

## Mini-Projet Mathématiques Discrètes

### Partie 2

2.

Le diamètre d'un cercle de la figure peut être défini par récurrence comme une suite de terme la profondeur de récursivité correspondant à l'obtention de ce cercle :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1, n \neq 0} = 0,5 * u_n \end{cases}$$

Soit la suite géométrique :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n, n \neq 0} = 0,5^{n-1} \end{cases}$$

Le côté du plus petit carré contenant la figure équivaut à la somme des  $k + 1$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  en excluant le premier, avec  $k$  la profondeur de récursivité :

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \\ S_1 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^* \\ S_1 = \sum_{n=1}^k u_n = \frac{1 - 0,5^k}{0,5} = 2 - 0,5^{k-1} \end{array}$$

La surface du plus petit carré contenant la figure est donc de  $S_1^2$ .

Le côté du plus petit carré contenant la figure à sa taille maximale vaut :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_1 = 2 - \lim_{k \rightarrow \infty} 0,5^{k-1} = 2 - 0 = 2$$

La surface du plus petit carré contenant la figure à sa taille maximale est donc de  $2^2 = 4$ .

3.

Soient les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$ , respectivement l'aire d'un cercle obtenu à l'étape de récursion  $n$  et le nombre de nouveaux cercles apparus à cette étape.

$$v_n = \pi \frac{u_n^2}{4} = \frac{\pi}{4} u_n^2 \quad \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n, n \neq 0} = 2^{n-1} \end{cases}$$

La surface colorée totale vaut, pour une profondeur de récursivité  $k$  :

$$\left. \begin{array}{l} k = 0 \\ S_2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall k \geq 1 \\ S_2 = \sum_{n=1}^k v_n w_n = \sum_{n=1}^k 2^{n-1} * \frac{\pi}{4} * (0,5^{n-1})^2 \\ = \pi \sum_{n=1}^k 0,5^{-n+3} * 0,5^{2n-2} = \pi \sum_{n=1}^k 0,5^{n+1} \\ = \frac{\pi}{4} * \frac{1 - 0,5^k}{0,5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} * 0,5^{k-1} \end{array}$$

5.

Dans ce cas,  $(w_n)$  est redéfinie ainsi :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ w_2 = 4 \\ w_{n+1}, n \geq 2 = 3 * w_n \end{cases}$$

Soit la suite géométrique :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ w_{n,n \geq 2} = 4 * 3^{n-2} \end{cases}$$

La surface colorée totale vaut, pour une profondeur de récursivité  $k$  :

$k = 0$ $S_3 = 0$  $k = 1$ $S_3 = \frac{\pi}{4}$	$\forall k \geq 2$ $S_2 = \sum_{n=2}^k v_n w_n = \sum_{n=2}^k 4 * 3^{n-2} * \frac{\pi}{4} * (0,5^{n-1})^2$ $= \pi \sum_{n=2}^k 3^{n-2} * 0,5^{2n-2}$
--	---