Relación de ejercicios 3.3

1. Calcule la siguiente integral utilizando el cambio de variable $x = t^2$

$$\int_0^{\pi^2/4} \operatorname{sen} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$$

de dos formas distintas:

a) Calculando directamente una primitiva y aplicando, sólo al final, la regla de Barrow.

b) Aplicando la Regla de Barrow cada vez que se aplique un método (por partes o sustitución), conforme a los Teoremas 3.3.9, 3.3.10 y 3.3.12.

2. Calcule el área de las regiones acotadas que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 9x^2 + 10$ y $g(x) = x^2 + 1$.

3. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias y, en su caso, calcular su valor:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} \, \mathrm{d}y$ *c*) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z$

4. Volumen de revolución por discos: El *volumen del sólido de revolución* que se genera cuando una región plana, determinada por el grafo de una función continua $f(x)$ y el eje OX, entre $x = a$ y $x = b$, gira alrededor del eje OX, se obtiene así:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Utilice este resultado para calcular:

a) el volumen de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje OX la región del primer cuadrante determinada por la función $f(x) = \sqrt{x}$ entre los valores $x = 0$ y $x = 1$.

b) el volumen de revolución que se genera al hacer girar, alrededor del eje OX la región del primer cuadrante determinada por la función $f(x) = 2x - x^2$ y la recta $y = 0$.

5. Longitud de curvas: La *longitud de una curva parametrizada* diferenciable $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas en $[a, b]$, se calcula así:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, \mathrm{d}t$$

y, en particular, la *longitud del grafo de una función* f definida en $[a, b]$ es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x$$

Utilice este resultado anterior para hallar *a*) la distancia recorrida por un móvil entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$ si su posición viene determinada por las ecuaciones:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad , \quad y(t) = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$$

b) la longitud del grafo de la función $\cosh(x)$ definida en el intervalo $[-1, 1]$.

6. Halle la integral doble sobre la región rectangular que se indica:

   a) $\displaystyle\iint_R y^3 \cos^2 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, 2]$

   b) $\displaystyle\iint_R y x^3 \mathrm{e}^{x^2 y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad$ donde $R = [0, 1] \times [-2, 0]$

7. En cada caso, dibuje la región sobre la que se integra, intercambie el orden de integración y evalúe la integral

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 (x-y)^3 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \qquad$ *b*) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2+y^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

8. Dibuje la región que se indica y proporcione los límites de integración que determinan la región, primero (1) en coordenadas cartesianas y después, (2) en coordenadas polares.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

   b) Región del primer cuadrante encerrada por las curvas $y = x^2$ e $y = 3x$.

   c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \ge 1 \, , \, (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$

   d) Región del primer y segundo cuadrante comprendida entre la gráfica de la función $y = |x|$ y la circunferencia centrada en el origen y de radio 1.

   e) Región delimitada superiormente por la curva $x^2+y^2 = 4$, e inferiormente por la recta $y = \sqrt{2}$.

   f) Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 1)$.

   g) Región comprendida entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$ con $x \ge 0$.

9. Calcule el volumen del sólido comprendido entre el grafo del campo escalar $f(x, y) = 1/\sqrt{-y}$ en D y el plano XY, siendo D la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ y el eje OX.

10. Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por el grafo del campo escalar $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, e inferiormente por el plano XY.

11. Determine el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = 1 + \cos(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-\pi, \pi]$, de dos formas distintas:

    a) Como aplicación del cálculo integral de funciones reales (Bachillerato).

    b) Como aplicación de las integrales dobles al cálculo de volúmenes (teorema 3.3.35) y de áreas de regiones planas.

12. Utilice el cambio de variable a coordenadas polares para hallar el área de la región D que es interior a la cardioide de ecuación $\rho = 3(1+\cos\theta)$ y, a la vez, exterior a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=9$.

13. Consideramos la región R delimitada por las rectas $y = x+1$, $y = x-3$, $y = 4-x$, $y = 3-x$. Utilizar el teorema de cambio de variable para expresar la integral respecto de las variables u y v tales que $y = x+u$, $y = v-x$ y calcularla
$$\iint\limits_R (y-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
de manera similar a como se hace en el ejemplo 3.3.34 de la página 178.

14. Si f es un campo escalar continuo con parciales continuas en un dominio D, entonces el área de la superficie de su grafo sobre el dominio D es
$$\iint\limits_D \sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
Halle el área de la superficie del grafo del campo $f(x,y)=xy$ sobre el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1.