

Model SIR oraz SIRD

Czerwiec, 2020

1 Model SIR

Model SIR (Susceptible - Infectious - Recovered), model w którym agent może przechodzić między stanami: Podatny (S), Zarażony (I), Ozdrowiały (R) (agent wyzdrowiał i uodpornił się lub zmarł).

$$S \rightarrow I \rightarrow R \quad (1)$$

Model opisany jest dwoma parametrami β - podatność na zarażenie, oraz γ - tempo ozdrowiania. Zakładamy iż okres inkubacji jest na tyle krótki, że pomijalny oraz każdy osobnik ma szansę napotkać osobę w każdym stadium z równym prawdopodobieństwem.

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \quad (2)$$

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I \quad (3)$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (4)$$

W celu wyznaczenia parametrów modelu posłużono się przekształceniem:

$$\gamma = \frac{\dot{R}}{I} \quad (5)$$

$$\beta = (\dot{I} + \gamma I) \frac{N}{SI} \quad (6)$$

Gdzie \dot{I} liczba nowych zarażonych, a \dot{R} liczba ozdrowiałych + zmarłych.

2 Model SIRD

Rozwinięciem modelu SIR jest dodanie stany Zmarły (Deceased) - rozróżnienie od osób wyzdrowiałych (Recovered).



Dochodzi również nowy parametr opisujący śmiertelność δ .

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \quad (8)$$

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I - \delta I = \beta I \frac{S}{N} - (\gamma + \delta)I \quad (9)$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (10)$$

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} = \delta I \quad (11)$$

W przypadku wyznaczania parametrów mają miejsce drobne zmiany:

$$\gamma = \frac{\dot{R}}{I} \quad (12)$$

$$\delta = \frac{\dot{D}}{I} \quad (13)$$

$$\beta = [\dot{I} + (\gamma + \delta)I] \frac{N}{SI} \quad (14)$$

Gdzie \dot{I} liczba nowych zarażonych, \dot{R} liczba ozdrowiałych, a \dot{D} liczba zmarłych. Wartości te zostaną wyliczone po dopasowaniu krzywej do zebranych danych, odpowiednio funkcji eksponent (w momentach szybkiego wzrostu), sigmoid lub gauss (w momencie unormowania się).

Założenia na potrzeby projektu - w chwili $t = 0$ cała populacja danego kraju jest podatna na zarażenie.

3 Polska

W przypadku Polski skorzystano z modelu SIRD, przy obliczaniu parametrów, podzielono sytuację na 4 okresy [2]:

1. 15.02-16.03 - okres do wprowadzenia pierwszych ograniczeń,
2. 17.03-24.03 - okres pomiędzy wprowadzeniem pierwszych, a drugich ograniczeń,
3. 25.03-31.03 - okres pomiędzy wprowadzeniem drugich, a trzecich ograniczeń,
4. po 31.03 - okres po wprowadzeniu ostatnich ograniczeń.

Od tego momentu obserwuje się fluktuacje wokół stałej wartości, znoszenie kolejnych obostrzeń nie przyniosło też znaczącej zmiany kształtu krzywej liczby osób zarażonych dziennie.

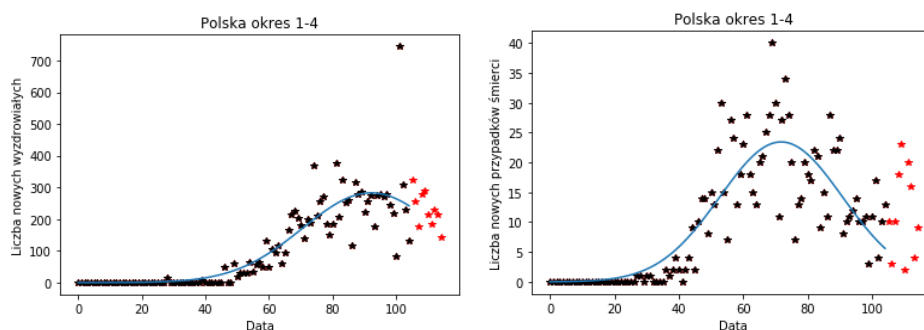


Rysunek 1: Wykres liczy nowo zarażonych danego dnia z zaznaczonymi datami wprowadzeń nowych obostrzeń oraz ich znoszenia

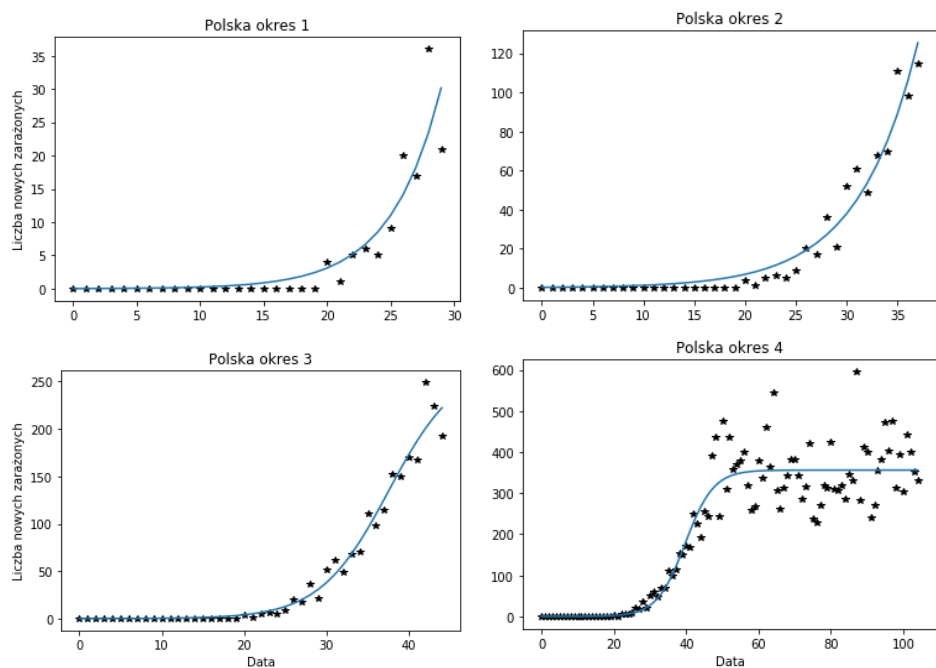


Rysunek 2: Wykres liczy wszystkich zarażonych danego dnia z zaznaczonymi datami wprowadzeń nowych obostrzeń oraz ich znoszenia

3.1 Dopasowanie krzywych



Rysunek 3: Wykres dla czterech okresów liczby nowych przypadków wyzdrowień oraz śmierci danego dnia dla Polski z dopasowanymi krzywymi, czerwone - punkty nie brane pod uwagę przy wyliczeniach (pokazujące przyszły przebieg epidemii)



Rysunek 4: Wykres dla czterech okresów liczby nowych zarażonych danego dnia dla Polski z dopasowanymi krzywymi

3.2 Wyliczenie parametrów modelu

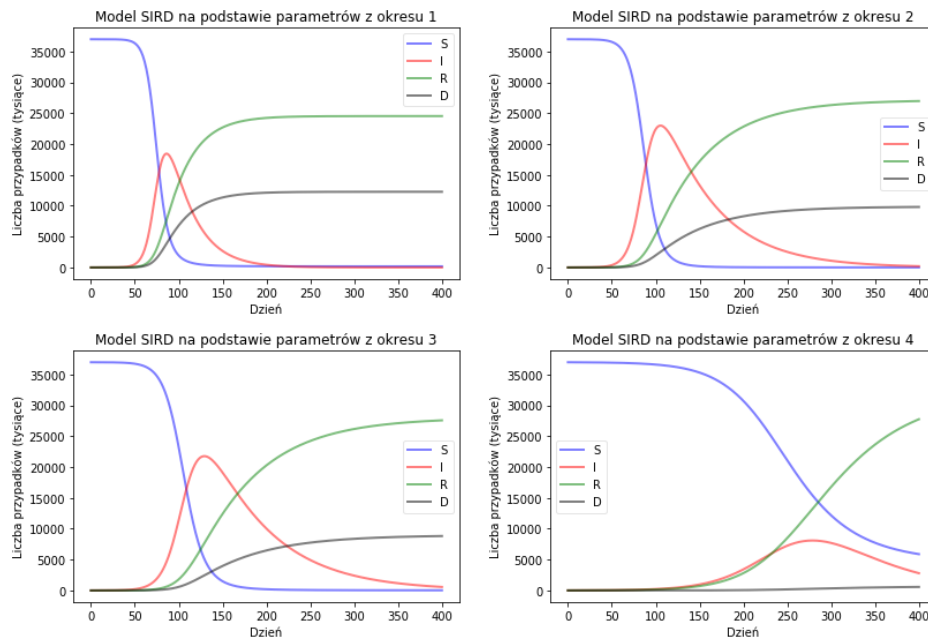
Po dopasowaniu punktów do odpowiednich krzywych uzyskane wartości to:

Okresy:	1	2	3	4	Okresy:	1	2	3	4
dI	30	116	222	356	I_0	160	890	2271	11494
dR	4	11	25	242	R_0	13	13	19	11028
dD	2	4	8	5	D_0	4	10	33	1061

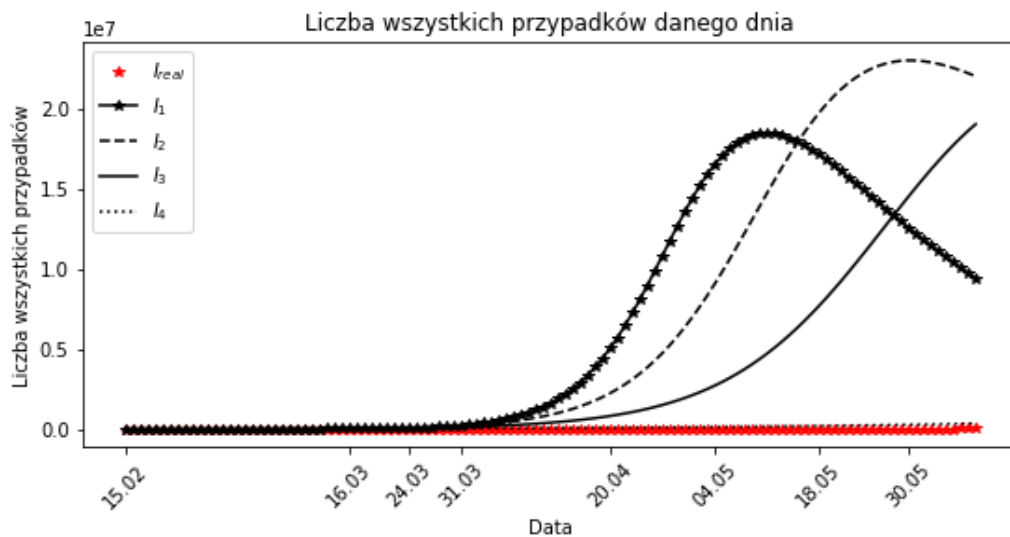
Natomiast wartości parametrów to:

Okresy:	1	2	3	4
β	0.2	0.138	0.105	0.052
γ	0.025	0.012	0.011	0.021
δ	0.0125	0.0045	0.0035	0.00044

3.3 Wyniki modelu



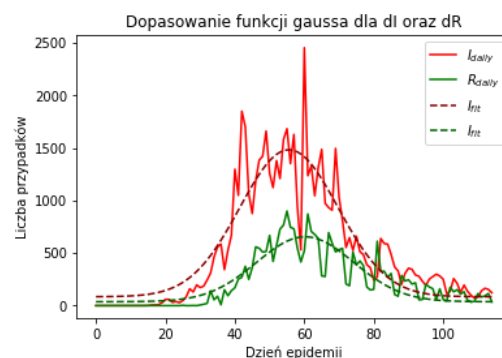
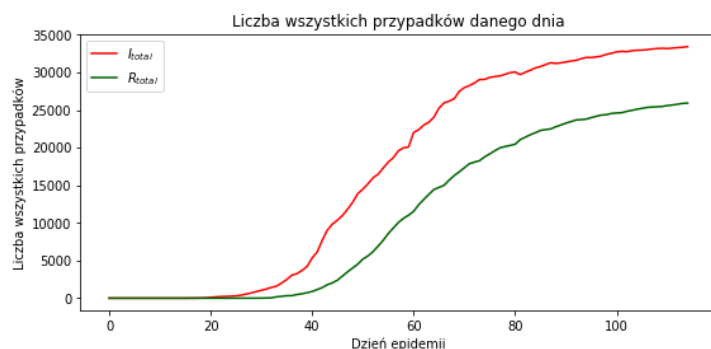
Rysunek 5: Wykres dla czterech modeli SIRD z danymi wejściowymi z okresów 1,2,3,4



Rysunek 6: Wykres dla czterech modeli SIRD z danymi wejściowymi z okresów 1,2,3,4 w zestawieniu z danymi rzeczywistymi

4 Belgia

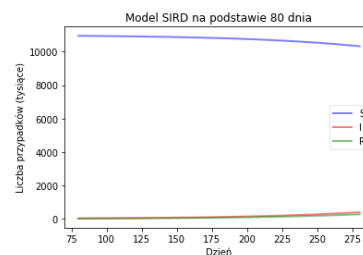
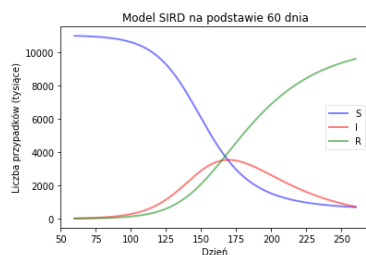
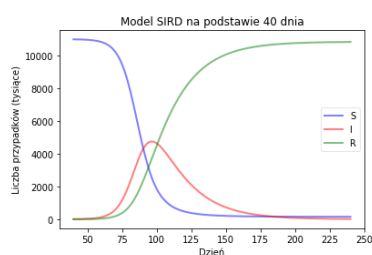
W przypadku Belgii użyto modelu SIR oraz rozpatrywano cały okres epidemii bez dzielenia na podokresy. Rozpatrujemy w modelu dla $t_0 = 40$, $t_0 = 60$ oraz $t_0 = 60$ dnia epidemii.



Rysunek 7: Wykres liczy wszystkich zarażonych danego dnia Rysunek 8: Wykres dopasowania funkcji gaussa dla wartości dI oraz dR

Wartości parametrów dla poszczególnych dni jako punktów wyjściowy:

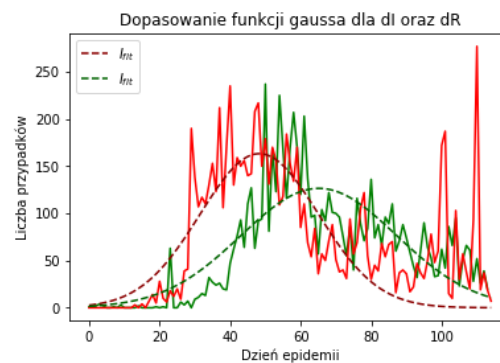
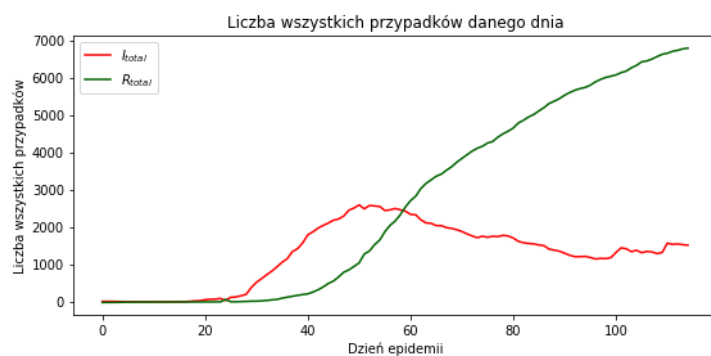
Dzień:	40	60	80
β	0.2	0.094	0.022
γ	0.04	0.03	0.0088



Rysunek 9: Wykres dla trzech modeli SIRD z danymi wejściowymi z dnia 40,60,80

5 Malezja

Tak samo jak w przypadku Belgii, tak w przypadku Malezji użyto modelu SIR oraz rozpatrywano cały okres epidemii bez dzielenia na podokresy. Rozpatrujemy w modelu dla $t_0 = 30$, $t_0 = 50$ oraz $t_0 = 70$ dnia epidemii.

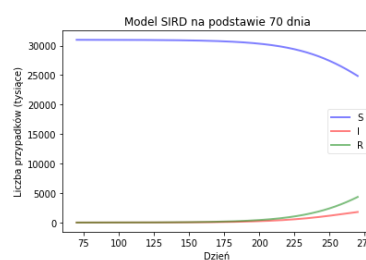
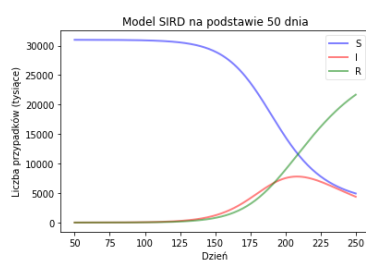
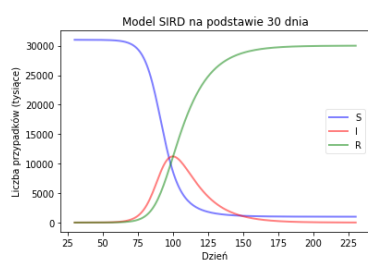


Rysunek 10: Wykres liczy wszystkich zarażonych danego dnia

Rysunek 11: Wykres dopasowania funkcji gaussa dla wartości dI oraz dR

Wartości parametrów dla poszczególnych dni jako punktów wyjściowych:

Dzień:	30	50	70
β	0.24	0.1	0.1
γ	0.068	0.038	0.066



Rysunek 12: Wykres dla trzech modeli SIRD z danymi wyjściowymi z dnia 30,50,70

6 Wnioski

W przypadku Polski można przypuszczać iż wczesne wprowadzenie ograniczeń i restrykcji uchroniło kraj przed wiele gorszym scenariuszem, opierając się na dostępnych danych.

Zarówno dla Belgii i Malezji wykresy modelu SIR przybierają podobne wykresy, w zależności od przyjętego dnia - gdy rosła liczna zarażeń dziennie, czy malała, lub też była w ekstremum.

Sam model nie jest idealny ponieważ opiera się na danych zebranych - nigdy nie znamy prawdziwej liczby zarażonych, tak samo z założeniem, że każdy ma takie samo prawdopodobieństwo zarażenia się. Widać duże rozbieżności między wykresami z parametrami wyliczonymi dla różnych okresów trwania pandemii. Również same dane nie są idealne - czasami ciężko określić liczbę nowych przypadków dziennie co spowodowane jest dużymi rozsiewem danych. Również problematyczny jest fakt, że epidemia może wygaszać się stopniowo lub wypłaszczać z powodu zniesienia zbyt wcześnie obostrzeń.

Podsumowując, model SIRD nie jest idealny jeśli chodzi o oddanie dynamiki przebiegu epidemii jednak pozwala na dokładniejszy opis po zebraniu większej liczby danych.

Literatura

- [1] COVID-19 Coronavirus Pandemic Data
<https://www.worldometers.info/coronavirus/>
- [2] Koronawirus - obostrzenia w Polsce. Etapy znoszenia ograniczeń
<https://www.medonet.pl/koronawirus-pytania-i-odpowiedzi/sars-cov-2,koronawirus---obostrzenia-w-polsce--etapy-znoszenia-ograniczen--aktualne-dane-,artykul,98382723.html>