

# Model SIR oraz SIRD

Czerwiec, 2020

## 1 Model SIR

Model SIR (Susceptible - Infectious - Recovered), model w którym agent może przechodzić między stanami: Podatny (S), Zarażony (I), Ozdrowiały (R) (agent wyzdrowiał i uodpornił się lub zmarł).

$$S \rightarrow I \rightarrow R \quad (1)$$

Model opisany jest dwoma parametrami  $\beta$  - podatność na zarażenie, oraz  $\gamma$  - tempo ozdrowiania. Zakładamy iż okres inkubacji jest na tyle krótki, że pomijalny oraz każdy osobnik ma szansę napotkać osobę w każdym stadium z równym prawdopodobieństwem.

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \quad (2)$$

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I \quad (3)$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (4)$$

W celu wyznaczenia parametrów modelu posłużono się przekształceniem:

$$\gamma = \frac{\dot{R}}{I} \quad (5)$$

$$\beta = (\dot{I} + \gamma I) \frac{N}{SI} \approx \frac{\dot{I}}{I} + \gamma \quad (6)$$

Gdzie  $\dot{I}$  liczba nowych zarażonych, a  $\dot{R}$  liczba ozdrowiałych + zmarłych.

## 2 Model SIRD

Rozwinięciem modelu SIR jest dodanie stany Zmarły (Deceased) - rozróżnienie od osób wyzdrowiałych (Recovered).

$$S \rightarrow I \begin{matrix} \nearrow D \\ \searrow R \end{matrix} \quad (7)$$

Dochodzi również nowy parametr opisujący śmiertelność  $\delta$ .

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = -\beta I \frac{S}{N} \quad (8)$$

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \beta I \frac{S}{N} - \gamma I - \delta I = \beta I \frac{S}{N} - (\gamma + \delta)I \quad (9)$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (10)$$

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} = \delta I \quad (11)$$

W przypadku wyznaczania parametrów mają miejsce drobne zmiany:

$$\gamma = \frac{\dot{R}}{I} \quad (12)$$

$$\delta = \frac{\dot{D}}{I} \quad (13)$$

$$\beta = [\dot{I} + (\gamma + \delta)I] \frac{N}{SI} \approx \frac{\dot{I}}{I} + \gamma + \delta \quad (14)$$

Gdzie  $\dot{I}$  liczba nowych zarażonych,  $\dot{R}$  liczba ozdrowiałych, a  $\dot{D}$  liczba zmarłych. Wartości te zostaną wyliczone po dopasowaniu krzywej do zebranych danych, odpowiednio funkcji eksponent (w momentach szybkiego wzrostu) lub sigmoid.

Założenia na potrzeby projektu - w chwili  $t = 0$  cała populacja danego kraju jest podatna na zarażenie.

## 3 Założenia

Przyjęte założenia na bazie [3]:

- Czas inkubacji (zarażenie - wystąpienie pierwszych symptomów) - 5 dni,
- Czas do wyzdrowienia lub śmierci od wystąpienia symptomów - 15 dni.

## 4 Polska

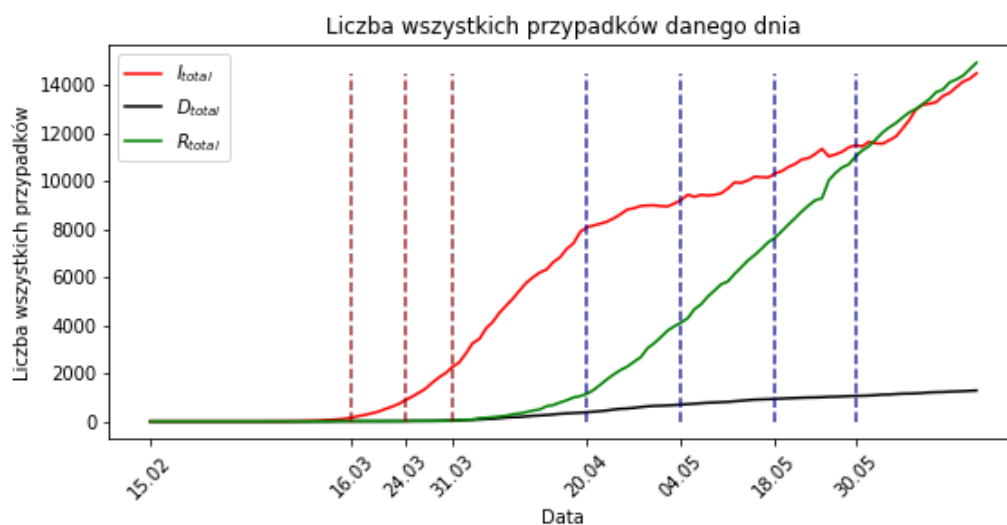
W przypadku Polski skorzystano z modelu SIRD, przy obliczaniu parametrów, podzielono sytuację na 4 okresy [2]:

1. 15.02-16.03 - okres do wprowadzenia pierwszych ograniczeń,
2. 17.03-24.03 - okres pomiędzy wprowadzeniem pierwszych, a drugich ograniczeń,
3. 25.03-31.03 - okres pomiędzy wprowadzeniem drugich, a trzecich ograniczeń,
4. po 31.03 - okres po wprowadzeniu ostatnich ograniczeń.

Od tego momentu obserwuje się fluktuacje wokół stałej wartości, znoszenie kolejnych obostrzeń nie przyniosło też znaczącej zmiany kształtu krzywej liczby osób zarażonych dziennie.

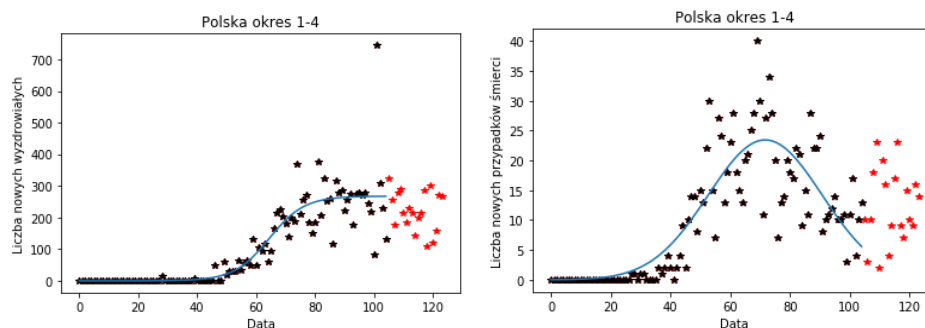


Rysunek 1: Wykres liczy nowo zarażonych danego dnia z zaznaczonymi datami wprowadzeń nowych obostrzeń oraz ich znoszenia



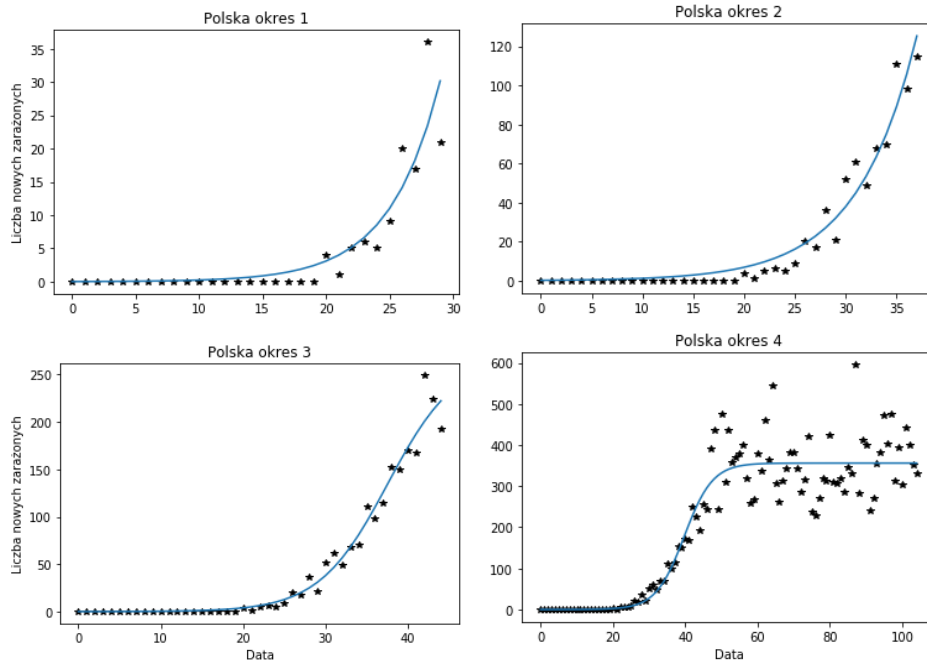
Rysunek 2: Wykres liczy wszystkich zarażonych danego dnia z zaznaczonymi datami wprowadzeń nowych obostrzeń oraz ich znoszenia

#### 4.1 Dopasowanie krzywych



Rysunek 3: Wykres dla czterech okresów liczby nowych przypadków wyzdrowień oraz śmierci danego dnia dla Polski z dopasowanymi krzywymi, czerwone - punkty nie brane pod uwagę przy wyliczeniach (pokazujące przyszły przebieg epidemii)

	dR	dD
$R^2$	0.77	0.73
$\chi^2$	3298	450
$DOF$	101	101
$p - value$	$< 0.001$	$< 0.001$



Rysunek 4: Wykres dla czterech okresów liczby nowych zarażonych danego dnia dla Polski z dopasowanymi krzywymi

Okresy:	1	2	3	4
$R^2$	0.84	0.96	0.97	0.87
$\chi^2$	27	83	68	1130
$DOF$	27	35	41	101
$p - value$	0.45	$< 0.001$	0.005	$< 0.001$

Wartość  $dI_1$  wyliczono z dopasowania dla okresu 2, ze względu na lepsze dopasowanie.

## 4.2 Wyliczenie parametrów modelu

Po dopasowaniu punktów do odpowiednich krzywych uzyskane wartości to:

Okresy:	1	2	3	4
$dI$	$32 \pm 15$	$116 \pm 65$	$222 \pm 21$	$356 \pm 8$
$dR$	$0 \pm 0.01$	$3 \pm 3$	$9 \pm 8$	$266 \pm 15$
$dD$	$2 \pm 24$	$4 \pm 55$	$8 \pm 98$	$5 \pm 55$

Liczba śmierci danego dnia różni się o rząd wielkości od niepewności.

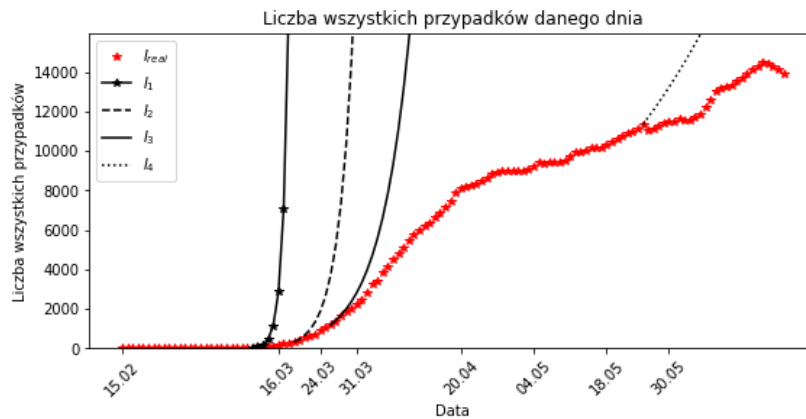
Okresy:	1	2	3	4
$I_{0-5dni}$	31	337	1198	11348
$R_{0-15dni}$	1	1	13	6930
$D_{0-15dni}$	1	1	4	97

Dni z zerową liczbą przypadków pozamieniano na wartości równe 1. Natomiast wartości parametrów to:

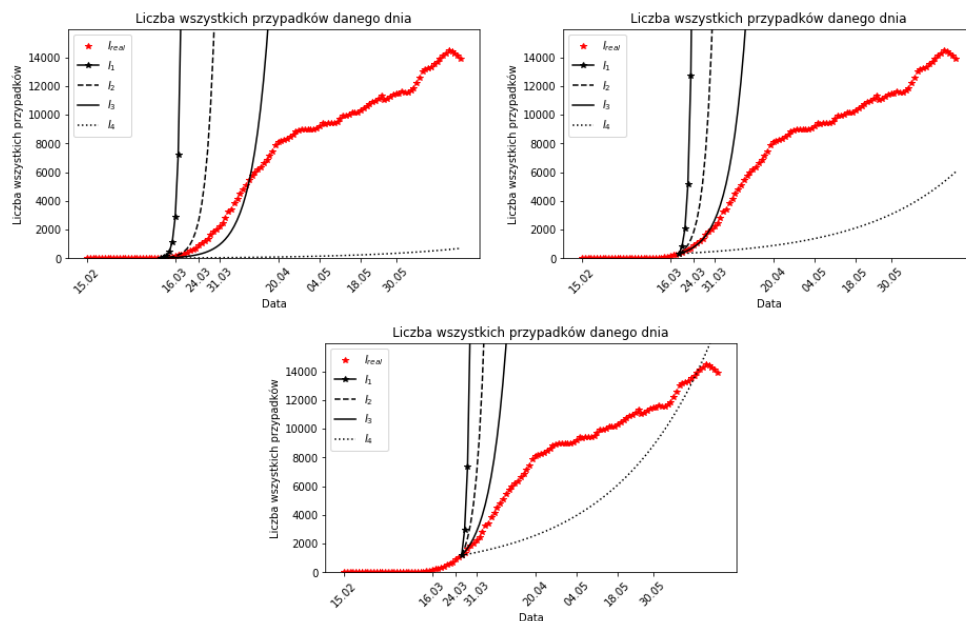
Okresy:	1	2	3	4
$\beta$	$1 \pm 28$	$0.4 \pm 5$	$0.2 \pm 0.6$	$0.054 \pm 0.006$
$\gamma$	$0 \pm 0.05$	$0.01 \pm 0.01$	$0.008 \pm 0.003$	$0.023 \pm 0.001$
$\delta$	$0 \pm 24$	$0 \pm 3$	$0.1 \pm 0.6$	$0 \pm 0.006$

Wartość delty można przyjąć zerową ze względu na niepewności kilkukrotnie większe o estymowanych wartości. Dopiero wyniki mieszczące się w ramach niepewności otrzymujemy dla ostatniego okresu - ze względu na dużą liczbę danych.

### 4.3 Wyniki modelu



Rysunek 5: Wykres dla modelu SIRD z danymi wejściowymi dla każdego z 4rech okresów

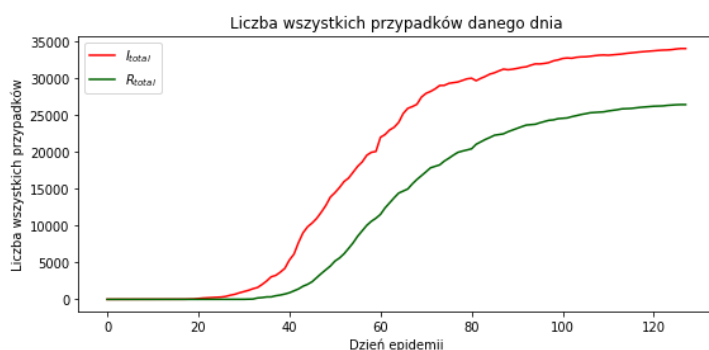


Rysunek 6: Wykres dla czterech modeli SIRD z danymi wejściowymi z okresów 1,2,3 w zestawieniu z danymi rzeczywistymi

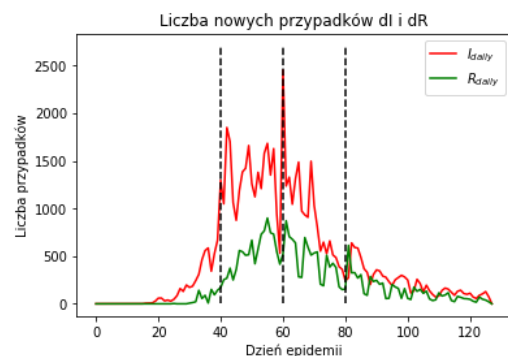
Nawet mimo najlepszej dokładności parametrów ze wszystkich okresów, wykorzystanie parametrów obliczonych na podstawie danych z całego okresu daje słabe dopasowanie do krzywej z danych rzeczywistych.

## 5 Belgia

W przypadku Belgii użyto modelu SIR oraz rozpatrywano trzy punkty jako początek: dzień 40, 60, 80.



Rysunek 7: Wykres liczby I oraz R



Rysunek 8: Wykres wartości dI i dR

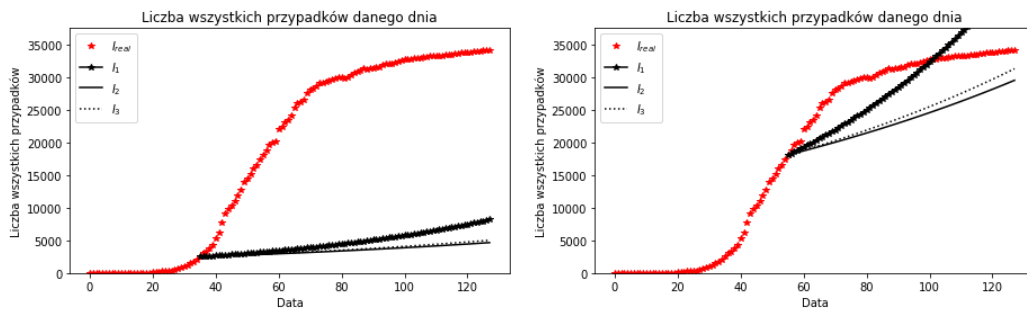
Dni początkowe wybrano z racji na różne dynamiki przyrostów liczby zarażonych oraz wyzdrowiających.

Wartości parametrów dla poszczególnych dni jako punktów wyjściowy, gdzie dla każdego dnia liczono odpowiednio średnią z trzech dni (-1, 0, 1).

Dzień:	40	60	80
$\beta$	$0 \pm 0.1$	$0.01 \pm 0.01$	$0.008 \pm 0.004$
$\gamma$	$0 \pm 0.0003$	$0 \pm 0.004$	$0 \pm 0.004$



Rysunek 9: Wykres dla modelu SIR z danymi wejściowymi odpowiednio dla dnia 40,60,80



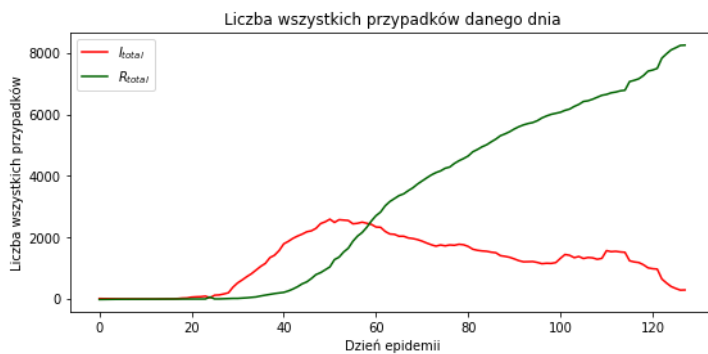




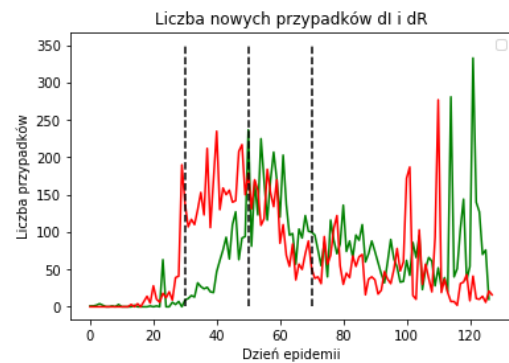
Rysunek 10: Wykres dla trach modeli SIR z danymi wejściowymi z dnia 40,60,80 w zestawieniu z danymi rzeczywistymi

## 6 Malezja

Tak samo jak w przypadku Belgi, tak w przypadku Malezji użyto modelu SIR oraz rozpatrywano cały okres epidemii bez dzielenia na podokresy.



Rysunek 11: Wykres dla I oraz R



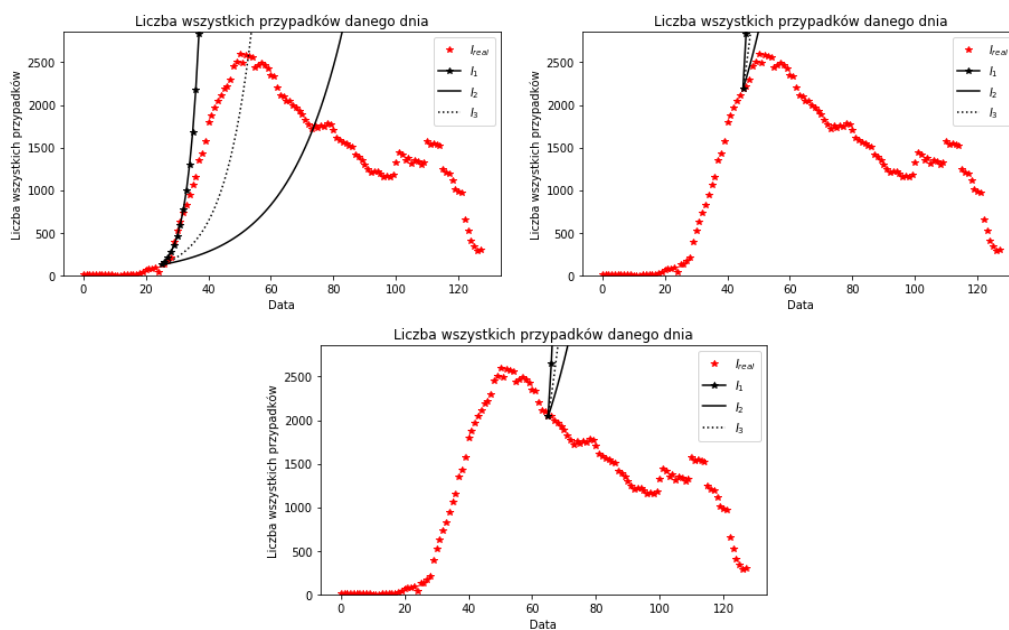
Rysunek 12: Wykres wartości dI i dR

Wartości parametrów dla poszczególnych dni jako punktów wyjściowych:

Dzień:	30	50	70
$\beta$	$0.3 \pm 0.5$	$0.059 \pm 0.004$	$0.11 \pm 0.02$
$\gamma$	$0 \pm 0.005$	$0.001 \pm 0.001$	$0 \pm 0.02$



Rysunek 13: Wykres dla modelu SIR z danymi wejściowymi odpowiednio dla dnia 30,50,70



Rysunek 14: Wykres dla trach modeli SIR z danymi wejściowymi z dnia 30,50,70 w zestawieniu z danymi rzeczywistymi

## 7 Wnioski

Zarówno model SIR jak i SIRD uzależnione są od danych wejściowych oraz mają sens tylko w momencie wzrostu liczby zachorowań. Jak ma to miejsce dla Malesji (30 dzień) albo Belgii (80 dzień). Przy korzystaniu z liczby

nowych zarażonych, wyzdrowiałych dziennie do obliczenia parametrów ma to tylko sens w fazie wzrostu - ponieważ przyjmując całą populację jako podatną model będzie dążył aż do "zarażenia wszystkich" - liczba nowych przypadków zarażeń będzie zazwyczaj większa niż wyzdrowień - zarejestrowane wyzdrowienia i tak najpierw muszą być zarejestrowanymi zarażeniami, więc  $dI \geq dR$ .

W przypadku Polski żaden model nie oddawał poprawnie wartości - zapewne z powodu dość radykalnych kroków, małej liczby testów, a co za tym idzie zaniżanej liczby nowych zarażonych. Cały czas trzeba też pamiętać że badamy liczbę zarejestrowanych przypadków a ich rzeczywista liczba może być większa - co przy założeniach iż  $N =$  całej populacji prowadzi do przekłamać i wzrostu liczby zarażeń w przyszłości aż osiągnie maksimum (które już mogło już minąć).

## Literatura

- [1] COVID-19 Coronavirus Pandemic Data  
<https://www.worldometers.info/coronavirus/>
- [2] Koronawirus - obostrzenia w Polsce. Etapy znoszenia ograniczeń  
<https://www.medonet.pl/koronawirus-pytania-i-odpowiedzi/sars-cov-2,koronawirus---obostrzenia-w-polsce--etapy-znoszenia-ograniczen--aktualne-dane-,artykul,98382723.html>
- [3] Tomas Pueyo *Coronavirus: Why You Must Act Now*  
<https://medium.com/@tomaspueyo/coronavirus-act-today-or-people-will-die-f4d3d9cd99ca>
- [4] COVID-19 Portal parameter estimates  
[https://github.com/midas-network/COVID-19/tree/master/parameter\\_estimates/2019\\_novel\\_coronavirus](https://github.com/midas-network/COVID-19/tree/master/parameter_estimates/2019_novel_coronavirus)
- [5] COVID-19 dynamics with SIR model  
<https://www.lewuathe.com/covid-19-dynamics-with-sir-model.html>