Relación de ejercicios 2.4 - REPASO

1. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x = 2\operatorname{cotg}(t)$, $y = 2\operatorname{sen}^2(t)$, en $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

2. Consideramos la curva: $(x(t), y(t)) = \left(\dfrac{2t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t^3}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

   a) Halle: $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t))$ y $\lim_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

   b) Dibuje la curva.

3. Halle los puntos de la curva $x = 2(t + t\operatorname{sen} t)$, $\quad y = 2(1 - \cos t)$ en los que la tangente sea horizontal.

4. Halle los puntos de la curva $x = \cos t + t\operatorname{sen} t$, $\quad y = \operatorname{sen} t - t\cos t$ en los que la tangente sea vertical.

5. Demuestre que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$$

   son una parametrización de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. ¿Cómo se desplaza un punto por la curva cuando crece el parámetro t?

6. Localice los puntos de tangencia horizontal y vertical, si los hay, de las curvas polares siguientes

   a) $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, *b*) $r = a\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

7. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

   a) $r = 2 + \dfrac{1}{\theta}$
   b) $r = 1 + \dfrac{1}{2}\cos\theta$ (Caracol de Pascal)
   c) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$
   d) $r = 4\cos\theta$ (Circunferencia)
   e) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\theta}$ (Elipse)
   f) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ (Parábola)

8. Determine la ecuación de las asíntotas de la curva $r = 2\cos 2\theta \sec\theta$

9. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $r = \dfrac{6}{2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta}$ en $\theta = \pi$

10. Encuentre la ecuación de las circunferencias descritas a continuación:

    a) Centro $(3,-4)$, radio $\sqrt{30}$

    b) Con centro en el segundo cuadrante, tangente a los ejes de coordenadas y radio 4.

    c) Con centro en $(2,-3)$ y pasando por el punto $(5,4)$.

    d) Que tiene el segmento que une $(-1,2)$ y $(5,-6)$ como diámetro.

    e) Que pasa por los puntos $(1,0)$, $(3,4)$ y $(5,0)$.

11. Halle el centro y radio de las siguientes circunferencias.

    a) $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

    b) $x^2+y^2-4x+6y=3$

    c) $x^2+y^2+8x=9$

12. Dibuje las parábolas $y=x^2-4x-5$ e $y^2-3x+1=0$, determinando el vértice y el eje.

13. Dibuje la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ y determine sus ejes, vértices y focos.

14. Dibuje la hipérbola $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{6}=1$ y determine su ejes, focos, vértices y asíntotas.

15. Describe el lugar geométrico determinado por:

    a) $|z-1|+|z+3|=10$

    b) $|z-2i|=1$

    c) $|z-2i|\leqslant 1$

16. Determine el dominio de los siguientes campos:

    a) $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\cos x^2$ *b*) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

    c) $f(x,y)=\log(1-xy)$ *d*) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

    e) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *f*) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

17. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos y dibuje algunas. Esboce sus gráficas:

    a) $f(x,y)=2x+y$ *b*) $f(x,y)=\cos(2x+y)$

    c) $f(x,y)=y^2-x$ *d*) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

18. Halle el vector gradiente de los siguientes campos:

    a) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$, *b*) $f(x,y)=\operatorname{tg}(x^2+y^2)$

19. Calcule la derivada direccional del campo $f(x,y)=x^2+y\operatorname{senh}(xy)$ en el punto $(2,0)$, a lo largo de la recta tangente a la curva $y=\sqrt{x+7}-3$ en la dirección de decrecimiento de x.

20. Encuentre la ecuación del plano o recta tangente a la superficie o curva en el punto indicado, así como la de la recta normal:

   a) $x \operatorname{sen} y + x^2 e^z = 4$ en $(2, \pi, 0)$,
   b) $x^3 y - \dfrac{x^2}{y} = 4$ en $(2, 1)$
   c) $xz^2 + \dfrac{(2x - z)^2}{y^3} = 19$ en $(2, 1, 3)$,
   d) $3xe^y + xy^3 = 2 + x$ en $(1, 0)$
   e) $z = \operatorname{sen} xy$ en $(1, \pi/2, 1)$,
   f) $z = \dfrac{x^2}{x + y}$ en $(2, 2, 1)$
   g) $z = \log(x^2 + y)$ en $(1, 0, 0)$,
   h) $z = x^2 e^{xy}$ en $(3, 0, 9)$

21. Encuentre el punto de la superficie $z = xy$ en donde la recta normal es paralela a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 5t$, $z = 3 + 3t$.

22. Encuentre el punto de la superficie $z = x^2 + y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $6x - 4y + 2z = 5$.

23. Encuentre todos los puntos de la superficie $z = x^2 y$ en donde el plano tangente es ortogonal a la recta $x = 2 - 6t$, $y = 3 - 12t$, $z = 2 + 3t$.

24. Pruebe que las siguientes superficies son ortogonales en todos los puntos de intersección:
$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 0, \qquad xyz = 1,$$

25. Consideramos la siguiente superficie: $x\, e^{x+y} + y\, e^{A(y+z)} + z\, e^{B(z-x)} = 1$

   Determine los valores de A y B para que el plano tangente a la superficie en el punto $(1, -1, 1)$ sea paralelo al plano $-2x + 2y + z = 3$ y proporcione dicho plano tangente.

26. Identifique y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

   a) $z = x^2 - 2xy + y^3$
   b) $z = x^2 y - 2xy$
   c) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$
   d) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
   e) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$
   f) $z = x\, e^x - (1 + e^x) \cos y$

27. Determine y clasifique los puntos críticos de $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

28. Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = y\, x^2\, e^{xy}$.

29. Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

30. Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 x + y^2 z + \frac{2}{3} z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$.

31. Encuentre el máximo y el mínimo absoluto del campo
$$f(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
   en el conjunto de puntos tales que $(x - 5)^2 + y^2 \leq 1$.

32. Determine y clasifique los puntos críticos del campo escalar

$$f(x,y) = 4y - 2x - x^2y$$

sujeto a la condición $xy = -1$.

33. En los siguientes apartados, halle los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados:

    a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 3$.

    b) $g(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

34. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

35. Consideremos el campo escalar:

$$f(x,y) = -xy^2 + 11y^2 + 4xy + 10y + x^2 + x + 5$$

    a) Comprueba que $(2,-1)$ es un punto crítico de f.

    b) Halla $\nabla^2 f(2,-1)$ y $d^2 f_{(2,-1)}(u,v)$.

    c) Clasifica el punto crítico $(2,-1)$.

36. Consideremos la función $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 4x + 4y$. Demuestre que $(-1,-1)$ es un punto crítico de f sobre la restricción $x^2 + y^2 = 2$ y clasifíquelo.