Tema 4: Lógica proposicional

Lógica Booleana

Rosa María Maza Quiroga – rosammq@uma.es

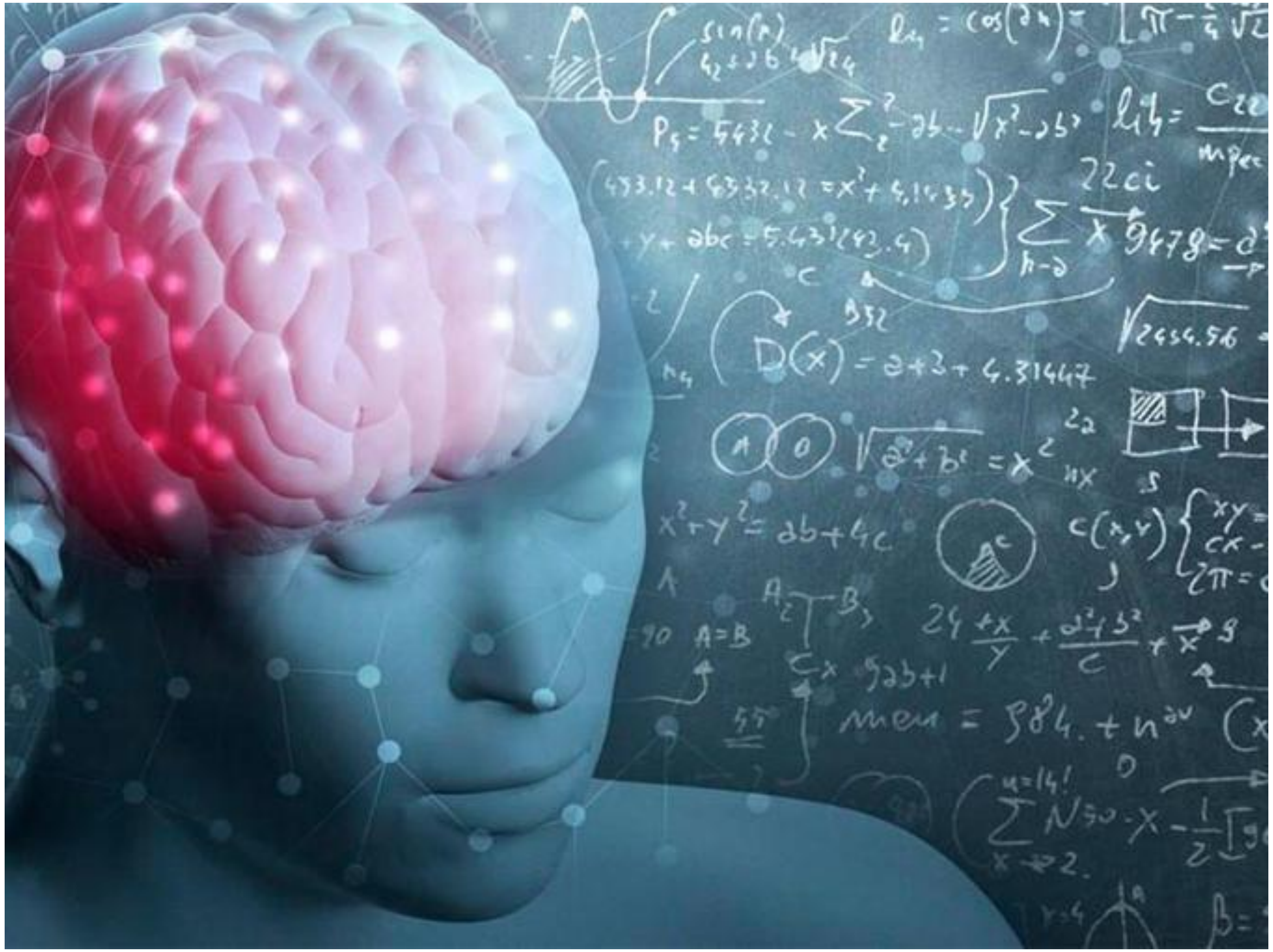
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación

Universidad de Málaga

Contenido

1. Introducción

- Motivación
- Agentes lógicos



1. Introducción: Motivación

- Tema anterior el modelo CSP:
  - Conjunto de restricciones.
  - Variables.
  - Dominios (conjunto de valores que toma la variable) finitos y pequeños.
- Tema presente la Lógica proposicional:
  - Problema (proposiciones y conectivas) se expresa mediante conjunto de sentencias.

$$\left.\begin{array}{l}\text{No llueve pero hace viento: } \neg P \wedge Q \\ \text{El suelo se moja sólo si llueve: } P \Rightarrow Q\end{array}\right\} \text{Base de Conocimiento}$$

  - **Independiente del dominio**: la Base de Conocimiento es un conjunto de sentencias.
- La lógica como **lenguaje para la representación del conocimiento** en IA.

1. Introducción: Agentes lógicos I

- La **representación del conocimiento** y los **procesos de razonamiento** que permiten que éste evolucione son centrales en todo el ámbito de la Inteligencia Artificial.
- **Agente basado en conocimiento**:
  - Tipo concreto de agente inteligente.
  - Utiliza su Base de Conocimiento para ejecutar acciones que le llevan a su objetivo.
  - El conocimiento y el razonamiento le permiten los comportamientos exitosos.

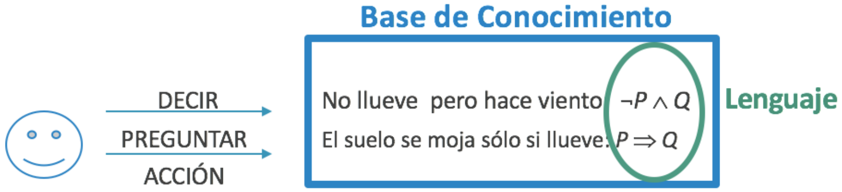
1. Introducción: Agentes lógicos II

- El **conocimiento** y **razonamiento** juegan un papel muy importante cuando se trata de **entornos parcialmente observables**.
- El agente (basado en conocimiento) puede **combinar** el **conocimiento general** con las **percepciones reales** para inferir aspectos ocultos del estado del mundo, antes de seleccionar cualquier acción (reglas aprendidas y patrones de asociación).
  - Ej. médico diagnostica a un paciente antes de seleccionar tratamiento:
    - Médico infiere enfermedad, algo que no es directamente observable mediante:
      - Reglas aprendidas: libros, enseñanzas...
      - Patrones de asociación.

1. Introducción: Agentes lógicos III

Esquema general de un agente basado en conocimiento:

- **Base de Conocimiento** (BC): conjunto de sentencias (aserciones del mundo).
- **Lenguaje de representación del conocimiento**.
- **DECIR** mecanismo para añadir sentencias a la BC.
- **PREGUNTAR** mecanismo para consultar sentencias de la BC.
- Responder a la pregunta requiere **Inferencia**:
  - Derivar nueva sentencia a partir de las conocidas.
- Ejecutar la **Acción** indicada por la BC.



2. Fundamentos

- Sintaxis
- Semántica
- Base de Conocimiento

P	$\neg$P
V	F
F	V

P	Q	P $\wedge$ Q	P $\vee$ Q	P $\Rightarrow$ Q	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

2. Fundamentos: Sintaxis I

La BC se compone de sentencias expresadas de acuerdo a la sintaxis del lenguaje de representación.

- Sentencia:
  - Empieza por mayúscula y va en *cursiva*.
- La sintaxis de la lógica proposicional define las **fórmulas bien formadas**.
- Cada **sentencia atómica** (átomo) representa a una proposición:
  - Ej. *P*: Juan lee un libro, *Q*: ..., *Llueve*: llueve.
    - Símbolos especiales: las sentencias *Verdadero* y *Falso.*
- Las **sentencias compuestas** de obtienen de sentencias más simples empleando los paréntesis y las conectivas lógicas (orden de precedencia: $\neg$, $\wedge$,$\vee$,$\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$).

2. Fundamentos: Sintaxis II

- $\neg$ (no). Un literal es, o bien una fórmula atómica (literal positivo), o bien su negación (literal negativo), que es su **negación:** $\neg P$.
- $\wedge$ (y). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **conjunción**: $P \wedge Q$.
- $\vee$ (o). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **disyunción**: : $P \vee Q$
- $\Rightarrow$ (implica). Una sentencia del tipo $P \Rightarrow Q$ se denomina **implicación**, donde P es la premisa o antecedente y Q es la conclusión o consecuencia.
- $\Leftrightarrow$ (si y sólo si). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **bicondicional**: $P \Leftrightarrow Q$

❖ Ej. $\neg P \wedge Q = (\neg P) \wedge Q$

2. Fundamentos: Sintaxis II

- $\neg$ (no). Un literal es, o bien una fórmula atómica (literal positivo), o bien su negación (literal negativo), que es su **negación:** $\neg P$.
- $\wedge$ (y). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **conjunción**: $P \wedge Q$.
- $\vee$ (o). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **disyunción**: : $P \vee Q$
- $\Rightarrow$ (implica). Una sentencia del tipo $P \Rightarrow Q$ se denomina **implicación**, donde P es la premisa o antecedente y Q es la conclusión o consecuencia.
- $\Leftrightarrow$ (si y sólo si). Si esta conectiva es la de nivel más alto en una sentencia, ésta se denomina **bicondicional**: $P \Leftrightarrow Q$

❖ Ej. $\neg P \wedge Q \neq \neg (P \wedge Q)$

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela.

b. Ni vi la película ni leí la novela.

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí.

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento.

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. **No** vi la película, **pero** leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. Ni vi la película ni leí la novela.

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí.

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento.

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. **Ni** vi la película **ni** leí la novela: $\neg P \wedge \neg Q$

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí.

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento.

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. Ni vi la película ni leí la novela: $\neg P \wedge \neg Q$

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. **Si no** estuvieras loca, **no** habrías venido aquí: $\neg P \Rightarrow \neg Q$

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento.

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. Ni vi la película ni leí la novela: $\neg P \wedge \neg Q$

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí: $\neg P \Rightarrow \neg Q$

h. Llueve **y o bien** nieva **o** sopla el viento: $P \wedge (Q \vee R)$

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura.

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. Ni vi la película ni leí la novela: $\neg P \wedge \neg Q$

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela.

d. Vi la película aunque no leí la novela.

e. No me gusta trasnochar ni madrugar.

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído.

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí: $\neg P \Rightarrow \neg Q$

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento: $P \wedge (Q \vee R)$

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento.

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles.

k. Roberto hará el doctorado **cuando y solamente** cuando obtenga la licenciatura: $P \Leftrightarrow Q$

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis.

2. Fundamentos: Ejercicio simbolizar.

Simboliza las proposiciones.

a. No vi la película, pero leí la novela: $\neg P \wedge Q$

b. Ni vi la película ni leí la novela: $\neg P \wedge \neg Q$

c. No es cierto que viese la película y leyese la novela: $\neg (P \wedge Q)$

d. Vi la película aunque no leí la novela: $P \wedge \neg Q$

e. No me gusta trasnochar ni madrugar: $\neg P \wedge \neg Q$

f. O tú estás equivocado o es falsa la noticia que has leído: $P \vee Q$

g. Si no estuvieras loca, no habrías venido aquí: $\neg P \Rightarrow \neg Q$

h. Llueve y o bien nieva o sopla el viento: $P \wedge (Q \vee R)$

i. O está lloviendo y nevando o está soplando el viento: $(P \wedge Q) \vee R$

j. Si ha verdadera democracia, entonces no hay detenciones arbitrarias ni otras violaciones de los derechos civiles: $P \Rightarrow (\neg Q \wedge \neg R)$

k. Roberto hará el doctorado cuando y solamente cuando obtenga la licenciatura: $P \Leftrightarrow Q$

l. Si viene el tren, llegará antes de las seis. Si viene el coche, llegará antes de las seis. Luego, tanto si viene el tren como si viene el coche, llegará antes de las seis: $P \Rightarrow Q$, $R \Rightarrow Q \vDash (P \vee Q) \Rightarrow R$

2. Fundamentos: Semántica I

- La semántica define las **reglas** para determinar la **verdad** de una sentencia con respecto a un modelo en concreto.

- Ej. modelo = m = {P = Verdadero, Q = Falso}

  sentencia = $(P \wedge Q) \vee P$ = ¿verdadera o falsa?

- En la lógica proposicional, un modelo fija el valor de verdad (verdadero o falso) de todos los átomos de la sentencia:

- Ej. m_1 = {P = Verdadero, Q = Verdadero} ... m_n = {P = Falso, Q = Falso}

  modelos posibles = $2^n = 4$ n: número de símbolos átomos

2. Fundamentos: Semántica II

Reglas para calcular el valor de verdad de sentencias compuestas en un modelo *m*:

- $\neg P$ es verdadero sii *P* es falso en *m.*
- $P \wedge Q$ es verdadero sii tanto *P* como *Q* son verdaderos en *m*.
- $P \vee Q$ es verdadero sii *P* o bien *Q* son verdaderos en *m.*
- $P \Rightarrow Q$ Es verdadero a menos que *P* sea verdadero y *Q* sea falso en *m.*
- $P \Leftrightarrow Q$ es verdadero sii *P* y *Q* son ambos verdaderos o ambos falsos en *m.*

2. Fundamentos: Semántica III

- Las reglas anteriores reducen el cálculo de valor de verdad de una sentencia compleja al valor de verdad de las sentencias más simples. Estas reglas se recogen en tablas de verdad:

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

2. Fundamentos: Semántica IV

- Si una sentencia α es verdadera en un modelo m, decimos que m satisface a α.
- Decimos que la sentencia α implica la sentencia β sii en todo modelo en el que α es verdadera, β también es verdadera. Lo notamos como $\alpha \vDash \beta$, decimos que es una **implicación**.
- Una sentencia es válida sii es verdadera en todos los modelos, decimos que es una **tautología**.
- Una sentencia es satisfacible sii es verdadera en algún modelo, decimos que es una **indeterminación**.
- Se cumple que $\alpha \vDash \beta$ sii $(\alpha \wedge \neg \beta)$ es insatisfacible, decimos que es una **contradicción**.

☞ Ejercicio 1. Tautologías.

Ejercicio 1. Tautologías. Enunciado.

Demuestra que las siguiente fórmulas bien formadas son tautologías:

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

c) $[\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \neg P$

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	**V**	V		
V	**F**	F		
F	**V**	V		
F	**F**	V		

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	V	**V**	V	
V	F	**F**	F	
F	V	**V**	F	
F	F	**V**	F	

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**F**	V
F	V	V	**F**	V
F	F	V	**F**	V

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

a) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Las 4 sentencias son verdad sean cual sea el modelo, por tanto se trata de una **tautología**.

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	F	F			
V	F	V	F			
F	V	F	V			
F	F	V	V			

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	**V**	F	F	V		
V	**F**	V	F	F		
F	**V**	F	V	V		
F	**F**	V	V	V		

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	**F**	**F**	V	V	
V	F	**V**	**F**	F	F	
F	V	**F**	**V**	V	V	
F	F	**V**	**V**	V	V	

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	F	F	**V**	**V**	V
V	F	V	F	**F**	**F**	V
F	V	F	V	**V**	**V**	V
F	F	V	V	**V**	**V**	V

Ejercicio 1. Tautologías. Solución.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Hay 2 átomos, por tanto hay $2^2 = 4$ modelos posibles.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

Las 4 sentencias son verdad sean cual sea el modelo, por tanto se trata de una **tautología**.

Ejercicio 1. Tautologías. Tarea.

Construimos una tabla de verdad para cada sentencia, y comprobamos que sus valores de verdad son verdaderos sean cuales sean los valores de verdad de las proposiciones simples (átomos).

c) $[\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \neg P$

2. Fundamentos: Semántica IV

- Si una sentencia α es verdadera en un modelo m, decimos que m **satisface** a α.
- Decimos que la sentencia α **implica** la sentencia β sii en todo modelo en el que α es verdadera, β también es verdadera. Lo notamos como $\alpha \vDash \beta$.
- Una sentencia es válida sii es verdadera en todos los modelos, decimos que es una **tautología**.
- Una sentencia es satisfacible sii es verdadera en algún modelo, decimos que es una **indeterminación**.
- Se cumple que $\alpha \vDash \beta$ sii $(\alpha \wedge \neg \beta)$ es insatisfacible (demostración por reducción al absurdo). Ser insatisfacible decimos que es una **contradicción**.

2. Fundamentos: Semántica IV

- Ej. **Tautología**: ejercicio anterior.
- Ej. **Indeterminación**: 2 átomos, 4 modelos posibles. El modelo 2 no satisface a la sentencia.

P	**Q**	**$P \Rightarrow Q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Ej. **Contradicción**: 1 átomo, 2 modelos. Ningún modelo satisface a la sentencia.

P	**$\neg P$**	**$P \Leftrightarrow \neg P$**
V	F	F
F	V	F

☞ Ejercicio 2. Formalización.

Ejercicio 2. Formalización. Enunciado.

Formaliza las premisas de los siguientes argumentos como bases de conocimiento y las conclusiones como fórmulas bien formadas de la lógica proposicional. Esto es, debes modelar los argumentos de esta forma: $BC \vDash \alpha$.

a) El asesino fue o el mayor Brown o el profesor Black. Pero no fue el profesor Black. Así que fue el mayor Brown.

b) Juana o Sandra estaban en la biblioteca. Pero si Juana no estaba, Sandra tampoco. Así que estaban ambas en la biblioteca.

c) Sólo puedes obtener una tarjeta Joven si eres menor de 29 años o estudiante; en otro caso no puedes. Si puedes obtener una tarjeta Joven, puedes obtener entradas de museo con descuento. Pero no eres menor de 29 años. Así que a menos que seas estudiante, no puedes obtener entradas de museo con descuento.

d) Los manifestantes se irán si la universidad detiene los experimentos con animales. Pero esto sólo podría ocurrir por una intervención del gobierno. Por tanto, a menos que el gobierno intervenga, no se irán.

e) Santiago es o un policía o un futbolista. Si es un policía, entonces tiene las orejas grandes. Santiago no tiene las orejas grandes, así que es un futbolista.

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

a) El asesino fue o el mayor Brown o el profesor Black. Pero no fue el profesor Black. Así que fue el mayor Brown.

Átomos: BrownAsesino, BlackAsesino

BC:

Fue uno u otro:

BrownAsesino $\vee$ ***BlackAsesino*** : fue uno u otro o ambos. Así que tenemos que eliminar la opción de que puedan ser ambos. Para ello añadimos la siguiente premisa:

¬ (*BrownAsesino* $\wedge$ ***BlackAsesino*)** : no fueron los dos.

No fue Black:

¬ *BlackAsesino*

α:

Brown fue el asesino:

BrownAsesino

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

a) El asesino fue o el mayor Brown o el profesor Black. Pero no fue el profesor Black. Así que fue el mayor Brown.

Átomos: BrownAsesino, BlackAsesino

Otra solución:

BC:

Fue uno u otro y no fue Black:

$$(\neg \mathit{BrownAsesino} \wedge \mathit{BlackAsesino}) \vee (\mathit{BrownAsesino} \wedge \neg \mathit{BlackAsesino})$$

α:

Brown fue el asesino:

BrownAsesino

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

b) Juana o Sandra estaban en la biblioteca. Pero si Juana no estaba, Sandra tampoco. Así que estaban ambas en la biblioteca.

Átomos: JuanaBiblioteca, SandraBiblioteca

BC:

Estaba una u otra:

$\mathit{JuanaBiblioteca} \vee \mathit{SandraBiblioteca}$: estaba una u otra o ambas.

Si no estaba Juana, no estaba Sandra:

$\neg\, \mathit{JuanaBiblioteca} \Rightarrow \neg\, \mathit{SandraBiblioteca}$

α:

Estaban las dos:

$\mathit{JuanaBiblioteca} \wedge \mathit{SandraBiblioteca}$

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

c) Sólo puedes obtener una tarjeta Joven si eres menor de 29 años o estudiante; en otro caso no puedes. Si puedes obtener una tarjeta Joven, puedes obtener entradas de museo con descuento. Pero no eres menor de 29 años. Así que a menos que seas estudiante, no puedes obtener entradas de museo con descuento.

Átomos: PoderTenerTarjeta, Menor29, Estudiante, DescuentoEntradaMuseo

BC:

SOLO tiene tarjeta si es <29 o estudiante:

$$PoderTenerTarjeta \Leftrightarrow Menor29 \vee Estudiante$$

Si tienes tarjeta entonces tienes descuento:

$$PoderTenerTarjeta \Rightarrow DescuentoEntradaMuseo$$

No eres <29:

$$\neg Menor29$$

α:

No eres estudiante así que no tienes descuento:

$$\neg Estudiante \Rightarrow \neg DescuentoEntradaMuseo$$

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

d) Los manifestantes se irán si la universidad detiene los experimentos con animales. Pero esto sólo podría ocurrir por una intervención del gobierno. Por tanto, a menos que el gobierno intervenga, no se irán.

Átomos: ManifestantesSeVan, DetenerExperimentos, IntervenciónGobierno

BC:

DetenerExperimentos ⇒ ManifestantesSeVan

SOLO puede ocurrir con la intervención del gobierno:

DetenerExperimentos ⇒ IntervenciónGobierno

* Pero intuitivamente podríamos haber puesto algo incorrecto:

IntervenciónGobierno ⇒ DetenerExperimentos : esta sentencia permite que se detengan los experimentos sin la intervención del gobierno, lo cual contradice al enunciado.

α:

¬ IntervenciónGobierno ⇒ ¬ ManifestantesSeVan

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

e) Santiago es o un policía o un futbolista. Si es un policía, entonces tiene las orejas grandes. Santiago no tiene las orejas grandes, así que es un futbolista.

Átomos: Policía, Futbolista, OrejasGrandes

BC:

α:

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

e) Santiago es o un policía o un futbolista. Si es un policía, entonces tiene las orejas grandes. Santiago no tiene las orejas grandes, así que es un futbolista.

Átomos: Policía, Futbolista, OrejasGrandes.

BC:

Policía $\vee$ ***Futbolista***

¬ (*Policía* $\wedge$ ***Futbolista*)**

Policía* ⇒ *OrejasGrandes

¬ *OrejasGrandes*

α:

Futbolista

Ejercicio 2. Formalización. Solución.

e) Santiago es o un policía o un futbolista. Si es un policía, entonces tiene las orejas grandes. Santiago no tiene las orejas grandes, así que es un futbolista.

Átomos: Policía, Futbolista, OrejasGrandes.

Otra solución:

BC:

Policía* $\vee$ *Futbolista

¬(*Policía* $\wedge$ *Futbolista*)

Policía* $\Rightarrow$ *OrejasGrandes

¬OrejasGrandes

α:

¬(*Policía* $\wedge$ *Futbolista*) $\vee$ (*Policía* $\wedge$ ¬ *Futbolista*)

2. Fundamentos: Base de Conocimiento

- La Base de Conocimiento (BC) de un agente lógico es un conjunto de sentencias que incluye:
  - Las **reglas** del mundo que el agente conoce.
  - Los **hechos** que el agente conoce acerca del mundo, llamados percepciones.
- El agente le dice a la BC lo que percibe insertando hechos en la BC.
- El agente también consulta a la BC y las respuestas ayudan al agente a tomar decisiones.

❖ Ej. Base de Conocimiento sencilla:

- Regla_1: *Mojado* ⇔ (*Lluvia* ∨ *Inundación*)
- Regla_2: *Calor* ⇔ (*Verano* ∨ *Soleado* ∨ *Fuego*
- Hecho_1: ¬ *Verano*
- Hecho_2: ¬ *Mojado*
- Hecho_3: *Calor*

3. Demostración de teoremas

Regla de Resolución

Base de Conocimiento sencilla

Regla$_1$: $Mojado \Leftrightarrow (Lluvia \vee Inundación)$

Regla$_2$: $Calor \Leftrightarrow (Verano \vee Soleado \vee Fuego$

Hecho$_1$: $\neg\ Verano$

Hecho$_2$: $\neg\ Mojado$

Hecho$_3$: $Calor$

¿Llueve?

3. Demostración de teoremas:

Demostración por la regla de Resolución

- Una **regla de inferencia** toma varias sentencias y produce otra sentencia que puede inferirse de ellas.
  - Ej. de reglas de inferencia: Modus Ponens, Eliminación -$\wedge$, Equivalencias, Resolución, etc.
- El conjunto de secuencias resultantes tras aplicar reglas de inferencia se denomina **demostración**.
- Estudiaremos sólo una regla de inferencia, la **Regla de Resolución**:
  - Es correcta: nunca produce una sentencia que no se infiera de la BC.
  - Es completa: cuando se combina con cualquier algoritmo de búsqueda completo es capaz de alcanzar cualquier sentencia que pueda deducirse de la BC.

3. Demostración de teoremas:

La regla de inferencia Resolución

- Toma dos cláusulas (disyunciones de literales) tales que hay un literal l_i en la primera cláusula que es la negación de un literal m_j de la segunda cláusula, es decir, l_i y m_j son literales complementarios.
- Produce una cláusula con todos los literales de las dos cláusulas originales excepto los dos literales complementarios.
- Las apariciones repetidas de literales son también eliminadas de la cláusula resultante.

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \quad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n}$$

- Ej. $$\frac{\begin{array}{c}\neg A \vee B \vee C \\ A \vee D \vee E\end{array}}{B \vee C \vee D \vee E}$$

3. Demostración de teoremas:

La regla de inferencia Resolución

- Toma dos cláusulas (disyunciones de literales) tales que hay un literal l_i en la primera cláusula que es la negación de un literal m_j de la segunda cláusula, es decir, l_i y m_j son literales complementarios.
- Produce una cláusula con todos los literales de las dos cláusulas originales excepto los dos literales complementarios.
- Las apariciones repetidas de literales son también eliminadas de la cláusula resultante.

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \quad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n}$$

- Ej. $$\frac{\begin{array}{c}\neg A \vee B \vee C \\ A \vee D \vee E\end{array}}{B \vee C \vee D \vee E}$$

3. Demostración de teoremas:

La regla de inferencia Resolución

- Toma dos cláusulas (disyunciones de literales) tales que hay un literal l_i en la primera cláusula que es la negación de un literal m_j de la segunda cláusula, es decir, l_i y m_j son literales complementarios.
- Produce una cláusula con todos los literales de las dos cláusulas originales excepto los dos literales complementarios.
- Las apariciones repetidas de literales son también eliminadas de la cláusula resultante.

$$\frac{l_1 \vee \ldots \vee l_k, \quad m_1 \vee \ldots \vee m_n}{l_1 \vee \ldots \vee l_{i-1} \vee l_{i+1} \vee \ldots \vee l_k \vee m_1 \vee \ldots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \ldots \vee m_n}$$

- Ej.

$$\frac{\begin{array}{c}\neg A \vee B \vee C \\ A \vee D \vee E\end{array}}{B \vee C \vee D \vee E}$$

3. Demostración de teoremas:

Forma normal conjuntiva

- La resolución sólo se puede aplicar a **cláusulas** (disyunciones de literales).
- Una sentencia que es una conjunción de cláusulas se dice que está en forma normal conjuntiva (*conjuntive normal form*, **CNF**).
  - Ej. de sentencia conjuntiva: $(A \vee B \vee C) \wedge (D \vee E) \wedge (F \vee G \vee H)$
- Toda sentencia de la lógica proposicional es lógicamente equivalente a una conjunción de cláusulas.
- Toda BC de la lógica proposicional es lógicamente equivalente a una conjunción de cláusulas.

3. Demostración de teoremas:

Algoritmo para la conversión a CNF

- Eliminar $\Leftrightarrow$ reemplazando $\alpha\Leftrightarrow\beta$ por $(\alpha\Rightarrow\beta) \wedge (\beta\Rightarrow\alpha)$
- Eliminar $\Rightarrow$ reemplazando $\alpha\Rightarrow\beta$ por $\neg\alpha\vee\beta$
- Mover $\neg$ hacia dentro aplicando repetidamente:
  - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  - $\neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ (Ley de Morgan)
  - $\neg(\alpha\vee\beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (Ley de Morgan)
- Aplicar la distributividad de $\vee$ respecto a $\wedge$ siempre que sea posible:
  - $\alpha \vee (\beta\wedge\gamma) \equiv (\alpha\vee\beta) \wedge (\alpha\vee\gamma)$

3. Demostración de teoremas:

Algoritmo de Resolución

- Objetivo: demostrar que BC $\models \alpha$. Lo haremos por reducción al absurdo, es decir, demostraremos que BC $\wedge\neg\ \alpha$ es insatisfacible.
- Primero convertimos BC $\wedge\neg\ \alpha$ a CNF.
- Después aplicamos la regla de resolución repetidamente a las cláusulas obtenidas.
- Hay dos posibles resultados:
  - No se pueden añadir más cláusulas, lo que significa que α no se infiere de la BC.
  - Se produce la **cláusula vacía** (sentencia *FALSO*), lo que significa que α se infiere de BC.

☞ Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución.

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

Convierte los siguientes conjuntos de fórmulas bien formadas a la forma clausal, y da una traza de la ejecución del algoritmo de resolución sobre la conjunción de las cláusulas obtenidas.

a)

S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Algoritmo de Resolución

- Objetivo: demostrar que BC $\vDash \alpha$. Lo haremos por reducción al absurdo, es decir, demostraremos que BC $\wedge \neg \alpha$ es insatisfacible.
- Primero convertimos BC $\wedge \neg \alpha$ a CNF.
- Después aplicamos la regla de resolución repetidamente a las cláusulas obtenidas.
- Hay dos posibles resultados:
  - No se pueden añadir más cláusulas, lo que significa que α no se infiere de la BC.
  - Se produce la cláusula vacía (sentencia *FALSO*), lo que significa que α se infiere de BC.

Algoritmo para la conversión a CNF

- Eliminar $\Leftrightarrow$ reemplazando $\alpha \Leftrightarrow \beta$ por $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
- **Eliminar $\Rightarrow$ reemplazando $\alpha \Rightarrow \beta$ por $\neg\alpha \vee \beta$**
- Mover $\neg$ hacia dentro aplicando repetidamente:
  - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- Aplicar la distributividad de $\vee$ respecto a $\wedge$ siempre que sea posible:
  - $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

La regla de inferencia Resolución

- **Toma dos cláusulas** (disyunciones de literales) tales que hay un literal l_i en la primera cláusula que es la negación de un literal m_j de la segunda cláusula, es decir, l_i y m_j son literales complementarios.
- Produce una **cláusula** con todos los literales de las dos cláusulas originales **excepto** los dos literales **complementarios**.
- Las **apariciones repetidas** de literales son también **eliminadas** de la cláusula resultante.

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

Algoritmo para la conversión a CNF

- Eliminar $\Leftrightarrow$ reemplazando $\alpha\Leftrightarrow\beta$ por $(\alpha\Rightarrow\beta) \wedge (\beta\Rightarrow\alpha)$
- **Eliminar $\Rightarrow$ reemplazando $\alpha\Rightarrow\beta$ por $\neg\alpha\vee\beta$**
- Mover $\neg$ hacia dentro aplicando repetidamente:
  - $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  - $\neg(\alpha\wedge\beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
  - $\neg(\alpha\vee\beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- Aplicar la distributividad de $\vee$ respecto a $\wedge$ siempre que sea posible:
  - $\alpha \vee (\beta\wedge\gamma) \equiv (\alpha\vee\beta) \wedge (\alpha\vee\gamma)$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\neg P \vee Q$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\neg P \vee Q$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg R \vee (P \vee Q) = \neg R \vee P \vee Q$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\neg P \vee Q$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg R \vee (P \vee Q) = \neg R \vee P \vee Q$

C3. S3 no necesita modificación: R

C4. S4 no necesita modificación: $\neg Q$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\neg P \vee Q$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg R \vee (P \vee Q) = \neg R \vee P \vee Q$

C3. S3 no necesita modificación: R

C4. S4 no necesita modificación: $\neg Q$

La regla de inferencia Resolución

- **Toma dos cláusulas** (disyunciones de literales) tales que hay un literal l_i en la primera cláusula que es la negación de un literal m_j de la segunda cláusula, es decir, l_i y m_j son literales complementarios.
- Produce una **cláusula** con todos los literales de las dos cláusulas originales **excepto** los dos literales **complementarios**.
- Las **apariciones repetidas** de literales son también **eliminadas** de la cláusula resultante.

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg\, Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\boldsymbol{\neg\, P \vee Q}$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg\, R \vee (P \vee Q)$ $\boldsymbol{= \neg\, R \vee P \vee Q}$

C3. S3 no necesita modificación: $\boldsymbol{R}$

C4. S4 no necesita modificación: $\boldsymbol{\neg\, Q}$

C5. Busco eliminar R. Así que se aplica Resolución de C3 con C2: $\dfrac{\begin{array}{l}\neg\, R \vee P \vee Q \\ R\end{array}}{\boldsymbol{P \vee Q}}$ y se obtiene: $P \vee Q$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\boldsymbol{\neg P \vee Q}$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg R \vee (P \vee Q) = \neg R \vee P \vee Q$

C3. S3 no necesita modificación: R

C4. S4 no necesita modificación: $\boldsymbol{\neg Q}$

C5. Busco eliminar R. Así que se aplica Resolución de C3 con C2: $\dfrac{\begin{array}{l}\neg R \vee P \vee Q \\ R\end{array}}{\boldsymbol{P \vee Q}}$ y se obtiene: $\boldsymbol{P \vee Q}$

C6. Busco eliminar P. Así que resuelvo C5 con C1 aplicando Resolución: $\dfrac{\begin{array}{r}P \vee Q \\ \neg P \vee Q\end{array}}{Q}$ y se obtiene: Q

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Tenemos 4 sentencias, siguiendo los pasos del algoritmo de conversión a CNF (3 diapositivas previas):

C1. Eliminar bicondicional de S1: $\neg P \vee Q$

C2. Eliminar bicondicional de S2: $\neg R \vee (P \vee Q) = \neg R \vee P \vee Q$

C3. S3 no necesita modificación: R

C4. S4 no necesita modificación: $\boldsymbol{\neg Q}$

C5. Busco eliminar R. Así que se aplica Resolución de C3 con C2: $\dfrac{\begin{array}{c}\neg R \vee P \vee Q \\ R\end{array}}{P \vee Q}$ y se obtiene: $P \vee Q$

C6. Busco eliminar P. Así que resuelvo C5 con C1 aplicando Resolución: $\dfrac{\begin{array}{c}P \vee Q \\ \neg P \vee Q\end{array}}{Q}$ y se obtiene: $\boldsymbol{Q}$

C7. Finalmente, resuelvo C6 con C4 y obtengo Falso, la cláusula vacía: $\dfrac{\begin{array}{c}Q \\ \neg Q\end{array}}{\mathit{Falso}}$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

a) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $R \Rightarrow (P \vee Q)$

S3. R

S4. $\neg Q$

Representación del Algoritmo de Resolución:

C1. $P \vee Q$

C2. $\neg R \vee P \vee Q$

C3. R

C4. Q

C5. $P \vee Q$(C3,C2)

C6. Q (C5,C1)

C7. $\square$ (C6,C4)

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

b) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $S \Rightarrow \neg R$

S3. $\neg P \Rightarrow S$

S4. $P \Rightarrow \neg S$

S5. $R \vee Q$

S6. $\neg(R \wedge Q)$

S7. $\neg Q$

Ejercicio 3. Algoritmo de Resolución. Solución.

b) S1. $P \Rightarrow Q$

S2. $S \Rightarrow \neg R$

S3. $\neg P \Rightarrow S$

S4. $P \Rightarrow \neg S$

S5. $R \vee Q$

S6. $\neg(R \wedge Q)$

S7. $\neg Q$

C1. $\neg P \vee Q$	Se ha eliminado la bicondicional.
C2. $\neg S \vee \neg R$	Se ha eliminado la bicondicional.
C3. $P \vee S$	Se ha eliminado la bicondicional.
C4. $\neg P \vee \neg S$	Se ha eliminado la bicondicional.
C5. $R \vee Q$	No es necesario hacer nada.
C6. $\neg R \vee \neg Q$	Se ha movido ¬ hacia adentro (Leyes de Morgan)
C7. $\neg Q$	No es necesario hacer nada.
C8. $S \vee Q$ (C3, C1)	Buscamos eliminar *P* aplicando Resolución.
C9. $\neg R \vee Q$ (C8, C2)	Buscamos eliminar *S* aplicando Resolución.
C10. Q (C9, C5)	Buscamos eliminar *R* aplicando Resolución.
C11. $\square$ (C10, C7)	Se llega a la cláusula vacía.

Ejercicio 4.8. Algoritmo de Resolución. Solución

Ej. 4.8 del libro Ejercicios de Sistemas Inteligentes: Dada la siguiente inferencia, aplicar la transformación a forma normal conjuntiva y demostrar que dicha inferencia es correcta aplicando el algoritmo de resolución:

BC:

S1. $P \Leftrightarrow T$

S2. $(T \Rightarrow \neg S) \Leftrightarrow Q$

S3. $\neg P$

$\models$

α: S4. Q

Algoritmo de Resolución

- Objetivo: demostrar que BC $\models \alpha$. Lo haremos por reducción al absurdo, es decir, demostraremos que BC $\wedge \neg \alpha$ es insatisfacible.
- Primero convertimos BC $\wedge \neg \alpha$ a CNF.
- Después aplicamos la regla de resolución repetidamente a las cláusulas obtenidas.
- Hay dos posibles resultados:
  - No se pueden añadir más cláusulas, lo que significa que α no se infiere de la BC.
  - Se produce la cláusula vacía (sentencia *FALSO*), lo que significa que α se infiere de BC.

Ejercicio 4.9. Algoritmo de Resolución. Solución

Ej. 4.9 del libro Ejercicios de Sistemas Inteligentes. Dada la siguiente inferencia, aplicar la transformación a forma normal conjuntiva y demostrar que dicha inferencia es correcta aplicando el algoritmo de resolución:

BC

S1. $Q \Rightarrow P$

S2. $(\neg P \Rightarrow \neg S) \Rightarrow Q$

S3. $\neg S$

$\vDash$

α: S4. P

Algoritmo de resolución:

S1. $Q \Rightarrow P$ Se elimina la implicación de S1: **C1.** $\boldsymbol{P \vee \neg Q}$

S2. $(\neg P \Rightarrow \neg S) \Rightarrow Q$ Se elimina el paréntesis y luego la implicación externa:

$(P \vee \neg S) \Rightarrow Q$; $\neg (P \vee \neg S) \vee Q$; $(\neg P \wedge S) \vee Q$; $(\neg P \vee Q) \wedge (S \vee Q)$; **C2.** $\boldsymbol{\neg P \vee Q}$; **C3.** $\boldsymbol{S \vee Q}$

C4. $\boldsymbol{\neg S}$

C5. $\boldsymbol{\neg P}$ $(\neg\alpha)$

C6. $\boldsymbol{Q}$ **(C3, C4)**

C7. $\boldsymbol{P}$ **(C1, C6)**

C8. $\square$ **(C5, C7)**

3. Demostración de teoremas:
Ejemplo

- Restringimos la BC vista anteriormente a sólo dos sentencias:

❖ Ej. BC muy sencilla:
  - $Regla_1$: Mojado $\Leftrightarrow$ (Lluvia $\vee$ Inundación)
  - $Hecho_2$: $\neg$ Mojado

- Queremos demostrar $\alpha = \neg$ Llueve
- Pasos a seguir:
  - Conversión de BC a CNF.

3. Demostración de teoremas:

Ejemplo

- Ej. Regla_1: *Mojado* $\Leftrightarrow$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*)

  Hecho_2: $\neg$ *Mojado*

- [*Mojado* $\Leftrightarrow$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*)] $\wedge$ $\neg$ *Mojado*
- [*Mojado* $\Rightarrow$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*)] $\wedge$ [(*Lluvia* v *Inundación*) $\Rightarrow$ *Mojado*] $\Rightarrow$ $\neg$ *Mojado*
- [$\neg$ *Mojado* $\vee$ *Lluvia* $\vee$ *Inundación*] $\wedge$ [$\neg$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*) $\vee$ *Mojado*] $\wedge$ $\neg$ *Mojado*
- [$\neg$ *Mojado* $\vee$ *Lluvia* $\vee$ *Inundación*] $\wedge$ [$\neg$ *Lluvia* $\wedge$ $\neg$ *Inundación*) $\vee$ *Mojado*] $\wedge$ $\neg$ *Mojado*
- ($\neg$ *Mojado* $\vee$ *Lluvia* $\vee$ *Inundación*] $\wedge$ ($\neg$ *Lluvia* $\vee$ *Mojado*) $\wedge$ ($\neg$ *Inundación* $\vee$ *Mojado*) $\wedge$ $\neg$ *Mojado*

3. Demostración de teoremas:
Ejemplo

- Restringimos la BC vista anteriormente a sólo dos sentencias:

❖ Ej. BC muy sencilla:
  - Regla_1: $Mojado \Leftrightarrow (Lluvia \vee Inundación)$
  - Hecho_2: $\neg\ Mojado$

- Queremos demostrar $\alpha = \neg$ Llueve
- Pasos a seguir:
  - Conversión de BC a CNF.
  - Vemos que las cláusulas de la fila superior producen las cláusulas de la fila inferior.

3. Demostración de teoremas:

Ejemplo

- Restringimos la BC vista anteriormente a sólo dos sentencias:

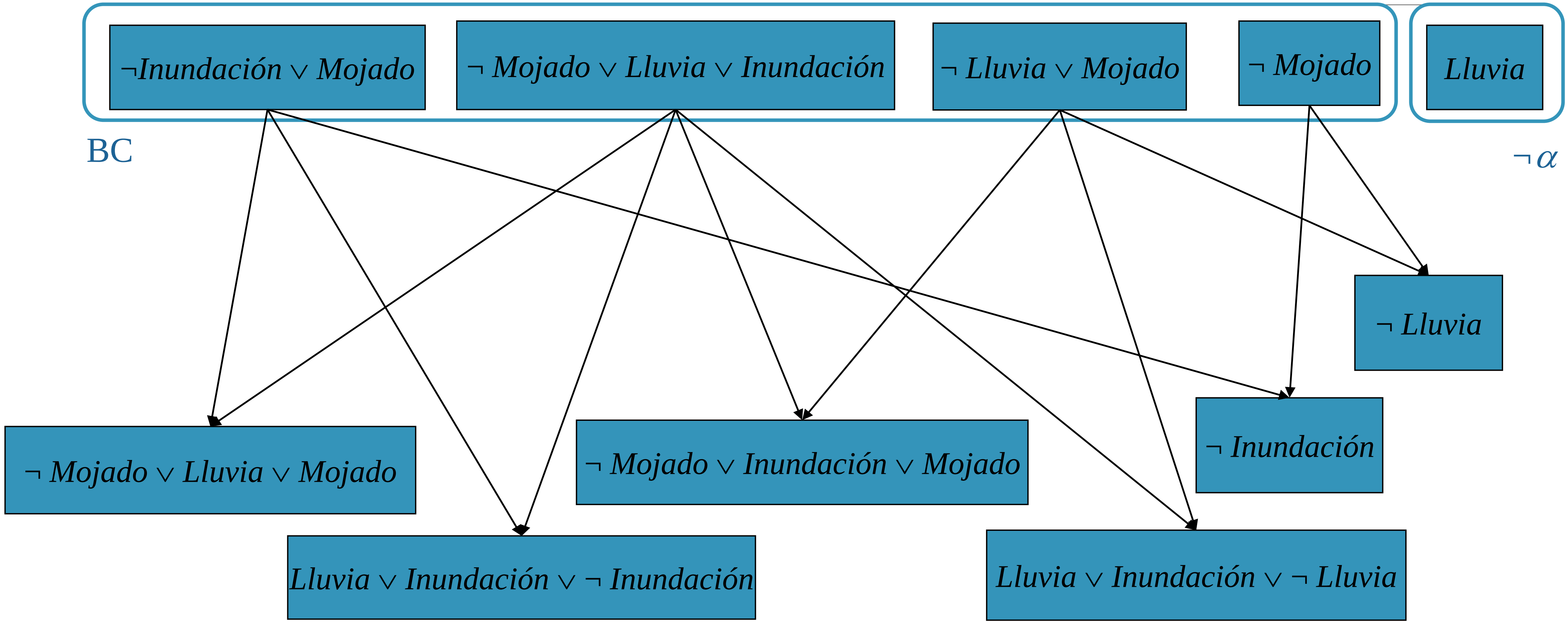
❖ Ej. BC muy sencilla:

- Regla_1: *Mojado* $\Leftrightarrow$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*)
- Hecho_2: $\neg$ *Mojado*

- Queremos demostrar $\alpha = \neg$ Lluvia
- Pasos a seguir:
  - Conversión de BC a CNF.
  - Vemos que las cláusulas de la fila superior producen las cláusulas de la fila inferior.
  - Eliminamos literales complementarios.

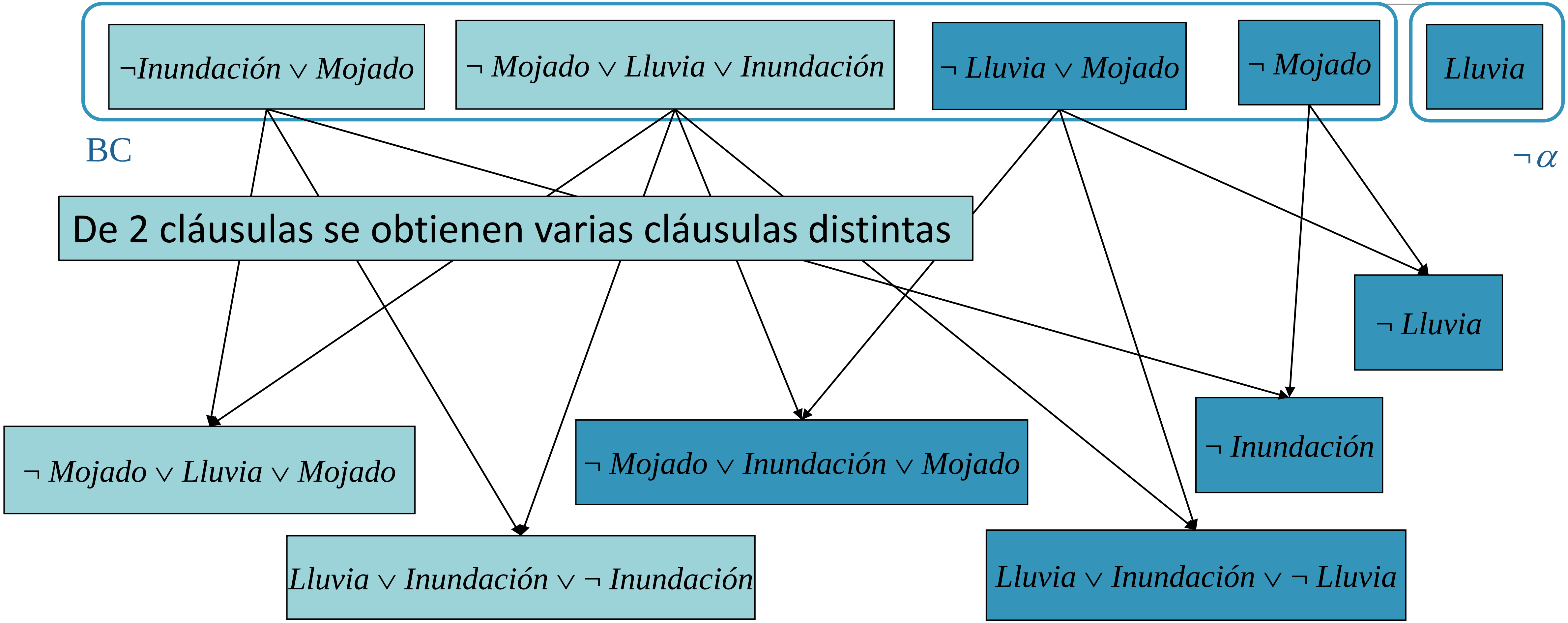
3. Demostración de teoremas:

Ejemplo



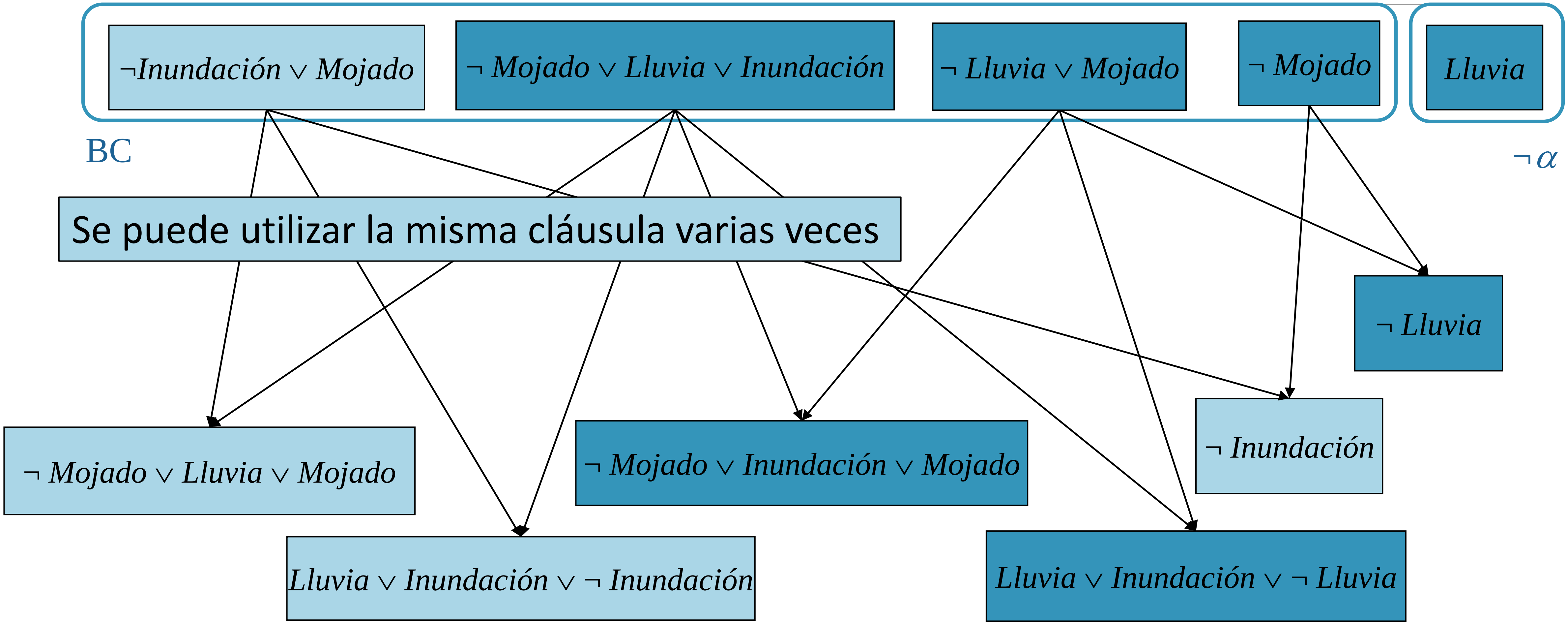
3. Demostración de teoremas:

Ejemplo



3. Demostración de teoremas:

Ejemplo



3. Demostración de teoremas:
Ejemplo

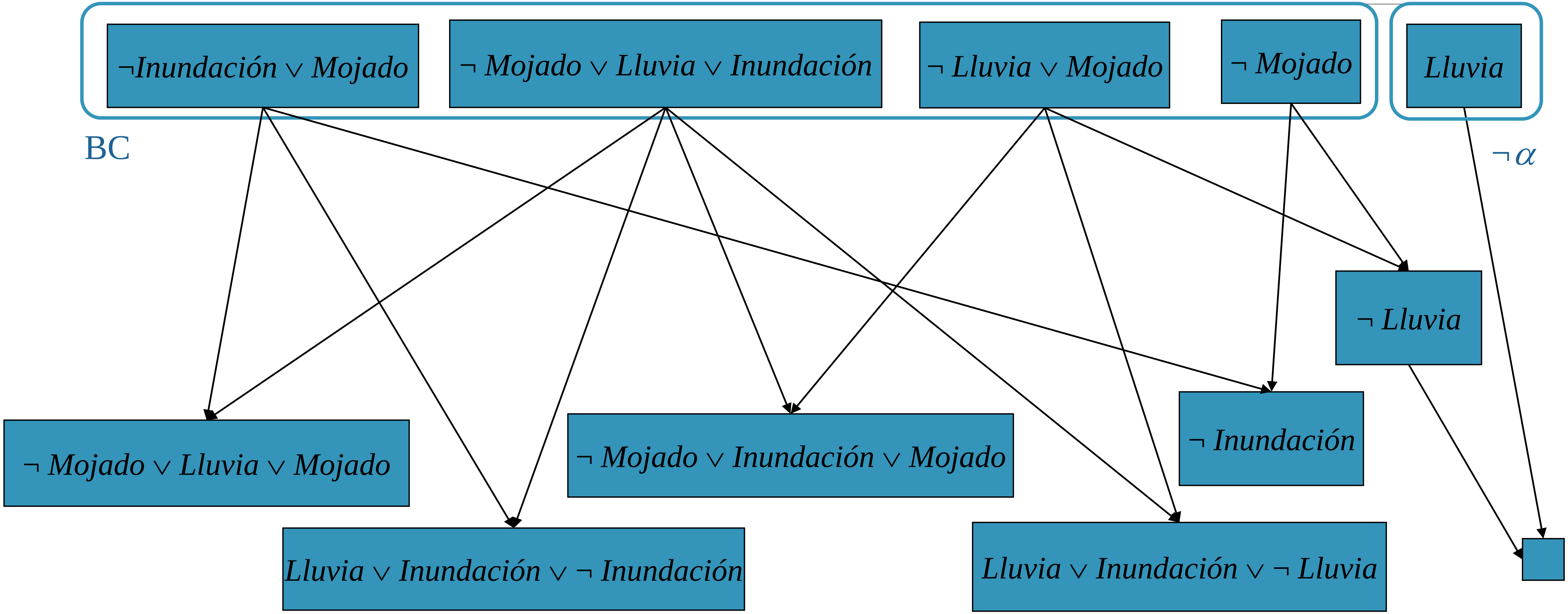
- Restringimos la BC vista anteriormente a sólo dos sentencias:

❖ Ej. BC muy sencilla:
  - Regla_1: *Mojado* $\Leftrightarrow$ (*Lluvia* $\vee$ *Inundación*)
  - Hecho_2: $\neg$ *Mojado*

- Queremos demostrar $\alpha = \neg$ Llueve
- Pasos a seguir:
  - Conversión de BC a CNF.
  - Vemos que las cláusulas de la fila superior producen las cláusulas de la fila inferior.
  - Eliminamos literales complementarios.
  - Finamente se produce la cláusula vacía (recuadro pequeño), lo que quiere decir que α se infiere de BC.

3. Demostración de teoremas:

Ejemplo



Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Enunciado.

Escribe el siguiente argumento en el lenguaje de la lógica proposicional. Debes modelarlo de esta forma: KB $|= \alpha$. A continuación establece la validez del argumento mediante el algoritmo de resolución, o bien da un contraejemplo para demostrar que no es válido.

Si Antonio suspende el examen de Inglés, entonces Juan (el profesor de Antonio) estará decepcionado.

Si Rafael suspende el examen de Matemáticas, entonces María (la profesora de Rafael) estará decepcionada.

Si Juan o María están decepcionados, entonces Sandra (la directora) será informada.

Sandra no ha sido notificada por parte de ninguno de los dos profesores.

Consecuentemente, Antonio aprobó el examen de Inglés y Rafael aprobó el examen de Matemáticas.

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

Átomos: AntonioSuspende, JuanDecepcionado, RafaelSuspende, MaríaDecepcionada, SandraNotificada.

KB:

AntonioSuspende ⇒ JuanDecepcionado

RafaelSuspende ⇒ MaríaDecepcionada

JuanDecepcionado ∨ MaríaDecepcionada ⇒ SandraNotificada

¬SandraNotificada

α:

¬AntonioSuspende ∧ ¬RafaelSuspende

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- **KB $\wedge \neg\, \alpha$:**

S1. *AntonioSuspende* $\Rightarrow$ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* $\Rightarrow$ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* $\vee$ *MaríaDecepcionada* $\Rightarrow$ *SandraNotificada*
S4. $\neg$*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* $\vee$ *RafaelSuspende*

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\wedge$ ¬ α:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. **¬AntonioSuspende ∨ JuanDecepcionado**

Eliminar bicondicional

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\wedge \neg \alpha$:

S1. $AntonioSuspende \Rightarrow JuanDecepcionado$
S2. $RafaelSuspende \Rightarrow MaríaDecepcionada$
S3. $JuanDecepcionado \vee MaríaDecepcionada \Rightarrow SandraNotificada$
S4. $\neg SandraNotificada$
S5. $AntonioSuspende \vee RafaelSuspende$

- Conversión a CNF:

C1. ¬AntonioSuspende ∨ JuanDecepcionado — Eliminar bicondicional
C2. **¬RafaelSuspende ∨ MaríaDecepcionada** — **Eliminar bicondicional**

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\wedge \neg \alpha$:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado*	Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada*	Eliminar bicondicional
C3. **¬(*JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada*) ∨ *SandraNotificada***	**Eliminar bicondicional**

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- $KB \wedge \neg \alpha$:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado*	Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada*	Eliminar bicondicional
C3. ¬(*JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada*) ∨ *SandraNotificada*	Eliminar bicondicional
(¬*JuanDecepcionado* ∧ ¬*MaríaDecepcionada*) ∨ *SandraNotificada*	**Ley de Morgan**

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\land \neg \alpha$:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado* — Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada* — Eliminar bicondicional
C3. ¬(*JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada*) ∨ *SandraNotificada* — Eliminar bicondicional
(¬*JuanDecepcionado* ∧ ¬*MaríaDecepcionada*) ∨ *SandraNotificada* — Ley de Morgan
(¬*JuanDecepcionado* ∨ *SandraNotificada*) ∧ (¬*MaríaDecepcionada* ∨ *SandraNotificada*)
Distributividad de ∨ respecto a ∧

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB ∧ ¬ α:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado*	Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada*	Eliminar bicondicional
C3. ***¬JuanDecepcionado*** ∨ ***SandraNotificada***	**Eliminar bicondicional, Ley Morgan, distributividad**
C4. ***¬MaríaDecepcionada*** ∨ ***SandraNotificada***	

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\wedge \neg \alpha$:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado* — Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada* — Eliminar bicondicional
C3. ¬*JuanDecepcionado* ∨ *SandraNotificada* — Eliminar bicondicional, Ley Morgan, distributividad
C4. ¬*MaríaDecepcionada* ∨ *SandraNotificada*
C5. **¬*SandraNotificada*** — **No es necesario hacer nada**

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- KB $\land \neg \alpha$:

S1. *AntonioSuspende* ⇒ *JuanDecepcionado*
S2. *RafaelSuspende* ⇒ *MaríaDecepcionada*
S3. *JuanDecepcionado* ∨ *MaríaDecepcionada* ⇒ *SandraNotificada*
S4. ¬*SandraNotificada*
S5. *AntonioSuspende* ∨ *RafaelSuspende*

- Conversión a CNF:

C1. ¬*AntonioSuspende* ∨ *JuanDecepcionado*	Eliminar bicondicional
C2. ¬*RafaelSuspende* ∨ *MaríaDecepcionada*	Eliminar bicondicional
C3. ¬*JuanDecepcionado* ∨ *SandraNotificada*	Eliminar bicondicional, Ley Morgan, distributividad
C4. ¬*MaríaDecepcionada* ∨ *SandraNotificada*	
C5. ¬*SandraNotificada*	No es necesario hacer nada
C6. ***AntonioSuspende*** ∨ ***RafaelSuspende***	**No es necesario hacer nada**

Ejercicio 4. Formalización y Resolución. Solución.

- Algoritmo de resolución:

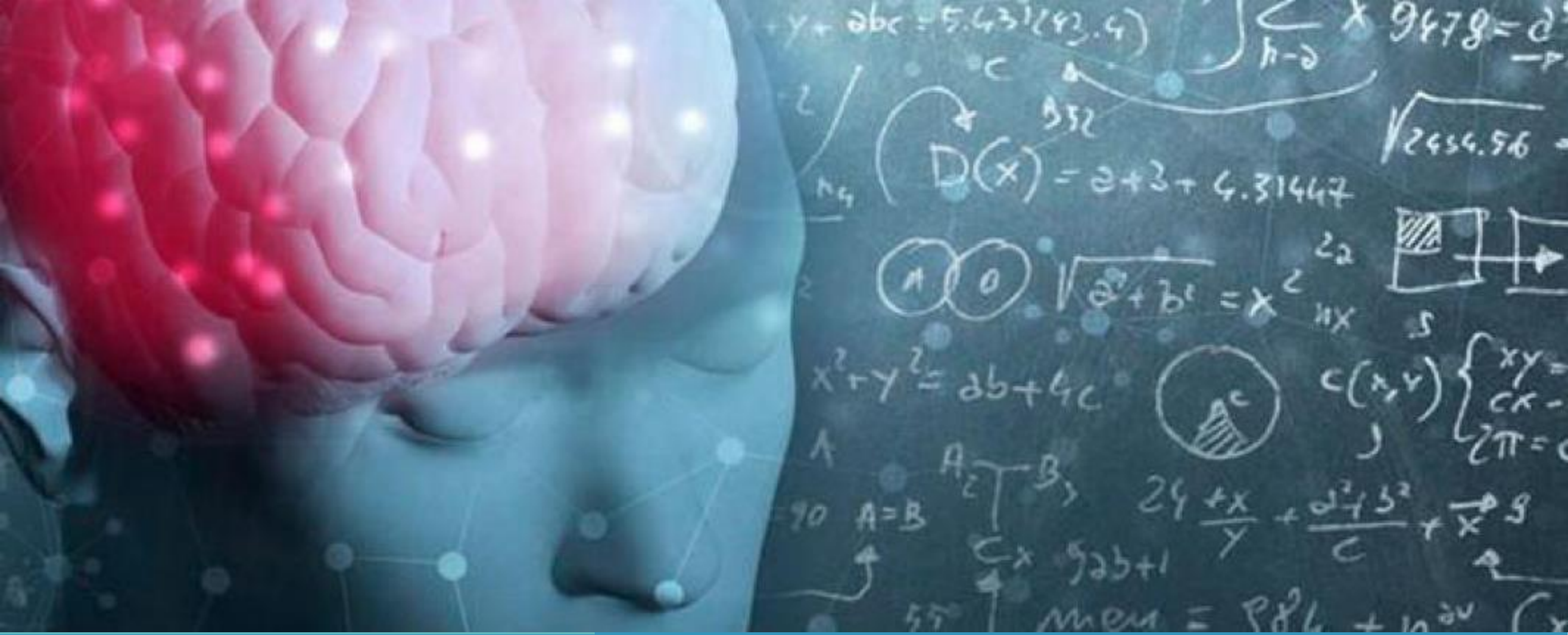
C7. ¬*MaríaDecepcionada*	Resuelvo **C5** con C4
C8. ¬*JuanDecepcionado*	Resuelvo **C5** con C3
C9. ¬*AntonioSuspende*	Resuelvo C8 con C1
C10. ¬*RafaelSuspende*	Resuelvo C7 con C2
C11. *RafaelSuspende*	Resuelvo C9 con C6
C12. *Falso*	Resuelvo C11 con C10

Se puede utilizar la misma cláusula varias veces

Si el argumento no hubiera sido válido, podríamos haberlo mostrado dando un contraejemplo, es decir, un modelo en el que la KB es verdadera y la conclusión α es falsa.

4. Conclusiones

- Los agentes inteligentes necesitan conocimiento acerca de su mundo a fin de tomar buenas decisiones. **Agentes basados en conocimiento**.
- El conocimiento se representa en los agentes mediante sentencias que se almacenan en una **base de conocimiento**.
- La **inferencia** es el proceso de derivar nuevas sentencias a partir de las ya conocidas.
- La **Resolución**, un tipo de reglas de inferencia, da lugar a un algoritmo de inferencia correcto y completo para la lógica proposicional.



Gracias, Rosa ☺