Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Testowanie hipotez statystycznych

Marcelina Kosiorowska 268772
Elżbieta Szopka 268741

Kurs: Statystyka stosowana

Prowadząca: Dr inż. Aleksandra Grzesiek

Data: 23.06.2023

Spis treści

1. Wstęp 2
1.1. Definicje 2
1.2. Wzory 2
2. Zadanie 1. 4
2.1. Wyniki 4
2.2. Wizualizacja 5
2.3. Wnioski 6
3. Zadanie 2. 7
3.1. Wyniki 7
3.2. Wizualizacja 8
3.3. Wnioski 9
4. Zadanie 3. 10
4.1. Błąd I rodzaju 10
4.1.1. Wyniki dla zadania 1. 10
4.1.2. Wyniki dla zadania 2. 10
4.1.3. Wizualizacje wartości błędów na wykresach pudełkowych dla zadania 1 10
4.1.4. Wizualizacje wartości błędów na wykresach pudełkowych dla zadania 2 12
4.1.5. Wnioski 13
4.2. Błąd II rodzaju 13
4.2.1. Wyniki dla zadania 1. 13
4.2.2. Wyniki dla zadania 2. 14
4.2.3. Wnioski 14
4.3. Moc testu 14
4.3.1. Wyniki dla zadania 1. 14
4.3.2. Wyniki dla zadania 2. 14

1. Wstęp

1.1. Definicje

Na początek przedstawimy definicje terminów, które będą użyte w naszym raporcie.

— **Test statystyczny** - procedura wykorzystywana w statystyce w celu oceny hipotez na podstawie danych próbkowych,
— **Hipoteza zerowa** H_0 - założenie, które mówi o braku zależności w badanej grupie. W teście statystycznym szukamy podstaw do odrzucenia tej hipotezy,
— **Hipoteza alternatywna** H_1 - stwierdzenie, które zakłada istnienie zależności w badanej grupie. Jest przeciwstawiana hipotezie zerowej podczas testu statystycznego,
— **Statystyka testowa** - funkcja próby losowej, której wartość empiryczna, policzona na podstawie próby losowej, pozwala na podjęcie decyzji, czy przyjąć, czy też odrzucić hipotezę H_0.
— **Moc testu** - prawdopodobieństwo odrzucenia (fałszywej) hipotezy zerowej i przyjęcia (prawdziwej) hipotezy alternatywnej, dla zadanej alternatywnej wartości parametru,
— **Błąd I rodzaju** - odrzucenie hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa,
— **Błąd II rodzaju** - odrzucenie hipotezy alternatywnej, gdy prawdziwa jest zadana alternatywna wartość parametru,
— **P-wartość** - najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej,
— **Obszar krytyczny** C - zbiór wartości statystyki testowej prowadzącej do odrzucenia hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej.

1.2. Wzory

Pierwszym etapem w zadaniach pierwszym oraz drugim jest wyznaczenie wartości statystyki testowej Z (która jest z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$). W przypadku zadania 1, owa statystyka wyznaczana jest poprzez następujący wzór:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{1}$$

gdzie:
- $\bar{X}$ to średnia próbkowa,
- μ to średnia hipotetyczna (teoretyczna),
- σ to odchylenie standardowe badanej próby,
- n to długość badanej próby.

Natomiast w zadaniu 2 w miejsce statystyki Z przyjmujemy statystykę χ (która jest z rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody), wyrażającą się wzorem:

$$\chi = \frac{(n-1) \cdot Var(\bar{X})}{\sigma^2} \tag{2}$$

gdzie:
- $\bar{X}$ to średnia próbkowa,
- $Var(\bar{X})$ to wariancja z proby,
- σ^2 to wariancja hipotetyczna (teoretyczna),
- n to długość próby.

W zadaniu 1 będziemy również wyznaczać obszary krytyczne C, dla których wzory będą różne w trzech przypadkach zależności z hipotezą alternatywną.

Używane wzory przedstawia poniższa tabela (3):

Zależność hipotezy alternatywnej z hipotezą zerową	**Wzór na zbiór krytyczny**
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$	$C = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$	$C = (z_{1-\alpha}, \infty)$
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$	$C = (-\infty, -z_{1-\alpha})$

gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $z_{1-\alpha}$ to kwantyle odpowiednio rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$ i $1-\alpha$ rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

Zaś w zadaniu 2 obszary krytyczne obliczamy ze wzorów (4):

Zależność hipotezy alternatywnej z hipotezą zerową	**Wzór na zbiór krytyczny**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$C = (-\infty, -\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$C = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$C = (-\infty, \chi^2_{\alpha})$

W obydwu zadaniach będziemy także korzystać z wzorów na p-wartości. W 1 zadaniu p-wartośc liczymy następująco (5):

Zależność hipotezy alternatywnej z hipotezą zerową	**Wzór na p-wartość**
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$	p-wartość $= 2P_{H_0}(Z > \lvert z \rvert)) = 2 - 2F_Z(\lvert z \rvert)$
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$	p-wartość $= 1 - P_{H_0}(Z \leqslant z)) = 1 - F_Z(z)$
$H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$	p-wartość $= P_{H_0}(Z \leqslant z)) = F_Z(z)$

Zaś w zadaniu 2 korzystać będziemy ze wzorów (6):

Zależność hipotezy alternatywnej z hipotezą zerową	**Wzór na p-wartość**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	p-wartość $= 2\min(P_{H_0}(\chi^2 > \lvert \chi \rvert))$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	p-wartość $= 1 - P_{H_0}(\chi^2 \leqslant \chi)) = 1 - F_{\chi^2}(\chi)$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	p-wartość $= P_{H_0}(\chi^2 \leqslant \chi)) = F_{\chi^2}(\chi)$

2. Zadanie 1.

W tym zadaniu będziemy badać hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:
1. $H_1 : \mu \neq 1.5$,
2. $H_1 : \mu > 1.5$,
3. $H_1 : \mu < 1.5$.
Dane, które będziemy badać pochodzą z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ i o znanym odchyleniu standardowym $\sigma = 0.2$. Aby otrzymać pożądane wyniki wyznaczymy wartość statystyki testowej Z, określimy i narysujemy obszary krytyczne oraz obliczymy p-wartości.

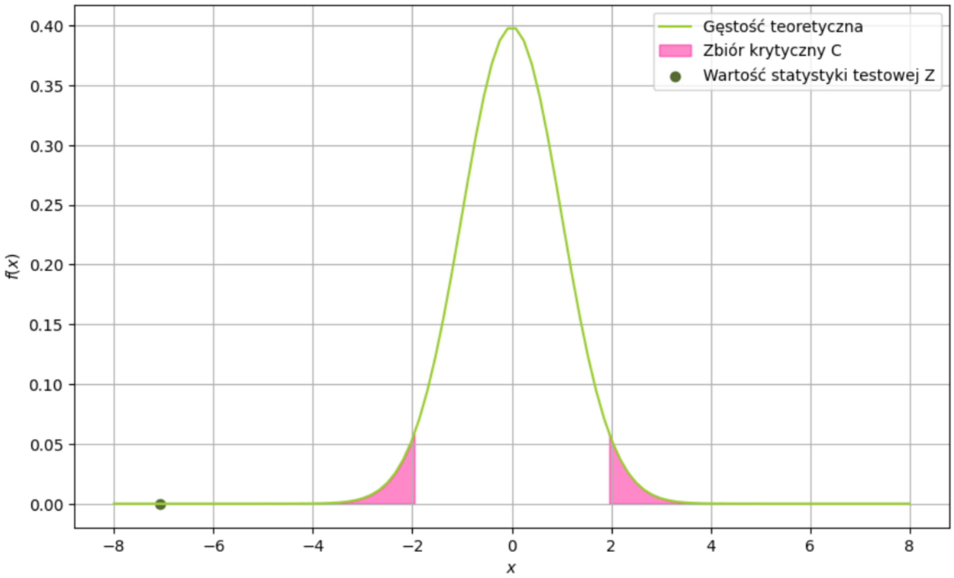
2.1. Wyniki

Używając języka Python zaimportowałyśmy dane oraz obliczyłyśmy $\bar{X} = 1.455$. Podstawiając wyznaczoną wartość $\bar{X}$ oraz znane wartości μ i σ do wzoru (1) otrzymałyśmy wartość statystyki $Z = -7.078$. Kolejnym etapem jest wyznaczenie obszarów krytycznych dla trzech hipotez alternatywnych używając wzorów podanych w tabeli (3). Badanie przeprowadziłyśmy dla trzech różnych poziomów istotności. Wyniki naszych obliczeń przedstawiłyśmy w tabeli.

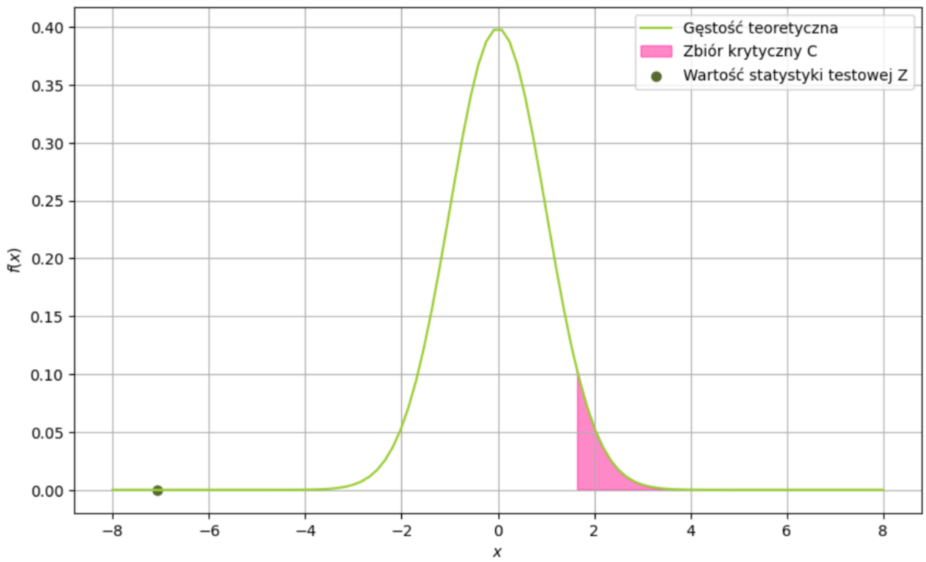
Poziom istotności testu	**Hipoteza alternatywna**	**Obszar krytyczny**	**p-wartość**
$\alpha = 0.05$	$\mu \neq 1.5$	$(-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$	$1.902 \cdot 10^{-12}$
	$\mu > 1.5$	$(1.64, \infty)$	1
	$\mu < 1.5$	$(-\infty, -1.64)$	$9.512 \cdot 10^{-12}$
$\alpha = 0.01$	$\mu \neq 1.5$	$(-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty)$	$1.902 \cdot 10^{-12}$
	$\mu > 1.5$	$(2.33, \infty)$	1
	$\mu < 1.5$	$(-\infty, -2.33)$	$9.512 \cdot 10^{-12}$
$\alpha = 0.1$	$\mu \neq 1.5$	$(-\infty, -1.64) \cup (1.64, \infty)$	$1.902 \cdot 10^{-12}$
	$\mu > 1.5$	$(1.28, \infty)$	1
	$\mu < 1.5$	$(-\infty, -1.28)$	$9.512 \cdot 10^{-12}$

2.2. Wizualizacja

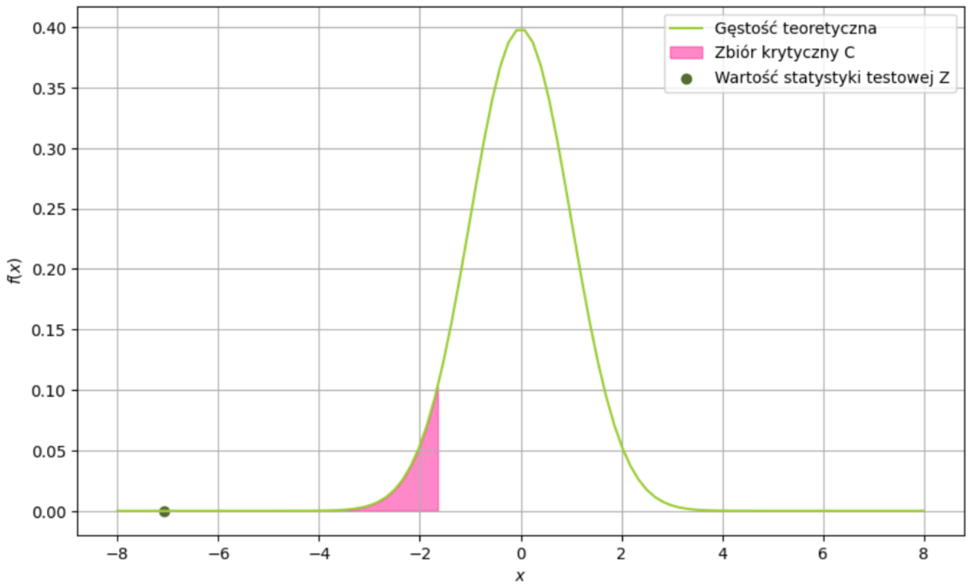
Dla każdej z trzech hipotez alternatywnych wykonałyśmy wykresy gęstości standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$ wraz z zaznaczonymi obszarami krytycznymi oraz wartością statystyki testowej Z.



Rysunek 1: Wykres dla $H_1 : \mu \neq 1.5$



Rysunek 2: Wykres dla $H_1 : \mu > 1.5$



Rysunek 3: Wykres dla $H_1 : \mu < 1.5$

2.3. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników, możemy stwierdzić, że odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ na korzyść hipotez alternatywnych $H_1 : \mu \neq 1.5$ oraz $H_1 : \mu < 1.5$, ponieważ dla nich statystyka testowa Z znajdowała się w obszarach krytycznych. W przypadku drugiej hipotezy alternatywnej $H_1 : \mu > 1.5$, statystyka testowa jest poza tym obszarem, co oznacza, że nie ma podstawy, aby odrzucić hipotezę zerową. Wynika z tego, że badana próba pochodzi z rozkładu normalnego o parametrze średniej mniejszej od 1.5. P-wartości w przypadkach $H_1 : \mu \neq 1.5$ oraz $H_1 : \mu < 1.5$ są bardzo małe, co również oznacza, że istnieje bardzo małe prawdopodobieństwo potwierdzenia hipotezy zerowej.

Zwiększenie poziomu istotności α spowoduje zmniejszenie przedziałów ufności, a co za tym idzie zwiększa się prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej, ale zmniejsza prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej.
Zmniejszenie poziomu istotności α sprawia, że przedział ufności zwiększa się, co spowoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej, lecz zwiększy prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. Pociąga to za sobą zmniejszenie mocy przeprowadzanego testu.

3. Zadanie 2.

W tym zadaniu będziemy badać hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ przeciwko trzem hipotezom alternatywnym:
1. $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$,
2. $H_1 : \sigma^2 > 1.5$,
3. $H_1 : \sigma^2 < 1.5$.
Dane, które będziemy badać pochodzą z rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody. Aby otrzymać pożądane wyniki wyznaczymy wartość statystyki testowej χ, określimy i narysujemy obszary krytyczne oraz obliczymy p-wartości.

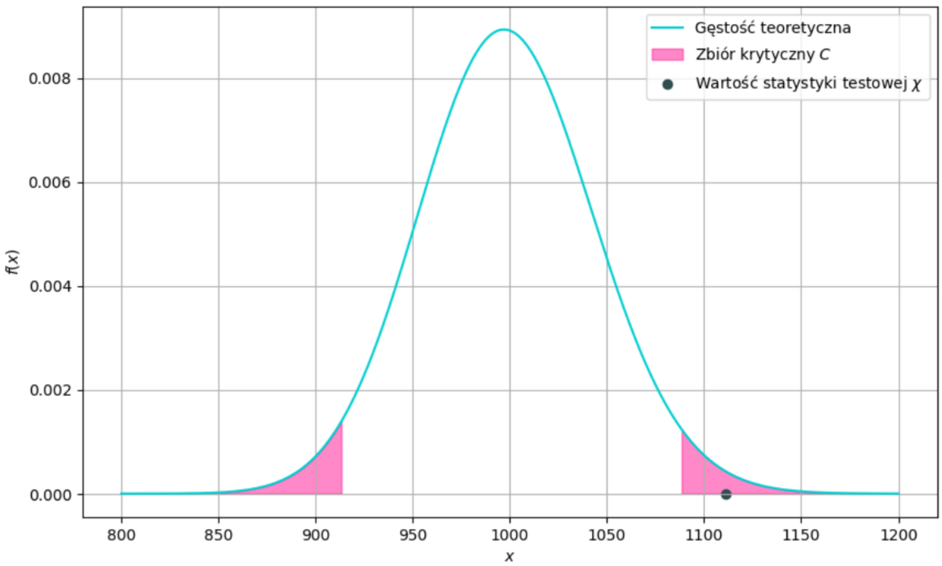
3.1. Wyniki

Po zaimportowaniu danych obliczyłyśmy $Var(\bar{X}) = 1.668$. Podstawiając wyznaczoną wartość $Var(\bar{X})$ oraz znaną wartość σ do wzoru (2) otrzymałyśmy wartość statystyki $\chi = 1110.968$.
Kolejnym etapem jest wyznaczenie obszarów krytycznych dla trzech hipotez alternatywnych używając wzorów podanych w tabeli (4). Badanie przeprowadziłyśmy dla trzech różnych poziomów istotności. Wyniki naszych obliczeń przedstawiłyśmy w tabeli.

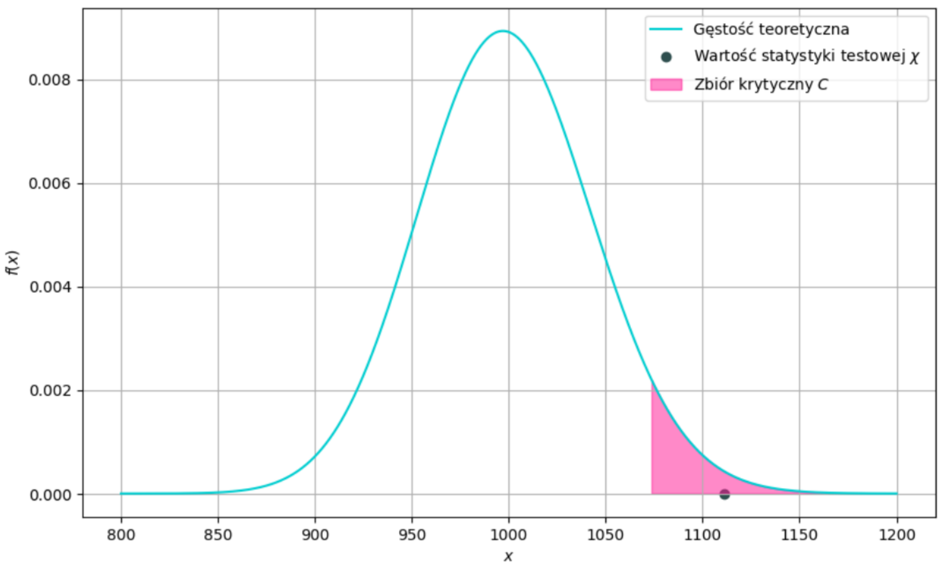
Poziom istotności testu	**Hipoteza alternatywna**	**Obszar krytyczny**	**p-wartość**
$\alpha = 0.05$	$\sigma^2 \neq 1.5$	$(-\infty, 913.3) \cup (1088.5, -\infty)$	0.015
	$\sigma^2 > 1.5$	$(1073.6 - \infty)$	0.0075
	$\sigma^2 < 1.5$	$(-\infty, 926.6)$	0.99
$\alpha = 0.01$	$\sigma^2 \neq 1.5$	$(-\infty, 887.6) \cup (1117.9 - \infty)$	0.015
	$\sigma^2 > 1.5$	$(1106.0 - \infty)$	0.0075
	$\sigma^2 < 1.5$	$(-\infty, 898.0)$	0.99
$\alpha = 0.1$	$\sigma^2 \neq 1.5$	$(-\infty, 926.7) \cup (1073.7, -\infty)$	0.015
	$\sigma^2 > 1.5$	$(1056.7 - \infty)$	0.0075
	$\sigma^2 < 1.5$	$(-\infty, 942.2)$	0.99

3.2. Wizualizacja

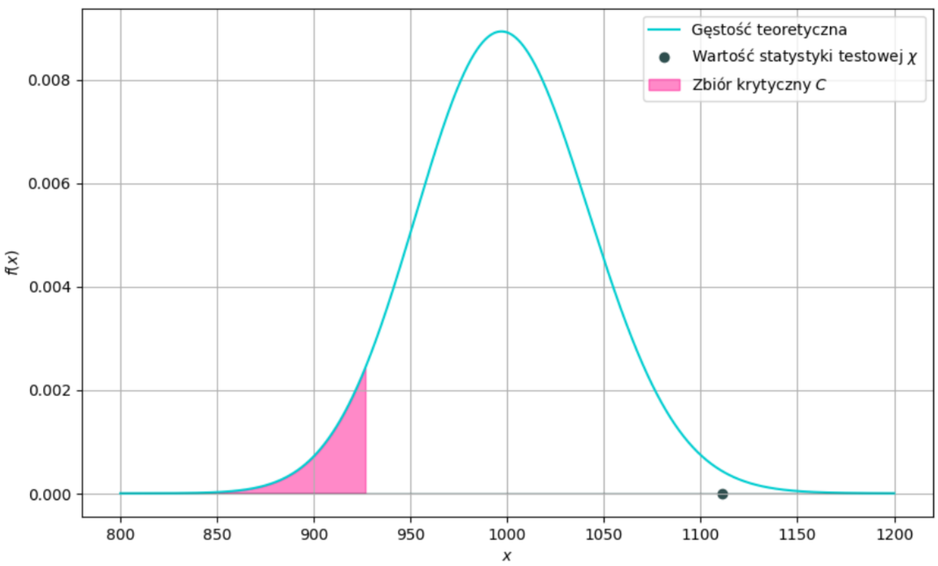
Analogicznie jak w zadaniu 1, dla każdej z trzech hipotez alternatywnych wykonałyśmy wykresy gęstości rozkładu χ^2 z $n-1$ stopniami swobody wraz z zaznaczonymi obszarami krytycznymi oraz wartością statystyki testowej χ.



Rysunek 4: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$



Rysunek 5: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$



Rysunek 6: Wykres dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

3.3. Wnioski

Na podstawie obliczeń wywnioskowałyśmy, że hipotezę zerową $H : \sigma^2 = 1.5$ odrzucamy na rzecz hipotez alternatywnych $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$ i $H_1 : \sigma^2 > 1.5$. Statystyka testowa χ znajduje się w obszarach krytycznych dla tych hipotez alternatywnych. Dla trzeciej hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 < 1.5$ statystyka testowa znajduje się poza tym obszarem, co sugeruje brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Możemy również zauważyć, że przy zwiększeniu poziomu istotności, przedziały ufności zmniejszają się, co zwiększa prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej, ale jednocześnie zmniejsza prawdopodobieństwo nieodrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. Z kolei, jeśli zmniejszymy poziom istotności, to przedziały ufności zwiększą się, co zmniejszy prawdopodobieństwo przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej, ale jednocześnie zwiększy prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy zerowej. To z kolei prowadzi do zmniejszenia mocy testu.

4. Zadanie 3.

Celem tego zadania jest wyznaczenie prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rzędu dla hipotez podanych w zadaniach 1 oraz 2. Będziemy również sprawdzać moc testów.

4.1. Błąd I rodzaju

Do wyznaczenia błędu I rodzaju wysymulowałyśmy prostą próbę rozkładu normalnego o parametrach $\mu = 1.5$ oraz $\sigma^2 = 0.2$. Następnie sprawdziłyśmy ile razy hipoteza zerowa została odrzucona.

4.1.1. Wyniki dla zadania 1.

W poniższej tabeli przedstawiłyśmy wyniki wyznaczone symulacyjnie w języku Python dla trzech różnych poziomów istotności α:

	$H_1 : \mu \neq 1.5$	$H_1 : \mu > 1.5$	$H_1 : \mu < 1.5$
$\alpha = 0.01$	0.013	0.009	0.006
$\alpha = 0.05$	0.054	0.043	0.049
$\alpha = 0.1$	0.107	0.113	0.111

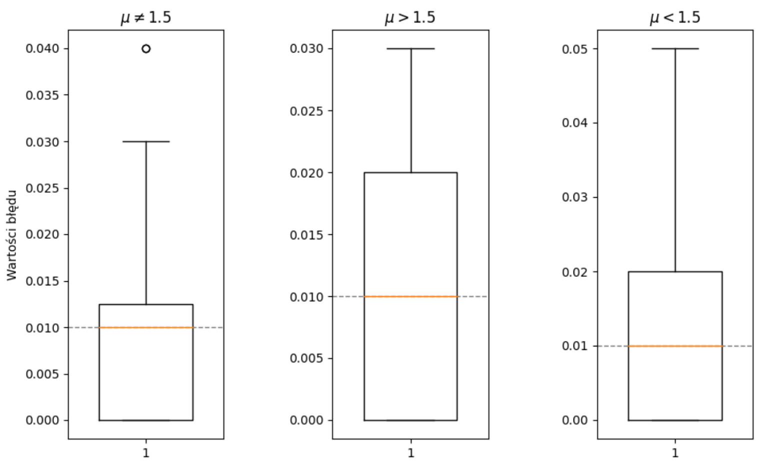
4.1.2. Wyniki dla zadania 2.

Taką samą procedurę przeprowadziłyśmy w przypadku zadania drugiego. Wartości błędów I rodzaju dla różnych poziomów istotności α przedstawiłyśmy w tabeli:

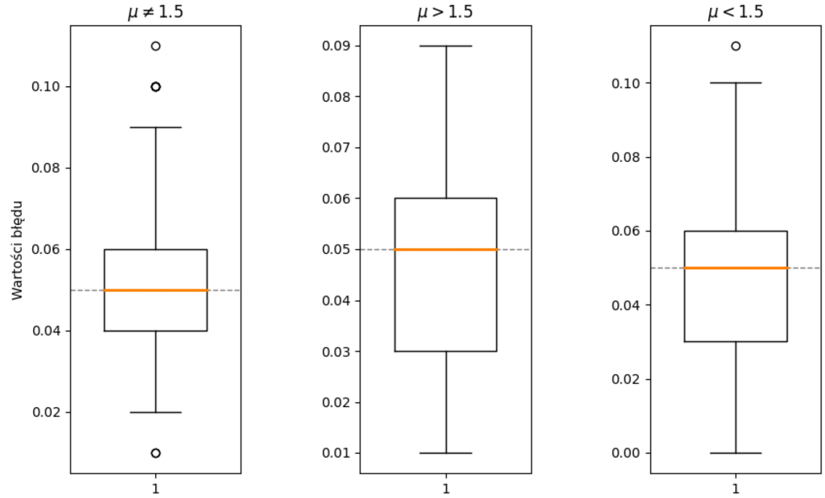
	$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	$H_1 : \sigma^2 < 1.5$
$\alpha = 0.01$	0.009	0.011	0.009
$\alpha = 0.05$	0.053	0.044	0.054
$\alpha = 0.1$	0.113	0.099	0.114

4.1.3. Wizualizacje wartości błędów na wykresach pudełkowych dla zadania 1

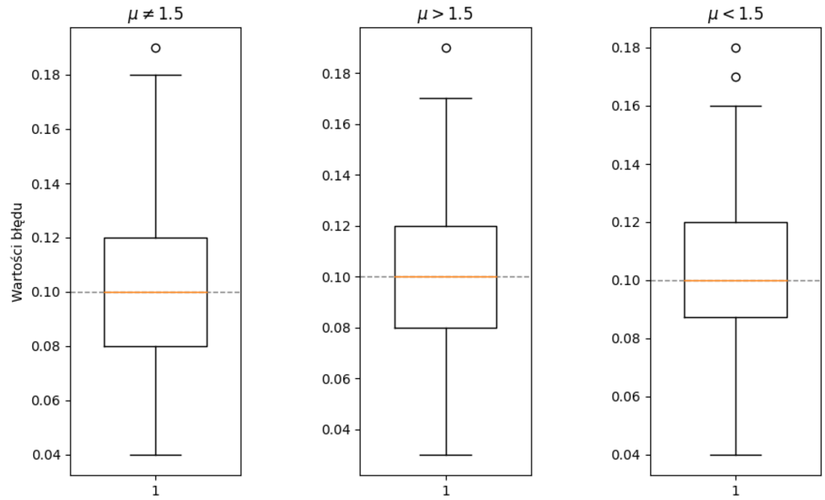
Symulacja została powtórzona 100 razy, a wartości błędów przedstawione są na poniższych wykresach, w zależności od poziomu istotności α.



Rysunek 7: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.01$



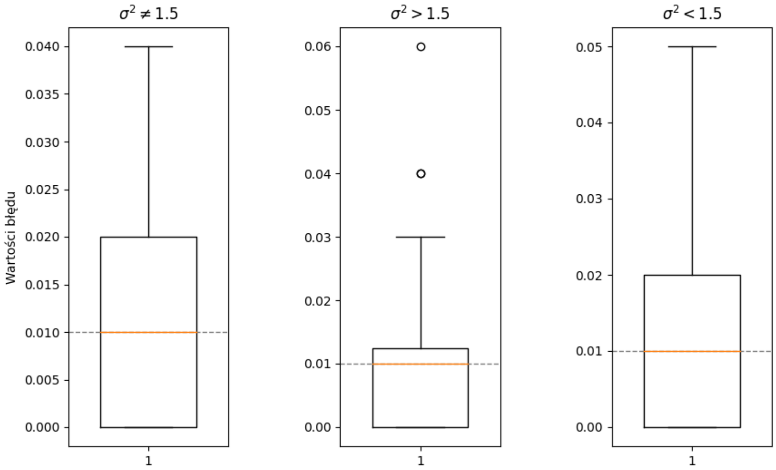
Rysunek 8: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.05$



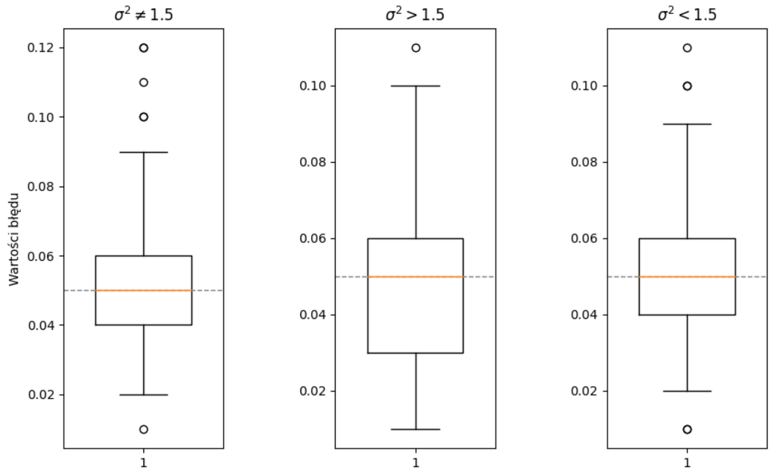
Rysunek 9: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.1$.

4.1.4. Wizualizacje wartości błędów na wykresach pudełkowych dla zadania 2

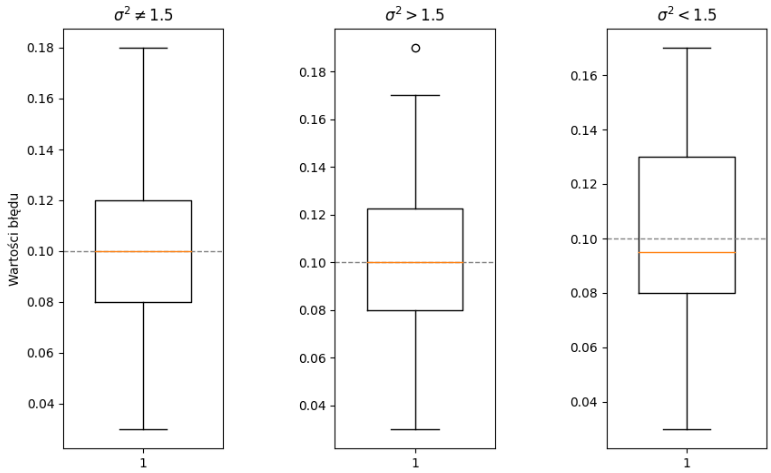
W zadaniu 2 również przeprowadziłyśmy symulację 100 razy i przedstawiłyśmy wyniki na wykresach pudełkowych.



Rysunek 10: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.01$



Rysunek 11: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.05$



Rysunek 12: Wykresy pudełkowe błędu I rodzaju dla $\alpha = 0.1$

4.1.5. Wnioski

Na podstawie wyników uzyskanych w obu zadaniach można stwierdzić, że wyznaczenie błędu pierwszego rodzaju zostało przeprowadzone poprawnie.
Wartości błędów kumulują się wokół poziomu istotności α, co sugeruje, że program działa zgodnie z oczekiwaniami i efektywnie odzwierciedla analizowane zagadnienie.

4.2. Błąd II rodzaju

Aby wyznaczyć symulacyjnie błąd II rodzaju wygenerowałyśmy prostą próbę losową z rozkładu normalnego o parametrach zgodnych z hipotezą alternatywną, ale bliskich H_0. Następnie sprawdziłyśmy ile razy hipoteza zerowa jest przyjmowana.

4.2.1. Wyniki dla zadania 1.

Przy użyciu programów napisanych w języku Python wyznaczyłyśmy wartości błędu II rodzaju dla różnych wartości μ. Wyniki przedstawiłyśmy w tabeli.

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.52$	$\mu = 1.53$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	0.002	0.104	0.687	0.675	0.111	0.005
$H_1 : \mu > 1.5$	-	-	-	0.497	0.061	0.001
$H_1 : \mu < 1.5$	0.002	0.065	0.531	-	-	-

Tabela 1: Błąd II rodzaju dla danych z zadania 1 przy $\alpha = 0.05$

4.2.2. Wyniki dla zadania 2.

Przy użyciu programów napisanych w języku Python wyznaczyłyśmy wartości błędu II rodzaju dla różnych wartości σ^2. Wyniki przedstawiłyśmy w tabeli.

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.851	0.902	0.937	0.935	0.900	0.846
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.941	0.894	0.889
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.887	0.904	0.938	-	-	-

Tabela 2: Błąd II rodzaju dla danych z zadania 2 przy $\alpha = 0.05$

4.2.3. Wnioski

Po przeanalizowaniu wyników możemy wywnioskować, że im dalej jesteśmy od hipotezy zerowej, tym mniejszy jest błąd II rodzaju, czyli prawdopodobieństwa przyjęcia fałszywej hipotezy zerowej i odrzucenia prawdziwej hipotezy alternatywnej.

4.3. Moc testu

Aby wyznaczyć moc testu użyłyśmy wzoru mówiącego, że moc testu = 1 - błąd II rodzaju. Wyniki prezentują się następująco:

4.3.1. Wyniki dla zadania 1.

	$\mu = 1.47$	$\mu = 1.48$	$\mu = 1.49$	$\mu = 1.51$	$\mu = 1.52$	$\mu = 1.53$
$H_1 : \mu \neq 1.5$	0.998	0.896	0.313	0.325	0.889	0.995
$H_1 : \mu > 1.5$	-	-	-	0.503	0.939	0.999
$H_1 : \mu < 1.5$	0.998	0.935	0.469	-	-	-

Tabela 3: Moc testu dla danych z zadania 1 przy $\alpha = 0.05$

4.3.2. Wyniki dla zadania 2.

	$\sigma^2 = 1.47$	$\sigma^2 = 1.48$	$\sigma^2 = 1.49$	$\sigma^2 = 1.51$	$\sigma^2 = 1.52$	$\sigma^2 = 1.53$
$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	0.149	0.098	0.063	0.065	0.100	0.154
$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	-	-	-	0.059	0.106	0.111
$H_1 : \sigma^2 < 1.5$	0.113	0.096	0.062	-	-	-

Tabela 4: Moc testu dla danych z zadania 2 przy $\alpha = 0.05$