Mini-Projet Mathématiques Discrètes

Partie 2

2.

Le diamètre d'un cercle de la figure peut être défini par récurrence comme une suite de terme la profondeur de récursivité correspondant à l'obtention de ce cercle :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1,n\neq 0} = 0{,}5 * u_n \end{cases}$$

Soit la suite géométrique :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n,n\neq 0} = 0{,}5^{n-1} \end{cases}$$

Le côté du plus petit carré contenant la figure équivaut à la somme des k + 1 premiers termes de la suite (u_n) en excluant le premier, avec k la profondeur de récursivité :

$k = 0$ $S_1 = 0$	$\forall k \epsilon N^*$ $S_1 = \sum_{n=1}^{k} u_n = \frac{1-0{,}5^k}{0{,}5} = 2 - 0{,}5^{k-1}$

La surface du plus petit carré contenant la figure est donc de ${S_1}^2$.

Le côté du plus petit carré contenant la figure à sa taille maximale vaut :

$$\lim_{k\to\infty} S_1 = 2 - \lim_{k\to\infty} 0{,}5^{k-1} = 2 - 0 = 2$$

La surface du plus petit carré contenant la figure à sa taille maximale est donc de $2^2 = 4$.

3.

Soient les suites (v_n) et (w_n), respectivement l'aire d'un cercle obtenu à l'étape de récursion n et le nombre de nouveaux cercles apparus à cette étape.

$$v_n = \pi \frac{{u_n}^2}{4} = \frac{\pi}{4}{u_n}^2 \qquad \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n,n\neq 0} = 2^{n-1} \end{cases}$$

La surface colorée totale vaut, pour une profondeur de récursivité k :

$k = 0$ $S_2 = 0$	$\forall k \geq 1$ $S_2 = \sum_{n=1}^{k} v_n w_n = \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1} * \frac{\pi}{4} * (0{,}5^{n-1})^2$ $= \pi \sum_{n=1}^{k} 0{,}5^{-n+3} * 0{,}5^{2n-2} = \pi \sum_{n=1}^{k} 0{,}5^{n+1}$ $= \frac{\pi}{4} * \frac{1-0{,}5^k}{0{,}5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} * 0{,}5^{k-1}$

5.

Dans ce cas, (w_n) est redéfinie ainsi :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ w_2 = 4 \\ w_{n+1, n\geq 2} = 3 * w_n \end{cases}$$

Soit la suite géométrique :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ w_{n, n\geq 2} = 4 * 3^{n-2} \end{cases}$$

La surface colorée totale vaut, pour une profondeur de récursivité k :

$$k = 0$$

$$S_3 = 0$$

$$k = 1$$

$$S_3 = \frac{\pi}{4}$$

$$\forall k \geq 2$$

$$\begin{aligned} S_2 = \sum_{n=2}^{k} v_n w_n &= \sum_{n=2}^{k} 4 * 3^{n-2} * \frac{\pi}{4} * (0{,}5^{n-1})^2 \\ &= \pi \sum_{n=2}^{k} 3^{n-2} * 0{,}5^{2n-2} = \frac{\pi}{3} \sum_{n=2}^{k} \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \\ &= \frac{\pi}{3} \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{4} * \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}{\frac{1}{4}} \\ &= \pi - \pi * \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \end{aligned}$$