中国科学技术大学

2020～2021 学年第二学期考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：__力学 B__________　　课程代码：__PHYS1001B.11_____

开课院系：_物理学院_________　　考试形式：半开卷

姓　名：______________　学　号：______________　专　业：______________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

注：共八道大题，请勿漏答。请在首页写上姓名和学号，并在每道题下方空白处答题，答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸，但不允许使用包括计算器在内的所有电子产品。

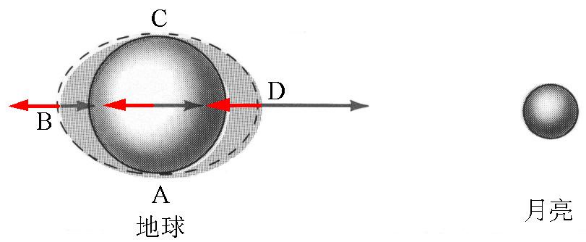
（装订线内不要答题）

本答案只做参考，如果有使用不同方法解题，也可以类似地按步骤给分

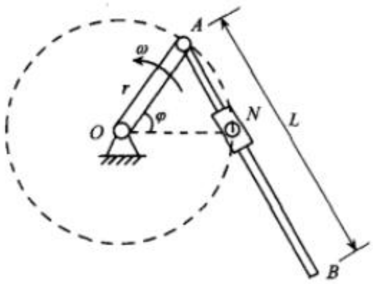
1. （10 分）古人为了表示生潮的时刻，把发生在早晨的涨潮叫潮，发生在晚上的涨潮叫汐。请利用本课程的知识简要解释为什么一天内出现两次涨潮。

地球潮汐现象由地球运动时受太阳和月球的引力引起，其中月球的作用占主导地位。在相对地球静止的参考系中，地球上海水受月球引力和地球绕月球转动非惯性参考系中的惯性离心力双重作用。（5 分）

其中惯性离心力如图所示红线所示，在地球任意位置都是不变的，它大小由地球质心与月球的距离所决定，在地球质心处与月球引力正好抵消。而当海水靠近月球时（图中 D 位置），月球引力大小超过惯性离心力，海水出现一次涨潮。而海水在背离月球位置（图中 B 位置），惯性离心力大小超过月球引力，海水也会出现一次涨潮。（5 分）



2.（12 分）曲柄 0A=r，绕定轴 O 以匀角速度ω转动,连杆 AB 用铰链与曲柄端点 A 连接，并可在具有铰链的滑套 N 内滑动。当φ=0 时，A 端位于滑套 N 处。已知 AB=L>2r，求当φ=0 时，连杆上 B 点的速度，加速度的大小，切向加速度，法向加速度和轨道的曲率半径。



取直角坐标 Oxy，x 轴沿 ON 方向，y 轴竖直向上。
则 B 点坐标为

$$x = r\cos\varphi + l\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = r\cos\varphi + l\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$y = r\sin\varphi - l\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = r\sin\varphi - l\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{x} = -r\sin\varphi\dot{\varphi} - l\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\dot{\varphi}}{2} = -r\omega\sin\varphi + \frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{y} = r\omega\cos\varphi + \frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = [(r\omega)^2 + (\frac{1}{2}l\omega)^2 - rl\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}]^{1/2}$$ （2 分）

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\varphi - \frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\ddot{y} = -r\omega^2\sin\varphi + \frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = [(r\omega^2)^2 + (\frac{1}{4}l\omega^2)^2 - \frac{1}{2}rl\omega^4\sin\frac{\varphi}{2}]^{1/2}$$ （2 分）

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2v}\frac{dv^2}{dt} = -\frac{1}{4v}rl\omega^3\cos\frac{\varphi}{2}$$ （2 分）

$\varphi = 0$ 时:

$$v = \omega(r^2 + \frac{1}{4}l^2)^{1/2}$$ （1 分）

$$a = \omega^2(r^2 + \frac{1}{16}l^2)^{1/2} = \frac{1}{4}\omega^2(16r^2 + l^2)^{1/2}$$ （1 分）

$$a_\tau = -\frac{1}{4\omega(r^2+\frac{1}{4}l^2)^{1/2}}rl\omega^3 = -\frac{rl\omega^2}{2(4r^2+l^2)^{1/2}}$$ （1 分）

$$a_n = (a^2 - a_\tau{}^2)^{1/2} = \frac{8r^2+l^2}{4(4r^2+l^2)^{1/2}}\omega^2$$ （1 分）

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4r^2+l^2)^{3/2}}{8r^2+l^2}$$ （2 分）

3. （10 分）竖直发射一火箭，已知火箭初始质量 m_0，燃料相对火箭喷射速率 u，重力加速度为 g。

（1）若火箭燃料质量变化率为一常数 m_1（kg/s），求火箭速度与时间关系。

（2）若火箭以等加速度 a 飞行，求火箭质量与时间变化关系。

（1） 由动量定理可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg$$

代入 $m=m_0-m_1 t$

$$\mathrm{d}v=-\frac{m_1 u}{m_0-m_1 t}\mathrm{d}t-g\mathrm{d}t$$ （3 分）

两侧积分，由初始条件 t=0 时，m=m_0

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_0-m_1 t}-gt$$

（2 分）

(2)同样由动量定理 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg$$

代入 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$

$$m(a+g)=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\frac{a+g}{u}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}m}{m}$$ （3 分）

两侧积分，由初始条件 t=0 时，m=m_0

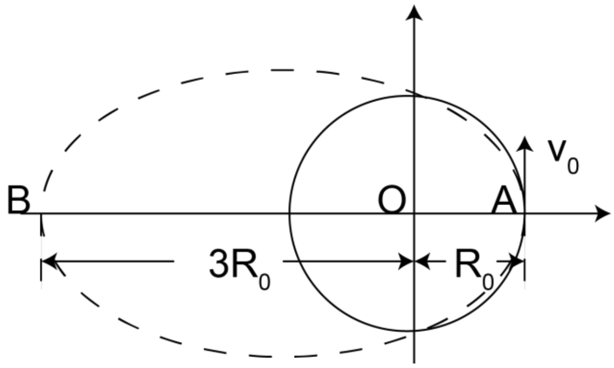
$$m=m_0 e^{-\frac{(a+g)}{u}t}$$

（2 分）

4. （12 分）如图所示，初始时刻飞船绕某星球（O 点）作半径为 R_0，速率为 v_0 的圆周运动。在运动到 A 点时，飞船开始加速，轨道变成远端过 B 点的椭圆，其中 $BO=3R_0$。求：

（1）加速后，飞船在 A 点的速率变为多少？

（2）新轨道上的运动周期是多少？



（1）由有效势能的分析可知，对椭圆轨道和圆轨道，其轨迹的长轴的两个端点到轨道的一个焦点出的距离满足：$r_1+r_2=-\frac{GMm}{E}$ (2 分)

这里 E 是总能量：$E=-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2$，所以加速后的能量是加速前的能量 1/2（因为总能量为负）

初始时刻，在 A 点：$E_0=-\frac{GMm}{R_0}+\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{1}{2}mv_0^2$（2 分）

加速后瞬间，在 A 点：$E_1=-\frac{GMm}{R_0}+\frac{1}{2}mv_1^2=-\frac{1}{2}mv_0^2\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}mv_0^2$（2 分）

从而得：$v_1=\sqrt{\frac{3}{2}}v_0$（1 分）

（2）根据开普勒第三定律，有：$\frac{T_0^2}{R_0^3}=\frac{T_1^2}{R_1^3}$ （3 分）

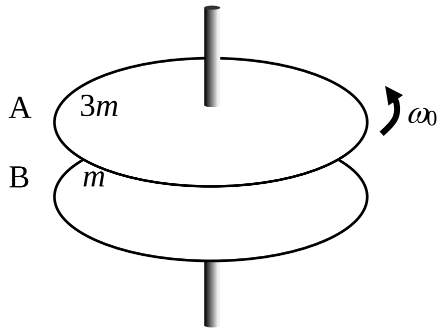
这里 R_1 为椭圆轨道的半长轴，根据题中的条件有：$R_1=2R_0$

这样，可得$T_1=2\sqrt{2}T_0=2\sqrt{2}\frac{2\pi R_0}{v_0}$（2 分）

5.（12 分）两个半径均为 R，质量分别为 3m 和 m 的圆盘 A、B 均在同一轴上，均可绕轴无摩擦地旋转。A 盘的初始角速度为ω_0，B 盘开始时静止，现将上盘放下，使两盘互相接触。若两盘间的摩擦系数为μ，试问：

（1）经过多少时间两盘以相同角速度旋转？

（2）它们共同旋转的角速度为多大？



上盘与下盘间的摩擦力矩改变两圆盘角动量

根据摩擦力的方向和与转轴中心的位置，可以确定，圆盘 A 上任意微元产生的力矩都是沿着转轴方向。

考虑圆盘 A 上离转轴距离为 $r \to r+\mathrm{d}r$ 间的微元对圆盘 B 产生的摩擦力矩

$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}f = r \times \mu g \mathrm{d}m = r \times \mu g \times \frac{3m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r$$ （2 分）

积分得到圆盘 A 对圆盘 B 产生的总力矩为

$$M = \int_0^R \frac{6\mu m g}{R^2} r^2 dr = 2\mu m g R$$ （2 分）

圆盘 A 的转动：$I_A(\omega - \omega_0) = -M\Delta t$ （2 分）

圆盘 B 的转动：$I_B(\omega - 0) = M\Delta t$ （2 分）

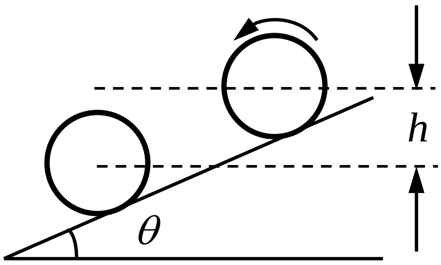
其中 $I_A = \frac{3}{2} mR^2, I_B = \frac{1}{2} mR^2$ （2 分）

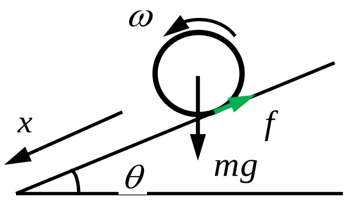
解得：$\omega = \frac{3}{4}\omega_0$，$\Delta t = \frac{3\omega_0 R}{16\mu g}$ （2 分）

6. （13 分）一半径为 R 的匀质实心圆球从静止开始沿一倾角为θ粗糙斜面纯滚动而下，球从上端滚到下端球心高度相差为 h ，求：

（1）小球转动角加速度

（2）小球滚到下端时质心的速度。





（1）沿 x 方向的力：重力分量，摩擦力 $\mathrm{mgsin\theta} - \mathrm{f} = \mathrm{ma}_c$ (1 分)

对质心的力矩：摩擦力矩 $\mathrm{fR} = \mathrm{I}_c\alpha$ （2 分）

$\mathrm{I}_c = \frac{2}{5}mR^2$（1 分）

纯滚动条件：a_c=Rα （2分）

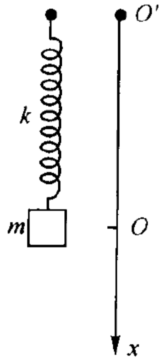
得：$\mathrm{a}_c = \frac{5}{7}g\sin\theta$ （1 分）

（2）纯滚动静摩擦力不做功，机械能守恒：$\mathrm{mgh} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\ \omega^2$（2 分）

纯滚动条件$\mathrm{v}_c = \mathrm{R\omega}$ （2 分）

得 $v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ （2 分）

7. （15 分）质量为 m 的重物悬挂在弹性系数为 k 的弹簧下端，平衡于 O 点。从 $t=0$ 开始，弹簧端 O'以 $x'=a\sin\omega t$ 作上下振动。设系统的阻尼因数为β小于系统的本征频率$\omega_0=(k/m)^{1/2}$，求物体在任意 t>0 时刻的位置 x(t)的具体表达式。



本题重点在于驱动力形式是 sinωt，而不是通常课堂讲的 cosωt

系统运动满足阻尼振子模型：

$$m\ddot{x}+h\dot{x}=k(x'-x)$$

代入 x’的运动条件有：

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=ka\sin(\omega t)$$

阻尼因数$\beta=h/2m$，弹簧的本征频率$\omega_0=(k/m)^{1/2}$，方程变为：

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=a\omega_0^2\sin(\omega t)\ (4\text{ 分})$$

方程的通解为：

$$x(t)=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega_f t+\varphi_f)+B\sin(\omega t-\varphi)\ \ (4\text{ 分})$$

$$\text{这里}\ \ \omega_f=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\quad （1\text{ 分}）$$

$$B=\frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\quad （1\text{ 分}）$$

$$\tan\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\quad （1\text{ 分}）$$

由初始条件 t=0，x=0，v=0 得：

$$A_0\cos(\varphi_f)-B\sin(\varphi)=0$$

$$-\beta A_0\cos(\varphi_f)-\omega_fA_0\sin(\varphi_f)+B\omega\cos(\varphi)=0$$

$$\text{从而得：}\ A_0=B\sqrt{sin^2\varphi+\left(\frac{\omega\cos(\varphi)-\beta sin(\varphi)}{\omega_f}\right)^2}\quad （2\text{ 分}）$$

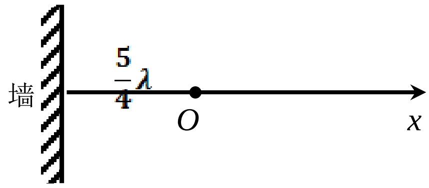
$$\tan\varphi_f = \frac{\omega cos\varphi - \beta sin\varphi}{\omega_f sin\varphi}$$ （2 分）

8.（16 分）如图所示一拉直绳子左端固定于墙上，绳子的简谐波自 x 轴正方向远处沿 x 轴负方向入射而来。入射波在坐标原点 O 的振动为 $\xi_0 = A\cos\omega t(\mathrm{m})$， O 点与墙相距 $\frac{5}{4}\lambda(\mathrm{m})$，其中$\lambda$为入射波的波长。入射波遇绳子固定于墙的端点将发生反射，反射波的振幅仍为$A(\mathrm{m})$，角频率仍为$\omega(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$，波长仍为$\lambda(\mathrm{m})$，但相位有$\pi$突变，使绳子固定端合振动为 0。求：

（1）入射波的波方程；

（2）反射波的波方程；

（3）叠加后的波方程，并画出其波形曲线。



（1）由已知的入射波在原点 O 的振动，可得左行的入射波为

$$\xi_{\mathrm{IN}} = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\ (\mathrm{m})$$ （2 分）

（2）传播到反射点的相位为

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{5}{4}\lambda = \omega t - \frac{5}{2}\pi$$ （2 分）

反射后相位有π突变，故反射波在反射点的相位为$\omega t - \frac{7}{2}\pi$，在 O 点的相位又比反射点的相位落后$\frac{5}{2}\pi$，故反射波在 O 点的相位为

$$\omega t - \frac{7}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi = \omega t - 6\pi$$ （2 分）

据此，反射波的数学表达式为

$$\xi_{\mathrm{OUT}} = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - 6\pi\right)\ (\mathrm{m})$$

或等效地改述成 $\xi_{\mathrm{OUT}} = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\ (\mathrm{m})$ （2 分）

（3）绳中的合成波为

$$\xi = \xi_{\text{IN}} + \xi_{\text{OUT}} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t(\text{m})$$ （2 分）

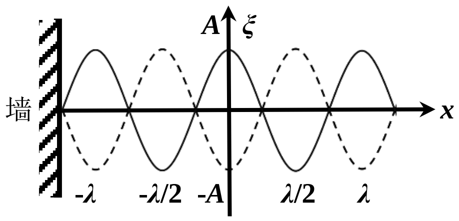
此即为驻波方程。当$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$时振幅为 0，对应波节，波节的位置可表述为

$$x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}(\text{m}),\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$ （2 分）

类似地可导得振幅最大的各点，即波腹的位置为

$$x = k\frac{\lambda}{2}(\text{m}),\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$ （2 分）

驻波波形解图见下图：



（2 分）