$$

y planteamos la siguiente integral:

$$\int_{-2}^{1} |(x^3 + x^2 + x + 1) - (3x + 1)| \, \mathrm{d}x$$

que resolvemos teniendo en cuenta el signo de la diferencia de funciones para que el integrando sea siempre positivo

$$\int_{-2}^{0} (x^3+x^2+x+1) - (3x+1) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (3x+1) - (x^3+x^2+x+1) \, \mathrm{d}x = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

Para resolver estos ejercicios resulta muy útil disponer de la representación gráfica de las funciones que intervienen (ver figura 3.9). □

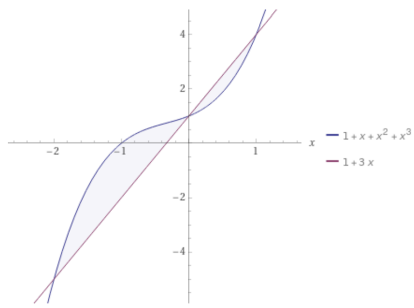


Figura 3.9: Área entre $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ y $g(x) = 3x + 1$
@2020 Wolfram Alpha LLC.

Integrales impropias.

En general, decimos que una integral definida es impropia si la función del integrando no está definida en algún punto del dominio de integración o éste no es acotado. Para abordar este tipo de integrales tenemos que fijarnos en primer lugar en los casos más simples, es decir, aquellos en los que la función no está definida exactamente en un punto.

DEFINICIÓN 3.3.16 *Sea f una función continua en $[a, +\infty)$. La integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ se define como*

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define $\displaystyle\int_{-\infty}^a f$*

DEFINICIÓN 3.3.17 *Sea f una función continua en $[a, b)$ y no definida en b. La integral impropia $\displaystyle\int_a^b f$ se define por*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b} \int_a^x f$$

Decimos que la integral converge *si este límite existe y es un número real. De forma análoga se define $\displaystyle\int_a^b f$ si f es continua en $(a, b]$ y no definida en a.*

La regla de Barrow se extiende fácilmente a la evaluación de integrales impropias. Por ejemplo, si F es una primitiva de f en el intervalo $[a, +\infty)$, entonces:

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} (F(x) - F(a)) \underset{\text{(Notación)}}{=} \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty}$$

EJEMPLO 3.3.18
Vamos a calcular dos integrales impropias de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x} + 1) = 1$$
$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{1} = \lim_{x\to 0^+} (-1 + \frac{1}{x}) = +\infty$$

Obsérvese que la primera integral impropia es convergente y que la segunda integral impropia es divergente. □

TEOREMA 3.3.19 *Si f es una función continua y no negativa, entonces cada uno de los tipos básicos de integrales impropias o bien convergen a un número real c o bien divergen a ∞.*

Las definiciones anteriores solo recogen los casos en que la integral es impropia en uno de los límites de integración, pero también podemos considerar *integrales impropias en los dos límites de integración o en un punto interior*. En estos casos, la definición de convergencia se apoya en la propiedad de aditividad, que permite reducir su estudio a los casos básicos. Por ejemplo, si f es continua en $(a, +\infty)$ y no esta definida en a, decimos que la integral impropia $\int_a^\infty f$ converge si para algún $b > a$, las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_b^\infty f$ son básicas y convergen; en tal caso

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

Análogamente se define la convergencia del resto de integrales impropias.

Ejemplo 3.3.20 La integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ es impropia en los dos límites de integración; elegimos el punto 1 dentro de su dominio para escribir:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

En el ejemplo 3.3.18, hemos estudiado la convergencia de los dos sumandos y hemos visto que el primero no es convergente. Por lo tanto, la integral en el intervalo $(0, +\infty)$ no es convergente. □

Ejemplo 3.3.21 La integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ es impropia en un punto interior, el punto $x = 0$, que utilizamos para escribir:

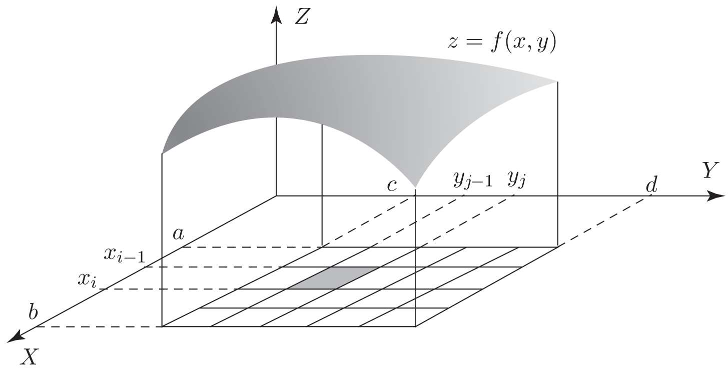
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

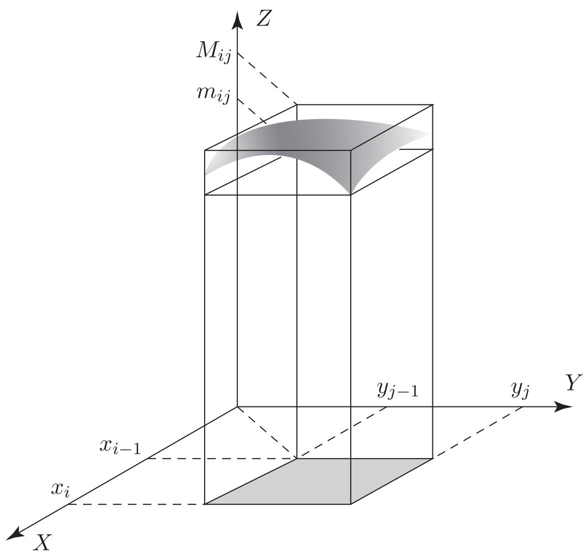
En el ejemplo 3.3.18, hemos estudiado la convergencia del segundo sumando que resultaba ser divergente y, por lo tanto, nuestra integral impropia es divergente, independientemente de la convergencia o no del primer sumando, que ne este caso también resultaba ser divergente. □

3.3.2. Integración doble

Consideremos un campo escalar $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positiva y acotada en el *rectángulo* $R = [a, b] \times [c, d]$. De la misma forma que para las funciones de una variable utilizábamos rectángulos, ahora podemos intentar aproximar el volumen de la región que queda entre el grafo de f y el plano XY tomando prismas.

La manera más simple de hacerlo es tomando particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ y considerando, como base de los prismas, los rectángulos que forman:





Podemos tomar aproximaciones por defecto (o por exceso) considerando como altura del prisma, los valores mínimo (o máximo) en cada rectángulo $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, o tomar una suma de Riemann usando como altura el valor de la función evaluando en cualquier punto interior:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(t_i, s_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

siendo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $1 \le i \le n$ y $s_j \in [y_{j-1}, y_j]$ para todo $1 \le j \le m$.

Como para las funciones de una variable, para mejorar estas aproximaciones basta con tomar más puntos en las particiones, de forma que las áreas de los rectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ disminuyan tendiendo a 0. Diremos que el campo es integrable si, en estas condiciones, las sumas de Riemann convergen a un mismo valor, que denominamos integral de f en la región $R = [a, b] \times [c, d]$:

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\text{Área}(R_{ij})\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(t_i, s_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Si el campo es positivo en la región, esta integral es el volumen de la región que queda entre el grafo y el plano XY. En este curso, solo vamos a trabajar con campos continuos, que en particular son integrables, en cualquier región contenida en su dominio.

No vamos a abordar en este curso las integrales de campos de tres o más variables, aunque teóricamente su definición no supone ninguna dificultad. Como veremos a lo largo del tema, el calculo de las integrales múltiples se sustenta en el cálculo de primitivas y en el estudio y transformación de las regiones de integración y por lo tanto, el nivel de dificultad que aporta el aumento de las variables no está en el propio concepto de integral sino en la manipulación de regiones y objetos en el espacio.

3.3.2.1. Teorema de Fubini. Consecuencias

La definición de integral que hemos dado más arriba establece la forma de saber qué magnitudes pueden ser calculadas con la integral de una función, pero no constituye un método efectivo de cálculo. El teorema de Fubini, que enunciamos a continuación, establece la relación entre integrales dobles e integrales de una variable, por lo que, usando conjuntamente con la regla de Barrow, nos da un método de cálculo de integrales basado en el cálculo de primitivas.

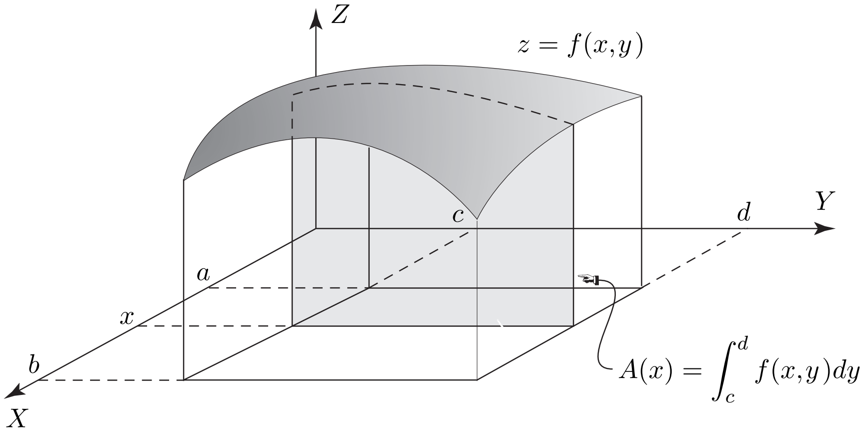
Teorema 3.3.22 (de Fubini) *Sea $f\colon R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces:*

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

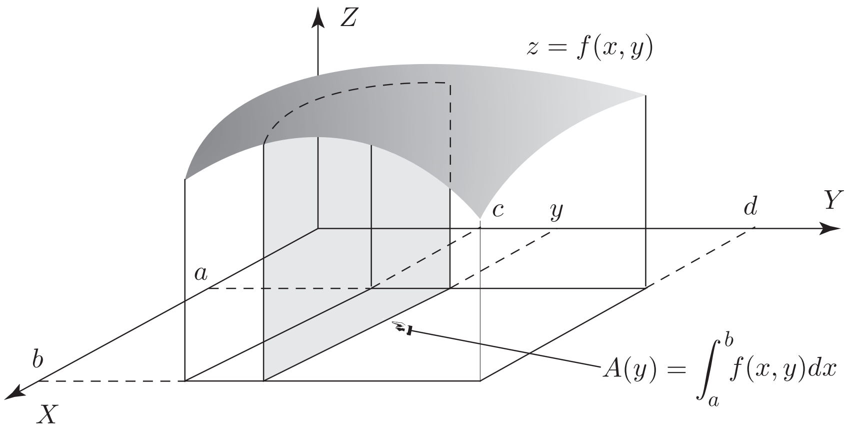
y, abusando de la notación, si no se presta a error, escribiremos

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Como podemos ver en las figuras de la página 172, las igualdades dadas por el Teorema de Fubini se pueden obtener como consecuencia de un método para el cálculo de volúmenes, conocido como el método de las secciones, que nos proporciona dos formas de calcular la integral sobre recintos rectangulares, según el orden de integración de las variables que consideremos.



$$\iint\limits_R f(x,y) = V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$



$$\iint\limits_R f(x,y) = V = \int_c^d A(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Figura 3.10: Justificación del teorema de Fubini usando el cálculo de volúmenes por el método de las secciones.

Ejemplo 3.3.23 Vamos a calcular la integral $\displaystyle\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ con $R = [0,1]\times[0,2]$ aplicando el Teorema de Fubini, de la siguiente manera

$$\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_0^1 (2x+y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^2 \Big[x^2+yx\Big]_{x=0}^1 \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2 (1+y)\mathrm{d}y = \left[y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^2 = 4$$

Según el Teorema de Fubini, sobre los recintos rectangulares, un simple cambio en el orden de integración de las variables nos proporciona otra forma de calcular la integral:

$$\iint_R (2x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ldots = 4$$ □

La ventaja de disponer de dos formas de calcular la integral sobre recintos rectangulares (Teorema de Fubini) es que podemos elegir el orden de integración cuando ambos modos no tengan la misma dificultad o cuando, para alguno de ellos, no sea posible calcular la primitiva.

Ejemplo 3.3.24 Veamos que la integral $\displaystyle\iint_R y\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ con $R = [0,1]\times[0,\pi]$ se calcula bien sólo por una de las dos alternativas que proporciona el Teorema de Fubini.

Todo funciona bien si elegimos y como variable independiente

$$\iint_R y\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_0^1 y\cos(xy)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^\pi \Big[\mathrm{sen}(xy)\Big]_{x=0}^1 \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^\pi \mathrm{sen}(y)\,\mathrm{d}y = \Big[-\cos(y)\Big]_{y=0}^\pi = 2$$

Sin embargo, si elegimos x como variable independiente

$$\iint_R y\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^\pi y\cos(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ldots[\text{por parte}]\ldots$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{x}\,\mathrm{sen}(xy) + \frac{1}{x^2}\cos(xy)\right]_{y=0}^\pi \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\pi}{x}\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{1}{x^2}\cos(\pi x) - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

llegamos a una primitiva que no podemos expresar en términos de funciones elementales, en concreto, el primer sumando es una función que no admite una primitiva en términos de funciones elementales. □

Hasta ahora, todas las regiones de integración han sido rectangulares, pues así se considera en el Teorema de Fubini pero, naturalmente, trabajar con dominios rectangulares es una restricción demasiado fuerte; el siguiente resultado introduce la herramienta para trabajar con campos en cualquier dominio.

Teorema 3.3.25 *Sea D un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo escalar continuo y acotado en D. Sea R un rectángulo tal que $D \subset R$ y consideremos el campo*

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Entonces, el campo $\bar{f}$ es integrable en R y su integral se toma como definición de la integral de f en D:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{(def.)}}{=} \iint_R \bar{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Por ejemplo, supongamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ está limitado por los grafos de las funciones $\varphi_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal y como se muestra en la figura 3.11, entonces, considerando la función $\bar{f}$ definida en el teorema anterior:

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^d \bar{f}(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_c^{\varphi_1(x)} 0 \cdot \mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi_2(x)}^{d} 0 \cdot \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

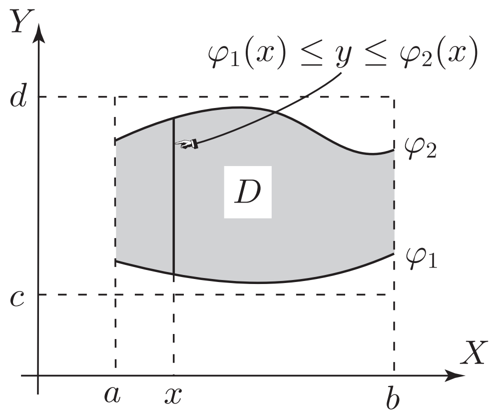


Figura 3.11: Región limitada por dos grafos.

Y, de igual manera, se podría plantear el problema de una región D limitada por los grafos de las funciones $x = \varphi_1(y)$ y $x = \varphi_2(y)$ definidas en el intervalo $[c,d]$.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

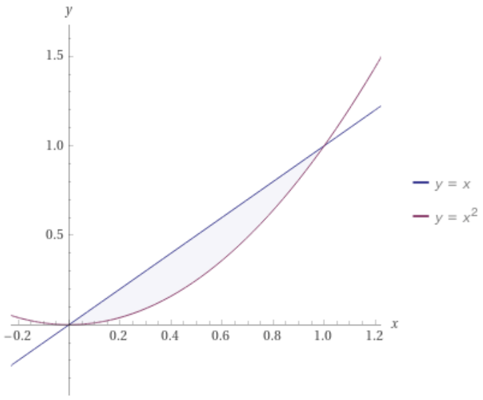


Figura 3.12: Region de integración del ejemplo 3.3.26
@2021 Wolfram Alpha LLC.

Ejemplo 3.3.26 Vamos a calcular la integral doble $\iint_D x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, siendo D la región del primer cuadrante que se representa en la figura 3.12, delimitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

En primer lugar, tenemos que determinar los límites de integración y, después, aplicaremos el teorema 3.3.25 para calcular la integral. Pero veamos que, en este caso, tenemos dos forma de abordar el problema:

- Si consideramos que x es la variable independiente entonces

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & x & \leq & 1 \\ x^2 & \leq & y & \leq & x \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \iint_D x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

- Si consideramos que y es la variable independiente entonces

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & y & \leq & 1 \\ y & \leq & x & \leq & \sqrt{y} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \iint_D x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

y, en ambos casos, el resultado es el mismo:

- $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \, \mathrm{d}x = \frac{3}{35}$
- $\displaystyle\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right]_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \ldots = \frac{3}{35}$

Obsérvese que, en este caso, ha sido sencillo calcular la integral de las dos formas. Sin embargo, al igual que ocurría sobre las regiones rectangulares, las primitivas que resultan en cada una de las dos formas de abordar el problema no siempre tienen la misma dificultad e incluso, es posible que con alguna de ellas no sea posible calcular la integral. Por tanto, es importante conocer las dos formas para poder elegir, en cada caso, el orden de integración más adecuado. □

La integral doble, también verifica las propiedades de linealidad y de aditividad.

Teorema 3.3.27 *Sean f y g campos escalares integrables sobre $D \subset \mathbb{R}^2$ y $c, k \in \mathbb{R}$.*

1. *Linealidad:*

$$\iint_D (c \cdot f(x,y) + k \cdot g(x,y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = c \cdot \left(\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right) + k \cdot \left(\iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right)$$

2. *Aditividad: Si $D = D_1 \cup D_2$ y Área$(D_1 \cap D_2) = 0$,*

$$\iint_D f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \left(\iint_{D_1} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right) + \left(\iint_{D_2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right)$$

3.3.2.2. Teorema de cambio de variable

El teorema de Fubini es la herramienta fundamental para el cálculo de integrales múltiples, sin embargo, hemos podido observar que su aplicación no es sencilla si la región de integración no es rectangular. Los cambios de variable nos van a permitir utilizar descripciones más simples de una región. Por ejemplo, mientras que un círculo de radio a centrado en $(0,0)$ en coordenadas cartesianas se describe por $-\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$, en coordenadas polares se describe simplemente por $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Para hacer esta descripción alternativa, hemos usado la aplicación

$$\boldsymbol{T}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$$

que convierte las *coordenadas polares* en *coordenadas cartesianas*, según se muestra en la figura 3.13. Esta aplicación tiene su origen e imagen en $\mathbb{R}^2$, es decir, es un *campo vectorial*.

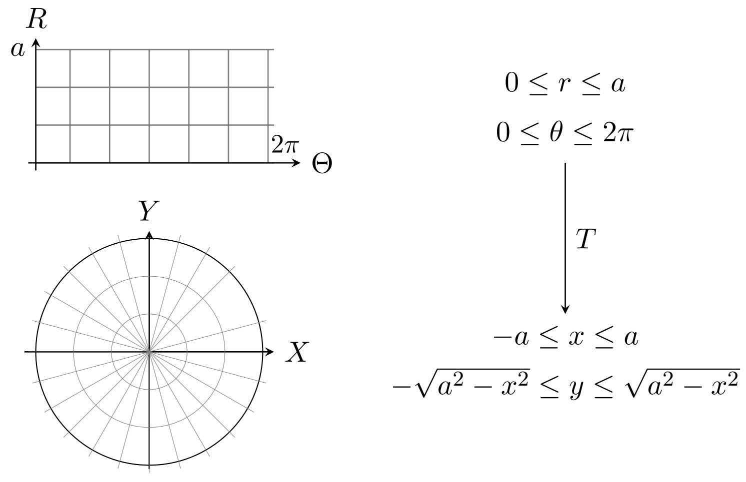


Figura 3.13: Cambio de variable a coordenadas polares.

Para poder enunciar el teorema de cambio de variable necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Definición 3.3.28 *Un campo vectorial es una aplicación cuyo dominio está contenido en un espacio* $\mathbb{R}^n$ *y su imagen lo está en otro espacio* $\mathbb{R}^m$*; es decir, responde al esquema* $\boldsymbol{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Un campo vectorial está determinado por* m *campos escalares:* $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$.

En el teorema de cambio de variable, utilizaremos campos vectoriales continuos y diferenciables, es decir, sus componentes son campos escalares continuos y diferenciables. La *diferencial* de estos campos se puede estudiar formalmente siguiendo un esquema similar al utilizado para los campos escalares, llegando a la conclusión de que la matriz de esta aplicación lineal se puede expresar a partir de los gradientes de sus componentes según establece la siguiente definición. Los detalles de estas comprobaciones quedan fuera de los objetivos del curso y de las necesidades de este tema.

Definición 3.3.29 *Si* $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$ *es diferenciable en* $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Dom}(f)$*, llamamos* matriz jacobiana *de* $\boldsymbol{f}$ *en* $\boldsymbol{a}$ *a la matriz:*

$$J\boldsymbol{f}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.3.30 Vamos a calcular la matriz jacobiana del campo vectorial

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (3x^2 - y, 2xz - 3y, x - yz^2)$$

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -1 & 0 \\ 2z & -3 & 2x \\ 1 & -z^2 & -2yz \end{pmatrix}$$ □

Ya tenemos los elementos necesarios para enunciar el teorema de cambio de variable.

Teorema 3.3.31 *Sea* $F\colon \boldsymbol{T}(D) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar continuo, siendo* D *cerrado y acotado. Sea* $\boldsymbol{T}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial biyectivo, salvo en un subconjunto de área nula, diferenciable y con las derivadas parciales continuas. Entonces:*

$$\iint_{\boldsymbol{T}(D)} F = \iint_D (F \circ \boldsymbol{T}) |\det(J\boldsymbol{T})|$$

Mientras que para las integrales de una variable, este teorema se utiliza fundamentalmente para el cálculo de primitivas para simplificar la función a integrar, en la integración múltiple lo utilizaremos fundamentalmente para describir de forma más sencilla la región de integración.

Ejemplo 3.3.32 Hemos mostrado más arriba el cambio a coordenadas polares:

$$\boldsymbol{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Veamos como se transforma una integral al aplicar este cambio de variables. En primer lugar, calculamos el jacobiano de $\boldsymbol{T}$:

$$J\boldsymbol{T}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es:

$$|\det(J\boldsymbol{T}(r,\theta))| = |r|$$

y la fórmula de cambio de variable queda:

$$\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\boldsymbol{T}^{-1}(D)} F(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

En la integral de la izquierda, D representa a la región de integración descrita en coordenadas cartesianas, mientras que, en la integral de la derecha, $\boldsymbol{T}(D)$ representa a la misma región pero descrita en coordenadas polares. □

Ejemplo 3.3.33 La integral doble $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ siendo D el sector circular del primer cuadrante delimitado por las rectas $y = x$ y $x = 0$ y la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ se puede plantear en coordenadas cartesianas

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & \le & x & \le & \sqrt{2}/2 \\ x & \le & y & \le & \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} \quad\to\quad \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}/2}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

pero es mucho más sencillo plantearlo en coordenadas polares

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & \le & r & \le & 1 \\ \pi/4 & \le & \theta & \le & \pi/2 \end{array}\right\} \quad\to\quad \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

no sólo porque las primitivas que hay que calcular son más sencillas, sino porque la región de integración es "rectangular" (límites de integración constantes) y, por lo tanto, nos permite intercambiar fácilmente los límites de integración, si fuera necesario. □

Por último, veamos otro ejemplo del cambio de variable, distinto al de coordenadas polares.

Ejemplo 3.3.34 Calculemos la integral $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en donde D es la región del primer cuadrante delimitada por las parábolas, $y = x^2+4, y = x^2, y = 6-x^2, y = 12-x^2$, según se muestra en la figura 3.14.

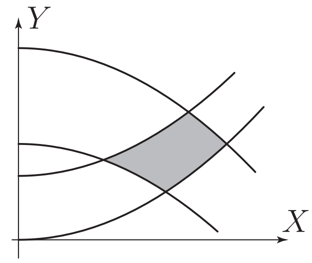


Figura 3.14: Región de integración en el ejemplo 3.3.34.

En este caso, cada par (u, v) tal que $u \in [6, 12]$, $v \in [0, 4]$, determina un único punto de la región, determinado por las siguientes ecuaciones

$$y = x^2 + v, \quad y = u - x^2$$

Esto permite obtener un cambio de variable de $[6, 12] \times [0, 4]$ en D:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(u - v)}, \qquad y = \frac{1}{2}(u + v)$$

Utilizamos entonces el cambio $\boldsymbol{T}(u, v) = (\sqrt{\frac{1}{2}(u - v)}, \frac{1}{2}(u + v))$, para calcular la integral propuesta

$$\mathrm{Det}(J\boldsymbol{T}(u, v)) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u - v}} & \dfrac{-\sqrt{2}}{4\sqrt{u - v}} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u - v}}$$

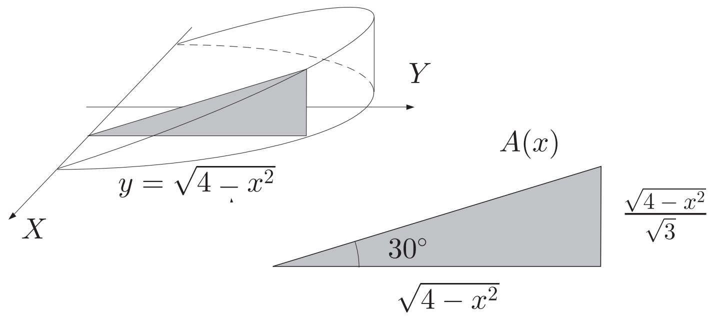
$$\begin{aligned} \iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{T^{-1}(D)} \frac{\sqrt{u - v}(u + v)}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u - v}} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 \int_6^{12} (u + v) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{8} \int_0^4 \left[\frac{u^2}{2} + vu \right]_{u=6}^{12} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 (54 + 6v) \mathrm{d}v = \frac{1}{8} \left[54v + 3v^2 \right]_{v=0}^{4} \mathrm{d}v = 33 \end{aligned}$$ □

3.3.2.3. Aplicaciones geométricas de la integral doble: Volúmenes y Áreas

El siguiente resultado establece la propiedad de las integrales dobles que motivó su estudio para el cálculo de volúmenes.

TEOREMA 3.3.35 *Consideremos un campo escalar $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es positivo y acotado en D. Entonces, la integral $\iint_D f(x, y)$ es el valor del volumen del sólido comprendido entre el grafo de f en D y el plano XY.*

EJEMPLO 3.3.36 Podemos calcular el volumen de la cuña que se obtiene cortando un tronco (cilíndrico) de radio 2 dm dando dos cortes con una sierra mecánica que llegan hasta el centro del tronco; uno de los cortes se hace perpendicular y el otro formando un ángulo de 30° con el primero:



Ahora, utilizando una integral doble, la cuña es la región que queda entre el grafo del campo $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$ y el plano OX en el dominio D definido por $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\left[\frac{y^2}{2\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{9}\sqrt{3}
\end{aligned}$$ □

Si en este teorema 3.3.35 consideramos la función constante $f(x,y) = 1$, obtenemos como consecuencia una forma sencilla de expresar el área de una región plana arbitraria a partir de la integral doble:

$$\text{Área}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

El uso de las técnicas presentadas en las secciones anteriores nos permitirá abordar el cálculo del área de regiones cuyas representaciones como integrales de una variable sería más compleja.

Ejemplo 3.3.37 El área de la región D en el primer cuadrante encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$ se podría calcular como aplicación del cálculo integral que vimos en la sección 3.3.1.3 pero también podemos utilizar la integral doble, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(D) &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$ □

Y, en el siguiente ejemplo, veamos una aplicación de la fórmula del cálculo de áreas con integrales dobles donde resulta conveniente aplicar el cambio de variable.

EJEMPLO 3.3.38 Calculemos el área de la región interior a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Podemos plantear la integral en la región elíptica aplicando directamente el teorema de Fubini, pero las primitivas resultantes no serán sencillas. Es mejor utilizar un cambio de variable, que podemos intuir fácilmente si recordamos la parametrización de la elipse que estudiamos en el tema 2:

$$\frac{x}{a} = r\cos t, \qquad \frac{y}{b} = r\operatorname{sen} t, \quad r \in [0,1], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Obsérvese que este cambio no es el cambio a coordenadas polares; de hecho, el uso de coordenadas polares sobre regiones elípticas conduce, por lo general, a primitivas más complejas.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(r,t) &= (ar\cos t, br\operatorname{sen} t)\\
J\boldsymbol{T}(r,t) &= \begin{pmatrix} a\cos t & -ar\operatorname{sen} t\\ b\operatorname{sen} t & br\cos t\end{pmatrix}\\
|\mathrm{Det}(J\boldsymbol{T}(r,t))| &= rab\\
\text{Área}(D) &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\, dr\, \mathrm{d}t = \pi ab
\end{aligned}$$ $\square$