میان ترم اول: فصول ۱۳ و ۱۴ (۲۰ درصد) ← اواسط آبان

" " دوم: فصل ۱۵ و سه بخش فصل ۱۶ (۲۰ درصد) ← اواسط آذر

پایان ترم: فصول ۱۶ و ۱۷ (۵۰ درصد)

کوییز (۱۰ درصد) ← هر هفته   ۰۹۱۳۱۹۲ ۱۳۳۳

فصل ۱۴:

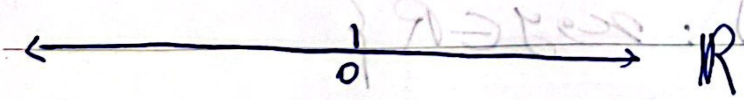
$R \times R$ A , B $A \times B = \{(x,y) : x \in A , y \in B\}$

$(x,y) \neq (y,x)$ ← زوج مرتب هایی که نمی‌تونیم جابجا کنیم

$R^2 = R \times R = \{(x,y) : x,y \in R\}$

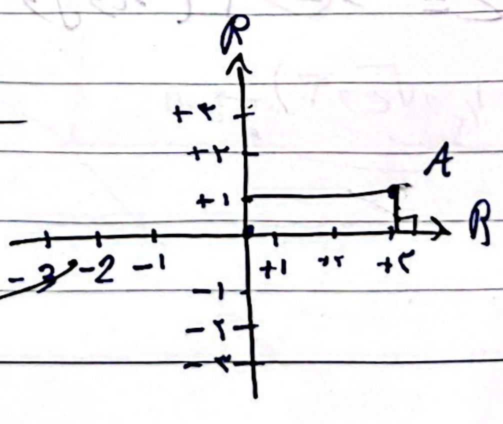
$(1/4 , \pi) \neq (\pi , 1/4)$ صفحه با Q^2 هم ارز

هم ارزی که اصلا وجود نداره فکر کنیم

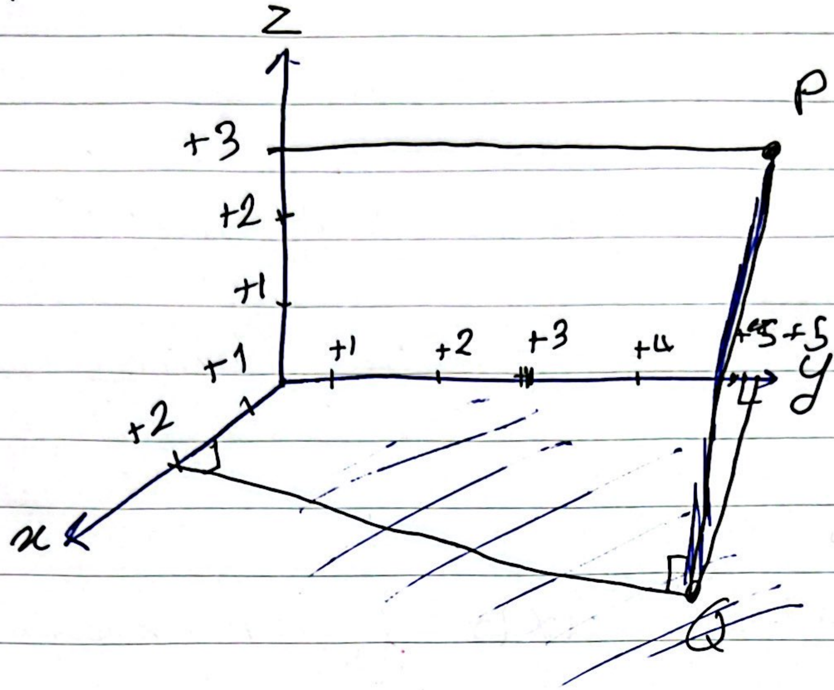


$(+3,+1)$ هم ارزی با فضای R^2

$(+1,+3)$ A هم ارز



$R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$



$Q = (+2, +5) \longrightarrow P(+2, +5, +3)$

مثال) کدام صفحه توی $\mathbb{R}^3$ با معادلات زیر نمایش داده می شود

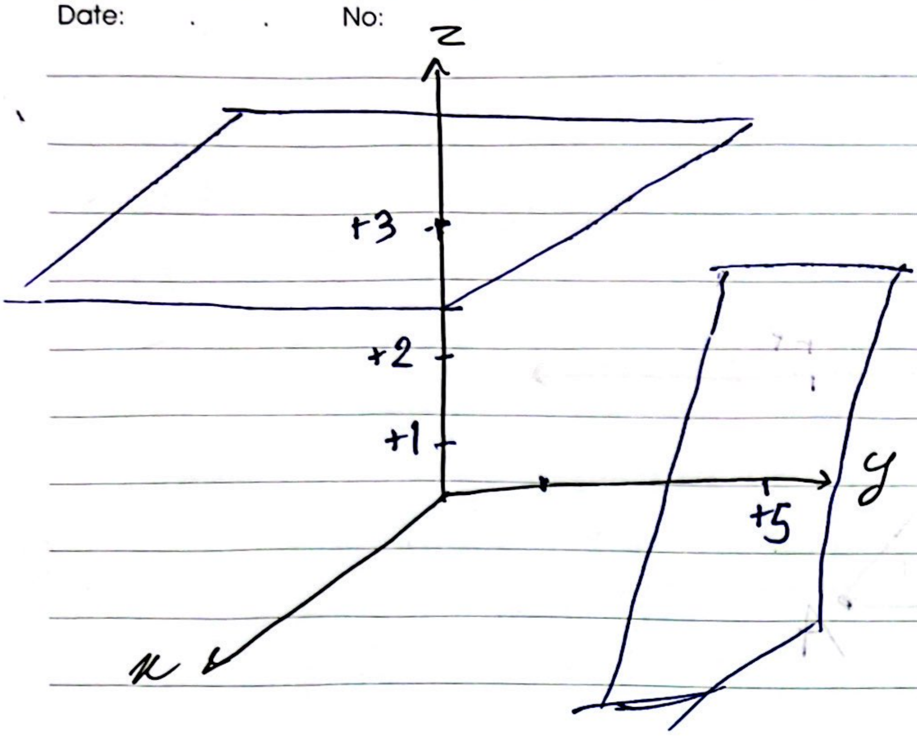
$z = \cancel{5}\,3$ و $y = 5$

$z = 3 \iff \{(x, y, 3) : x, y \in R\}$

$(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 3) \to$ [illegible]

Subject:

Date: . . No:



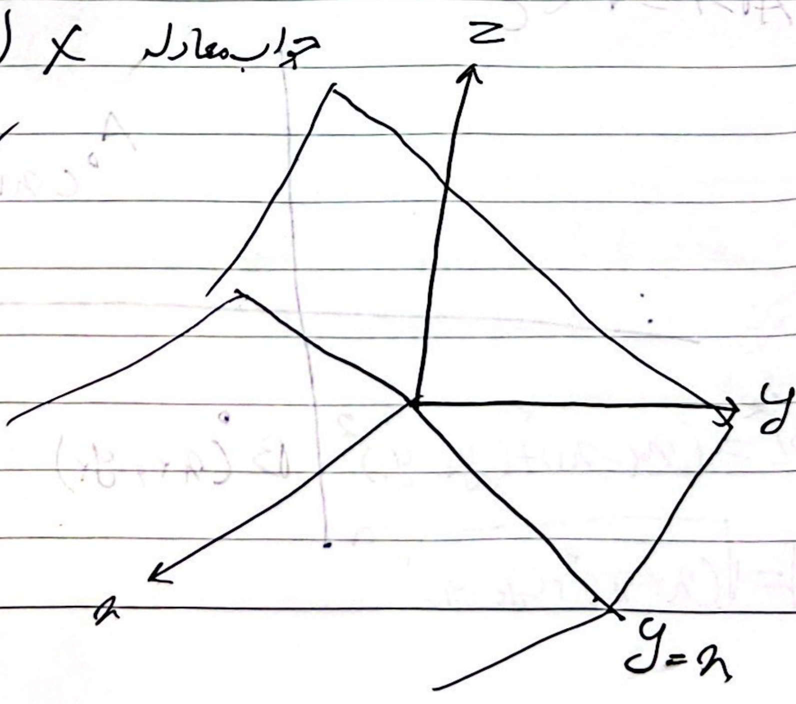
مثال) معادله $y=x$ را در R^3 تشریح و ترسیم کنید:

$\{(x,y,z) : x=y , z\in R\}$

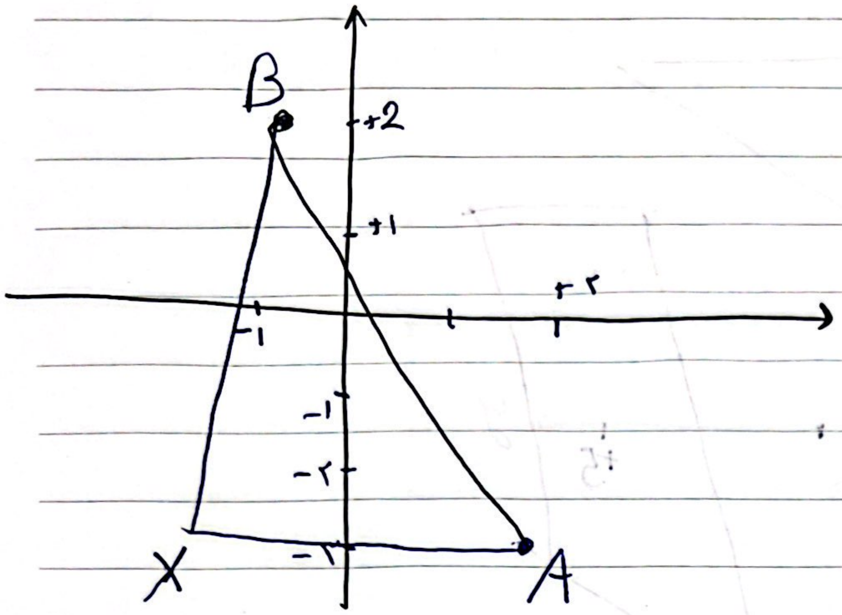
$\{(x,x,z) : x,z\in R\}$

$(٤ , \sqrt{٢} , \sqrt{٣})$ X جواب معادله

$(\pi , \pi , \sqrt{٣})$ ✓



dotnote



$$|AB|^2 = |XA|^2 + |XB|^2$$

$$|AB|^2 = 3^2 + 5^2$$

$$|AB|^2 = 34$$

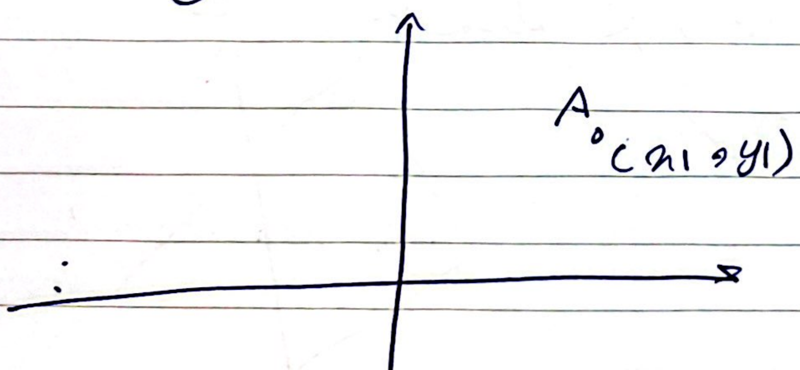
$$|AB| = \sqrt{34}$$

$x_A = +2, \quad x_X = -1$

$x_A - x_X = 2 - (-1) = 3$

$y_B - y_X = +2 - (-3) = +5$

$$|AB|^2 = (x_A - x_X)^2 + (y_B - y_X)^2$$



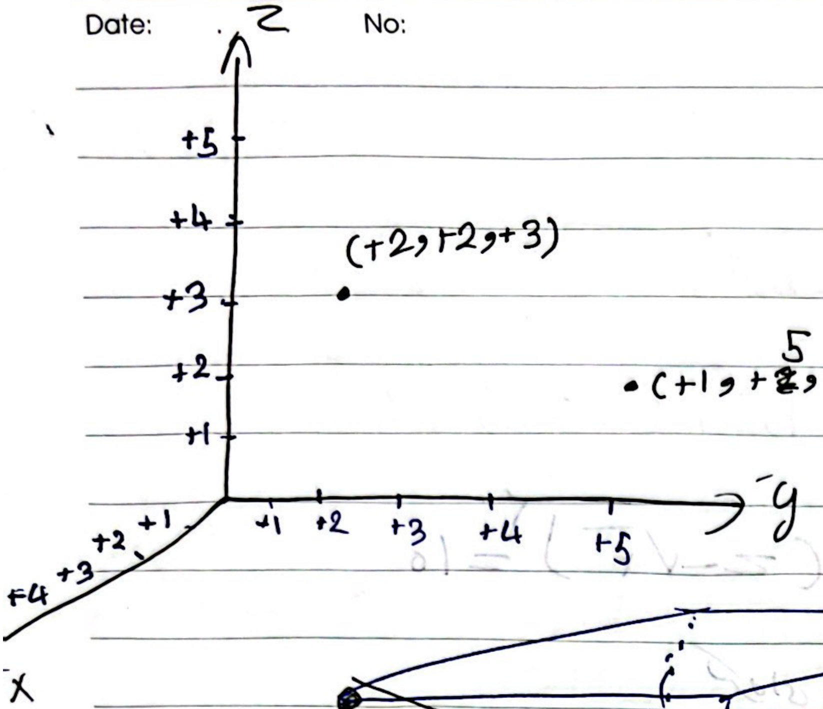
$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

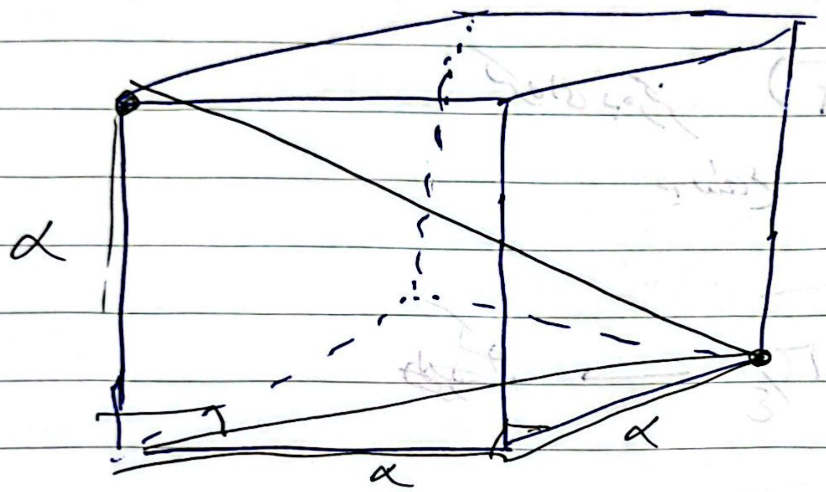
B (x_2, y_2)

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Subject:

Date: No:





$P=(x_1, y_1, z_1)$ $Q=(x_2, y_2, z_2)$

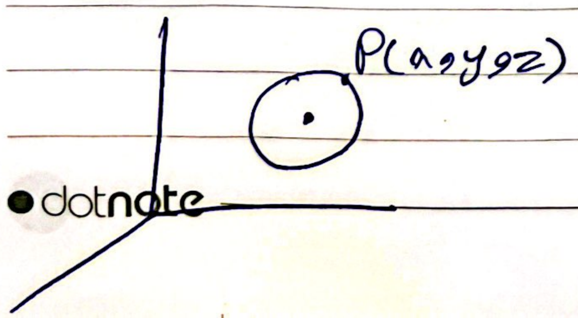
$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

فاصله در صفحه سه‌بعدی

مثال) معادله یک کره در فضا را پیدا کنید. تعریف کره: مکان هندسی تمام نقاطی به فاصله r از نقطه O از فضا

مرکز: $O=(a, b, c)$

شعاع: r



$$|PO| = r$$

$$|PO| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-\sqrt{2})^2 = 10$$

$(1, -3, \sqrt{2})$ کره‌ای به مرکز

$\sqrt{10}$ به شعاع

$x^2+y^2+z^2 = \pi/4 \longrightarrow$ ~~[illegible]~~ کره

مثال)

$$\underbrace{x^2}+y^2+z^2+\underbrace{4x}-6y+2z+6=0$$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$y^2-6y+9=(y-3)^2$

$=(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$

$z^2+2z+1=(z+1)^2$

$-14+6=0$

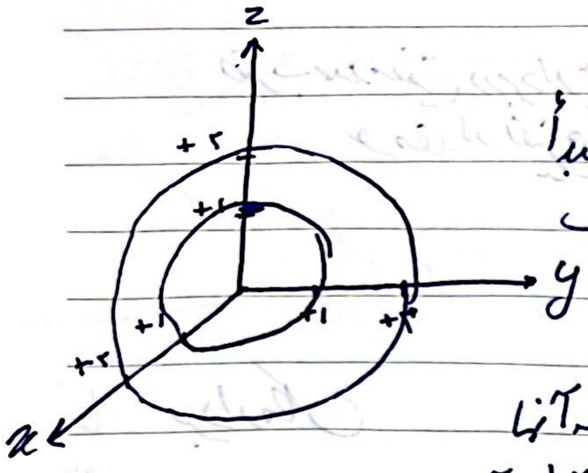
$O(-2, 3, -1)$

$r=\sqrt{8}$

Subject:

Date: . . No:

مثال) $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

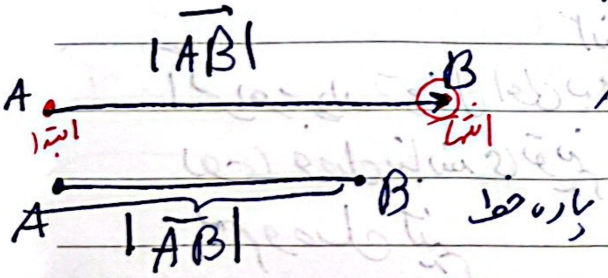


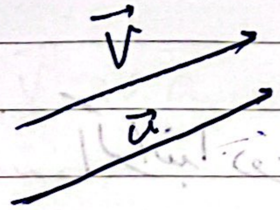
$x^2+y^2+z^2 \ge 1 \Longleftrightarrow$ تمام نقاط (x,y,z) که فاصله آنها از مبدأ مختصات بزرگتر یا مساوی ۱ است

$x^2+y^2+z^2 \le 4$

تمام نقاط (x,y,z) که فاصله آنها از مبدأ مختصات کمتر مساوی ۲ است

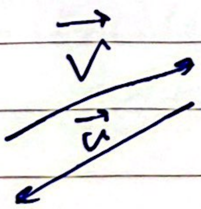
نکته: تفاوت بردار و پاره خط اینه که بردار جهت معین میده





نکته: اگر دو بردار موازی و هم جهت باشند این دو بردار با هم تفاوتی ندارد

$\vec V = \vec u$



نکته: اگر موازی باشند ولی هم جهت نباشند این دو بردار قرینه همدیگراند

$\vec V = -\vec u$

جهت
عدد

نکته: ضرب یک بردار (عدد) فقط اندازه رو تغییر میده

$\vec{V}$

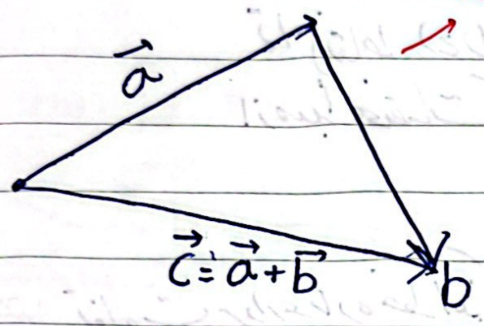
نکته: ضرب عدد منفی در بردار جهت و مقدار را تغییر می‌کنه

$3\vec{V}$:

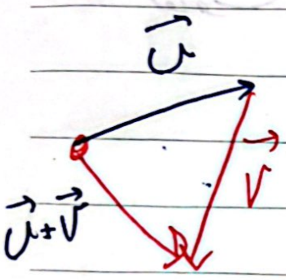
$-\frac{1}{2}\vec{V}$:

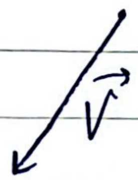
قاعده مثلث

نکته: بردار مکان

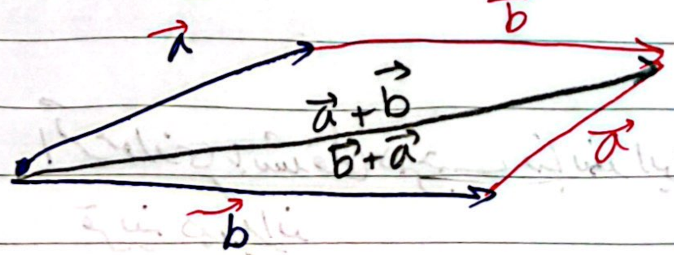


نکته: اگر دو بردار ترمینال اولی به اینیشیال دومی وصل نباشد می‌تونیم ببریم وصل کنیم





نکته: اگر ابتدا دو بردار مثل هم باشه از قاعده متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم

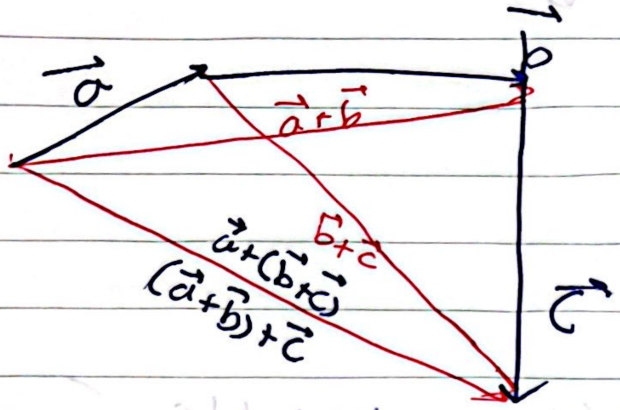


$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ⟶ قاعده جابجایی

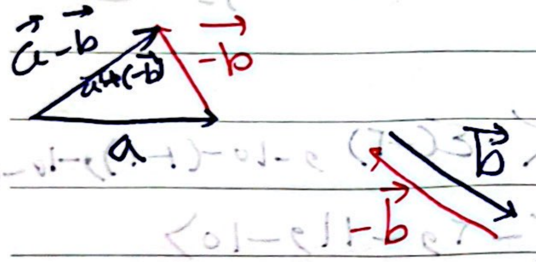
Subject:

Date: . . No:

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



Def: c is scaler , $\vec{v}$ vector

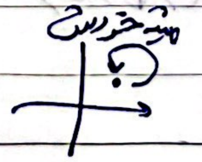
$c\vec{v}$ is a vector $|c\vec{v}| = c \cdot |\vec{v}|$

dir

direction: $\begin{cases} \text{as } \vec{v} & \text{if } c>0 \\ \text{op } \vec{v} & \text{if } c<0 \end{cases}$

جهت مخالف

$\vec{0}$ بردار

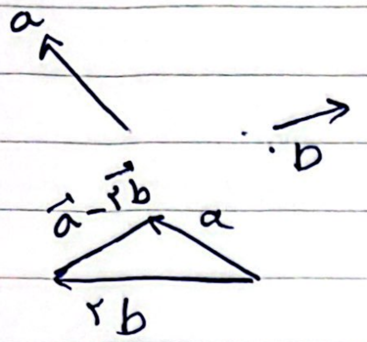


$\vec{V}, 0$

$0\vec{V}$? → بردار صفر

dotnote

مثال) $a - 2b$



نکته: یک نقطه را با پرانتز $a(2,3,5)$ مشخص می‌شود ولی بردار را با این علامت مشخص می‌کنیم $n = \langle -2, -3, 4 \rangle$

$A = (-2, +1, 0)$

$B = (-4, -10, -10)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle -4-(-2), -10-(+1), -10-(0) \rangle = \langle -2, -11, -10 \rangle$$

$$\overrightarrow{BA} = \langle +2, +11, +10 \rangle$$

$$\vec{a} = \langle x, y, z \rangle \qquad -\vec{a} = \langle -x, -y, -z \rangle$$

$$\vec{V} = \langle a, b, c \rangle \qquad \vec{U} = \langle e, f, g \rangle$$

$$\vec{V} + \vec{U} = \langle a+e, b+f, c+g \rangle$$

$$\vec{V} = \langle a, b, c \rangle \Rightarrow n\vec{V} = \langle na, nb, nc \rangle$$

n اسکالر

scaler 10 → یعنی تغییر سایز ۱۰ برابر

Subject:

Date: . . No:

$\vec{a} = \langle -2, \sqrt{2}, \sqrt{4} \rangle$

$\vec{b} = \langle \pi, \sqrt{2}, -3 \rangle$

10 .

$-\frac{1}{2}$.

$\vec{a} + \vec{b} = \langle \underbrace{-2+\pi}_{\pi - 2}, 2\sqrt{2}, -3 + \sqrt{4} \rangle$

$10\vec{a} = \langle -20, 10\sqrt{2}, 10\sqrt{4} \rangle$

$-\frac{1}{2}\vec{b} = \langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2} \rangle$

$A(x_A, y_A, z_A) \longrightarrow B = (x_B, y_B, z_B)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle \overset{a}{x_B - x_A}, \overset{b}{y_B - y_A}, \overset{c}{z_B - z_A} \rangle$$

$$|AB| = \sqrt{\underbrace{(x_B - x_A)^2}_{a} + \underbrace{(y_B - y_A)^2}_{b} + \underbrace{(z_B - z_A)^2}_{c}}$$

$\vec{V} = \langle a, b, c \rangle \quad |\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

۱۰/۱۳۰۶) (۳و۷و-۵)

الف) در صفحه xy بخواهیم فاصله شو پیدا کنیم نیاز به قدر مطلق z ⇐ $|-5|=5$

ب) در صفحه yz فاصله برابر قدر مطلق x ⇐ $|3|=3$

پ) در صفحه xz فاصله برابر قدر مطلق y ⇐ $|7|=7$

ت) محور x ← (۳و۰و۰) (۳و۷و-۵)

$$\sqrt{(3-3)^2+(7-0)^2+(-5)^2}=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$$

ث) محور y ← (۰و۷و۰)

$$\sqrt{(3-0)^2+(7-7)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

ج) z ← (۰و۰و-۵)

$$\sqrt{(3-0)^2+(7-0)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$Q=(a,b,c)$

Proj Q on $xy=(a,b,0)$

Proj Q on $y=(0,b,0)$

Subject:

Date: . . No:

20/13.1) نقطه میانی بین دو نقطه: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$\longrightarrow \left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{10+4}{2}\right) \Rightarrow (3, 2, 7)$

$P = (2, 1, 4)$ $\Longrightarrow$

$Q = (4, 3, 10)$

$r = d/2$ نصف قطر

$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}}{2} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{11}}{\cancel{2}} = \sqrt{11} \xRightarrow{\text{معادله کره}} \boxed{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11}$

$O(\overset{a}{3}, \overset{b}{2}, \overset{c}{7}) \Rightarrow \underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}_{\text{فرمول کلی}}$

$r = \sqrt{11}$

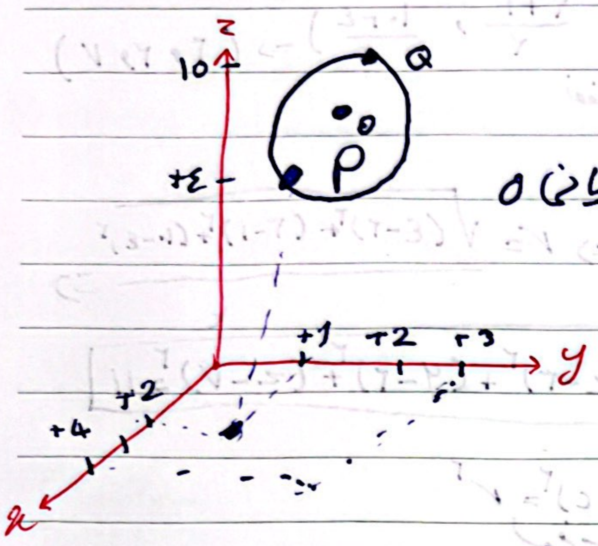
22/13.1)

اگر یکی از قطرهای کره دارای نقاط انتهایی (۲و۱و۴) و (۴و۳و۱۰) 20/13.1

معادله کره را بنویسید

$P=(2,1,4)$

$Q=(4,3,10)$



O نقطه میانی $=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$O=\left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{4+10}{2}\right)$

$O=(3,2,7)$

روش اول: $r=|OQ|$

$r=\sqrt{(4-3)^2+(3-2)^2+(10-7)^2}=\sqrt{11}$

$r=\sqrt{11}$

$O(a,b,c)$

معادله کره: $\cancel{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2} \Rightarrow \boxed{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11}$

روش دوم: $d=|PQ|$

$r=\frac{1}{2}d$

$\frac{|PQ|}{2}=r \Rightarrow \frac{\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}}{2}=r \Rightarrow r=\frac{\sqrt{44}}{2}=\frac{2\sqrt{11}}{2}$

$r=\sqrt{11}$

معادله کره: $O(a,b,c)$, r

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11$

$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11}$

~~Example~~

$$V_3 = \{ \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : a_i \in R \}$$

$$V_n = \{ a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle : a_i \in R \}$$

$\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$

خاصیت جابجایی

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \Rightarrow$ اثبات $\vec{a} + \vec{b} = \langle \vec{a_1} + \vec{b_1}, \vec{a_2} + \vec{b_2}, \vec{a_3} + \vec{b_3} \rangle$

$= \langle \vec{b_1} + \vec{a_1}, \vec{b_2} + \vec{a_2}, \vec{b_3} + \vec{a_3} \rangle$

$= \vec{b} + \vec{a}$

2) شرکت پذیری : $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{0} \in V_3 \Rightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5) $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$

6) $(c+d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$

7) $(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$

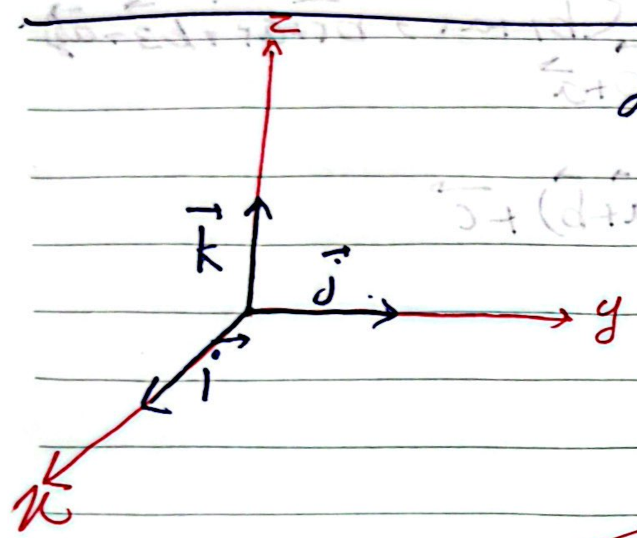
8) $1\vec{a} = \vec{a}$

V_3 has a base

$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$= \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$

$= a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle$



$\vec{a} = \langle ۲, ۳, \sqrt{۷} \rangle = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} + \sqrt{۷}\vec{k}$

Example 5/ $\vec{a} = \vec{i} + ۲\vec{j} - ۳\vec{k}$

$\vec{b} = ٤\vec{i} + ۷\vec{k}$

$\vec{a} = \langle ۱, ۲, -۳ \rangle$

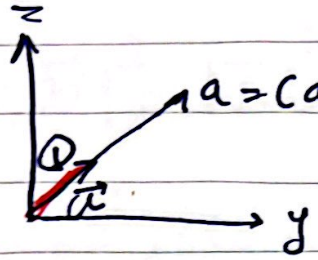
$\vec{b} = \langle ٤, ۰, ۷ \rangle$

$۲\vec{a} + ۳\vec{b} = ?$ $\langle ۲, ٤, -٦ \rangle + \langle ۱۲, ۰, ۲۱ \rangle =$

$\langle ۱٤, ٤, ۱٥ \rangle$

Subject:

Date: . . No:



$a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ بردار واحد a را بدست آورید مثال

unit vector

$|c\vec{a}| = 1$

$\Rightarrow c|\vec{a}| = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{|\vec{a}|}$

$\Rightarrow c\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\langle a_1, a_2 ...$

$= \left\langle \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right\rangle$

مثال

$\vec{a} = 2\vec{i} - j - 2k$ بردار واحد

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

$\vec{u} = \langle 2/3, -1/3, -2/3 \rangle$

$= 2/3\,\vec{i} - 1/3\,\vec{j} - 2/3\,\vec{k} \Longrightarrow$ قطعاً طولش واحده

dot Product

~~$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 \rangle$~~

$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \in \mathbb{R}$

$\langle ٢،٣،٤ \rangle \cdot \langle \sqrt{٢}، \sqrt{٤}، 2 \rangle$

$= ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٤} + ٨$

1) $a \cdot a = |a|^2$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_{١}^{٢}+a_{٢}^{٢}+a_{٣}^{٢}} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} = a_{١}a_{١}+a_{٢}a_{٢}+a_{٣}a_{٣}$

$= a_{١}^{٢}+a_{٢}^{٢}+a_{٣}^{٢}$

$= \left(\sqrt{a_{١}^{٢}+a_{٢}^{٢}+a_{٣}^{٢}}\right)^{٢}$

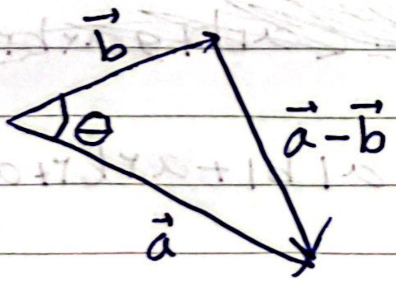
$= |\vec{a}|^2$

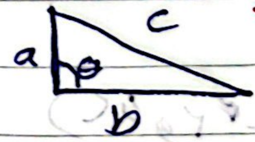
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

3) $a\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

4) $(c\vec{a})\cdot\vec{b} = c(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(c\vec{b})$

5) $\vec{0}\cdot\vec{a} = 0$





$c^{٢} = a^{٢} + b^{٢}$

$c^{٢} = a^{٢} + b^{٢} - ٢ab\cos\theta$ ($\cos 90^\circ = 0$)

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + |b|^2$$

$$= \vec{X}\cdot(\vec{a}+(-\vec{b}))$$

$$X\cdot\vec{a} + X\cdot(-\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) + (-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(-\vec{b}) + (-b\cdot a) + (-b\cdot -b)$$

$$= |a|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |b|^2$$

$$\cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - \cancel{2}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = \cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{|\vec{b}|^2} - \cancel{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{-2|a||b|\cos\theta}{-2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}$$

مثال

$\vec{a} = \langle 2, 3, 5 \rangle$

$\vec{b} = \langle 4, 1, 7 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|} = \frac{46}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{66}}$$

$a\cdot b = 8 + 3 + 35 = 46$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{46}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$\sqrt{4+9+25} \cdot \sqrt{16+1+49}$

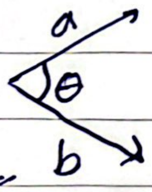
$\sqrt{38} \cdot \sqrt{66}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\,|b|\cos\theta = 0$

1) $|a| = 0$

2) $|b| = 0$

3) $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$



$0 \leq \theta \leq \pi$

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قائم هستند اگر و تنها اگر

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $\qquad$ $\vec{0}\cdot\vec{a} = 0$

$\vec{0}$ بر هر برداری عمود است

Subject:

Date: . . No:

let $|a|>0$, $|b|>0$

$0<\theta<\pi/2 \Rightarrow \cos\theta>0$

$a\cdot b=\underbrace{|a|}_{>0}\ \underbrace{|b|}_{>0}\ \underbrace{\cos\theta}_{>0}>0$

$\pi/2<\theta<\pi$

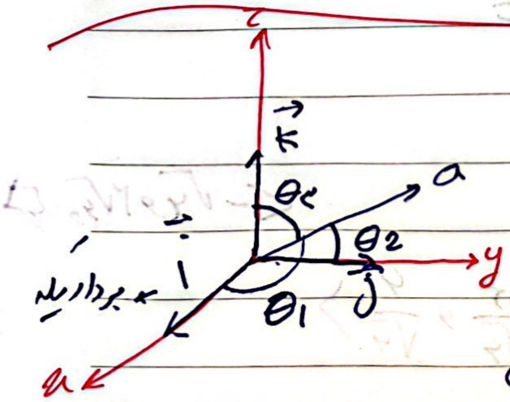
$a\cdot b=\underbrace{|a|}_{>0}\ \underbrace{|b|}_{>0}\ \underbrace{\cos\theta}_{<0}<0$

$\theta=0$ 　 a

$a\cdot b=|a||b|\cos 0=|a||b|$

~~$\theta=\pi$~~

$\theta=\pi \Rightarrow a\cdot b=|a||\vec{b}|\overbrace{\cos\pi}^{-1}\Rightarrow -|a||b|$



$\cos\theta_1=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$

$\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot(1,0,0)$

$= |a_1+0+0=a_1$

$\cos\theta_2=\dfrac{a\cdot\vec{j}}{|a||j|}=\dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$

$\cos\theta_3=\dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$

dotnote

$$\vec{u} = \left\langle \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|a|}, \frac{a_3}{|a|} \right\rangle$$

$$|u| = 1$$

$$u = \langle \cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3 \rangle$$

$$\left(\frac{a_1}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{|a|}\right)^2 = 1$$

$$= \cos^2\theta + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 =$$

$$\frac{1}{|\vec{a}|} a = \langle \cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3 \rangle$$

زوایای هادی بردار $\vec{a}$

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = |a| \langle \cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3 \rangle$$

$$\cos\theta_1 = \frac{a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = |\vec{a}| \cos\theta_1$$

$$a_2 = |\vec{a}| \cos\theta_2$$

$$a_3 = |\vec{a}| \cos\theta_3$$

24/13.2

برداری هم جهت با $\vec{a} = \langle -2, 4, 2 \rangle$ بیدا کنید به طول ۶

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \langle -2, 4, 2 \rangle =$$

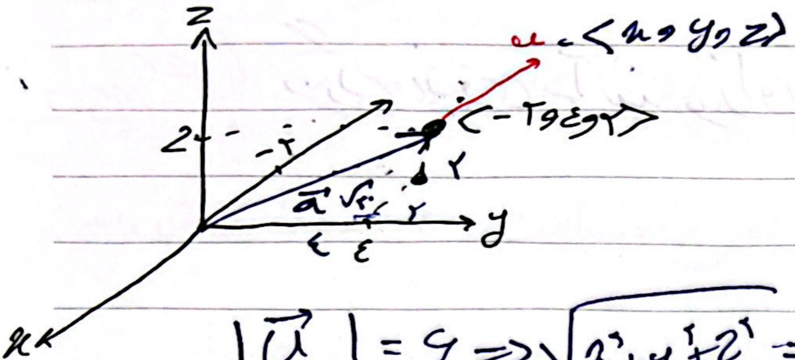
$$\Rightarrow \left\langle \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

$$\langle -\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, \sqrt{6} \rangle$$

$$6 \times \left\langle -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle = \left\langle \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

Subject:

Date: No:



روش دوم:

$$|\vec{u}| = 6 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 6 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 36$$

فیثاغورس: شیب $= \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

شیب خط جدید: $\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$\frac{z^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow x^2+y^2 = 5z^2$$

$$\Rightarrow 5z^2 + z^2 = 36 \Rightarrow 6z^2 = 36 \Rightarrow z^2 = 6$$

$$z = \sqrt{6}$$

$y = 2x$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 30 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 30 \Rightarrow 5x^2 = 30 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$y = 2\sqrt{6} \Rightarrow \vec{u} = \langle \sqrt{6}, 2\sqrt{6}, \sqrt{6} \rangle$$

روش سوم:

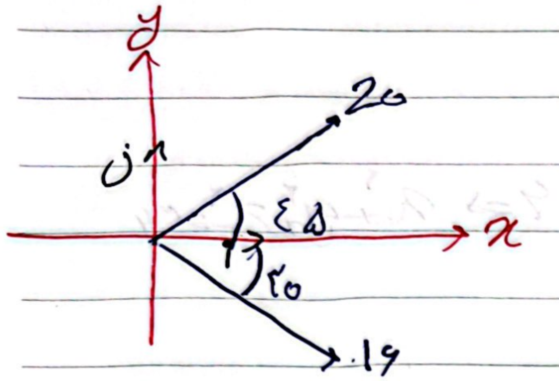
$$2\sqrt{6} \times \alpha = 6$$

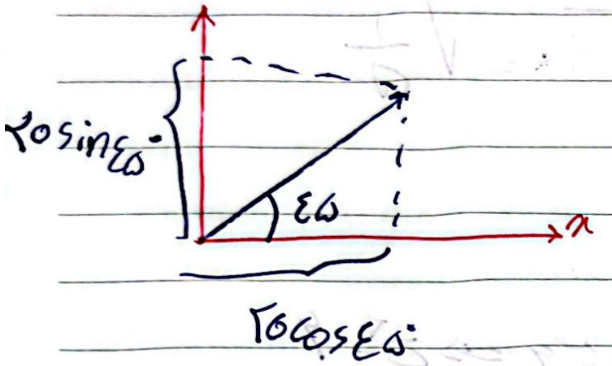
$$\Rightarrow \alpha = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

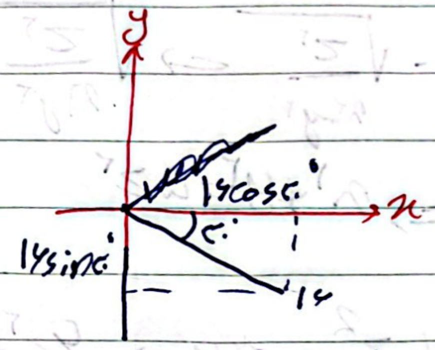
$$\frac{\sqrt{6}}{2} \times \langle -2, 4, 2 \rangle \Rightarrow$$

$$\langle \sqrt{6}, 2\sqrt{6}, \sqrt{6} \rangle$$

بزرگی نیروی برآیند و زاویه آن با جهت محور x) 26/13.2





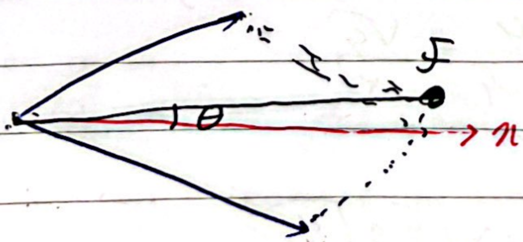


$$20\sin 45° i + 20\cos 45° j = 10\sqrt{2}\, i + 10\sqrt{2}\, j$$

$$16\cos 30° i - 16\sin 30° j = 8\sqrt{3}\, i - 8 j$$

$F =$ جمع دو بردار $\Rightarrow F = (10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}) i + (10\sqrt{2} - 8) j = 28 \ldots$

$$|F| = \sqrt{(28)^2 + (6/1)^2} = 28/7$$



$$\frac{d_j}{d_i} = \tan\theta = \frac{10\sqrt{2} - 8}{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}$$

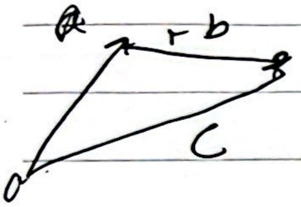
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10\sqrt{2} - 8}{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}\right) = 12$$

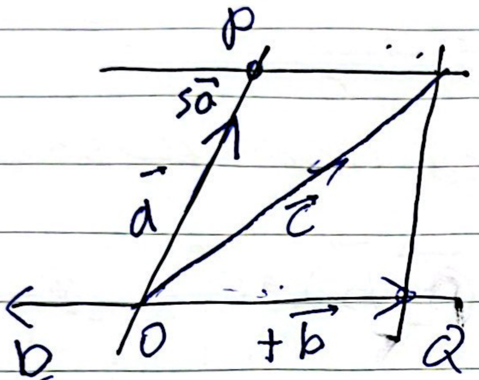
Subject:

Date: . . No:

40/13.2

فرض کنید $\vec a$ و $\vec b$ بردارهای غیرصفر که موازی نیستند و $\vec c$ برداری در صفحه باشد که a و b مشخص شده است با استدلال هندسی نشان دهید که به ازای اسکالرهایی مناسب مانند s و t می توان c را به شکل $\vec c = s\vec a + t\vec b$ نوشت سپس استدلالی براساس مؤلفه ها بیاورید.





استدلال هندسی:

جمع بردار ~~OP ... OQ = c~~ $OP + OQ = c$

$$\frac{|OP|}{|a|} = s \qquad \frac{|OQ|}{|b|} = t$$

$\Rightarrow |OP| = sa$ $\qquad c = sa + tb$

$|OQ| = tb$

استدلال با استفاده از مؤلفه ها

$a = \langle a_1, a_2 \rangle$

$b = \langle b_1, b_2 \rangle \Rightarrow sa_1 + tb_1 = c_1 \xrightarrow{\times a_2} sa_1a_2 + tb_1a_2 = c_1a_2$

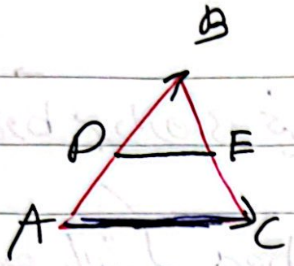
$c = \langle c_1, c_2 \rangle \qquad sa_2 + tb_2 = c_2 \xrightarrow{\times a_1} sa_2a_1 + tb_2a_1 = c_2a_1$

$$s = \frac{b_2c_1 + b_1c_2}{b_1a_1 - b_2a_2} \qquad t = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{b_1a_2 - b_2a_1}$$

dotnote

Scanned with CamScanner

45/13.2



$AB + BC = AC$

$DB + BE = DE$

$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = DE$

$\Rightarrow DE = \frac{1}{2}AC$

$DB = \frac{1}{2}AB$

$BE = \frac{1}{2}BC$

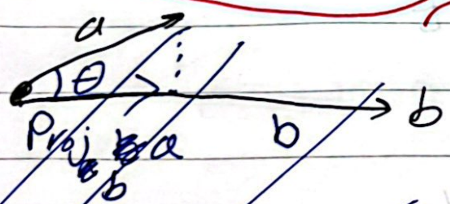
DE و AC
موازی همدیگر

the dot Poduct isnot assocrative

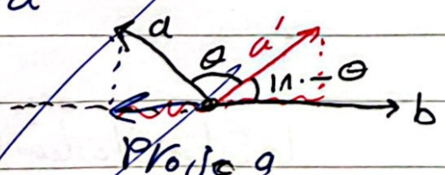
$\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\in R} \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ ضرب نقطه شرکت پذیر نیست

چون اینجا عدد ضرب اسکالر در بردار نداریم

$\vec{a}\cdot c$



$|Proj_b a| = |a|\cos\theta$



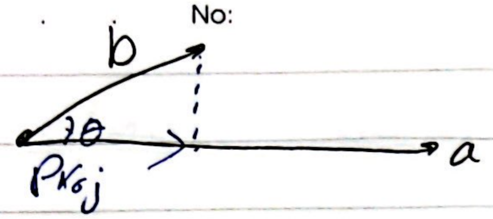
$|Proj_b a| = |a|\cos\theta$

$\Updownarrow$

$|a|\cos(\pi-\theta)$

Subject:

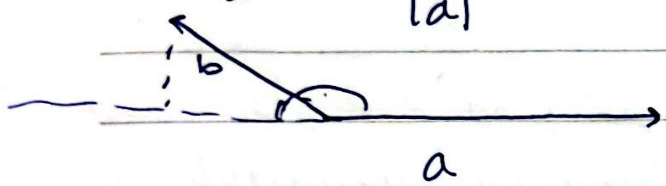
Date: No:

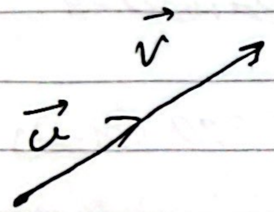


$$|\mathrm{Proj}_a b| = |b|\cos\theta$$

$$a\cdot b = |a|\underbrace{|b|\cos\theta}_{\text{comp}} \rightarrow |\cos\theta|$$

$$\mathrm{Comp}_a b = \frac{a\cdot b}{|a|} \rightarrow$$ جهت ندارد





$$\vec{V} = |\vec{V}|\,\vec{u} = |\vec{v}|\,\frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{V}$$

$$\mathrm{Proj}_a b = \left(\frac{a\cdot b}{|a|}\right)\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \boxed{\frac{a\cdot b}{|\vec{a}|^2}\vec{a}}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - a_3c_1) +$$
$$a_3(b_1\cancel{c_2} - b_2c_1)$$

● dotnote

$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

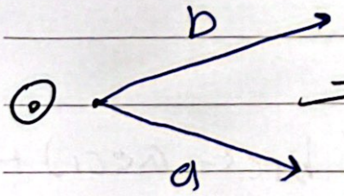
$$= \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

قضیه: $\vec{a} \times \vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است

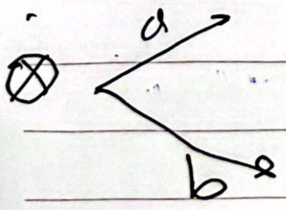
یادآوری: بردار a بر b عمود است اگر تنها اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3$$

$$+ a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$



دست روی بردار a بگیری به سمت b انگشت شست هر طرف باشد $a \times b$



$\vec{a} \times \vec{b}$

Subject:

Date: . . No:

قضیه ۶: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ و $0\le\theta\le\pi$ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد

اثبات مهم

Proof: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$

$=|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2$

$=|a|^2|b|^2-(|a||b|\cos\theta)^2$

$=|a|^2|b|^2-|a|^2|b|^2\cos^2\theta$

$=|a|^2|b|^2(1-\cos^2\theta)$

$=|a|^2|b|^2\sin^2\theta$

$=|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

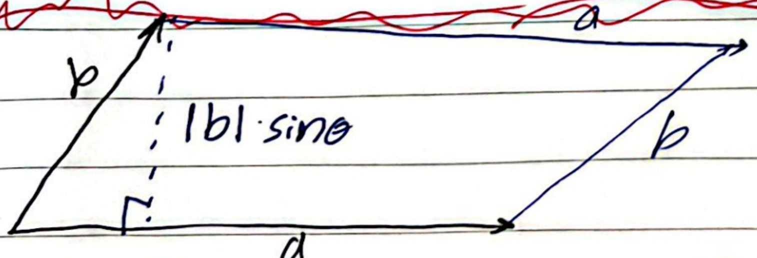
تبصره ۷: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ناصفر باشند آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی اند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

اثبات

د: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند بنابراین $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ که در هر حالت $\sin\theta=0$

بنابراین

$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=0$



$S=|\vec{a}|h=|\vec{a}||b|\sin\theta=|\vec{a}\times\vec{b}|$ برابر با مساحت متوازی الاضلاع محدود شده توسط $\vec{a}$ و $\vec{b}$

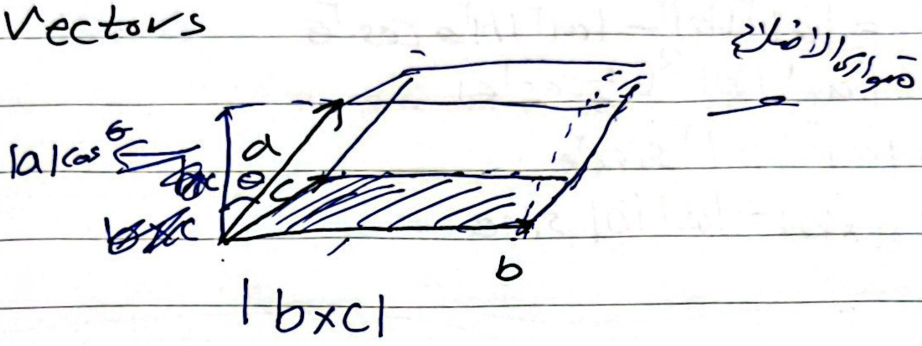
$|\vec{a}|h=0\Rightarrow h=0\Rightarrow |b|\sin\theta=0\Rightarrow\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0,\pi$

اثبات قضیه ۸ اثبات نشود ۸۲۶

Scalar triple product

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ vectors

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$



حجم مکعب مستطیل ایجاد شده توسط a و b و c

$\underbrace{|b \times c|}_{\text{مساحت قاعده}} \underbrace{|a|\cos\theta}_{\text{ارتفاع}}$

$= a \cdot (b \times c)$