TEMA 2

Cálculo diferencial

Contenidos

- Lección 2.1: Curvas parametrizadas. Estudio de curvas parametrizadas. Representación gráfica. Asíntotas. Curvas polares. Cónicas.
- Lección 2.2: Campos escalares. Campos escalares lineales. Derivadas direccionales, derivadas parciales y diferenciabilidad. Vector gradiente. Plano tangente a una superficie. Derivadas de orden superior.
- Lección 2.3: Optimización de campos escalares. Extremos locales. Clasificación de puntos críticos con la matriz hessiana. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange. Extremos absolutos.

Prerrequisitos: Conocimientos básicos de álgebra lineal y geometría (ecuaciones de una recta, vectores, etc.). Trigonometría. Cálculo de límites y derivación. Representación gráfica de funciones de una variable (determinar dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, etc.)

Objetivos: Los objetivos del tema son: reconocer una curva a partir de una parametrización y estudiar sus características, incluidas las curvas polares; reconocer y saber identificar las características de las curvas cónicas; saber calcular y aplicar las propiedades del vector gradiente de un campo escalar; plantear y resolver problemas de optimización de campos escalares.

Resultados de aprendizaje

- **Curvas parametrizadas y polares:** Representar curvas parametrizadas y polares. Hallar la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto. Saber determinar puntos de tangencia horizontal y puntos de tangencia vertical. Saber determinar las asíntotas de una curva parametrizada.

- **Cónicas en su posición típica:** Identificar y deducir las características de una cónica (degenerada o no) a partir de su expresión $P(x, y) = 0$ (ejes, vértices, centro, asíntotas,...), siendo P un polinomio de grado 2 sin término xy. Obtener una parametrización de una cónica a partir de su ecuación normalizada. Obtener la ecuación y parametrización de una cónica a partir de determinadas características.

- **Campos escalares:** Hallar el vector gradiente. Utilizar el vector gradiente para obtener propiedades geométricas (plano tangente, rectas normales,...). Calcular derivadas direccionales. Utilizar el vector gradiente como la dirección en donde la derivada direccional es máxima.

- **Optimización:** Hallar y clasificar puntos críticos de campos de dos variables usando la matriz hessiana. Hallar y clasificar puntos críticos de campos de dos variables con una restricción, usando multiplicadores de Lagrange o reducción de variables. Hallar los máximos y mínimos absolutos de campos de dos variables sobre regiones acotadas.

LECCIÓN 2.1

Curvas planas

El objetivo último de las matemáticas es *modelizar* el mundo real. Es decir, representar y describir diversos aspectos del mundo real mediante conceptos matemáticos que ayuden a estudiarlo. En particular, en esta lección nos centramos en la representación de objetos y figuras que genéricamente denominamos *lugares geométricos*. Podemos entender fácilmente cuál es nuestro objetivo con el siguiente problema: *traza en un papel tres rectas que se corten formando un triángulo y luego dale indicaciones a un compañero para que haga exactamente el mismo dibujo*. Seguramente, las indicaciones dadas estarán basadas en objetos matemáticos: sistemas de referencias, distancias, ángulos,...

Para lograr resolver el problema anterior no se necesitan demasiados elementos, pero ¿cómo haríamos lo mismo si en lugar de rectas quisiéramos describir una *curva*? Este es el problema general que abordamos en esta lección. Aprenderemos a describir curvas, a dibujarlas a partir de una descripción y, en particular, conoceremos un conjunto de curvas ampliamente usadas en matemáticas y física y que se denominan *cónicas*.

Aunque toda la teoría que vamos a mostrar se puede aplicar fácilmente a curvas en el espacio o incluso en dimensiones mayores a 3, nos vamos a centrar solamente en curvas en el plano.

2.1.1. Curvas parametrizadas

Es fácil imaginar una curva como una recta a la que se aplica un determinada deformación. Es decir, una curva es una figura de una única dimensión pero que no sigue una dirección constante. Esta imagen intuitiva nos lleva a la representación más sencilla de una curva: la descripción de cada punto de la misma en función de *un parámetro*. Por ejemplo, si queremos describir la trayectoria que seguimos en un paseo, bastaría con dar nuestra posición en cada instante de tiempo; en este caso, el tiempo sería el parámetro que describe la curva trazada por nuestra trayectoria.

DEFINICIÓN 2.1.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es una* curva parametrizada *si existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $x\colon I \to \mathbb{R}$, $y\colon I \to \mathbb{R}$ tales que*

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

Habitualmente, presentamos las curvas parametrizadas escribiendo:

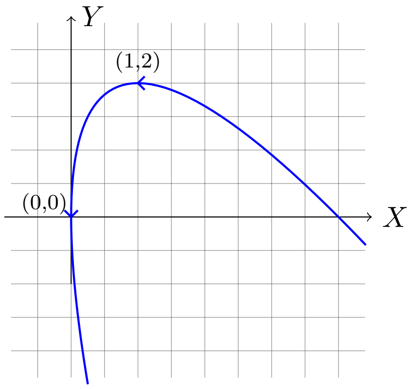
$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \\ t \in I \end{cases}$$

o de forma más compacta $(X, Y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva* y la variable t se denomina *parámetro*.

EJEMPLO 2.1.2 Consideramos la curva parametrizada

$$C = \{(t^2 - 2t + 1, 2 - 2t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Como veremos más adelante, la representación gráfica de este conjunto de puntos determina la siguiente curva



que se presenta habitualmente a partir de sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cada punto de esta curva está asociado a un valor del parámetro que admite una interpretación en función del contexto. Por ejemplo, si la curva representa un movimiento, entonces, el valor de t se interpreta como el instante de tiempo correspondiente al punto del plano $(x(t), y(t))$. Así, observe que el instante inicial $(t = 0)$ corresponde al punto $(1, 2)$ del plano

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

y que el punto $(0, 0)$ está asociado al valor $t = 1$ del parámetro.

$$\begin{cases} x(1) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Es importante no confundir el valor del parámetro con el punto del plano asociado pues, como veremos, el parámetro equivale a la variable de una función, cuyo valor es el punto:

$$\text{Si} \quad \boldsymbol{f}(t) = (t^2 - 2t + 1, 2 - 2t^2) \qquad \text{entonces} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{f}(0) = (1, 2) \\ \boldsymbol{f}(1) = (0, 0) \end{cases} \qquad \square$$

El concepto de curva parametrizada no debería ser nuevo para nosotros pues ya deberíamos haber tropezado con un ejemplo. Se trata de uno de los tipos de ecuaciones que pueden representar a una recta: Las ecuaciones paramétricas, que vemos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1.3 *Ecuaciones paramétricas de una recta.* La recta que pasa por un punto (x_0, y_0) en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ es:

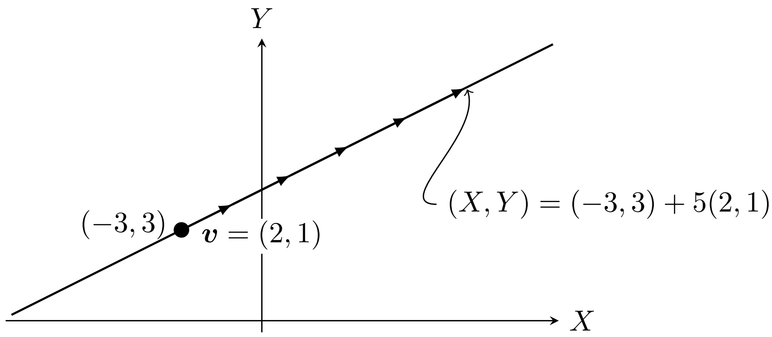
$$\begin{cases} x = x_0 + t\,v_1 \\ y = y_0 + t\,v_2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, el parámetro t representa la distancia al punto (x_0, y_0), siendo la unidad de medida el módulo del vector $\boldsymbol{v}$, es decir, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

En la figura siguiente, representamos la recta que pasa por el punto $(-3, 3)$ y toma la dirección $(2, 1)$, es decir,

$$(X, Y) = (-3, 3) + t(2, 1) = (-3 + 2t, 3 + t)$$

y destacamos el punto correspondiente a $t = 5$.



Obsérvese que la recta es un ejemplo de curva parametrizada cuyas ecuaciones (ecuaciones paramétricas de la recta) son

$$\begin{cases} x(t) = -3 + 2t \\ y(t) = 3 + t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

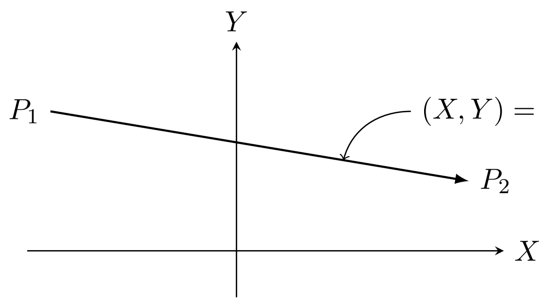
donde hemos indicado el rango de valores que puede tomar el parámetro ($t \in \mathbb{R}$) porque, como veremos en el siguiente ejemplo, resulta esencial para definir la curva parametrizada. □

En este ejemplo hemos utilizado la notación $\|\boldsymbol{v}\|$ para representar el módulo del vector $\|\boldsymbol{v}\|$; esta función se denomina igualmente *norma* y otras notaciones que podemos encontrar en la bibliografía son $|\boldsymbol{v}|$ ó $\|\boldsymbol{v}\|_2$.

El uso de letras en matemáticas es imprescindible para representar variables, constantes, parámetros, etc. Ya hemos advertido que habitualmente usamos letras cursivas (mayúsculas o minúsculas) para representar variables que a su vez pueden corresponder a cualquier objeto matemático: números naturales, racionales, reales, complejos, puntos en un plano, vectores, etc. También hemos podido observar que solemos usar determinadas letras para objetos específicos: x para incógnitas de ecuaciones o para la abscisa de puntos; n, k para números naturales; z para números complejos; t para representar el tiempo,... Debe de quedar claro que estas identificaciones se hacen por tradición y para ayudar a la lectura de fórmulas y expresiones, pero no es obligatorio y en muchos casos no respetaremos estas asociaciones.

Por otra parte, en el ejemplo anterior, hemos usado letras en negrita para representar vectores. Siguiendo con la idea del párrafo anterior, es habitual usar algún elemento distintivo para estos objetos, como la letra negrita que usaremos en el curso o flechas sobre las letras que podemos encontrar en algunos textos. También debe quedar claro que estos elementos no son imprescindibles y solo se usan para facilitar la lectura.

Ejemplo 2.1.4 *Parametrización de un segmento.* En el ejemplo anterior, las ecuaciones se corresponden con una recta infinita. Sin embargo, es frecuente que solo estemos interesados en el segmento que une dos puntos P_1 y P_2.



Para parametrizar este segmento, tomamos el vector director $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$ y aplicamos las ecuaciones del ejemplo anterior: $(X, Y) = P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$. Sustituyendo el vector por su definición obtenemos

$$(X, Y) = (1-t)P_1 + tP_2, \quad t \in [0, 1] \tag{2.1}$$

En este caso, el parámetro t es la proporción de la distancia a P_1 respecto de la longitud del segmento, es decir, si $Q = (x(t), y(t))$ es el punto correspondiente al valor t del parámetro, entonces $t = \frac{|P_1Q|}{|P_1P_2|}$. Por ejemplo, el segmento que une los puntos $(-1, -1)$ con $(0, 2)$ es:

$$(X, Y) = (1-t)(-1, -1) + t(0, 2) = (t-1, 3t-1), \quad t \in [0, 1]$$

Es interesante observar que esta parametrización no da únicamente información de los puntos que forman el segmento, también describe cómo lo recorremos. En concreto, en la ecuación (2.1), el valor $t = 0$ nos devuelve el punto P_1, mientras que el valor $t = 1$ nos devuelve P_2, es decir, recorremos el segmento desde el punto P_1 al P_2. La siguiente parametrización también corresponde al mismo segmento, pero recorriéndolo en sentido contrario:

$$(X, Y) = (1 - t)P_2 + tP_1, \quad t \in [0, 1]$$ □

Ejemplo 2.1.5 *Parametrización del grafo de una función real.* Ya sabemos que todas las funciones reales de variable real pueden representarse mediante su gráfica. Esta gráfica es un ejemplo de curva parametrizada que se denomina *grafo*:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

y las siguientes ecuaciones parametrizan el grafo:

$$\begin{cases} X = t \\ Y = f(t) \\ t \in \mathrm{Dom}(f) \end{cases}$$

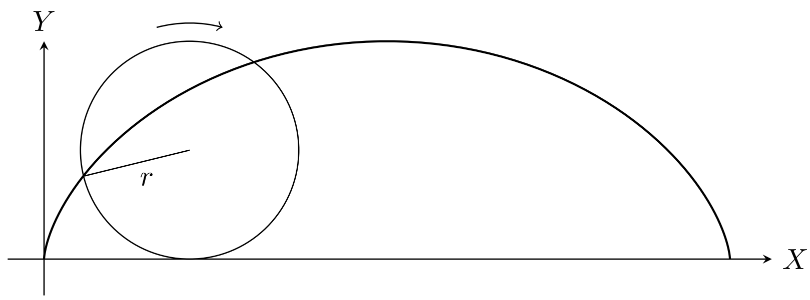
En este caso, el parámetro coincide con la abscisa del punto. Así, por ejemplo, podemos parametrizar la parábola $f(x) = x^2$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se podría pensar que todas las curvas pueden ser representadas como grafos de una función, sin embargo, esto no es cierto. Por ejemplo, ninguna función tiene como gráfica a toda una circunferencia, aunque sí trozos de la misma. □

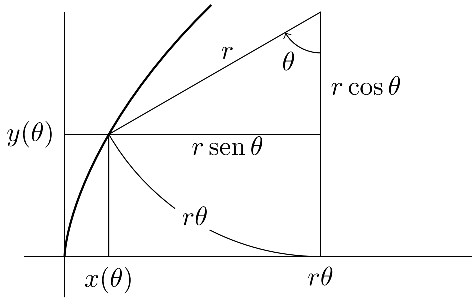
El problema de dar la parametrización de una curva descrita mediante propiedades geométricas suele ser bastante sencillo, ya que, en la mayoría de los casos, solo necesitamos aplicar elementos básicos de geometría.

Ejemplo 2.1.6 En este ejemplo, parametrizamos la curva que se denomina *cicloide* y que se define como sigue: *curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta.*



Si elegimos como parámetro (θ) el ángulo de giro de la circunferencia, podemos deducir las ecuaciones de la cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



□

El concepto matemático que nos ayuda a manejar formalmente las ecuaciones paramétricas es el de *función vectorial de variable real.*

Definición 2.1.7 *Una* función vectorial de variable real *con dominio $D \subset \mathbb{R}$ es una aplicación $\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^n$. Esta función $\boldsymbol{f}$ viene determinada por n funciones reales de variable real, $f_i\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$.*

Aunque hemos definido las funciones vectoriales en cualquier dimensión, en este curso sólo trabajaremos con curvas planas que se describen con funciones vectoriales en dimensión 2 y que utiliza la notación particular que hemos considerado en los ejemplos anteriores:

$$\boldsymbol{f}\colon D \to \mathbb{R}^2 \qquad , \qquad \boldsymbol{f}(t) = (x(t), y(t))$$

Habitualmente, trabajaremos con curvas con un aspecto suave y sin rupturas; para conseguir esto, necesitaremos que las parametrizaciones tengan ciertas características.

Definición 2.1.8 *Sea $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

1. *Decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua en $a \in D$ si todas la funciones f_i son continuas en a. Decimos que $\boldsymbol{f}$ es continua en D si lo es en cada punto.*
2. *Decimos que $\boldsymbol{f}$ es derivable o diferenciable en $a \in D$, si todas la funciones f_i son derivables en a y el vector $\boldsymbol{f}'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$ se denomina derivada de $\boldsymbol{f}$ en a.*

Si una curva $(x(t), y(t))$ es continua, entonces sabemos que se puede dibujar "de un solo trazo" o "sin levantar el lápiz del papel". Además, sabemos que la gráfica de una función derivable tiene un aspecto "suave", "sin picos", sin embargo, para que una curva parametrizada tenga este aspecto, no es suficiente con que la parametrización sea diferenciable, necesitaremos que sea *regular.*

Definición 2.1.9 *Una curva $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ es* regular en t_0 *si la función vectorial $\boldsymbol{f}(t) = (x(t), y(t))$ es diferenciable en t_0 y $\boldsymbol{f}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$.*

2.1.1.1. Representación de curvas

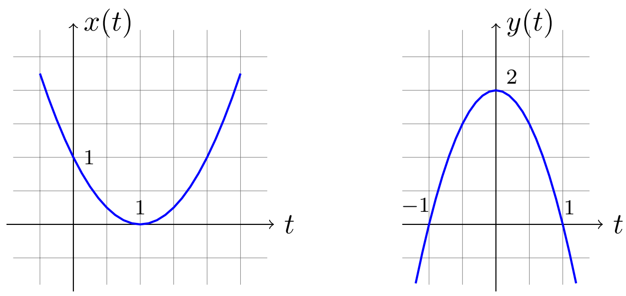
En general, no es fácil identificar una curva a partir de una parametrización $(x(t), y(t))$, sin embargo, no resulta difícil deducir determinadas características que ayudan a esbozar su forma. A continuación mostramos algunas:

- Si $x(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de izquierda a derecha; si es decreciente, se recorre de derecha a izquierda.
- Si $y(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de abajo hacia arriba; si es decreciente, se recorre de arriba hacia abajo.
- La ecuación $x(t) = 0$ determina los puntos de corte con el eje OY y la ecuación $y(t) = 0$ determina los puntos de corte con el eje OX.

Ejemplo 2.1.10 Vamos a esbozar la curva con la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a representar gráficamente las funciones $x(t)$ e $y(t)$; para ello, son suficientes los conocimientos de cálculo en una variable y por ello no mostramos los detalles



Observe que la función x pasa de decrecer a crecer en $t = 1$ y la función y pasa de crecer a decrecer en $t = 0$. Estos valores del parámetro determinan puntos característicos de la curva que se utilizarán para esbozar o interpretar la forma de su representación gráfica.

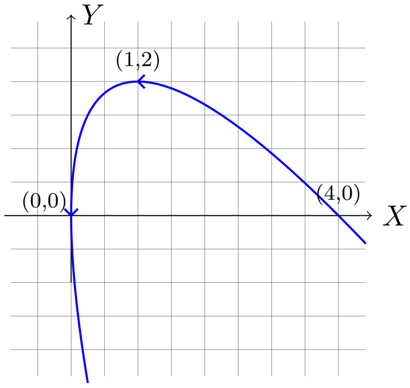
$$(x(0), y(0)) = (1, 2) \qquad , \qquad (x(1), y(1)) = (0, 0)$$

De esta información, podemos deducir las siguientes características de la curva:

- Hasta el punto $(1, 2)$, correspondiente al valor $t = 0$ del parámetro, la curva se recorre de derecha a izquierda (x es decreciente) y de abajo a arriba (y es creciente).

- Desde el punto $(1,2)$ hasta el punto $(0,0)$, correspondientes a los valores $t = 0$ y $t = 1$ del parámetro, la curva se recorre de derecha a izquierda (x es decreciente) y de arriba a abajo (y es decreciente).
- Desde el punto $(0,0)$, la curva se recorre de izquierda a derecha (x es decreciente) y de arriba a abajo (y es decreciente).

Con esta información y situando los puntos de corte con los ejes, esbozamos la curva:



□

Como hemos mencionado antes, si una curva es regular en un punto, entonces en ese punto la curva no tiene un pico. Geométricamente, esto se traduce en que es posible trazar una recta tangente a la curva en ese punto. Esta recta tangente se define a partir de la derivada de la parametrización.

DEFINICIÓN 2.1.11 *Sea* $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $t \in I$ *una parametrización de la curva* C*. Si* $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$*, las siguientes ecuaciones determinan la* recta tangente *a* C *en el punto* $(x(t_0), y(t_0))$*:*

$$x = x(t_0) + \lambda x'(t_0)$$
$$y = y(t_0) + \lambda y'(t_0)$$

donde λ *es el parámetro de la recta.*

Una interesante interpretación del vector derivada $(x'(t), y'(t))$ proviene del campo de la física. Si una parametrización corresponde a la trayectoria de un movimiento en función del tiempo, entonces la derivada se corresponde con el vector velocidad.

EJEMPLO 2.1.12 En la curva del ejemplo 2.1.10,

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

el vector tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$ es

$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2, -4t)$$

que nos permite calcular la recta tangente a la curva en cualquier punto:

- Para calcular la recta tangente a la curva en el instante $t = -1$ basta con calcular el correspondiente punto de la curva $(x(-1), y(-1)) = (4, 0)$ y el vector director en ese punto $(x'(-1), y'(-1)) = (-4, 4)$, que determinan las ecuaciones paramétricas de la recta tangente:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 - 4t \\ y = 4t \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad x + y - 4 = 0$$

- Sin embargo, para calcular la recta tangente a la curva en el punto $(1, 2)$ será necesario obtener previamente el valor del parámetro $(t = t_0)$ correspondiente a ese punto de la curva, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = t^2 - 2t + 1 = 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad t = 0$$

  y después se procede de la misma forma que antes:

$$\left.\begin{array}{l} (x(0), y(0)) = (1, 2) \\ (x'(0), y'(0)) = (-2, 0) \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y = 2$$

- En el caso anterior, la recta tangente obtenida es paralela al eje OX, consecuencia de que la segunda coordenada del vector tangente es 0. Este hecho nos permite determinar los puntos de tangencia horizontal $(y'(t) = 0)$ y vertical $(x'(t) = 0)$ de una curva. Por ejemplo, el único punto de la curva cuya tangente es vertical es el $(0, 0)$, obtenido así:

$$x'(t) = 2t - 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad t = 1 \quad \longrightarrow \quad (x(1), y(1)) = (0, 0)$$

Como vemos en los distintos casos considerados en este ejemplo, es importante no confundir el valor del parámetro $(t = t_0)$ con el correspondiente punto de la curva $(x(t_0), y(t_0))$. □

EJEMPLO 2.1.13 *Recta tangente a la gráfica de una función.* Para definir la recta tangente se utilizan las ecuaciones paramétricas de la recta; pero podemos eliminar el parámetro para obtener su ecuación cartesiana:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad x'(t_0)(y - y(t_0)) = y'(t_0)(x - x(t_0))$$

Si la curva es el grafo de una función real, es decir, $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$, y llamamos $x_0 = x(t_0) = t_0$ entonces $y(t_0) = f(x_0)$, $x'(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = f'(x_0)$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la conocida expresión de la recta tangente a la gráfica de una función.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$ □

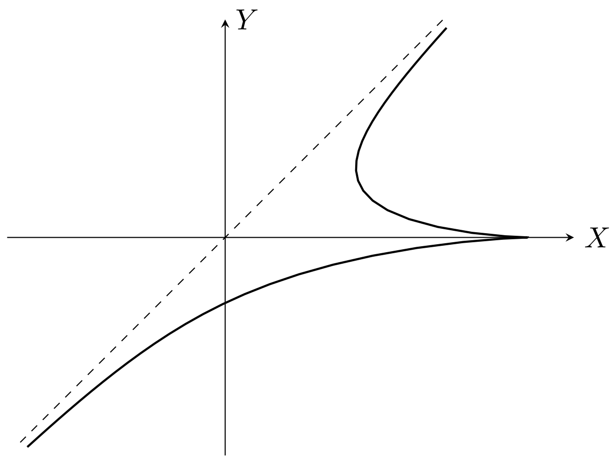


Figura 2.1: Curva del ejemplo 2.1.15.

2.1.1.2. Asíntotas

Intuitivamente, una recta es asíntota de una curva si la distancia entre ambas va decreciendo a 0. El estudio de la existencia de una asíntota es diferente dependiendo de si la recta es vertical, horizontal u oblicua. El siguiente resultado muestra las condiciones que debemos comprobar para determinar la existencia de asíntotas.

PROPOSICIÓN 2.1.14 *Consideremos una curva* $(x(t), y(t))$, $t \in I$.

1. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ *y* $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$, *entonces la recta* $x = a$ *es una asíntota vertical de la curva.*

2. *Si para un valor del parametro* t_0, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ *y* $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a$, *entonces la recta* $y = a$ *es una asíntota horizontal de la curva.*

3. *Si para un valor del parametro* t_0,

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty, && \lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty, \\ &\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}, && \lim_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces $y = mx + n$ *es una asíntota oblicua de la curva.*

Los tres apartados se verifican igualmente si consideremos t_0 *igual a* $\pm\infty$.

Obsérvese que las asíntotas se localizan en valores del parámetro que no pertenecen al dominio de, al menos, una de las dos coordenadas, o en t_0 igual a $\pm\infty$.

EJEMPLO 2.1.15 Vamos a estudiar si la siguiente curva tiene asíntotas.

$$x(t) = \frac{7 - t^3}{1 + t^2}, \qquad y(t) = \frac{-t^3}{1 + t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

El dominio de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ es $\mathbb{R}$, y por lo tanto, si la curva tiene asíntotas, estas deben estar en $+\infty$ o en $-\infty$. Las dos funciones verifican la tercera condición en los dos casos:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{7-t^3}{1+t^2} = -\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3}{1+t^2} = -\infty$$
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{7-t^3}{1+t^2} = \infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t^3}{1+t^2} = \infty$$

Intentamos calcular las pendientes de las asíntotas:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{7-t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^3}{7-t^3} = 1$$
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t^3}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{7-t^3} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t^3}{7-t^3} = 1$$

Por lo tanto, si la curva tiene asíntotas, sus pendientes son igual a 1. Terminamos de calcular los últimos límites que demuestran que efectivamente la curva tiene asíntotas.

$$\lim_{t\to+\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-t^3}{1+t^2} - \frac{7-t^3}{1+t^2} \right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-7}{1+t^2} = 0$$
$$\lim_{t\to-\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{-t^3}{1+t^2} - \frac{7-t^3}{1+t^2} \right) = \lim_{t\to-\infty} \frac{-7}{1+t^2} = 0$$

Por lo tanto, la recta $y = x$ es asíntota oblicua de la curva tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ (ver figura 2.1). $\square$

2.1.2. Curvas polares

Hemos visto en el tema anterior que una forma alternativa de representar los puntos de un plano es mediante *coordenadas polares*. En general, un sistema de coordenadas polares queda determinado por un punto O, llamado *polo*, y una semirrecta con extremo en O, llamada *eje polar*. Dado un punto Q en el plano, consideramos la semirrecta R con extremo en el polo y que pasa por Q (*recta radial* del punto); la posición de Q en coordenadas polares se fija por *distancia del punto al polo*, r, y el *ángulo* θ *entre el eje polar y la recta radial* medido en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido levógiro); el par $(r, \theta)_P$ es la descripción por *coordenadas polares* del punto Q.

El sistema cartesiano y el sistema polar se superponen identificando el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el semieje positivo de OX, tal y como se muestra en la figura 2.2.

El objetivo de esta sección será presentar las funciones en coordenadas polares que modelizan otro tipo de curvas, las curvas polares, que son muy distintas a las curvas que representarían esas mismas funciones en coordenadas cartesianas. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, $f(x) = 2$, o bien $y = 2$, representan una recta

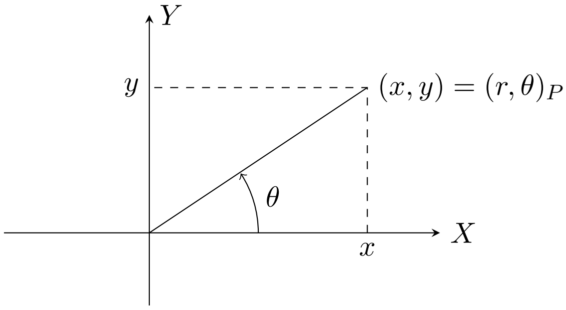


Figura 2.2: Sistema de representación polar.

horizontal que corta al eje Y en el punto $(0, 2)$; sin embargo, en coordenadas polares, $f(\theta) = 2$, o bien $r = 2$, representan una circunferencia de radio 2 porque, independientemente del valor del ángulo θ, la distancia al origen r siempre vale 2. Ahora, piense en la función $f(x) = x$, o bien $y = x$, con $x \geq 0$, que en coordenadas cartesianas representa la semirrecta que es bisectriz del primer cuadrante; sin embargo, ¿qué curva representa esa misma función en coordenadas polares, es decir, cuál es la gráfica de la función $f(\theta) = \theta$, o bien $r = \theta$, con $\theta \geq 0$?

Definición 2.1.16 *Dada una función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamamos* curva polar *asociada a f, al conjunto de puntos del plano polar* $\{(r, \theta)_P \;/\; r = f(\theta)\}$.

A partir de la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares que vimos en el tema anterior, se deduce que la curva polar asociada a f queda determinada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ \theta \in D \end{cases}$$

y esta parametrización nos permite estudiar las curvas polares como cualquier curva paramétrica.

Ejemplo 2.1.17 Consideremos la función $f(\theta) = \theta$, o bien $r = \theta$, con $\theta \geq 0$, en coordenadas polares. La curva polar que representa esta función se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = t\,\cos t \\ y(t) = t\,\operatorname{sen} t \\ t \in [0, \infty) \end{cases}$$

y, a partir de estas ecuaciones, podríamos representar la curva, obtener rectas tangentes o determinar sus asíntotas, tal y como hemos aprendido en la sección anterior.
□

Aunque la parametrización nos permite estudiar las curvas polares como cualquier curva paramétrica, es conveniente conocer algunas propiedades específicas de este tipo de curvas que nos ayudan a determinar su forma y estudiar sus características.

En general, no es fácil identificar la forma de una curva polar a partir de la función $r = f(\theta)$, sin embargo, no resulta difícil deducir determinadas características que ayudan a esbozar su forma. A continuación mostramos algunas:

- Si la función $r = f(\theta)$ es positiva y creciente (decreciente) en un intervalo, entonces la curva se va alejando del (acercando al) origen de coordenadas, según la recorremos en el sentido levógiro (sentido contrario a las agujas del reloj).
- Si la función $r = f(\theta)$ es negativa y decreciente (creciente) en un intervalo, entonces la curva se va alejando del (acercando al) origen de coordenadas, según la recorremos en el sentido levógiro, pero teniendo en cuenta que se representa en el cuadrante opuesto al ángulo correspondiente.

Veamos ahora, más formalmente, otro par de resultados que determinan dos propiedades de las curvas polares que nos ayudarán a identificar su forma.

PROPOSICIÓN 2.1.18 *Si f es derivable, $f(\theta_0) \neq 0$ y $f'(\theta_0) = 0$, entonces la curva polar correspondiente y la circunferencia de centro en el origen y radio $|f(\theta_0)|$ son tangentes en el punto $(f(\theta_0), \theta_0)_P$.*

PROPOSICIÓN 2.1.19 *Si f es derivable y $f(\theta_0) = 0$, entonces la recta radial con ángulo θ_0 es tangente a la curva polar correspondiente en el origen de coordenadas.*

La demostración de este resultado es inmediata considerando la parametrización correspondiente a la curva polar:

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ y'(\theta) &= f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

Si $f(\theta_0) = 0$, el segundo sumando de las dos derivadas anteriores se anula al evaluarlas en θ_0:

$$\begin{aligned} x'(\theta_0) &= f'(\theta_0)\cos\theta_0 \\ y'(\theta_0) &= f'(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0 \end{aligned}$$

Por lo que, efectivamente, el vector $(x'(\theta_0), y'(\theta_0))$ es paralelo a $(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$

EJEMPLO 2.1.20 Vamos a dibujar la curva polar $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La parametrización de esta curva es:

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= (1 + 2\cos t)\cos t \\ y(t) &= (1 + 2\cos t)\operatorname{sen} t \end{aligned} \right. \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Pero en lugar de usar la parametrización para dibujar la curva, vamos a representar primero la función en el plano cartesiano y a trasladar la gráfica al plano polar usando las propiedades establecidas en los resultados anteriores, según se muestra en la página 75.

En primer lugar, representamos gráficamente la función $r = 1 + 2\cos\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, como si se tratase de una función en coordenadas cartesianas, es decir, representamos $f(x) = 1 + 2\cos x$, con $x \in [0, 2\pi]$, y observamos algunas de sus características:

- La gráfica de la función f pasa por los puntos $(0, 3)$, $(\pi/3, 2)$, $(2\pi/3, 0)$, $(\pi, -1)$, $(4\pi/3, 0)$, $(5\pi/3, 2)$ y $(2\pi, 3)$.
- La función f es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y creciente en el intervalo $[\pi, 2\pi]$, y el punto $(\pi, -1)$ es un mínimo de la función.
- Los puntos de corte de f con el eje X son $(2\pi/3, 0)$ y $(4\pi/3, 0)$ que determinan que la función es positiva en los intervalos abiertos $(0, 2\pi/3)$ y $(4\pi/3, 0)$, y es negativa en el intervalo abierto $(2\pi/3, 4\pi/3)$.

En segundo lugar, dibujamos sobre los ejes de coordenadas un "mallado polar" sobre el que dibujaremos la curva. Esta malla es similar a la cuadrícula que dibujamos en el plano cartesiano y que nos sirve de referencia; pero en este caso, la malla está formada por rectas radiales correspondientes a ángulos significativos y circunferencias centradas en el origen con diferentes radios.

Ahora toca dibujar la curva y, para ello, empezaremos dibujando en orden todos los puntos característicos que hemos obtenido antes (puntos por los que pasa, mínimo y puntos de corte) pero teniendo en cuenta que ahora representan coordenadas polares. Después vamos uniendo los puntos de acuerdo a las características de la función en cuanto a su crecimiento/decrecimiento y su signo (positiva o negativa).

Por ejemplo, para unir los puntos $(0, 3)_P$ y $(\pi/3, 2)_P$ observamos que la función es decreciente y positiva en el intervalo $[0, \pi/3]$, por lo tanto, empezaremos en el punto $(0, 3)_P$ e iremos dibujando la curva en el sentido levógiro, acercándonos cada vez más al origen de coordenadas hasta llegar al punto $(\pi/3, 2)_P$. Una vez dibujada la gráfica, podemos observar que

- $f(\theta) \leq 0$ para $\theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, por lo tanto, los puntos correspondientes se representan en los cuadrantes opuestos (primero y cuarto).
- f es derivable, $f(\pi) \neq 0$ y $f'(\pi) = 0$, por lo tanto, en el punto $(\pi, 1)_P$, la curva es tangente a la circunferencia centrada en el origen y de radio $|f(\pi)| = 1$ (Proposición 2.1.18).
- $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, por lo tanto, la recta tangente a la curva en el correspondiente punto de la curva es la recta radial de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, y lo mismo ocurre en $\theta = \frac{4\pi}{3}$ (Proposición 2.1.19). □

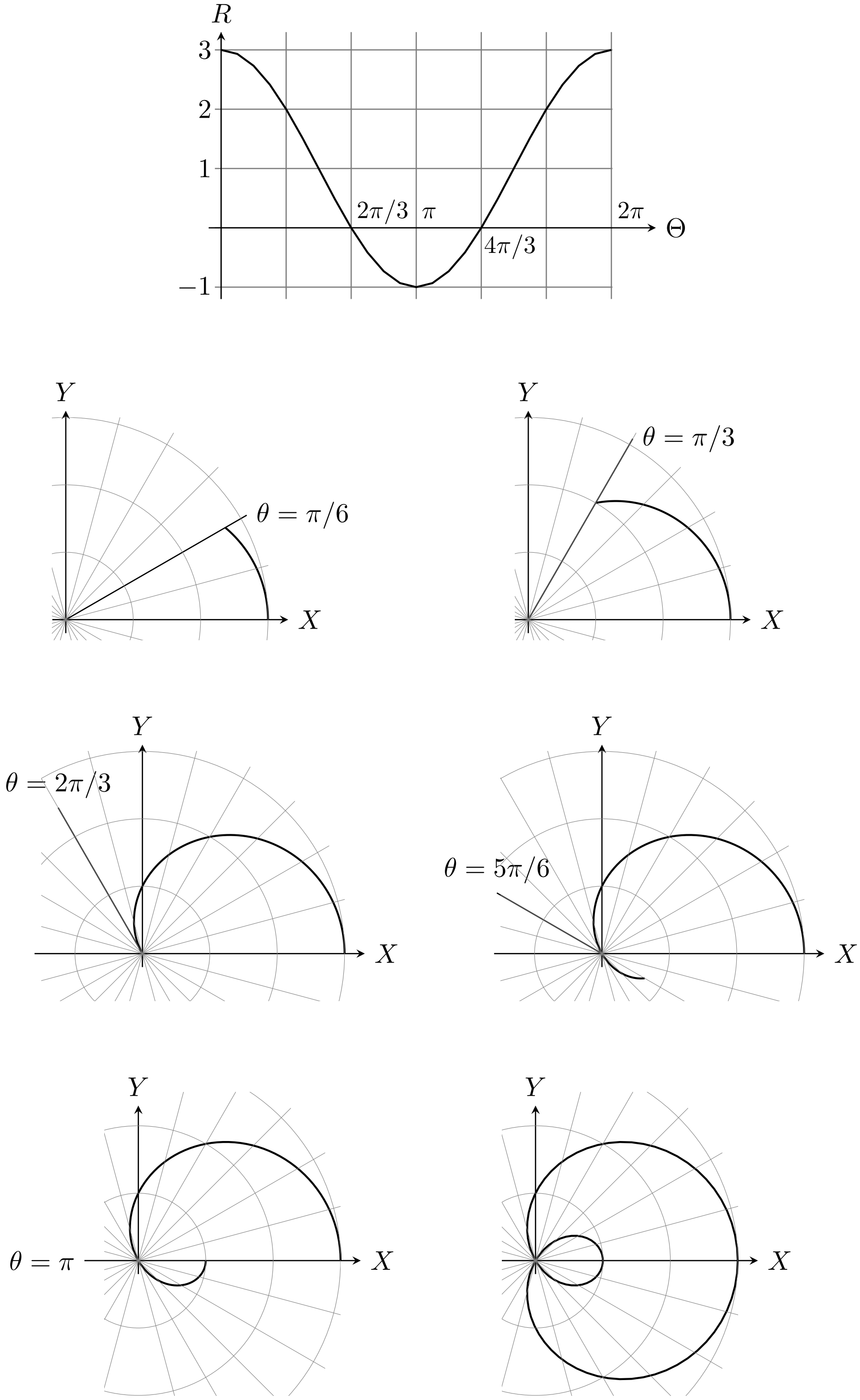


Figura 2.3: Representación de la curva polar $r = 1 + 2\cos\theta$ (Ejemplo 2.1.20)

2.1.3. Cónicas

Una forma alternativa de describir *lugares geométricos* del plano es mediante *ecuaciones cartesianas*. Si $P(x,y)$ es cualquier expresión en la que aparecen involucradas las variables x e y, la igualdad $P(x,y)=0$ se denomina ecuación cartesiana del siguiente conjunto de puntos:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid P(x,y)=0\}$$

Dependiendo de la expresión, este conjunto puede ser vacío, contener un único punto o un conjunto finito de puntos, describir una o varias rectas, una o varias curvas e incluso una región del plano. Para abreviar, en muchas ocasiones nos referiremos al conjunto anterior como "la curva $P(x,y)=0$".

EJEMPLO 2.1.21 Si $P(x,y)$ es un polinomio de grado uno, entonces $P(x,y)=0$ es una recta. Por ejemplo, $x-2y-3=0$ describe una recta, de la cual sabemos que el vector $(1,-2)$ es un vector perpendicular a ella, es decir, $(2,1)$ es un *vector director*; sustituyendo x por un valor cualquiera, obtenemos un punto de la recta: para $x=0$, $-2y-3=0$, es decir, $(0,-3/2)$ es un punto de la recta. A partir de aquí, deducimos fácilmente una parametrización:

$$(X,Y)=\left(0,\frac{-3}{2}\right)+t(2,1)=\left(2t,t-\frac{3}{2}\right) \qquad \Box$$

En esta sección, nos vamos a centrar en las ecuaciones cartesianas definidas por un polinomio de grado dos en las variables x e y:

$$P(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{2.2}$$

Para que el polinomio en (2.2) tenga grado 2, necesariamente al menos uno de los coeficientes a, b o c tiene que ser distinto de cero; en tal caso, el lugar geométrico se denomina *cónica*. También están incluidos algunos lugares geométricos que visualmente no son curvas propiamente dichas y que se denominan *cónicas degeneradas*; en el siguiente ejemplo mostramos ejemplos sencillos de este tipo de cónicas.

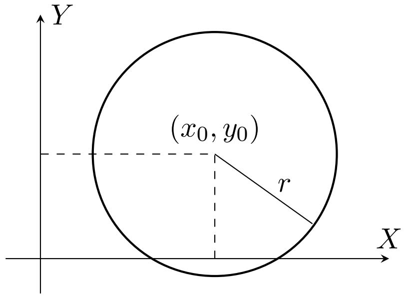
EJEMPLO 2.1.22

1. $\{(x,y)\mid x^2+y^2+1=0\}=\varnothing$
2. $\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\}=(0,0)$
3. $\{(x,y)\mid x^2-y^2=0\}$ está formado por las rectas $x+y=0$, $x-y=0$ $\Box$

En este curso, vamos a trabajar con los polinomios de grado 2 sin término en xy. Aparte de los tres casos del ejemplo anterior, si $b=0$ la ecuación (2.2) puede definir una de las cuatro curvas que presentamos en los apartados siguientes.

Circunferencia. El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo $C = (x_0, y_0)$ es constantemente $r > 0$, se denomina *circunferencia de centro C y radio r* y su ecuación cartesiana es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



La circunferencia es un caso particular de elipse, que definimos en el ítem siguiente, aunque por su importancia, la destacamos como un tipo distinto.

Ejemplo 2.1.23 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina una circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Si con el mismo radio, queremos que esté centrada en $(-1, 2)$, la ecuación será:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \qquad \square$$

Observamos en este ejemplo que, al desarrollar los cuadrados, el polinomio no tiene término en xy y los coeficientes en x^2 e y^2 son iguales; de hecho, podemos caracterizar a las circunferencias como sigue: *si $b = 0$ y $a = c$, entonces la ecuación 2.2 representa una circunferencia o una cónica degenerada.*

Para deducir si es degenerada u obtener el centro y el radio de la circunferencia, basta con aplicar la técnica de completar cuadrados a los sumandos en x y a los sumandos en y.

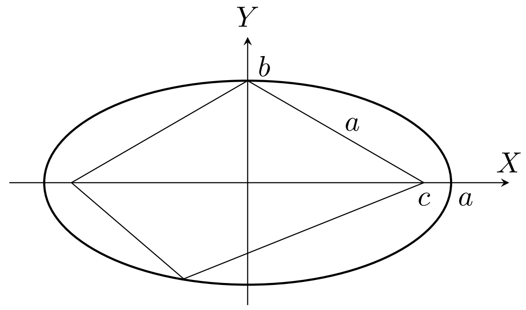
Ejemplo 2.1.24 La ecuación $9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y + 116 = 0$ corresponde a una circunferencia:

$$0 = 9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y + 116 = 9(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 - 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{9}$$

Es decir, su centro es $(2, -3)$ y su radio es $1/3$. $\square$

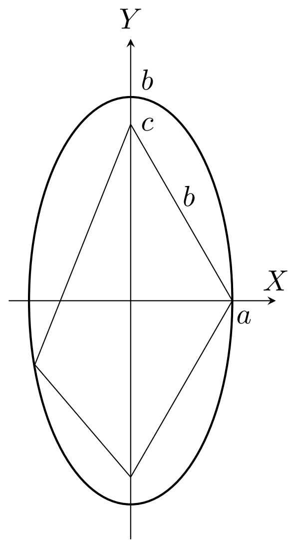
Elipse. El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constante se denomina *elipse*. El *centro* de la elipse es el punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, y la suma de las distancias a los focos es $2a$, la ecuación queda como sigue:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



verificándose que $a^2 = c^2 + b^2$, por lo que, necesariamente, $a > b$.

Si los focos están en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, con $c > 0$, y la suma de las distancias a los focos es $2b$, la ecuación que se obtiene es la misma,



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

verificándose la igualdad $b^2 = c^2 + a^2$, por lo que necesariamente $b > a$.

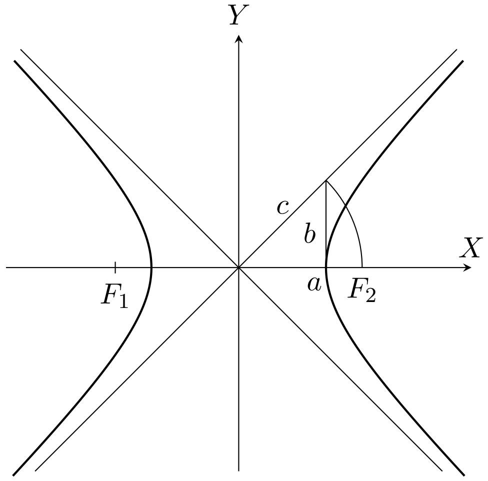
Si desplazamos la elipse para que tenga su centro en (x_0, y_0), la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy, aunque en este caso los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos pero con el mismo signo.

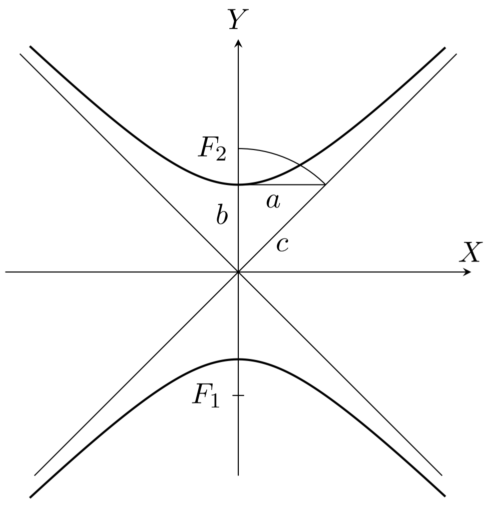
Hipérbola. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constante se denomina *hipérbola*. El *centro* de la hipérbola es el punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, y $2a$ es la diferencia de las distancias a los focos, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



en donde $a^2 + b^2 = c^2$. Si los focos están en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, con $c > 0$, y $2b$ es la diferencia de las distancias a los focos, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



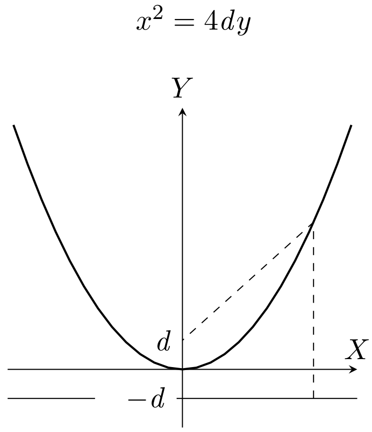
en donde igualmente $a^2 + b^2 = c^2$. Como se observa en las figuras, en ambos casos las rectas $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$ están muy próximas a la curva pero no la cortan; estas rectas son las *asíntotas* de la hipérbolas.

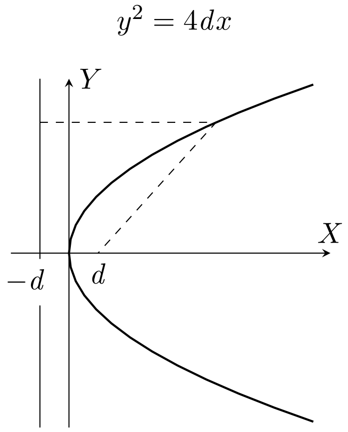
Si desplazamos las hipérbolas para que tengan su centro en (x_0, y_0), las ecuaciones que obtenemos son

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{-(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos polinomios sin término en xy y los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Parábola. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta r y un punto F, se denomina *parábola con foco F y directriz r*. En la figura que aparece abajo, mostramos dos ejemplos de parábolas; si el foco es el punto $(0, d)$ y la directriz es $y = -d$, obtenemos la parábola de la izquierda; si el foco es el punto $(d, 0)$ y la directriz es $x = -d$, obtenemos la parábola de la derecha:



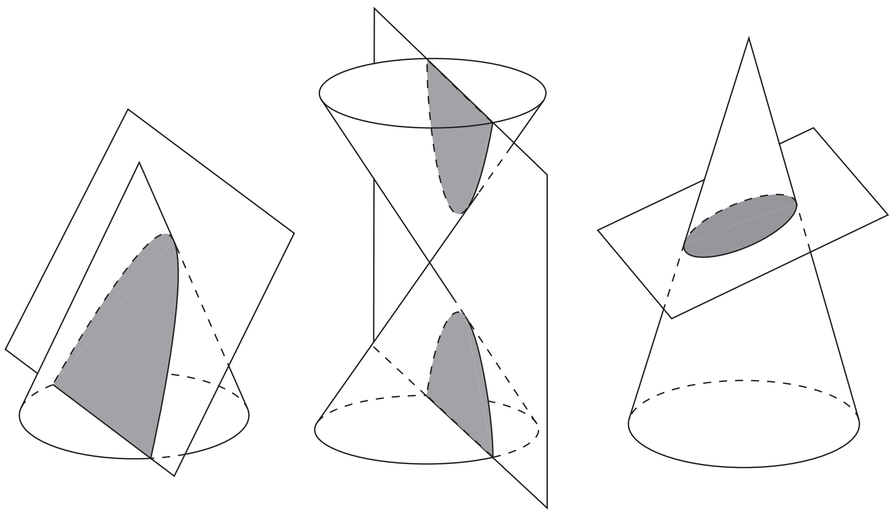


Si desplazamos estas parábolas para que tengan su vértice en (x_0, y_0), las ecuaciones que obtenemos son:

$$(x - x_0)^2 = 4d(y - y_0), \qquad (y - y_0)^2 = 4d(x - x_0)$$

Al desarrollar estas ecuaciones obtenemos polinomios en los que no hay término en xy y falta, o bien el término en x^2, o bien el término en y^2.

Otra forma de obtener estas curvas es mediante la siguiente descripción. Si consideramos un cono circular hueco y lo cortamos con un plano, la curva resultante en la sección es una *cónica* y dependiendo del ángulo de corte, se obtiene una u otra.



Parábola Hipérbola Elipse

Si el corte es perpendicular al eje de cono, obtenemos una circunferencia; si el corte es paralelo a la generatriz se obtiene una parábola; si el corte es paralelo al eje se obtiene una hipérbola; cualquier otro corte, produce una elipse.

Naturalmente, también es posible describir una cónica mediante ecuaciones paramétricas. A continuación vemos la parametrizaciones de las cónicas en sus posiciones *típicas*.

Circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \begin{cases} x(t)=x_0+r\cos t \\ y(t)=y_0+r\operatorname{sen} t \\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Elipse centrada en (x_0, y_0) y semiejes $a>0$ y $b>0$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} x(t)=x_0+a\cos t \\ y(t)=y_0+b\operatorname{sen} t \\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Hipérbola con una parametrización distinta para cada rama de la hipérbola.

Centrada en (x_0, y_0), con asíntotas paralelas a las rectas $bx+ay=0$, $bx-ay=0$, $a>0$, $b>0$, y cortando al eje OX:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \begin{cases} x(t)=x_0+a\cosh t \\ y(t)=y_0+b\operatorname{senh} t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x(t)=x_0-a\cosh t \\ y(t)=y_0+b\operatorname{senh} t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Centrada en (x_0, y_0), con asíntotas paralelas a las rectas $bx+ay=0$, $bx-ay=0$, $a>0$, $b>0$, y cortando al eje OY:

$$\frac{-(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \begin{cases} x(t)=x_0+a\operatorname{senh} t \\ y(t)=y_0+b\cosh t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x(t)=x_0+a\operatorname{senh} t \\ y(t)=y_0-b\cosh t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Parábola:

Con vértice en (x_0, y_0), eje paralelo a OY, y distancia del foco al vértice $d>0$:

$$(x-x_0)^2=4\,d\,(y-y_0) \qquad \begin{cases} x(t)=x_0+4\,d\,t \\ y(t)=y_0+4\,d\,t^2 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Con vértice en (x_0, y_0), eje paralelo a OX, y distancia del foco al vértice $d>0$:

$$(y-y_0)^2=4\,d\,(x-x_0) \qquad \begin{cases} x(t)=x_0+4\,d\,t^2 \\ y(t)=y_0+4\,d\,t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

LECCIÓN 2.2

Campos escalares

En la lección anterior hemos trabajado con polinomios de dos variables, es decir, un ejemplo de función definida en el espacio $\mathbb{R}^2$. En esta lección, vamos a trabajar con funciones generales con dos o más variables, es decir, vamos a trabajar con funciones definidas en espacios $\mathbb{R}^m$. Posiblemente, se haya trabajado en estos espacios utilizando su estructura de *espacio vectorial* pero ahora, estamos interesados en establecer las nociones de *continuidad* y *diferenciabilidad* de funciones definidas en ellos.

Para denotar los elementos de $\mathbb{R}^m$ se suele utilizar una variable con un flecha encima, $\vec{x}$, o bien variables en "negrita", $\boldsymbol{x}$; a lo largo del curso utilizaremos esta segunda notación, ya que los elementos de $\mathbb{R}^m$ pueden identificarse tanto con vectores como con puntos. Además, escribiremos las coordenadas de los vectores utilizando subíndices: $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

En general, cualquier función definida en un subconjunto de un espacio $\mathbb{R}^m$ se denomina *función de varias variables*. Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}$ se denomina *campo escalar*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Si la imagen está contenida en $\mathbb{R}^k$ se denomina *campo vectorial*,

$$f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

En este tema, nos centramos en los campos escalares, en la lección anterior hemos trabajado con funciones vectoriales y, más adelante en el curso, trabajaremos con campos vectoriales. En cualquiera de los dos casos, el conjunto D se denomina *dominio* del campo y se denota $\mathrm{Dom}(f)$. Algunos problemas exigirán trabajar en un dominio determinado y en tal caso tendrá que ser especificado; en caso contrario, entenderemos que el dominio es el mayor posible.

Ejemplo 2.2.1 La expresión $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ define un campo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. El mayor dominio con el que podemos trabajar es el formado por los puntos tales que $x > y$, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

Gráficamente, los puntos del dominio son los que están estrictamente por debajo de la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano $\mathbb{R}^2$. □

Sabemos que la representación gráfica de las funciones reales de una variable es una herramienta muy útil para describir sus características; sin embargo, en campos escalares solo podremos utilizar esta herramienta en unos pocos casos. Por una parte, podemos definir el grafo de un campo escalar f como

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1}; (x_1, \dots, x_m) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

aunque solamente podremos visualizar este conjunto para $m = 1$ o $m = 2$, ya que en tal caso, este conjunto es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.2.2 El campo escalar definido por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene por dominio a todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Su grafo es el conjunto:

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y, x^2 + y^2); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

No es difícil imaginar cuál es la forma de esta superficie si observamos que, haciendo constante la coordenada z de cada punto, $x^2 + y^2 = c$, las curvas que obtenemos son circunferencias y si cortamos por cualquier plano que contenga al eje OZ, es decir, $y = mx$, las curvas que obtenemos son parábolas. Es decir, la superficie es la figura de revolución que se obtiene al girar una parábola sobre su eje. Esta superficie es la que nos encontramos, por ejemplo, en las antenas parabólicas. □

Otra forma de representar los campos escalares es a través de las *superficies* y *curvas de nivel*: si $c \in \mathrm{Im}(f)$, llamamos *superficie de nivel* de f asociada a c, al conjunto

$$N(f, c) = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}$$

Si $m = 2$ estos conjuntos se denominan *curvas de nivel*. Aunque, como hemos visto en la lección anterior, los conjuntos descritos como $f(x, y) = 0$ no tienen que ser necesariamente curvas, puede ser un conjunto vacío, contener uno o varios puntos, una o varias rectas o curvas, etc.

Ejemplo 2.2.3 En el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel serían:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0$$

Sabemos de la lección anterior que estas curvas son circunferencias centradas en el origen y radio $\sqrt{c}$.

El campo $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ tiene las mismas curvas de nivel, circunferencias centradas en el origen:

$$\begin{aligned} \log(x^2 + y^2) &= c \\ x^2 + y^2 &= \mathrm{e}^c \end{aligned}$$

Sin embargo, para cada valor c, su radio es $\sqrt{\mathrm{e}^c}$. □

Para poder visualizar los campos usando sus curvas nivel se hace la representación de la siguiente forma: elegimos varios valores equidistantes, c_1, c_2,..., c_n, y dibujamos las curvas correspondientes a estos valores, $f(\boldsymbol{x}) = c_i$. Por ejemplo, aunque los dos campos del ejemplo 2.2.3, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, tienen las mismas curvas de nivel, su representación sería distinta, ya que para los mismos valores c_i, las circunferencias correspondientes a dichos valores, son distintas.

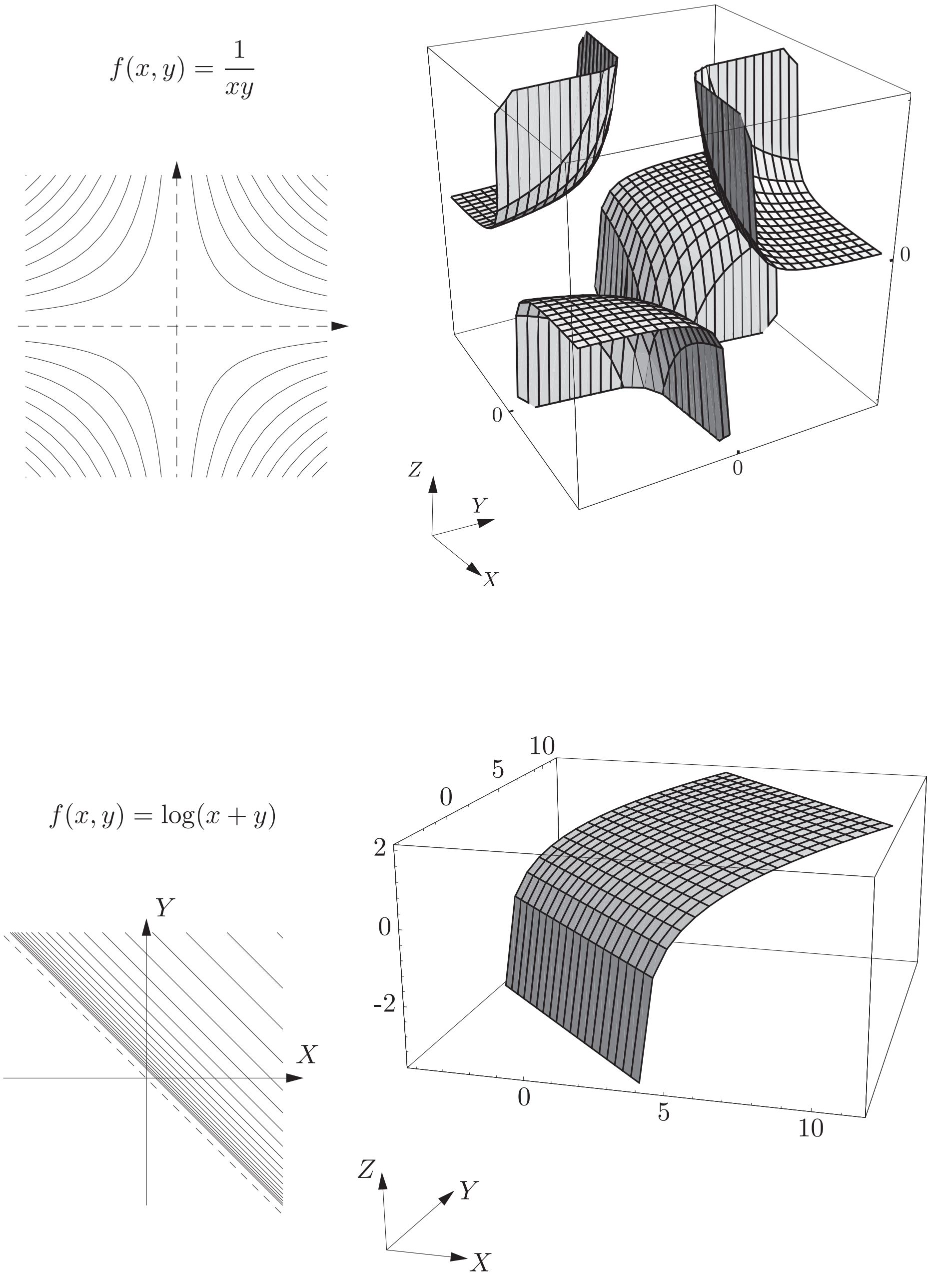


Figura 2.4: Representación de campos escalares

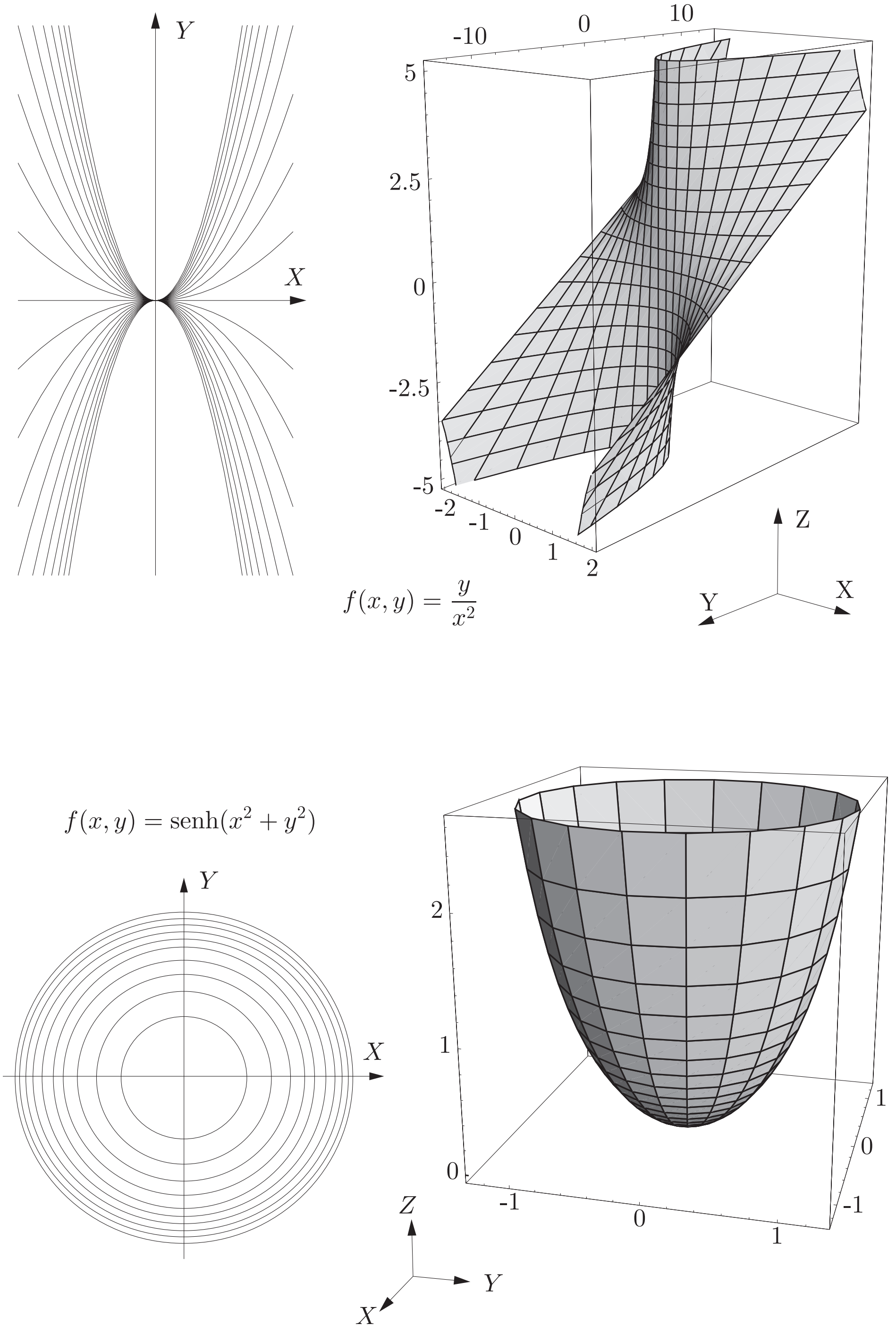


Figura 2.5: Representación de campos escalares

Podemos encontrar representaciones de campos mediante curvas de nivel en los mapas de temperaturas y de presiones; en estos casos, las curvas de nivel se denominan isotermas e isobaras respectivamente. En las figuras 2.4 y 2.5 vemos algunos ejemplos de campos escalares y sus representaciones haciendo uso del grafo y de curvas de nivel.

2.2.1. Campos escalares lineales

Dedicamos esta sección a un ejemplo de campo escalar: los *campos escalares lineales*. Estas aplicaciones serán la base para las definiciones y desarrollos asociados al concepto de diferenciabilidad.

Los *campos escalares lineales* en $\mathbb{R}^n$ responden a la expresión:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

en donde a_1,…,a_n son números reales. La expresión $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ se denomina igualmente *forma lineal* y es un polinomio de grado 1 sin término independiente.

Estos campos se pueden escribir de varias formas. Por ejemplo, en forma matricial se definen a partir de la matriz $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Aunque anteriormente hemos representado los vectores como $(x_1, \dots, x_n)$, cuando trabajamos matricialmente, los vectores deben tratarse como matrices columna:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Para los objetivos de este tema y para los cálculos que realizaremos en él, es más adecuado, sin embargo, definir los campos escalares lineales usando el *producto escalar*; en este caso, el campo escalar lineal se define con el vector $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$$

No obstante, no debemos olvidar que las tres expresiones definen la misma función y que por lo tanto, solo son tres formas distintas de escribir lo mismo.

Ejemplo 2.2.4 El campo $f(x, y, z) = 6x - y + 2z$ es un campo lineal y se puede escribir como:

$$f(x, y, z) = 6x - y + 2z = (6, -1, 2) \cdot (x, y, z) \qquad \square$$

Recordemos ahora las propiedades más importantes de los campos lineales. Si f es un campo escalar lineal, entonces:

Teorema 2.2.5 *Si f es un campo escalar lineal, entonces:*

1. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ *para todo* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

2. $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$ *para todo* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *y para todo* $k \in \mathbb{R}$.

3. *Si para cada* i

$$a_i = f(\mathbf{e}_i) = f(0, \dots, \overset{i}{\check{1}}, \dots, 0)$$

y $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, *entonces* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$.

Las dos primeras propiedades caracterizan a las aplicaciones lineales y son usadas para definir este tipo de aplicaciones en espacios vectoriales generales. La tercera propiedad se usa fundamentalmente para hacer desarrollos sobre aplicaciones lineales desconocidas o arbitrarias, ya que nos da una forma de expresar los coeficientes a partir de la propia aplicación.

Los campos lineales no deben confundirse con los *campos afines*, que se definen a partir de ellos como sigue.

Definición 2.2.6 *Un campo afín en* $\mathbb{R}^n$ *responde a la expresión*

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$$

que puede ser escrita haciendo uso del producto escalar como

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b$$

En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, haremos uso de los grafos de los campos lineales y afines. Concretamente, el grafo del campo $f(x,y) = a_1x + a_2y$ es el plano

$$a_1x + a_2y - z = 0$$

que es normal (perpendicular) al vector $(a_1, a_2, -1)$ y pasa por el origen de coordenadas. De la misma forma, el grafo del campo afín $f(x,y) = a_1x + a_2y + b$ es el plano

$$a_1x + a_2y - (z - b) = 0$$

que pasa por el punto $(0,0,b)$ y es normal al vector $(a_1, a_2, -1)$.

A lo largo del tema, trabajaremos con planos en $\mathbb{R}^3$, por lo que es conveniente repasar las distintas formas de expresar analíticamente este tipo de conjuntos. En particular, para determinar un plano en $\mathbb{R}^3$ es suficiente con dar un punto del plano, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y un vector normal, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$; la ecuación del plano dado por estos dos elementos es

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$$

Esto es consecuencia de la definición del producto escalar, por la cual, el producto de dos vectores perpendiculares es 0. En este caso, si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto del plano, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{v}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} \cdot (P - P_0) = 0 \\
&(v_1, v_2, v_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
&v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2.7 El plano perpendicular al vector $(-2, 1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas es:

$$-2x + y - z = 0$$

Si queremos que el plano pase por el punto $(-1, 0, 1)$, la ecuación es:

$$\begin{aligned}
-2(x + 1) + y - (z - 1) &= 0 \\
-2x + y - z - 1 &= 0
\end{aligned}$$

□

2.2.2. Continuidad

De manera intuitiva, el límite de una función de una variable en un punto a es *el valor que debería tomar la función en ese punto deducido a partir de lo que ocurre a su alrededor*; de esta forma, una función es continua en el punto si el valor en él coincide con el valor previsto según lo que ocurre a su alrededor.

Por ejemplo, si consideramos el campo $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ y el punto $\boldsymbol{a} = (1, 2)$ de su dominio, podemos estudiar la existencia del límite en este punto considerando sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 1$ y $\lim y_n = 2$; entonces:

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1 \cdot 2^2}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

Dado que este límite no depende de las sucesiones x_n e y_n, podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}$$

También podemos calcular de esta forma límites en puntos fuera del dominio. Por ejemplo, para el mismo campo, podemos calcular el límite en el punto $(0, 0)$ considerando sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$; en este caso, la evaluación del límite

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}$$

nos lleva a una indeterminación, pero teniendo en cuenta que $\dfrac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1$, deducimos que

$$\left| \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq |x_n|$$

y dado que el límite de x_n es 0,

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0$$

En este caso, el límite tampoco depende de las sucesiones x_n e y_n y podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Sin embargo, por lo general no es sencillo eliminar las indeterminaciones como hemos hecho en este ejemplo o decidir que un límite no existe; el simple estudio de límites laterales que hacemos para funciones de una variable, se complica cuando tratamos con campos escalares. Por esta razón, vamos a dejar este tipo de problemas fuera de los objetivos de este curso y solo trabajaremos con funciones a las que se les puede aplicar el siguiente resultado.

COROLARIO 2.2.8 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas,...) en un dominio D, entonces el campo es continuo en dicho dominio; es decir, el límite del campo coincide con el valor en el correspondiente punto.*

Gráficamente, la propiedad de continuidad de un campo se traduce en la continuidad de su grafo, es decir, este no presentará ni agujeros ni rupturas.

2.2.3. Diferenciabilidad

La definición de derivabilidad de funciones reales de variable real se introduce con dos objetivos:

- En términos geométricos, para formalizar la noción de *suavidad* de una curva y proveer una definición analítica de recta tangente.
- Desde el punto de vista de la física, para introducir la noción de tasa de cambio de una magnitud escalar; por ejemplo, la velocidad en el estudio del movimiento o la tasa de variación de la temperatura en un recinto sometido a una fuente de calor.

Si las magnitudes estudiadas dependen de varias variables (la medición de la temperatura en una sala será diferente según la posición del termómetro), también tiene sentido plantearnos las cuestiones anteriores y, por lo tanto, necesitaremos extender los conceptos planteados a estas nuevas situaciones. Usaremos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ para motivar los conceptos, pero generalizaremos las definiciones a cualquier campo.

En primer lugar, antes de considerar el movimiento libre en cualquier dirección desde un punto, imaginemos que desde ese punto $\boldsymbol{a}$, nos movemos sobre una recta en una dirección $\boldsymbol{v}$. Entonces, el valor del campo sobre esta recta puede expresarse usando una función de una variable, $f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$. La tasa de cambio puntual en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{v}$ viene entonces dada por la derivada de esta función en $t = 0$,

$$\left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u})\right|_{t=0}$$

ya que $f(\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a})$. Este límite también se denomina *diferencial de* f *en* $\boldsymbol{a}$ *en la dirección* $\boldsymbol{v}$ y, si el vector es unitario, se denomina *derivada direccíónal.*

Definición 2.2.9 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $\boldsymbol{a} \in D$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. *Llamamos* diferencial de f en $\boldsymbol{a}$ *al campo* $df_{\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definido como sigue*

$$df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})\right|_{t=0}$$

Si el vector $\boldsymbol{u}$ *es unitario, al número* $df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u})$ *lo llamamos* derivada direccional de f en el punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{u}$ *y la denotamos por* $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$.

Ejemplo 2.2.10 Vamos a calcular las derivadas direccional del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ en la dirección que va al punto $(1, 1)$. Como ya tenemos el campo y el punto, sólo nos queda determinar la dirección (vector) así que, lo primero será calcular el vector unitario que marca la dirección desde el punto $(2, -1)$ al punto $(1, 1)$.

$$\boldsymbol{v} = (1, 1) - (2, -1) = (-1, 2) \qquad \longrightarrow \qquad \boldsymbol{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Después parametrizamos la recta que determina la dirección del vector

$$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u} = (2, -1) + t\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(2 - t\frac{1}{\sqrt{5}}, -1 + t\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Ahora podemos hallar la función de una variable, que llamaremos $g(t)$, que corresponde al campo escalar sobre esa recta:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) = f\left(2 - t\frac{1}{\sqrt{5}}, -1 + t\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \\ &= 2\left(2 - t\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\left(-1 + t\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(2 - t\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-1 + t\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= \frac{8t^3}{5\sqrt{5}} - 6t^2 + \frac{33t}{\sqrt{5}} - 10 \end{aligned}$$

Y ya sólo queda calcular la derivada de $g(t)$ en $t = 0$ que corresponde a la derivada direccional que queríamos calcular

$$g'(t) = \frac{24t^2}{5\sqrt{5}} - 12t + \frac{33}{\sqrt{5}} \qquad \longrightarrow \qquad g'(0) = \frac{33}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto,

$$D_{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} f(2, -1) = \frac{33}{\sqrt{5}}$$

□

Si el vector $\boldsymbol{v}$ es el vector $\mathbf{e}_i$ (de la base canónica), la derivada direccional se denomina derivada parcial i-ésima, que admite las siguientes notaciones:

$$df_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{e}_i) = D_i f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \tag{2.3}$$

Estas derivadas se pueden calcular fácilmente sin recurrir al cálculo de límites utilizando el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.2.11 *La parcial i-ésima de un campo f en $\mathbb{R}^n$ se calcula derivando la expresión del campo considerando la variable x_i como variable y el resto como constantes, es decir:*

$$D_i f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{dx_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

Veamos la justificación de la proposición anterior para la primera variable de un campo de dos variables. Por la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\bigg|_{(x,y)=(a,b)} = \frac{d}{dt} f((a,b)+t(1,0))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(a+t,b)\bigg|_{t=0}$$

y aplicando la regla de la cadena en la última expresión

$$\frac{d}{dt} f(a+t,b)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dx} f(x,b)\bigg|_{x=a} \frac{d}{dt}(a+t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dx} f(x,b)\bigg|_{x=a}$$

Por lo tanto, efectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{d}{dx} f(x,y)$$

EJEMPLO 2.2.12
Vamos a calcular las derivadas parciales del campo $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$ en el punto $\boldsymbol{a} = (2,-1)$. En primer lugar, derivamos la expresión de f usando la regla anterior:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^2) = 4xy - y^2 \\ D_2 f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^2) = 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_1 f(2,-1) = -9$ y $D_2 f(2,-1) = 12$. □

Plano tangente. Las derivadas direccionales también tienen su interpretación geométrica. Los vectores $(v_1, v_2, df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}))$ son tangentes al grafo de f en el punto $\boldsymbol{a}$. Si el campo es diferenciable, todos estos vectores forman un plano, el plano tangente al grafo f en el punto $\boldsymbol{a}$ (ver figura 2.6). En este caso, $df_{\boldsymbol{a}}$ debe ser un campo escalar lineal y según hemos visto en la sección 2.2.1:

$$df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = (df_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{e}_1), \dots, df_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{e}_n)) \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) \cdot \boldsymbol{v}$$

Definición 2.2.13 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $\boldsymbol{a} \in D$ *y supongamos que* $df_{\boldsymbol{a}}$ *es un campo lineal. Entonces, el vector* $\big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\big)$ *se denomina* vector gradiente *de* f *en* $\boldsymbol{a}$*, y se denota* $\nabla f(\boldsymbol{a})$*:*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\Big)$$

Por lo tanto, si la aplicación $df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$ es lineal (lo cual ocurrirá si f es diferenciable), se verifica que:

$$df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Y, en particular, si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario: $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$.

Ejemplo 2.2.14 Hemos calculado anteriormente las derivadas parciales del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^2) = 4xy - y^2 \\ D_2 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^2) = 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto el vector gradiente y la diferencial en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ son:

$$\begin{aligned} \nabla f(2, -1) &= (-9, 12) \\ df_{(2,-1)}(v_1, v_2) &= \nabla f(2, -1) \cdot (v_1, v_2) = (-9, 12) \cdot (v_1, v_2) = -9v_1 + 12v_2 \end{aligned} \qquad \square$$

Este vector gradiente nos permite calcular la derivada direccional de una manera más sencilla a como se hizo en el ejemplo 2.2.10, así:

$$D_{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = (-9, 12) \cdot \Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{33}{\sqrt{5}} \qquad \square$$

Ya podemos definir formalmente, *espacio vectorial tangente* y *espacio afín tangente.*

Definición 2.2.15 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $\boldsymbol{a} \in D$*.*

1. *El conjunto de los vectores* $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tales que:*

$$D_1 f(\boldsymbol{a}) \cdot v_1 + \dots + D_n f(\boldsymbol{a}) \cdot v_n - v_{n+1} = 0$$

se denomina espacio vectorial tangente *al grafo de* f *en el punto* $\boldsymbol{a}$*.*

2. *El conjunto de los puntos* $(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tales que:*

$$D_1 f(\boldsymbol{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + D_n f(\boldsymbol{a}) \cdot (x_n - a_n) - (z - f(\boldsymbol{a})) = 0$$

se denomina espacio (afín) tangente *al grafo de* f *en el punto* $\boldsymbol{a}$*. Si* $n = 2$ *lo denominamos* plano tangente *y si* $n = 1$ *lo denominamos* recta tangente.

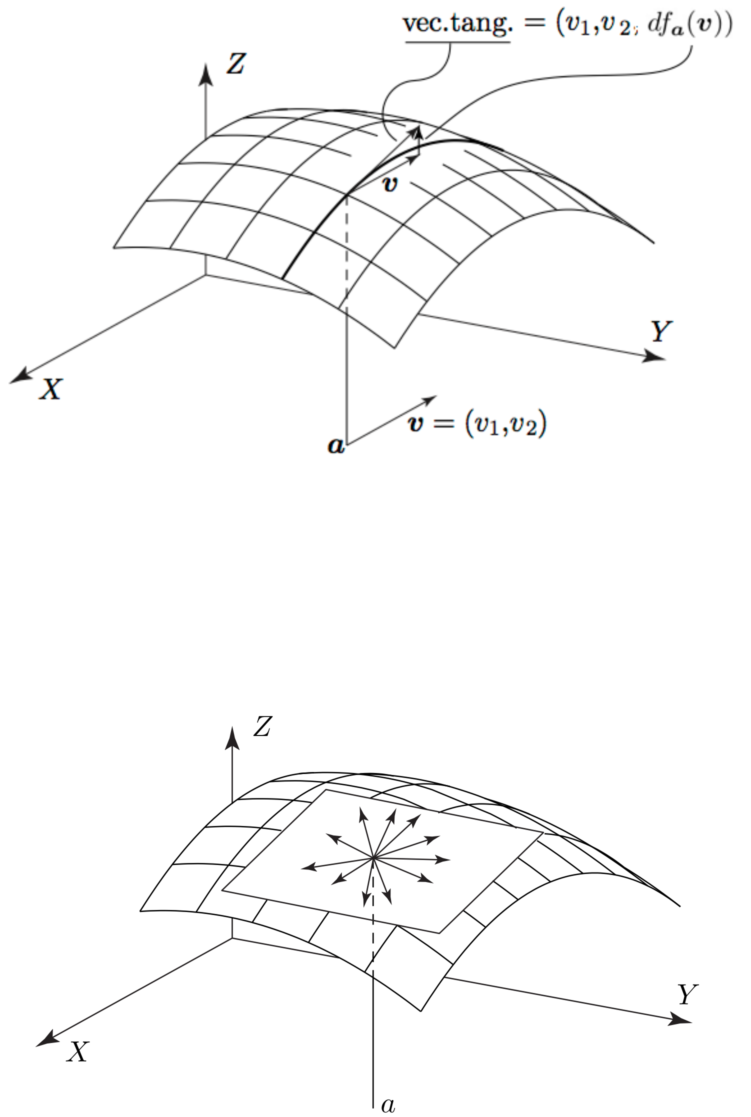


Figura 2.6: Representación de la derivada direccional y vectores tangentes

Hemos definido formalmente las nociones de derivada direccional, vector tangente y espacio tangente, y hemos utilizado varias veces la palabra *diferenciabilidad* sin definirla formalmente. La existencia de derivadas parciales y de derivadas direccionales, o el hecho de que todos los vectores tangentes formen un plano, no son características necesarias para hablar de diferenciabilidad. Necesitamos además que *la diferencial del campo sea el campo escalar lineal que mejor lo aproxime en las cercanías del punto* $\boldsymbol{a}$. Esta propiedad coincide con la que conocemos para funciones de una variable: *la recta tangente es la que mejor aproxima la función con polinomios de grado 1.*

DEFINICIÓN 2.2.16 *Sea* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *un campo escalar y* $\boldsymbol{a} \in D$ *para el cual existe el vector gradiente* $\nabla f(\boldsymbol{a})$*. Decimos que* f *es* diferenciable *en* $\boldsymbol{a}$ *si*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}) = 0$$

Por lo tanto, el estudio de la propiedad de diferenciabilidad se basa en el cálculo de límites en varias variables que, como ya hemos dicho, no vamos a abordar en este curso. En la mayoría de los casos, será suficiente con aplicar los resultados que recogemos a continuación y que aseguran la diferenciabilidad de los campos expresados a partir de funciones elementales. A lo largo del curso, solo vamos a trabajar con este tipo de funciones, y por lo tanto, no será necesario estudiar la condición de diferenciabilidad a partir de la definición.

TEOREMA 2.2.17 *Si existen todas las derivadas parciales del campo escalar* f *y son continuas en un entorno del punto* $\boldsymbol{a}$*, entonces* f *es diferenciable en* $\boldsymbol{a}$*.*

La condición dada en este teorema es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, pero no es una condición necesaria y, de hecho, se pueden establecer ejemplos bastantes simples de campos diferenciables cuyas derivadas parciales no son continuas. Si un campo es diferenciable y su parciales son continuas, decimos que el campo es de *clase* $\mathcal{C}^1$.

COROLARIO 2.2.18 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, ...), entonces el campo es continuo y diferenciable en el dominio común a todas sus derivadas parciales.*

2.2.3.1. Notaciones posibles de derivadas y derivadas parciales

Hemos utilizado en las páginas anteriores varias notaciones para las derivadas de funciones reales y para las derivadas parciales de campos escalares. Una de estas notaciones es $D_i f(\boldsymbol{a})$, que se debe a Louis François Antoine Arbogast y extiende la notación $Df(a)$ para la derivada de funciones reales, aunque para funciones de una variable, la notación más utilizada es $f'(a)$, que se debe a Joseph-Louis Lagrange. Estas notaciones son adecuadas para aplicarlas sobre el nombre de la función. Sin embargo, en muchas ocasiones trabajamos sobre campos sin utilizar un nombre específico, en estos casos, debemos utilizar la *notación de Leibniz*, que toma su nombre de Gottfried Wilhelm Leibniz,

$$\frac{d}{dx}f(x) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\dots,x_n)$$

2.2.3.2. Propiedades del vector gradiente

La siguiente proposición establece que la relación entre continuidad y derivabilidad de las funciones reales se mantiene en la generalización a campos.

Proposición 2.2.19 *Si f es un campo escalar diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces f es continuo en $\boldsymbol{a}$.*

Aunque en el estudio de campos concretos, no necesitaremos normalmente la aplicación de las propiedades algebraicas que vemos a continuación, estas pueden ser útiles en algunas situaciones para simplificar cálculos y realizar desarrollos teóricos simples.

Proposición 2.2.20 *Consideremos los campos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la función real $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y la función vectorial $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$.*

1. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces $f+g$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(f+g)(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) + \nabla g(\boldsymbol{a})$$

2. *Si f y g son diferenciables en $\boldsymbol{a}$, entonces fg también es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a})$$

3. *Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y $f(\boldsymbol{a})\neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(1/f)(\boldsymbol{a}) = \frac{-1}{[f(\boldsymbol{a})]^2}\nabla f(\boldsymbol{a})$$

4. *Regla de la cadena: Si f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y ϕ es derivable en $f(\boldsymbol{a})$, entonces $\phi\circ f$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ y*

$$\nabla(\phi\circ f)(\boldsymbol{a}) = \phi'(f(\boldsymbol{a}))\nabla f(\boldsymbol{a})$$

5. *Regla de la cadena: Si $\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y f es diferenciable en $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, entonces $f\circ\boldsymbol{\gamma}$ es derivable en t_0 y*

$$(f\circ\boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

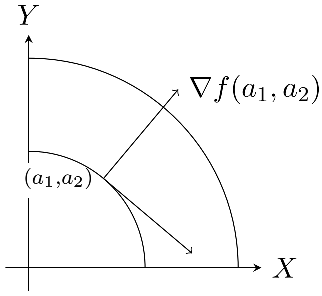


Figura 2.7: El gradiente da la dirección de derivada direccional máxima.

Deducimos a continuación una importante propiedad del vector gradiente. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario, según hemos definido anteriormente, la derivada direccional de un campo f en un punto $\boldsymbol{a}$ y en la dirección $\boldsymbol{u}$ es:

$$D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cos \alpha$$

en donde α es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Por lo tanto, dado que el módulo del vector gradiente es constante, el valor de la derivada direccional depende solamente del ángulo que el vector gradiente forma con la dirección considerada.

TEOREMA 2.2.21 *Sea α es ángulo formado por $\nabla f(\boldsymbol{a})$ y un vector unitario $\boldsymbol{u}$.*

1. *Si $\alpha = 0$ (los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$ tienen la misma dirección), el valor del coseno es máximo y por lo tanto, el valor de la derivada direccional es máximo e igual a $D_{\boldsymbol{u}} f(a) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.*

2. *Si $\alpha = \pi/2$ (los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\nabla f(\boldsymbol{a})$ son perpendiculares) el valor del coseno es 0, es decir, derivada direccional es nula en la dirección perpendicular al vector gradiente.*

En la figura 2.7 representamos dos curvas de nivel de un campo f. Si nos movemos desde el punto (a_1, a_2) y queremos sufrir el cambio más rápido en el valor del campo, tendremos que ir en la dirección que nos da mayor proximidad a la siguiente curva de nivel. El ítem 1 del teorema 2.2.21 indica que esta dirección es la dada por el vector gradiente de f en ese punto.

Pero si nos movemos sobre la curva de nivel, no sufrimos ninguna variación en el valor del campo, es decir, la derivada direccional es 0; el ítem 2 del teorema 2.2.21 dice que esta dirección es normal al vector gradiente. Esta propiedad es válida para cualquier campo, como probamos a continuación.

EJEMPLO 2.2.22 Consideramos el mismo campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ y punto $(2, -1)$ que en el ejemplo 2.2.14, para poder utilizar todos los resultados ya obtenidos.

- La dirección de máximo crecimiento del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ en el punto $(2, -1)$ viene dado por el gradiente en ese punto:

$$\nabla f(2, -1) = (-9, 12)$$

  Por lo tanto, la dirección de máximo decrecimiento vendrá dada por el vector $(9, -12)$

- La derivada direccional máxima del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ en el punto $(2, -1)$ es la derivada direccional de f en la dirección del gradiente. Para ello, necesitamos un vector unitario en la dirección del gradiente:

$$(-9, 12) \qquad \longrightarrow \qquad \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

  Por lo tanto, la derivada direccional máxima es

$$D_{\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (-9, 12) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 15 \qquad \square$$

Sea $\boldsymbol{\gamma}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva contenida en una superficie de nivel de un campo f, es decir, $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = c$ para todo t, y supongamos que esta curva pasa por el punto $\boldsymbol{a}$, es decir, $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{a}$. Una simple aplicación de la regla de la cadena justifica el siguiente desarrollo:

$$0 = (f \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{\gamma}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t_0)$$

El vector derivada $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ es tangente a la curva y por lo tanto a la superficie de nivel; en consecuencia, la igualdad anterior permite afirmar que estos vectores son perpendiculares al vector gradiente (ver figura 2.8).

Teorema 2.2.23 *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo diferenciable y consideremos una superficie de nivel $f(\boldsymbol{x}) = c$ y un punto $\boldsymbol{a}$ en dicha superficie. Entonces, $\nabla f(\boldsymbol{a})$ es un vector normal al plano tangente a la superficie de nivel en punto $\boldsymbol{a}$. Por lo tanto, el espacio vectorial tangente a la superficie es:*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

y el espacio afín tangente es:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$$

Como casos particulares, vamos a mostrar las expresiones de las rectas y planos tangentes a curvas de nivel en $\mathbb{R}^2$ y superficies de nivel en $\mathbb{R}^3$:

1. La recta tangente a la curva dada por $f(x, y) = c$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

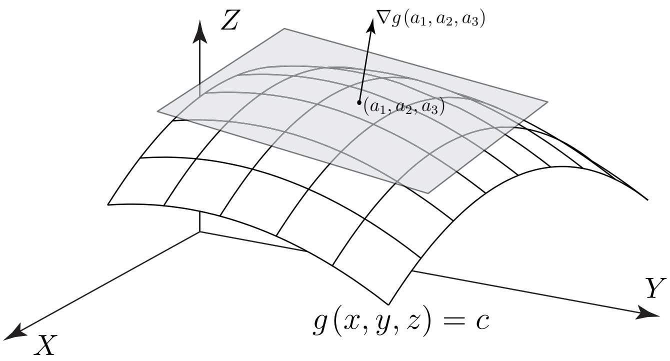


Figura 2.8: El gradiente es normal a la superficie de nivel.

2. Análogamente, el plano tangente a la superficie dada por $g(x, y, z) = c$ (ver figura 2.8) en un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$D_1g(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_2g(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_3g(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 2.2.24 En la lección anterior, hemos aprendido a calcular las rectas tangentes a curvas parametrizadas. En particular, podríamos obtener la recta tangente a una cónica utilizando las parametrizaciones que hemos introducido para las cónicas. Ahora, haciendo uso del vector gradiente, podemos calcular más fácilmente estas rectas. Por ejemplo, la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una curva de nivel del campo

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

y por lo tanto, un vector normal a dicha curva en un punto (x_0, y_0) es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right)$$

En consecuencia, la recta tangente es:

$$\begin{aligned} \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}x - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{y_0^2}{b^2} &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \\ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= 1 \end{aligned}$$ □

Ejemplo 2.2.25 Para obtener la recta tangente a la curva $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$ en el punto $(0, -1)$ podemos proceder de dos maneras distintas: (1) parametrizando la curva, o bien, (2) aplicando las propiedades del gradiente.

1. Completando cuadrados, identificamos la curva, que resulta ser una parábola centrada en el punto $(-2,3)$ y cuya directriz es la recta $x=-4$, puesto que $d=2$. Por lo tanto, una parametrización de la curva

$$(y-3)^2 = 4\cdot 2\cdot (x+2) \qquad \longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -2+8\cdot t^2 \\ y(t) = 3+8\cdot t \\ t\in\mathbb{R} \end{array} \right.$$

nos permite obtener la recta tangente así:

$$\left. \begin{array}{lcl} (0,-1) & \to & t=-1/2 \\ x'(t)=16t & \to & x'(-1/2)=-8 \\ y'(t)=8 & \to & y'(-1/2)=8 \end{array} \right\} \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 0-8t \\ y(t) = -1+8t \end{array} \right. \quad t\in\mathbb{R}$$

$$\text{o bien} \quad \underline{x+y+1=0}$$

2. La curva $y^2-8x-6y-7=0$ coincide con una curva de nivel del campos escalar $F(x,y)=y^2-8x-6y-7$ cuyo gradiente en el punto $(0,-1)$ es un vector perpendicular a la curva en ese punto

$$\nabla F(x,y) = (-8, 2y-6) \qquad \longrightarrow \qquad \nabla F(0,-1) = (-8,-8)$$

que nos permite determinar la recta tangente

$$-8(x-0)-8(y+1)=0 \qquad \longrightarrow \qquad \underline{x+y+1=0} \qquad \Box$$

Ejemplo 2.2.26 Dado un campo escalar $z=f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$, su grafo puede considerarse como la superficie de nivel de un campo en $\mathbb{R}^3$:

$$F(x,y,z) = f(x,y)-z.$$

Efectivamente, si $F(x,y,z)=0$, entonces $z=f(x,y)$. Por lo tanto, el plano tangente a $F(x,y,z)=0$ es normal al vector

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = (D_1 f(x_0,y_0), D_2 f(x_0,y_0), -1),$$

que permite construir el plano tangente introducido en la definición 2.2.15:

$$D_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-f(x_0,y_0)) = 0 \qquad \Box$$

Ejemplo 2.2.27 El plano tangente a la superficie $x\mathrm{e}^y + z^2 y - 3z - 7 = 0$ en el punto $(1,0,-2)$ se obtiene a partir del gradiente de la siguiente manera: si consideramos el campo escalar $F(x,y,z) = x\mathrm{e}^y + z^2 y - 3z$ entonces $\nabla F(1,0,-2)$ es un vector perpendicular a la superficie en ese punto y, por lo tanto, a su plano tangente.

$$\left. \begin{array}{l} \nabla F(x,y,z) = (\mathrm{e}^y, x\mathrm{e}^y + z^2, 2zy-3) \\ \nabla F(1,0,-2) = (1,5,-3) \end{array} \right\} \to \quad \begin{array}{c} 1(x-1)+5(y-0)-3(z+2)=0 \\ \text{o bien} \quad \underline{x+5y-3z-7=0} \end{array}$$

$\Box$

EJEMPLO 2.2.28 El plano tangente al grafo de $f(x, y) = x^2 \ln(xy + 3) - 5$ en el punto $(-2, 1)$ se obtiene de la siguiente manera: si consideramos el campo escalar $F(x, y, z) = x^2 \ln(xy + 3) - z$ entonces el grafo de f coincide con la superficie de nivel $F(x, y, z) = 5$ y, por lo tanto, $\nabla F(-2, 1, -5)$ es un vector perpendicular a la superficie en el punto $(-2, 1, -5)$ y, por lo tanto, a su plano tangente. Observe que la coordenada z del punto se ha obtenido sustituyendo el punto $(-2, 1)$ en la función, es decir, $f(-2, 1) = -5$.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla F(x, y, z) = \left(2x \ln(xy + 3) + \frac{x^2 y}{xy + 3}, \frac{x^3}{xy + 3}, -1\right) \\ &\nabla F(-2, 1, -5) = (4, -8, -1) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 4(x + 2) - 8(y - 1) - 1(z + 5) = 0 \quad \text{o bien} \quad \underline{4x - 8y - z + 11 = 0} \qquad \square$$

2.2.4. Derivadas de orden superior

Para un campo $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable hemos definido las derivadas parciales para cada punto del dominio y por lo tanto, estas definen un campo escalar para cada i con $1 \leq i \leq n$:

$$D_i f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Tiene entonces sentido estudiar la diferenciabilidad de estos campos y calcular sus derivadas parciales. Las derivadas parciales de los campos $D_i f$ se denominan *derivadas de segundo orden* de f y las notaciones posibles para ellas son

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad D_i(D_j f) = D_{ij} f.$$

Por el corolario 2.2.18, la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden asegura la diferenciabilidad de las derivadas parciales de f; en tal caso, decimos que f es de *clase* $\mathcal{C}^2$. Una importante propiedad de estos campos queda establecida por el siguiente teorema, que asegura que el orden de derivación no influye en el resultado.

TEOREMA 2.2.29 (DE SCHWARZ) *Sea f un campo escalar tal que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas; entonces, para cada i, j:*

$$D_{ij} f = D_{ji} f$$

Para los campos de clase $\mathcal{C}^2$ y para cada punto de su dominio, definimos la siguiente matriz $n \times n$, que se denomina *matriz Hessiana* de f en $\boldsymbol{a}$:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(\boldsymbol{a}) & D_{12} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{1n} f(\boldsymbol{a}) \\ D_{21} f(\boldsymbol{a}) & D_{22} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{2n} f(\boldsymbol{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ D_{n1} f(\boldsymbol{a}) & D_{n2} f(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_{nn} f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, por el teorema de Schwarz, esta matriz es simétrica. A partir de ella, definimos el campo

$$d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{u},$$

que se denomina *segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$*. Como ya dijimos anteriormente, cuando trabajamos con expresiones matriciales, los vectores deben tratarse como matrices columna y por esta razón escribimos la matriz transpuesta $\boldsymbol{u}^t$ a la izquierda de la matriz hessiana.

EJEMPLO 2.2.30 Vamos a calcular $d^2 f_{\boldsymbol{a}}$ para $f(x,y) = 2x^2y - xy^2$ y $\boldsymbol{a} = (2,-1)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 2x^2y - xy^2 \\
\nabla f(x,y) &= (4xy - y^2, 2x^2 - 2xy) \\
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x-2y \\ 4x-2y & -2x \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(2,-1) &= \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\
d^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
d^2 f_{(2,-1)}(u_1,u_2) &= -4u_1^2 + 20u_1u_2 - 4u_2^2
\end{aligned}$$ □

Como vemos en este ejemplo, la expresión obtenida para $d^2 f_{(2,-1)}$ es un polinomio de grado 2 sin términos de grado 1 o grado 0; estas expresiones se denominan *formas cuadráticas*.

Todo el desarrollo mostrado en esta sección puede continuarse para definir las derivadas parciales de órdenes superiores (orden tres, cuatro,...). Sin embargo, en este curso solo trabajaremos con las derivadas de segundo orden.

LECCIÓN 2.3

Optimización de campos escalares

Una de las aplicaciones del concepto de diferenciabilidad es resolver problemas de *optimización*, es decir, encontrar los valores máximos y mínimos de una magnitud definida a partir de uno o varios parámetros. Estos problemas se resuelven fácilmente si la magnitud solo depende de un parámetro, utilizando las derivadas de orden superior de la función de una variable determinada por el problema. El objetivo de esta lección es generalizar esta técnica a campos escalares, es decir, optimizar magnitudes escalares que dependen de varios parámetros.

Empezamos introduciendo algunos conceptos y resultados básicos.

DEFINICIÓN 2.3.1 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está* acotado *si existe $r > 0$ tal que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.*

Es decir, un conjunto está acotado si la distancia entre cualquier par de puntos ($\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$) es siempre menor que una cota fija ($\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r$).

DEFINICIÓN 2.3.2 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es* cerrado *si para todo $\boldsymbol{x} \notin D$ existe $r > 0$ tal que: si $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r$, entonces $\boldsymbol{y} \notin D$.*

Es decir, un conjunto es cerrado si cualquier punto que no pertenezca a él esta “separado” del conjunto, es decir, la distancia a cualquier punto del conjunto es estrictamente positiva.

Sabemos que una función de una variable, continua en un dominio cerrado y acotado siempre alcanza un valor máximo y un valor mínimo en tal dominio. Esta propiedad también se verifica para campos escalares.

TEOREMA 2.3.3 *Sea f un campo escalar continuo en un conjunto D cerrado y acotado. Entonces existen $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D$ tales que $f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_1)$ para todo $\boldsymbol{x} \in D$.*

Es decir, $f(\boldsymbol{x}_0)$ es el valor mínimo que toma el campo en el conjunto D y $f(\boldsymbol{x}_1)$ es el valor máximo. En tal caso, decimos que $\boldsymbol{x}_0$ es un punto mínimo y $\boldsymbol{x}_1$ es un punto máximo.

2.3.1. Extremos locales

Igual que en el caso real, para determinar los máximos y mínimos de un campo debemos empezar por determinar los máximos y mínimos locales o relativos, es decir, los máximos y mínimos respecto de los puntos cercanos a él.

DEFINICIÓN 2.3.4

1. *$f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un* máximo local (o relativo) *en $\boldsymbol{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in D$ tal que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r$.*

2. *$f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene un* mínimo local (o relativo) *en $\boldsymbol{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\boldsymbol{a}) \le f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in D$ tal que $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r$.*

Utilizaremos la denominación genérica de *extremo* local para referirnos a un punto que sea máximo local o mínimo local. El siguiente teorema justifica la definición de puntos críticos, entre los cuales encontramos los extremos locales de un campo.

TEOREMA 2.3.5 *Si $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable y $\boldsymbol{a} \in D$ es un extremo local de f, entonces $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$; es decir, todas las derivadas parciales de f en $\boldsymbol{a}$ son nulas.*

Gráficamente, para funciones de una variable sabemos que la recta tangente al grafo de la función en un extremo son paralelas al eje OX. Si $n = 2$ también obtenemos una propiedad parecida, ya que si $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$, entonces el plano tangente al grafo en el punto (a_1, a_2) es perpendicular al vector $(0, 0, -1)$, es decir, es paralelo al plano XY.

DEFINICIÓN 2.3.6 *Los puntos en los cuales el vector gradiente es nulo se denominan* puntos críticos.

EJEMPLO 2.3.7

1. Para el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(0, 0)$. Es fácil razonar que este punto es mínimo del campo:
$$x^2 + y^2 \ge 0 = f(0, 0)$$
2. Para el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(0, 0)$. En este caso, el punto no es un extremo ya que $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = x^2 > 0$ para todo $x \ne 0$, $f(0, y) = -y^2 < 0$ para todo $y \ne 0$.

En ambos casos, como $f(0, 0) = 0$, es fácil de clasificar el punto crítico estudiando el signo de la función en torno al punto $(0, 0)$ como veremos en el siguiente ejemplo. □

En el ejemplo anterior, hemos visto que no todos los puntos críticos son máximos o mínimos; los puntos críticos que no son extremos locales se denominan *puntos silla.*

Por lo tanto, para determinar los extremos locales de un campo escalar diferenciable, debemos localizar los puntos críticos y clasificarlos, es decir, estudiar cuáles son máximos, cuáles son mínimos y cuáles no son extremos. Esta clasificación puede hacerse comparando directamente el valor del campo en esos puntos con el valor en los puntos “cercanos” a él, como hemos hecho en el ejemplo anterior, y como vemos con más detalle en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 2.3.8 Los puntos críticos del campo $f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{xy}$ son los puntos de la forma $(a,0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, como vemos a continuación.

$$D_1 f(x,y) = y^2(1+xy)\mathrm{e}^{xy} = 0$$
$$D_2 f(x,y) = xy(2+xy)\mathrm{e}^{xy} = 0$$

Por lo tanto, efectivamente si $y = 0$ se verifican las dos ecuaciones. Si y no es igual a 0, por la segunda ecuación x sería igual a 0 y en tal caso no se verificaría la primera ecuación.

Vamos a clasificar estos puntos críticos.

- Si $a > 0$, entonces el punto $(a,0)$ es mínimo: dado que a es estrictamente positivo, los valores de x cercanos a a son también positivos y entonces
$$f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{xy} \overset{(+++)}{>} 0 = f(a,0)$$
- Si $a < 0$, entonces el punto $(a,0)$ es máximo: dado que a es estrictamente negativo, los valores de x cercanos a a son también negativos y entonces
$$f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{xy} \overset{(-++)}{<} 0 = f(a,0)$$
- Finalmente, el punto $(0,0)$ es un punto silla: si tomamos valores de x cercanos a 0 pero positivos, entonces $f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{xy} \geq 0 = f(0,0)$; si tomamos valores de x cercanos a 0 pero negativos, entonces $f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{xy} \leq 0 = f(0,0)$. □

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora, hemos podido clasificar fácilmente los puntos críticos comparando el valor de la función en ese punto con el valor en los puntos cercanos a él. Sin embargo, esto no será siempre posible o fácil de hacer y será necesario utilizar otros métodos, como el que vemos a continuación.

Criterio de la hessiana. En general, la forma más sencilla de hacer la clasificación de los puntos críticos es utilizando, si es posible, el teorema de Taylor que dice que, en un entorno suficientemente pequeño de $\boldsymbol{a}$ se verifica que

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Si, además, $\boldsymbol{a}$ es un punto crítico, entonces

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$
$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Y, en consecuencia, la comparación de $f(\boldsymbol{a})$ y $f(\boldsymbol{x})$ se reduce a analizar el signo de la expresión

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^t \, \nabla^2 f(\boldsymbol{a}) \, (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Si esta expresión es positiva, entonces $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{a}$ será un punto mínimo; si la expresión es negativa, entonces $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{a}$ será un punto máximo.

La función $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$ se corresponde con la segunda derivada de la función en la dirección $\boldsymbol{u}$, de la misma forma que $df_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$ es la primera derivada en la dirección $\boldsymbol{u}$. De esta forma, el desarrollo anterior nos da un criterio análogo al criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

TEOREMA 2.3.9 *Sea $\boldsymbol{a} \in D$ un punto crítico del campo $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y consideremos la segunda diferencial de f en $\boldsymbol{a}$: $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^t \nabla^2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}$.*

1. *Si $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ para todo $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* definida positiva*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un mínimo local de f.*
2. *Si $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ para todo $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* definida negativa*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un máximo local de f.*
3. *Si $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_1) > 0$ y $d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_2) < 0$ para algún $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\boldsymbol{a}}$ es* indefinida*), entonces $\boldsymbol{a}$ es un punto silla de f.*

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema, ***no podemos deducir nada***; es decir, si la forma cuadrática es 0 en algunos vectores y positiva en el resto (semidefinida positiva), o bien si es 0 en algunos vectores y negativa en el resto (semidefinida negativa).

Para analizar el signo de la forma cuadrática, es suficiente con dar una expresión para la misma en terminos de sumas y diferencias de cuadrados, lo cual conseguiremos utilizando la técnica de compleción de cuadrados que hemos aprendido anteriormente.

EJEMPLO 2.3.10 Vamos a hallar y clasificar los puntos críticos del campo

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$$

Empezamos calculado el gradiente del campo:

$$\nabla f(x, y) = (4x - y - 3, -x - 6y + 7)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x - y - 3 &= 0 \\ -x - 6y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

y obtenemos el único punto crítico $(1, 1)$, solución del sistema de ecuaciones. La matriz hessiana del campo es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Y la segunda diferencial en todos los puntos y en particular en el $(1,1)$ es:

$$d^2 f_{(1,1)}(u_1,u_2) \quad = \quad (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad = \quad 4u_1^2 \; - \; 2u_1u_2 \; - \; 6u_2^2$$

Vamos a transformar esta expresión utilizando la compleción de cuadrados. Podemos elegir cualquiera de las dos variables, y en este caso elegiremos u_1:

$$4u_1^2 - 2u_1u_2 - 6u_2^2 = (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - 6u_2^2 = (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{25}{4}u_2^2$$

Si $u_2 = 0$, entonces $d^2 f_{(1,1)}(u_1, 0) = 4u_1^2 > 0$ y si $2u_1 = \frac{u_2}{2}$, entonces $d^2 f_{(1,1)}(u_1,u_2) = \frac{-25}{4}u_2^2 < 0$; en consecuencia, el punto $(1,1)$ es un punto silla. □

Utilizando el método de compleción de cuadrados como en el ejemplo anterior, siempre es posible expresar la forma cuadrática como:

$$d^2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) = a_1\lambda_1(\boldsymbol{u})^2 + \cdots + a_m\lambda_m(\boldsymbol{u})^2,$$

en donde $m \le n$, $a_i \neq 0$ para cada i, y $\lambda_1(\boldsymbol{u}) = 0,\ldots,\lambda_m(\boldsymbol{u}) = 0$ es un sistema de m ecuaciones linealmente independientes. A partir de ahí, deducimos que:

1. Si $m = n$ y $a_i > 0$ para cada i, la forma cuadrática es definida positiva y estará asociada a un mínimo local.

2. Si $m = n$ y $a_i < 0$ para cada i, la forma cuadrática es definida negativa y estará asociada a un máximo local.

3. Si algún coeficiente es positivo y otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida y estará asociada a un punto silla.

Cualquier otro caso no nos da información. Es decir, si $m < n$ y todos los coeficientes son o bien positivos o bien negativos, entonces la forma cuadrática se anula sobre las direcciones dadas por la solución del sistema $\lambda_1(\boldsymbol{u}) = 0,\ldots,\lambda_m(\boldsymbol{u}) = 0$, y en consecuencia no podemos decidir nada sobre el punto al que está asociada.

Ejemplo 2.3.11 La forma cuadrática $q(u_1,u_2) = u_1u_2$ es indefinida. Aunque no podemos utilizar el método de compleción de cuadrados en esta expresión, es fácil ver que esta forma cuadrática es indefinida pues

- Si tomamos $u_1 > 0$ y $u_2 > 0$, entonces $q(u_1,u_2) = u_1u_2 > 0$
- Si tomamos $u_1 < 0$ y $u_2 > 0$, entonces $q(u_1,u_2) = u_1u_2 < 0$

También podíamos llegar a la misma conclusión si tenemos en cuenta que

$$u_1u_2 = \frac{1}{4}\left[(u_1+u_2)^2 - (u_1-u_2)^2\right]$$ □

Ejemplo 2.3.12 Vamos a calcular y clasificar los puntos críticos del campo

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2.$$

Hallamos el gradiente de f y planteamos el sistema:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy + 2y)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= 0 \\ -6xy + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ -2y(3x-1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación deducimos que $y = 0$, o bien $x = 1/3$. Llevando estos valores a la primera ecuación, obtenemos tres puntos críticos:

$$(0,0), \qquad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Para clasificar los puntos críticos, determinamos la matriz hessiana, las diferenciales de segundo orden en cada punto y transformamos las correspondiente expresiones para intentar clasificar los puntos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x+2 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}(u_1, u_2) &= 2u_1^2 - 4u_1u_2 = 2(u_1 - u_2)^2 - 2u_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un punto silla.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{-1}{3}) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})}(u_1, u_2) &= 2u_1^2 + 4u_1u_2 = 2(u_1 + u_2)^2 - 2u_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ también es un punto silla.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(0,0)}(u_1, u_2) &= 2u_2^2 \end{aligned}$$

En este caso, la matriz hessiana no permite clasificar el punto $(0,0)$, ya que la diferencial segunda es mayor o igual a 0 en todas las direcciones y es 0 en la dirección $(1,0)$. $\square$

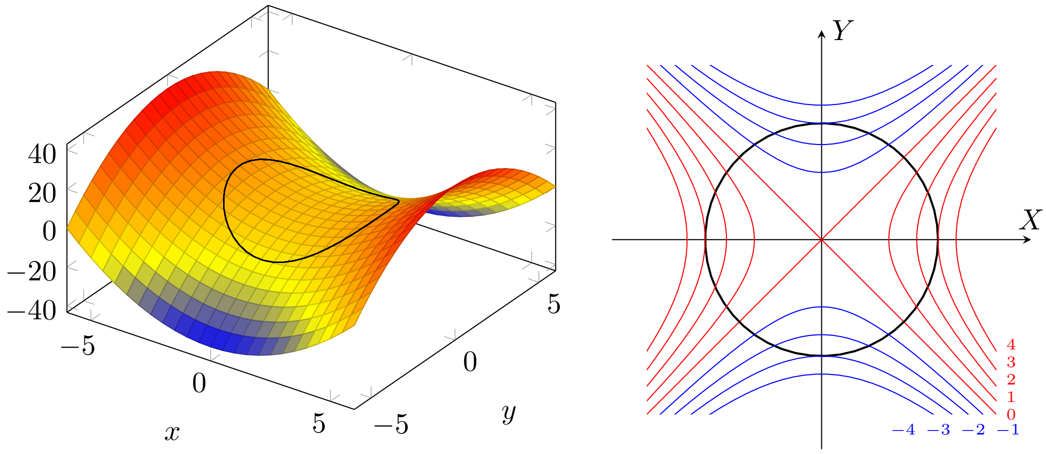


Figura 2.9: Representaciones de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 = 9$.

2.3.2. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En la sección anterior hemos afrontado el problema de hallar los extremos locales de un campo escalar, es decir, los extremos sobre *subconjuntos abiertos* dentro del dominio del campo. Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará estudiar los extremos sobre conjuntos cuyo interior es vacío; por ejemplo, estudiar los extremos de un campo sobre $\mathbb{R}^2$ restringiéndonos a una circunferencia. Esta es la situación que abordamos en esta sección; concretamente, nos planteamos el siguiente problema: encontrar los extremos del campo $f(x_1, \ldots, x_n)$ sobre un conjunto S definido a partir de k campos escalares $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq k < n$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Más brevemente, enunciamos el problema diciendo: *encontrar los extremos del campo escalar f con las condiciones o restricciones $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para cada i tal que $1 \leq i \leq k < n$.*

En el ejemplo 2.3.7 de la página 104 hemos visto que el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ no tiene extremos locales, es decir, el campo no alcanza ni máximo ni mínimo sobre ningún conjunto abierto. Sin embargo, en la figura 2.9, podemos apreciar que si restringimos el campo a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, entonces sí aparecen varios extremos.

En el lado derecho de la misma figura 2.9, vemos la representación del mismo campo, pero mediante las curvas de nivel para $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4; también representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ sobre la que queremos optimizar el campo. Si nos fijamos por ejemplo en el punto $(3, 0)$ de la circunferencia, observamos que la circunferencia y la curva de nivel que pasa por este punto son tangentes. Si analizamos los valores del campo según nos desplazamos sobre la circunferencia desde algún punto por debajo de $(3, 0)$ hasta algún punto por encima de él, observamos que hasta llegar al $(3, 0)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores crecientes del campo, y a partir de $(3, 0)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores decrecientes del campo. Por lo tanto, podemos afirmar que $(3, 0)$ es un máximo (local) de f sobre la circunferencia.

Este ejemplo, que más adelante completaremos analíticamente, motiva el siguiente resultado que afirma que los candidatos a extremos están entre los puntos tales que el conjunto de la restricción y la curva o superficie de nivel son tangentes.

TEOREMA 2.3.13 *Sean* $f, g_1, \dots, g_k \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *campos escalares diferenciables y con derivadas parciales continuas. Sea* S *el subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *formado por los puntos que verifican las condiciones*

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad \textit{para todo } i = 1, \dots, k$$

Si $\boldsymbol{x_0}$ *es un extremo local de* f *restringida a* S*, y* $\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \le i \le k\}$ *es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes, entonces existen números reales* λ_i *tales que*

$$\nabla f(\boldsymbol{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x_0}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\boldsymbol{x_0})$$

A las constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *se las denomina* multiplicadores de Lagrange *asociados a* $\boldsymbol{x_0}$*.*

La condición "$\{\nabla g_i(\boldsymbol{x_0}) \mid 1 \le i \le k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes", exigida en el teorema, se reduce en la práctica a observar que el problema está bien planteado, es decir, que no hay condiciones superfluas, y que están dadas *de la mejor forma posible*. Los ejemplos y ejercicios que planteemos a lo largo del tema estarán formulados de esta forma y, por lo tanto, no será necesario verificar esta condición.

Este teorema nos da el primer paso a seguir para la determinación de los extremos condicionados:

- Los extremos locales del campo f con las restricciones $g_1 = 0$, ..., $g_k = 0$, se encuentran entre los puntos $(x_1, \dots, x_n)$ cuyas coordenadas son solución del sistema:

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1, \dots, x_n) = 0\\
&\qquad\dots\\
&g_k(x_1, \dots, x_n) = 0\\
&D_1 f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 D_1 g_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \lambda_k D_1 g_k(\boldsymbol{x})\\
&\qquad\dots\\
&D_n f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 D_n g_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \lambda_k D_n g_k(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

  Si $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ es una solución del sistema, $(x_1, \dots, x_n)$ se denomina *punto crítico* de f con las restricciones g_1,..., g_k y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son sus multiplicadores de Lagrange asociados.

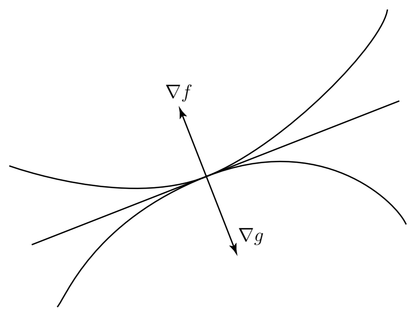


Figura 2.10: Método de los multiplicadores de Lagrange: relación entre gradientes.

- En particular, si $n = 2$ y $k = 1$, tanto las curvas de nivel como la restricción son curvas. Además una curva de nivel es tangente a la restricción en $\boldsymbol{x}_0$ si los vectores normales en $\boldsymbol{x}_0$ son iguales o proporcionales, tal y como vemos en la figura 2.10, es decir:
$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}_0)$$

- Si consideramos el campo escalar
$$F(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 \cdot g_1(\boldsymbol{x}) - \ldots - \lambda_k \cdot g_k(\boldsymbol{x})$$
resulta que el sistema de ecuaciones que determina los extremos relativos de F, es decir $\nabla F = \mathbf{0}$, es equivalente al sistema de ecuaciones que determina los extremos de f condicionados a $\boldsymbol{g}$, lo que resulta muy útil a la hora de plantear los ejercicios.

- En particular, si $n = 2$ y $k = 1$, determinar los puntos críticos del campo $f(x, y)$ condicionado a la restricción $g(x, y) = 0$ es equivalente a calcular los puntos críticos relativos del campo $F(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$, es decir, que los siguientes sistemas son equivalentes
$$\left.\begin{aligned} &g(x, y) = 0 \\ &D_1 f(x, y) = \lambda \cdot D_1 g(x, y) \\ &D_2 f(x, y) = \lambda \cdot D_2 g(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad \equiv \qquad \nabla F(x, y; \lambda) = \mathbf{0}$$

Ejemplo 2.3.14 Vamos a encontrar los puntos críticos del problema de extremos condicionados de la figura 2.9:
$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - y^2 & \qquad g(x, y) &= x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ \nabla f(x, y) &= (2x, -2y) & \qquad \nabla g(x, y) &= (2x, 2y) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es:
$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 - 9 \\ 2x &= 2x\lambda \\ -2y &= 2y\lambda \end{aligned}$$

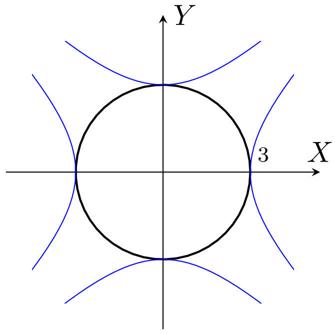


Figura 2.11: Puntos críticos del ejemplo 2.3.14.

De la segunda ecuación obtenemos que o bien $x = 0$ o bien $\mu = 1$. En el primer caso obtenemos, por la primera ecuación, las posibilidades $y = 3$ o $y = -3$, y por la tercera, $\lambda = -1$. Del caso $\lambda = 1$, obtenemos de la tercera ecuación que $y = 0$, y por la primera llegamos a las posibilidades $x = 3$ o $x = -3$. De esta forma, los puntos críticos y sus correspondientes multiplicadores son:

$$\begin{aligned}(3,0) &\to \lambda = 1\\ (-3,0) &\to \lambda = 1\\ (0,-3) &\to \lambda = -1\\ (0,3) &\to \lambda = -1\end{aligned}$$

En la figura 2.11 aparecen representadas las dos curvas de nivel tangentes a la restricción, $x^2 - y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = -9$, aunque cada una de ellas tiene dos ramas.

□

Igual que para los extremos relativos, después de calcular los puntos críticos, toca clasificarlos, es decir, decidir cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Para ello, recurrimos igualmente a la segunda derivada, es decir, a la matriz hessiana tal y como recoge el siguiente resultado. El teorema establece que, para determinar la naturaleza de un punto crítico $\boldsymbol{a}$, tenemos que estudiar el signo de la forma cuadrática $d^2F_{\boldsymbol{a}}$ restringiéndonos al subespacio T.

TEOREMA 2.3.15 *Sea $\boldsymbol{a}$ un punto crítico de f sujeto a las restricciones $g_i = 0$, $1 \le i \le k$, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sus multiplicadores de Lagrange. Consideremos el campo $F_{\boldsymbol{a}} \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por*

$$F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_k g_k(\boldsymbol{x})$$

y sea T el espacio vectorial tangente a S en $\boldsymbol{a}$ (la dimensión del subespacio T es $n - k$).

1. *Si $d^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) > 0$ para todo $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \ne \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es punto mínimo local.*

2. *Si* $d^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}) < 0$ *para todo* $\boldsymbol{u} \in T$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, *entonces* $\boldsymbol{a}$ *es punto máximo local.*
3. *Si* $d^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_1}) > 0$ *para algún* $\boldsymbol{u_1} \in T$, $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{0}$, *y* $d^2F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u_2}) < 0$ *para algún* $\boldsymbol{u_2} \in T$, $\boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{0}$, *entonces* $\boldsymbol{a}$ *no es extremo.*

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema anterior, no podemos deducir nada.

Vemos a continuación cómo queda este resultado si lo aplicamos a campos escalares de dos variables y una restricción.

COROLARIO 2.3.16 *Sea* (a_1, a_2) *un punto crítico de* $f(x, y)$ *sobre* $g(x, y) = 0$, *y sea* λ *su multiplicador de Lagrange; consideremos el campo*

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

y sea (u_1, u_2) *un vector perpendicular a* $\nabla g(a_1, a_2)$

1. *Si* $d^2F_{(a_1,a_2)}(u_1, u_2) > 0$, *entonces* (a_1, a_2) *es punto mínimo local.*
2. *Si* $d^2F_{(a_1,a_2)}(u_1, u_2) < 0$, *entonces* (a_1, a_2) *es punto máximo local.*

Como en el teorema general, si $d^2F_{(a_1,a_2)}(\boldsymbol{u}) = 0$, ***no podemos deducir nada***.

Para trabajar con las funciones $F_{\boldsymbol{a}}$, es conveniente utilizar su definición en términos de f y g y las propiedades de linealidad del vector gradiente y la matriz hessiana:

$$\nabla F_{\boldsymbol{a}} = \nabla f - \lambda \cdot \nabla g$$
$$\nabla^2 F_{\boldsymbol{a}} = \nabla^2 f - \lambda \cdot \nabla^2 g$$

EJEMPLO 2.3.17 Anteriormente, hemos calculado los puntos críticos del campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeto a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ y hemos visto que estos puntos son

$$(3, 0) \to \lambda = 1$$
$$(-3, 0) \to \lambda = 1$$
$$(0, -3) \to \lambda = -1$$
$$(0, 3) \to \lambda = -1$$

Vamos a clasificar los puntos críticos $(3, 0)$ y $(0, 3)$ (los otros dos se clasifican de forma similar).

Para estudiar el punto $(3, 0)$ con multiplicador $\lambda = 1$, utilizamos el campo

$$F(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = x^2 - y^2 - (x^2 + y^2 - 9) = -2y^2 + 9$$
$$\nabla F(x, y) = \nabla f(x, y) - \nabla g(x, y)t = (2x, -2y) - (2x, 2y) = (0, -4y)$$
$$\nabla^2 F(x, y) = \nabla^2 f(x, y) - \nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2 F(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dado que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tenemos que $\nabla g(3, 0) = (6, 0)$ y un vector perpendicular a él es $\boldsymbol{u} = (0, 1)$.

$$d^2F_{(3,0)}(0,1) = (0\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

En consecuencia, $(0, 3)$ es un máximo local.

Para estudiar el punto $(0, 3)$, con multiplicador $\lambda = -1$, utilizamos el campo

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= f(x, y) + g(x, y) = x^2 - y^2 + (x^2 + y^2 - 9) = 2x^2 - 9 \\
\nabla F(x, y) &= \nabla f(x, y) + \nabla g(x, y) = (2x, -2y) + (2x, 2y) = (4x, 0) \\
\nabla^2 F(x, y) &= \nabla^2 f(x, y) + \nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\nabla^2 F(0, 3) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dado que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tenemos que $\nabla g(0, 3) = (0, 6)$ y un vector perpendicular a él es $\boldsymbol{u} = (1, 0)$.

$$d^2F_{(0,3)}(1,0) = (1\ 0)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

En consecuencia, $(0, 3)$ es un mínimo local. □

Realmente, el método de los multiplicadores de Lagrange solo es estrictamente necesario si no es posible reducir unas variables a otras a partir de las restricciones que determinan el enunciado. Incluso aunque tal reducción sea posible, el proceso resultante puede ser más complejo; por ejemplo, en la restricción $x^2 + y^2 = 1$ necesitaríamos cuatro igualdades para hacer esta reducción,

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x = \sqrt{1 - y^2}, \quad x = -\sqrt{1 - y^2},$$

y analizar posteriormente todos los puntos obtenidos. Sin embargo, cuando esta reducción sea asequible y el resultado sea sencillo, será el método más adecuado.

Ejemplo 2.3.18 Vamos a calcular los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + 6y - z^2$, sujeto a las restricciones $2x - y = 0$, $y + z = 0$, podemos reducir las variables y y z,

$$\begin{aligned}
y &= 2x \\
z &= -y = -2x
\end{aligned}$$

de forma que el problema es equivalente a obtener los extremos de la función de una variable

$$g(x) = f(x, 2x, -2x) = x^2 + 6 \cdot 2x - (-2x)^2 = -3x^2 + 12x$$

Para esta función podemos aplicar las técnicas de optimización de funciones de una variable:

$$\begin{aligned} g(x) &= -3x^2 + 12x \\ g'(x) &= -6x + 12 \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 2 \\ g''(x) &= -6 \\ g''(2) &= -6 < 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es máximo de } g \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2, 2 \cdot 2, -2 \cdot 2) = (2, 4, -4)$ es un máximo local del campo f. $\square$

2.3.3. Extremos absolutos

Para concluir la lección, vamos a analizar como tendríamos que resolver un problema en el que necesitemos obtener los extremos absolutos de un campo sobre un conjunto cerrado y acotado C.

En primer lugar, dividimos C en dos conjuntos, $C = U \cup B$, en donde U es el interior de C y B su frontera. Los candidatos a ser extremos absolutos de f sobre C son:

1. Los puntos críticos de f en U.
2. Los puntos críticos de f sobre B, que pueden ser obtenidos por el método de los multiplicadores de Lagrange, reduciendo variables, considerando distintas secciones en la frontera,...
3. Si hemos dividido la frontera en varias secciones, también deberemos considerar como candidatos los puntos en donde se unen estas secciones.

Para determinar los máximos y mínimos absolutos, basta con evaluar f sobre todos los puntos anteriores y determinar cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo.

Ejemplo 2.3.19 Para calcular los extremos absolutos del campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre la región cerrada $x^2 + y^2 \leq 9$ primero hallaremos los puntos críticos y luego determinaremos los extremos absolutos.

Los puntos críticos pueden estar en el interior de la región $(x^2 + y^2 < 9)$ o en la frontera $(x^2 + y^2 = 9)$.

Para hallar los puntos críticos en el interior de la región, determinaremos todos los puntos críticos de f y seleccionaremos aquellos que están en el interior de la región. En el ejemplo 2.3.7 determinamos que el único punto crítico de f era el $(0, 0)$. Este punto habrá que considerarlo porque está en el interior de la región, es decir, que verifica $x^2 + y^2 < 9$. Si no hubiese verificado la inecuación, habría que haberlo despreciado.

Para hallar los puntos críticos en la frontera de la región ($x^2 + y^2 = 9$), determinaremos todos los puntos críticos de f condicionado a $x^2 + y^2 - 9 = 0$ utilizando los multiplicadores de Lagrange. En el ejemplo 2.3.14 determinamos que los puntos críticos eran $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ y $(0, -3)$. Estos puntos no hay "filtrarlos" pues todos deben pertenecer a la frontera de la región, que era la condición impuesta.

Ahora que ya tenemos todos los puntos críticos, para saber quienes son los extremos absolutos, basta evaluar f en cada uno de ellos:

$$f(0, 0) = 0\ ,\ f(3, 0) = 9\ ,\ f(-3, 0) = 9\ ,\ f(0, 3) = -9\ ,\ f(0, -3) = -9$$

Por lo tanto, en la región, el campo tiene dos máximos absolutos, que son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$, y dos mínimos absolutos, que son $(0, 3)$ y $(0, -3)$. Además, en la región, el valor máximo de f es 9 y el valor mínimo de f es -9. Sobre el punto $(0, 0)$ no se extrae ninguna conclusión y, para clasificarlo, será necesario recurrir a los métodos propios de extremos relativos o condicionados, dependiendo del caso. □

Por último, veamos un ejemplo de cálculo de extremos absolutos donde la frontera de la región requiere considerarla por partes porque no hay una misma ecuación que la represente, como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.3.20 Vamos a determinar los extremos absolutos del campo

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

en el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ (ver figura 2.12).

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) = y - 3x^2y - y^3 = 0, &\qquad D_2 f(x, y) = x - 3y^2x - x^3 = 0 \\ y(1 - 3x^2 - y^2) = 0, &\qquad x(1 - 3y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

Dado que buscamos puntos críticos en el interior del cuadrado, entonces $x \ne 0$, $y \ne 0$. A partir de las ecuaciones $1 - 3x^2 - y^2 = 0$ y $1 - 3y^2 - x^2 = 0$, es fácil deducir que $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

Ahora hallamos los puntos críticos en los bordes del cuadrado usando la reducción de variables:

- Si $x = 0$, $g_1(y) = f(0, y) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $y = 0$, $g_2(x) = f(x, 0) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $x = 1$, $g_3(y) = f(1, y) = -y^3$; el único punto crítico es $y = 0$ que queda en el extremo del intervalo.
- Si $y = 1$, $g_4(x) = f(x, 1) = -x^3$; el único punto crítico es $x = 0$ que queda en el extremo del intervalo.

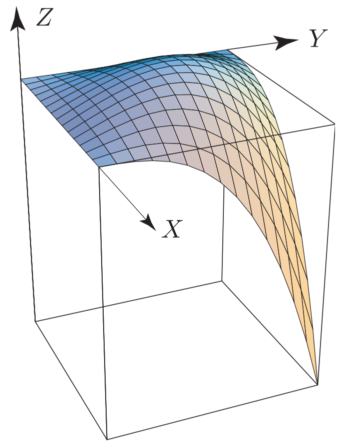


Figura 2.12: Representación del ejemplo 2.3.20.

Ahora solo tenemos que evaluar el campo en todos los puntos obtenidos y en los cuatro vértices del cuadrado para decidir cuál es el máximo y cuál el mínimo.

$$f(1/2, 1/2) = 1/8$$
$$f(x, 0) = 0$$
$$f(0, y) = 0$$
$$f(1, 1) = -1$$

Por lo tanto, $(1/2, 1/2)$ es máximo absoluto y $(1, 1)$ es mínimo absoluto, siendo $1/8$ el valor máximo y -1 el valor mínimo del campo f sobre la región considerada. □