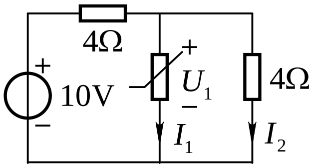
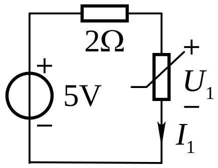
第 12 章非线性电阻电路习题解答

12.1 电路如图题 12.1 所示，已知非线性电阻的特性方程为 $I_1 = 1.2U_1^2$（单位：V，A），$U_1 > 0$ 求支路电流 I_1 和 I_2。



图题 12.1



图(a)

解：将非线性电阻以外电路用戴维南电路进行等效化简，如图(a)所示。

列 KVL 方程　$2\Omega \times I_1 + U_1 = 5\text{V}$　(1)

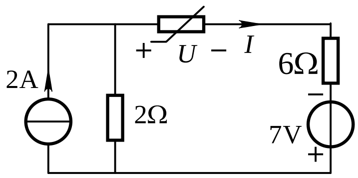
将非线性电阻特性 $I_1 = 1.2U_1^2$ 代入方程(1)，得

$$2.4U_1^2 + U_1 - 5 = 0$$

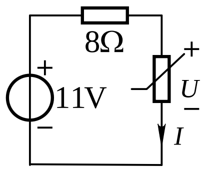
解得　$U_1' = 1.25\text{V}$，$U_1'' = -1.667\text{V}$（舍去）

$$I_1 = 1.2 \times (U_1')^2 = 1.2 \times 1.25^2 = 1.875\text{A} \qquad I_2 = U_1'/4 = 1.25/4 = 0.3125\text{A}$$

12.2 图题 12.2 所示电路，已知非线性电阻的特性方程为 $U = 2I^2 + 1$（单位：V，A），求电压 U。



图题 12.2



图(a)

解：将非线性电阻以外电路用戴维南电路进行等效化简，如图(a)所示。

列 KVL 方程　$8\Omega \times I + U = 11\text{V}$　(1)

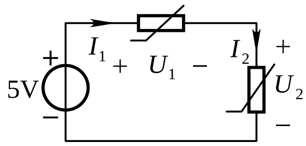
将非线性电阻特性 $U = 2I^2 + 1$ 代入方程(1)，得

$$I^2 + 4I - 5 = 0$$

解得　$I' = 1\text{A}$，$I'' = -5\text{A}$

$$U' = 2(I')^2 + 1 = 3\text{V} \qquad U'' = 2(I'')^2 + 1 = 51\text{V}$$

12.3 图示电路，已知 $I_1 = 0.1\sqrt{U_1}$ (单位：A,V) ($U_1 \geq 0$) ，$I_2 = 0.05\sqrt{U_2}$ (单位：A,V) ($U_2 \geq 0$)。求 I_1 和 U_1。



图题 12.3

解：由非线性电阻的电压电流关系特性

$$I_1 = 0.1\sqrt{U_1}\,,\quad I_2 = 0.05\sqrt{U_2}$$

得

$$U_1 = 100I_1^2 \quad , \quad U_2 = 400I_2^2 \tag{1}$$

对回路列 KVL 方程

$$U_1 + U_2 = 5\text{V} \tag{2}$$

将式（1）代入式（2）　$100I_1^2 + 400I_2^2 = 5$

由非线性电阻串联可知　$I_1 = I_2$

即　$500I_1^2 = 5$

解得　$I_1' = 0.1\text{A}$ ， $I_1'' = -0.1\text{A}$ （舍去）

即

$$I_1 = 0.1\text{A}$$

$$U_1 = 100I_1^2 = 1\text{V}$$

12.4 设图示电路中非线性电阻均为压控的，$I_1=f_1(U_1)$，$I_2=f_2(U_2)$。列出节点电压方程。

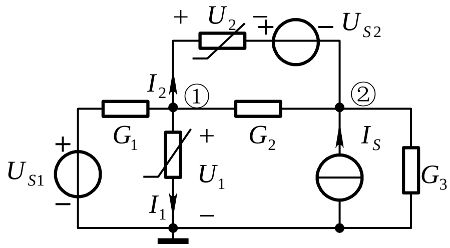


图 题12.4

解：对节点①、②列节点电压方程，其中非线性电阻电流设为未知量：

$$(G_1 + G_2)U_{n1} - G_2U_{n2} = G_1U_{s1} - I_1 - I_2 \tag{1}$$

$$-G_2U_{n1} + (G_2 + G_3)U_{n2} = I_\text{S} + I_2 \tag{2}$$

为消去 I_1、I_2，须列补充方程

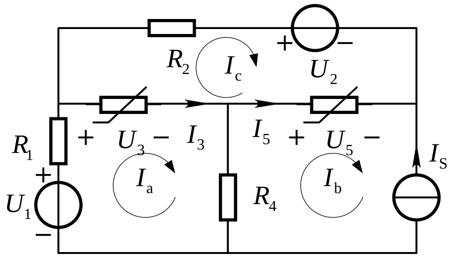
$$\begin{cases} I_1 = f_1(U_1) = f_1(U_{n1}) & (3) \\ I_2 = f_2(U_2) = f_2(U_{n1} - U_{n2} - U_{\text{S2}}) & (4) \end{cases}$$

将式(3)代入式(1)、(2)，整理后得

$$\begin{cases}(G_1+G_2)U_{n1}-G_2U_{n2}+f_1(U_{n1})+f_2(U_{n1}-U_{n2}-U_{S1})=G_1U_{S1}\\ -G_2U_{n1}+(G_2+G_3)U_{n2}-f_2(U_{n1}-U_{n2}-U_{S2})=I_S\end{cases}$$

注释：非线性电阻均为压控型，宜列写节点电压方程。

12.5 设图题12.5所示电路中的非线性电阻均为流控型，$U_3=f_3(I_3)$，$U_5=f_5(I_5)$。试列写回路电流方程。



图题 12.5

解：设回路电流方向如图所示。列回路电流方程

回路l_a：$(R_1+R_4)I_a-R_4I_b+U_3=U_1$　　(1)

回路l_c：$R_2I_c-U_3-U_5=-U_2$　　(2)

补充：$I_b=-I_S$

$U_3=f_3(I_3)=f_3(I_a-I_c)$

$U_5=f_5(I_5)=f_5(-I_S-I_c)$

代入到式（1）、(2)，得回路电流方程：

$$(R_1+R_4)I_a+R_4I_S+f_3(I_a-I_c)=U_1$$
$$R_2I_c-f_3(I_a-I_c)-f_5(-I_c-I_S)=-U_2$$

注释：非线性电阻均为流控型，宜列写回路电流方程。

12.6 图示电路中非线性电阻的特性为$U_1=f_1(I_1)$(流控的)，$I_2=f_2(U_2)$(压控的)。试用改进节点电压法列写电路方程。

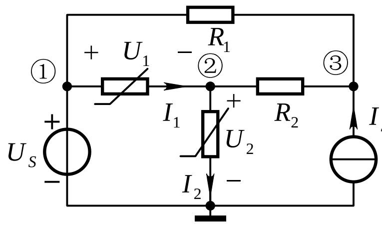


图 题12.6

解：参考点及独立节点编号如图所示。图中节点①与参考点之间为纯电压源支路，则该节点电压为U_S。设非线性电阻电流I_1、I_2为未知量，对图示电路节点②、③列

KCL 方程：

$$\text{节点②:}\quad -I_1+G_2U_{n2}+I_2-G_2U_{n3}=0 \tag{1}$$

$$\text{节点③:}\quad -G_1U_{n1}-G_2U_{n2}+(G_1+G_2)U_{n3}=I_S \tag{2}$$

将压控非线性电阻电流用节点电压表示，流控非线性电阻电压用节点电压来表示，即

$$I_2=f_2(U_2)=f_2(U_{n2}) \tag{3}$$

$$U_{n1}-U_{n2}=U_1=f_1(I_1) \tag{4}$$

将式(3)代入式(1)，将$U_{n1}=U_S$代入式(2)，再与式(4)联立得该电路方程：

$$\begin{cases}-I_1+G_2U_{n2}+f_2(U_{n2})-G_2U_{n3}=0\\ -G_2U_{n2}+(G_1+G_2)U_{n3}=I_S+G_1U_S\\ U_{n1}-U_{n2}=f_1(I_1)\end{cases}$$

12.7 图示电路中两个非线性电阻的伏安特性为$I_1=U_1^3$(单位:A,V)，$U_2=I_2^3$(单位:V,A)。试列出求解 U_1 及 I_2 的二元方程组。

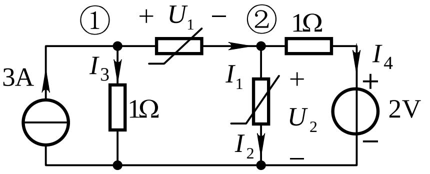


图 题12.7

解：对节点列 KCL 方程

$$\text{节点①:}-3\text{A}+I_3+I_1=0 \tag{1}$$

$$\text{节点②:}-I_1+I_2+I_4=0 \tag{2}$$

由图示电路可知

$$I_3=\frac{U_{n1}}{1\Omega}=\frac{U_1+U_2}{1\Omega} \tag{3}$$

$$I_4=\frac{U_{n2}-2\text{V}}{1\Omega}=\frac{U_2-2\text{V}}{1\Omega} \tag{4}$$

将式（3）、（4）及已知条件$I_1=U_1^3$和$U_2=I_2^3$代入式（1）、（2）得

$$\begin{cases}U_1^{\ 3}-I_2^{\ 3}-I_2=-2\\ U_1^{\ 3}+U_1+I_2^{\ 3}=3\end{cases}$$

12.8 图示电路，设$I=U^2+1$(单位:A,V)。试用牛顿－拉夫逊法求出电压 U，要求准确到 10^{-3}V。

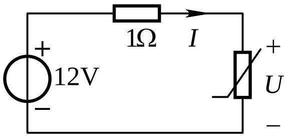


图 题12.8

解：列回路电压方程　$1\times I+U-12=0$

将非线性电阻的电压电流关系特性代入得

$$U^2+U-11=0$$

为解上述非线性方程，令

$$f(U)=U^2+U-11 \qquad (1)$$

求导数，得

$$f(U)=2U+1 \qquad (2)$$

$$U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)} \qquad (3)$$

将式(1)、(2)代入牛顿-拉夫逊公式，得

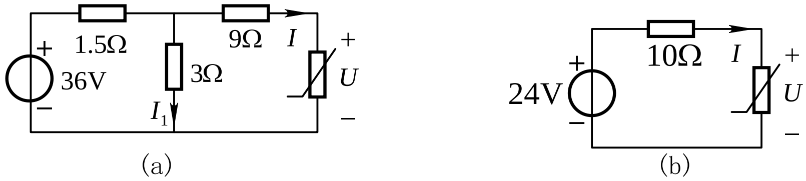
$$U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}=U_k-\frac{(U_k)^2+11}{2U_k+1}$$

取初值$U_0=1\text{V}$，迭代过程列于下表

k	U/V	$f(U)/\text{V}$	$f'(U)$
0	1	-9	3
1	4	9	9
2	3	1	7
3	2.857	0.01945	6.714
4	2.854	-0.0007	6.708
5	2.8541		

由表可见，第 5 次迭代值与第 4 次迭代值之差已小于允许误差，即$U\approx 2.854\text{V}$。如取初值$U_0=-1\text{V}$，则收敛于$U\approx -3.854\text{V}$

12.9 图(a)所示电路，设 $I=10^{-4}(e^{20U}+e^{-20U})$A。试用牛顿一拉夫逊法求电压$U$和电流$I_1$，要求电压准确到 10^{-3}V。初值分别为$U_0=0.6\text{V}$和$U_0=-0.6\text{V}$。



图题 12.9

解：用戴维南定理对非线性电阻左侧的线性电路进行等效化简，如图(b)所示。

列回路电压方程：　　$10I+U-24=0$

将非线性电阻的电压电流关系式代入，得：

$$10^{-3}(\mathrm{e}^{20U}+\mathrm{e}^{-20U})+U-24=0$$

为求解上述非线性方程，令

$$f(U)=10^{-3}(\mathrm{e}^{20U}+\mathrm{e}^{-20U})+U-24=0 \qquad (1)$$

求导数，　　得：　$f'(U)=0.02(\mathrm{e}^{20U}-\mathrm{e}^{-20U})+1$　　　　(2)

将式(1)、(2)代入牛顿-拉夫逊公式，得

$$U_{k+1}=U_k-\frac{10^{-3}(\mathrm{e}^{20U_k}+\mathrm{e}^{-20U_k})+U_k-24}{0.02(\mathrm{e}^{20U_k}-\mathrm{e}^{-20U_k})+1}$$

(1)取初值$U_0=0.6\mathrm{V}$，迭代过程列于下表：

k	U/V	$f(U)/\mathrm{V}$	$f'(U)$
0	0.6	1.3935×10^{2}	3.2561×10^{3}
1	0.5572	4.5705×10^{1}	1.384×10^{3}
2	0.5242	1.2263×10^{1}	7.1578×10^{2}
3	0.5071	1.8765	5.0839×10^{2}
4	0.5034	8.45×10^{-2}	4.7262×10^{2}
5	0.5032	-5.18×10^{-3}	4.7083×10^{2}

即　　$U\approx0.5032\mathrm{V}$

电流 $I_1=\dfrac{9I+U}{3}=\left.\dfrac{9\times10^{-4}(\mathrm{e}^{20U}+\mathrm{e}^{-20U})+U}{3}\right|_{U=0.5032}\approx7.212\mathrm{A}$

(2)取初值$U_0=-0.6\mathrm{V}$，迭代结果列于下表：

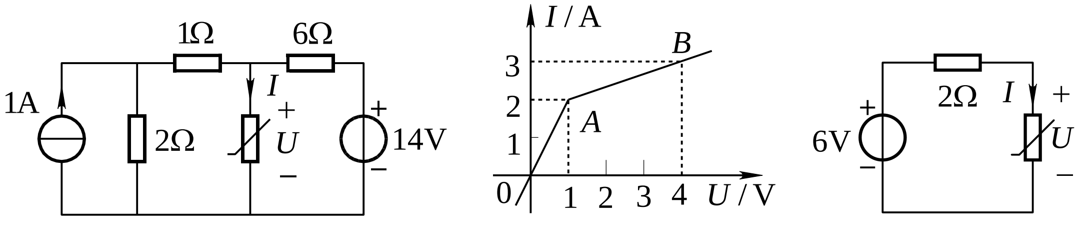
k	U/V	$f(U)/\mathrm{V}$	$f'(U)$
0	-0.6	1.3815×10^{2}	-3.2541×10^{3}
1	-0.5575	45	-1.3903×10^{3}
2	-0.5251	1.179×10^{1}	-7.2531×10^{2}
3	-0.5088	1.7564	-5.243×10^{2}
4	-0.5069	7.789×10^{-1}	-5.0472×10^{2}
5	-0.5054	8.608×10^{-3}	-4.8928×10^{2}
6	-0.5054		

解得　　　$U\approx-0.5054\mathrm{V}$

电流 $$I_1=\frac{9I+U}{3}=\left.\frac{9\times10^{-4}(e^{20U}+e^{-20U})+U}{3}\right|_{U=-0.5054}\approx 7.178\text{A}$$

注释：如果非线性方程存在多解，则对应不同的迭代初值，可能收敛到不同的解答。

12.10 图 (a)所示电路中非线性电阻的电压、电流关系如图 (b)所示，求电压U。



（a）　　(b)　　(c)

图题 12.10

解：先求线性部分的戴维南等效电路

$$R_i=\frac{6\times(1+2)}{6+1+2}=2\Omega \qquad U_{OC}=\frac{14-2}{6+2+1}\times(2+1)+2=6\text{V}$$

等效电路如图(c)所示。线性部分端口特性为$U=6-2I$

若非线性电阻工作在OA段，其元件端口特性为$U=0.5\Omega I$

由$0.5I=6-2I$　解得　$I=2.4\text{A}$（超出工作范围，为虚根）

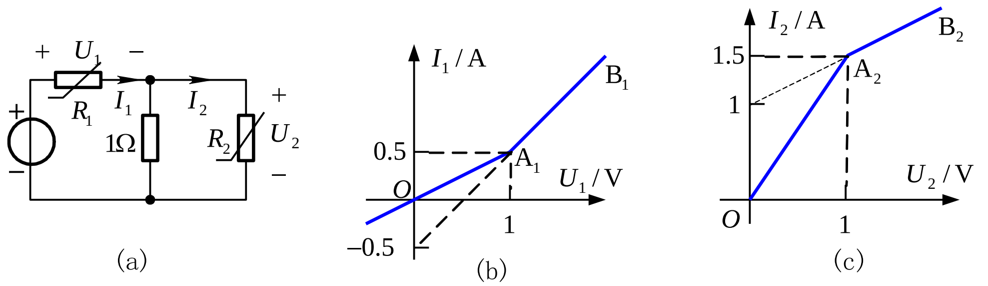
若非线性电阻工作在AB段，其元件端口特性为$U=3\Omega I-5\text{V}$

由$6-2I=3I-5$　解得　$I=2.2\text{A}$　在其工作区间

所以$U=3\times2.2-5=1.6\text{V}$

12.11 图(a)电路中两个非线性电阻的伏安特性分别如图(b)、(c)所示。试求电流I_1。

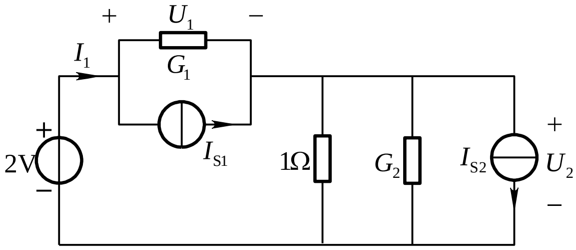
解：图(a)电路中有两个非线性电阻元件，应分别求出它们的分段线性模型。再分别计算多个线性电路，只有所算出的结果，都在各个元件线性化的适用范围以内时，才是真正的解答。



(a)　　(b)　　(c)

图 题4.11

(1)将图(a)电路中非线性电阻 R_1、R_2 用诺顿电路等效，等效后电路如图(d)所示。



(d)

(2)由图(d)可求得 U_1、U_2 的表达式为

列节点电压方程：　$(G_1+1\mathrm{S}+G_2)U_2=2\mathrm{V}\times G_1+I_{\mathrm{S1}}-I_{\mathrm{S2}}$

$$U_2=\frac{2\mathrm{V}\times G_1+I_{\mathrm{S1}}-I_{\mathrm{S2}}}{G_1+1\mathrm{S}+G_2} \tag{1}$$

$$U_1=2\mathrm{V}-U_2 \tag{2}$$

(3)将 R_1、R_2 的等效电路参数代入式(1)，可得 R_1、R_2 在不同线性段时对应的 U_1、U_2 值。具体如下表所示：

	$O\mathrm{A}_1$段 $G_1=0.5\mathrm{S}, I_{S1}=0$	$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$段 $G_1=1\mathrm{S}, I_{S1}=-0.5\mathrm{A}$
$O\mathrm{A}_2$段 $G_2=1.5\mathrm{S}$ $I_{\mathrm{S2}}=0$	$U_1=\frac{5}{3}\mathrm{V}$(超出$O\mathrm{A}_1$) $U_2=\frac{1}{3}\mathrm{V}$	$U_1=\frac{11}{7}\mathrm{V}$ $U_2=\frac{3}{7}\mathrm{V}$
$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$段 $G_2=0.5\mathrm{S}$ $I_{\mathrm{S2}}=1\mathrm{A}$	$U_1=2\mathrm{V}$(超出$O\mathrm{A}_1$) $U_2=0$	$U_1=\frac{9}{5}\mathrm{V}$ $U_2=\frac{1}{5}\mathrm{V}$（超出$\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$)

(4)由图(d)可得　$$I_1=G_1U_1+I_{S1} \tag{3}$$

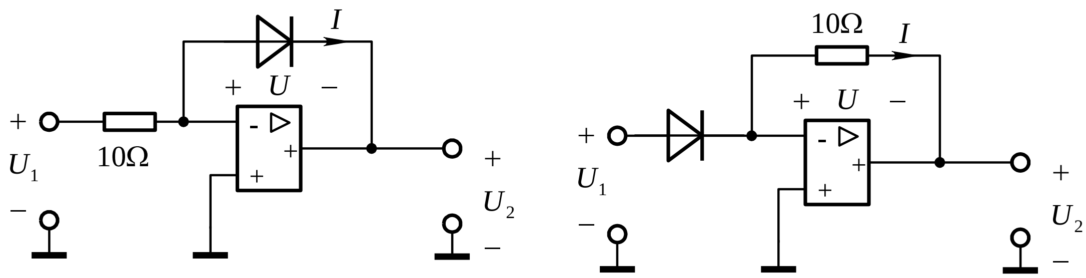
将 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ 段非线性电阻 R_1 的等效参数 G_1、I_{S1} 代入(3)式，得

$$I_1=1.0714\mathrm{A}$$

12.12 图示电路中二极管特性近似用 $I=10^{-6}\mathrm{e}^{40U}$ (单位:A,V)表示。

(1) 求 U_2 与 U_1 的关系。

(2) 10Ω电阻与二极管交换位置后，再求 U_2 与 U_1 的关系。



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 题12.12

解：（1）根据运算放大器输入端口电压为零的条件，
得 $$U_2 = -U = 0 \qquad (1)$$

又由二极管特性得 $$U = \frac{1}{4U}\ln(10^6 I) \qquad (2)$$

再由运算放大器输入端口电流为零的条件，得 $I = \dfrac{U_1}{10}$ (3)

联立(1)、(2)和(3)式，解得 $$U_2 = -0.025\ln(10^5 U_1)\mathrm{V} \qquad (4)$$

由式(4)表明的输入、输出关系可见，图(a)所示电路具有对数运算功能。

（2）将10Ω 电阻和二极管交换位置后，电路如图(b)所示。电路方程如下

$$-U_2 = 10I \qquad (5)$$

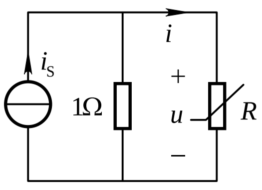
$$U_1 = U \qquad (6)$$

将二极管电压电流特性 $I = 10^{-6}\mathrm{e}^{40U}$ 代入(5)式，解得

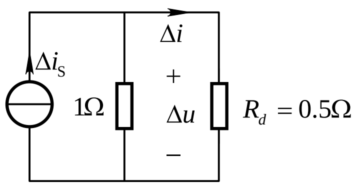
$$U_2 = -10^{-5}\mathrm{e}^{40U_1}\mathrm{V} \qquad (7)$$

由式(7)表明的输入、输出关系可见，图(b)所示电路具有指数运算功能。

12.13 非线性电阻电路如图所示，已知 $i_S = [2 + 6\times10^{-3}\cos(\omega t)]\mathrm{A}$，非线性电阻为电压控制型，其伏安特性曲线为 $i = 2u^2 + 1\ (u \ge 0,$ 单位：$\mathrm{A,V})$，用小信号分析法求电压 u 和电流 i。



图题 12.13



图(a)

解：当直流单独作用时，列写方程如下：

$$i + \frac{u}{1\Omega} = 2\mathrm{A}$$

将非线性电阻伏安特性代入得

$$u^2+0.5u-0.5=0$$

解得 $u'=0.5\text{V}$　　$i'=2(u')^2+1=2\times0.5^2+1=1.5\text{A}$　　$u''=-1\text{V}$（舍去）

非线性电阻的动态电导为 $G_d=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}|_{u=0.5}=4u|_{u=0.5}=2\text{S}$

动态电阻 $R_d=1/G_d=0.5\Omega$

小信号等效电路如图(a)所示，在图(a)中

$$\Delta i=\frac{1}{1+0.5}\times\Delta i_{\text{S}}=4\times10^{-3}\cos(\omega t)\text{A}$$

$$\Delta u=\Delta i\times R_d=2\times10^{-3}\cos(\omega t)\text{V}$$

将工作点和小信号响应相加得

$$i=i'+\Delta i=[1.5+4\times10^{-3}\cos(\omega t)]\text{A}$$

$$u=u'+\Delta u=[0.5+2\times10^{-3}\cos(\omega t)]\text{V}$$