热学B期末试卷(2021)

学号_______________ 姓名____________ 成绩_________(半开卷)

1.（12分）已知一混合理想气体中几种主要成分体积比为：CO_2——60%，O_2——30%，H_2——10%，试求：（1）该混合气体的平均摩尔质量；（2）各组分的质量百分比；（3）标准状态下各组分的分压强；（4）标准状态下各组分的密度及混合气体的密度。

解：（1）对混合气体中第i种组分状态方程有

$$PV_i=\frac{M_i}{\mu_i}RT$$

对各组分求和可得

$$PV=\sum_i\frac{M_i}{\mu_i}RT=\frac{\sum_i M_iRT}{\sum_i\frac{V_i}{V}\mu_i}=\frac{MRT}{\sum_i\frac{V_i}{V}\mu_i}$$ （1分）

与混合气体状态方程比较可得

$$PV=\frac{MRT}{\mu}$$

$$\mu=\sum_i\frac{V_i}{V}\mu_i=36.2\left(\mathrm{g/mol}\right)$$ （1分）

（2）由各组分气体状态方程和混合气体状态方程之比可得

$$\frac{M_i}{M}=\frac{V_i}{V}\cdot\frac{\mu_i}{\mu}$$

$$\frac{M_{CO_2}}{M}=72.9\% \qquad \frac{M_{O_2}}{M}=26.5\% \qquad \frac{M_{H_2}}{M}=0.5\%$$ （3分）

（3）由道尔顿分压定律

$$P_iV=\frac{M_i}{\mu_i}RT$$

$$P_i=\frac{V_i}{V}P$$

$$P_{CO_2}=0.6\ \mathrm{atm} \qquad P_{O_2}=0.3\ \mathrm{atm} \qquad P_{H_2}=0.1\ \mathrm{atm}$$ （3分）

（4）由理想气体状态方程变形可得

$$P_iV=\frac{M_i}{\mu_i}RT\Rightarrow\rho_i=\frac{M_i}{V}=\frac{P_i\mu_i}{RT}$$

$$\rho_{CO_2}=1.175\ \mathrm{g/L} \quad \rho_{O_2}=0.427\ \mathrm{g/L} \quad \rho_{H_2}=0.009\ \mathrm{g/L}$$ （3分）

$$\rho_{混合}=1.611\ \mathrm{g/L}$$ （1分）

3. （10 分）设理想气体的摩尔定容热容量C_V为常数，体积由V_0膨胀到$4V_0$，膨胀过程中压强和体积满足$PV^2=C$(常数），试求 1mol 理想气体在上述过程中：(1）对外界做的功；（2）内能的增量；(3）熵的增量。

【解】(1）对外界做的功$W=\int_{V_0}^{4V_0}PdV=\int_{V_0}^{4V_0}\frac{C}{V^2}dV=C(\frac{1}{V_0}-\frac{1}{4V_0})=\frac{3C}{4V_0}$ （3 分）

（2）理想气体状态方程$PV=RT$，过程满足$PV^2=C$，联立两式得

$$T=\frac{C}{RV} \quad => \quad dT=-\frac{C}{RV^2}dV$$ （2 分）

因此内能的增量为

$$\Delta U=\int C_v dT=-\frac{CC_v}{R}\int_{V_0}^{4V_0}\frac{dV}{V^2}=\frac{CC_v}{R}(\frac{1}{4V_0}-\frac{1}{V_0})=-\frac{3CC_v}{4RV_0}$$ （2 分）

（3）熵的增量为

$$\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\int\frac{C_v dT+pdV}{T}=R\int_{V_0}^{4V_0}\frac{dV}{V}-C_v\int_{V_0}^{4V_0}\frac{dV}{V}=(R-C_v)\ln 4$$ （3 分）

4.（10 分）一容器体积为 $2V$，隔板把它分成相等的两半。开始时，左边有压强为 p_0 的理想气体，右边为真空。在隔板上有一面积为 S 的小孔。求打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系。假定过程中左右两边温度相等且保持不变，设分子的平均速率为$\bar{v}$。

解：设小孔未打开时，左边容器内的分子数为 N_0，打开小孔 t 秒后，左边容器的分子数为 N，则此时右边容器内的分子数为 N_0-N。单位时间内撞击容器壁上单位面积的分子数为$\frac{1}{4}n\bar{v}$，在 t~t+dt 时间内从容器左边进入到右边的分子数为

$$\mathrm{dN}_1=\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}Sdt \qquad （1 分）$$

从容器右边进入到左边的分子数为

$$\mathrm{dN}_2=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{N}_0-N}{V}\bar{v}Sdt \qquad （1 分）$$

这样 dt 时间内容器左边分子数净减少为

$$-\mathrm{dN}=\mathrm{dN}_1-\mathrm{dN}_2=\frac{1}{4}\frac{2N-\mathrm{N}_0}{V}\bar{v}Sdt=\frac{1}{4}\frac{\bar{v}S}{kT}(2p-\mathrm{p}_0)dt \qquad （2 分）$$

由 p=nkT，温度不变时，可得

$$\mathrm{dp}=\mathrm{kT}dn=\mathrm{kT}\frac{\mathrm{dN}}{V}=-\frac{\bar{v}S}{4V}(2p-\mathrm{p}_0)dt \qquad （3 分）$$

上式整理，然后积分，可得

$$\mathrm{p}=\frac{p_0}{2}e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t}+\mathrm{C} \qquad （2 分）$$

当 t=0 时，$p=p_0$，可得

$$\mathrm{C}=\frac{p_0}{2}$$

因此打开小孔后左边气体的压强 p 随时间 t 的变化关系为

$$\mathrm{p}=\frac{p_0}{2}\left(e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t}+1\right) \qquad （1 分）$$

5.(12 分)设某理想气体的绝热指数$\gamma=\frac{C_p}{C_v}$为温度 T 的函数.

(1)证明在准静态绝热过程中,气体的 T 和 V 满足函数关系 $F(T)V=C$, 式中 C 为常数,函数 $F(T)$ 的表达式为

$$lnF(T)=\int\frac{dT}{(\gamma-1)T}$$

(2) 利用(1)的结果，证明该气体的可逆卡诺循环的效率仍为

$$\alpha=1-\frac{T_2}{T_1}$$

解 (1)对准静态绝热过程有

$$nc_v dT+pdV=0$$

带入气体状态方程

$$\frac{c_v}{R}\frac{dT}{T}+\frac{dV}{V}=0$$

(3 分)

因$\frac{c_v}{R}=\frac{1}{(\gamma-1)}$,两边积分

$$\int\frac{dT}{(\gamma-1)T}+\int\frac{dV}{V}=lnC$$

即 $F(T)V=C$ (3 分)

(2)设卡诺循环由温度为T_1和T_2的两条等温线和两条绝热线组成的循环 ABCDA 组成，如图所示

在 AB 段吸热

$$Q_1=nRT_1ln\frac{V_B}{V_A}$$

在 CD 段放热

$$Q_2=nRT_2ln\frac{V_c}{V_D}$$

(2 分)

BC 和 DA 两段为绝热过程由（1）得

$$F(T_1)V_B=F(T_2)V_C$$

$$F(T_1)V_A=F(T_2)V_D$$

两式相比得

$$\frac{V_B}{V_A}=\frac{V_C}{V_D}$$

(2 分)

经一个循环后，气体的内能不变，气体对外做功 $W=Q_1-Q_2$。气体的可逆卡诺热机效率

$$\alpha = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{nRT_2 \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

（2 分）

6.（18 分）两个完全相同的物体，热容量都为 C，初始温度都为 T_i，如果有一个制冷机工作在这两个物体之间，使物体 1 的温度降低到 T_2，另一个物体 2 的温度升高 。（1）至少要对制冷机做多少功？（2）如果第（1）问中的功由ν mol 范德瓦尔斯气体的准静态等温膨胀过程提供，且该过程气体对外所做的功完全提供给制冷机，当气体由 V_i 膨胀至 V_f，计算该过程中需要保持气体的温度 T 为多少？（3）在第（2）问的过程中，范德瓦尔斯气体前后的熵变是多少？

解：（1）暂时假设物体 2 的温度升高到 T_3，由题意知制冷机从物体 1 吸收的热量是：

$Q_2=C(T_i-T_2)$

释放到物体 2 中的热量为 $Q_1=C(T_3-T_i)$

制冷机需要做功 $W=Q_1-Q_2=C(T_3+T_2-2T_i)$ （2 分）

当制冷机可逆时，需要做功最少，对于整个系统而言是一个可逆孤立系统，则前后总熵变为 0。另一方面，物体 1 温度降低，其熵变为：

$$\Delta S_1=\int_{T_i}^{T_2}\frac{CdT}{T}=C\ln\left(\frac{T_2}{T_i}\right)$$

物体 2 温度升高了，其熵变为：

$$\Delta S_2=\int_{T_i}^{T_3}\frac{CdT}{T}=C\ln\left(\frac{T_3}{T_i}\right)$$

$$\Delta S_1+\Delta S_2=0\Rightarrow T_3=\frac{T_i^2}{T_2}$$ （2 分）

所以最小功应该等于$W_{\min}=C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)$。 （2 分）

（2）由第（1）步的计算知该过程范德瓦尔斯气体需要对外做功：

$$W'=W_{\min}=C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)。$$

外界需对范德瓦尔斯气体做功：$W=-W'=-C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)=-\int pdV$ （1 分）

而范德瓦尔斯气体

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2}$$ （1 分）

$$\Rightarrow W=-\int_{V_i}^{V_f}\left(\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2}\right)dV=-[\nu RT\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)-a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)]$$

$$\Rightarrow-C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)=-[\nu RT\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)-a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)]$$

$$T=\frac{a\nu^2\left(\frac{1}{V_i}-\frac{1}{V_f}\right)+C\left(\frac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)}{\nu R\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)}$$ （3 分）

（3）由熵的定义可知：

$\mathrm{dS}=\frac{\text{đ}\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}=\frac{dU+pdV}{T}$ （1 分）

其中 $\mathrm{dU}=\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{V}}\right)_{\mathrm{T}}dV+\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V}dT$

等温过程 dT=0，$\mathrm{dU}=\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{V}}\right)_{\mathrm{T}}dV=\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v}-p\right]dV$ （1 分）

$\Rightarrow \mathrm{dS}=\frac{\mathrm{dU+pdV}}{\mathrm{T}}=\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V}dV}{T}=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V}dV$ （2 分）

代入范氏气体的压强 $\mathrm{p}=\frac{\nu \mathrm{RT}}{\mathrm{V}-\nu \mathrm{b}}-\frac{a\nu^2}{V^2}$，

得：$\left(\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{V}}=\frac{\nu R}{V-\nu b}$ （1 分）

$$\Rightarrow \mathrm{dS}=\frac{\nu \mathrm{R}}{\mathrm{V}-\nu \mathrm{b}}dV$$

积分，得：$\Delta \mathrm{S}=\int \mathrm{dS}=\int_{V_i}^{V_f}\frac{\nu R}{V-\nu b}dV=\nu R\ln\left(\frac{V_f-\nu b}{V_i-\nu b}\right)$ （2 分）

7.(14 分) 已知经典理想气体分子速率分布函数为，

$$f(v_x, v_y, v_z) = \exp\left[a - b\left[(v_x - v_{x0})^2 + \left(v_y - v_{y0}\right)^2 + (v_z - v_{z0})^2\right]\right]$$

式中$a, b, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$是待定参数。试用如下条件确定待定参数：

$$n = \int f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$$

$$\overline{v_x} = \frac{1}{n}\int v_x f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$$

$$\overline{v_y} = \frac{1}{n}\int v_y f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$$

$$\overline{v_z} = \frac{1}{n}\int v_z f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\int \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2) f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z = \frac{3}{2}kT + \frac{1}{2}m(\overline{v_x}^2 + \overline{v_y}^2 + \overline{v_z}^2)$$

其中$n = N/V$，N, V, n分别为气体的粒子数，体积和粒子密度数，$\bar{v}, \bar{\varepsilon}$是粒子的平均速度和平均动能，$m$ 是分子质量，k 是玻尔兹曼常量。

解：把$f(v_x, v_y, v_z)$代入 n和$\overline{v_x}$得：

4 分

$$n = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} \exp(a)$$

$$\overline{v_x} = \frac{1}{n} v_{x0} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} \exp(a)$$

联立上两式，我们得到：

1 分

$$\overline{v_x} = v_{x0}$$

同理：

2 分

$$\overline{v_y} = v_{y0}$$

$$\overline{v_z} = v_{z0}$$

再将$f(v_x, v_y, v_z)$代入$\bar{\varepsilon}$得：

2 分

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m}{2n}\left[\frac{3}{2b}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\left({v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2 + {v_{0z}}^2\right)\right] \exp(a)$$

我们得到：

4 分

$$b = \frac{m}{2kT}$$

$$a = \ln\left[n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

综上：

$$f\left(v_x, v_y, v_z\right) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m}{2kT}\left[(v_x - \overline{v_x})^2 + \left(v_y - \overline{v_y}\right)^2 + (v_z - \overline{v_z})^2\right]\right]$$