学生园地

Sapagof 判别法的几个应用*

张蓝天 （牡丹江师范学院数学系 2003 级 5 班 黑龙江牡丹江 157012）

摘 要 讨论了 Sapagof 判别法及其几个等价形式；提供了两个具体的例子，作为应用.

关键词 单调数列；Sapagof 判别法；等价形式；充分必要条件 **中图分类号** O173.1

讨论一个数列$\{a_n\}$是否收敛于零是数学分析中的基本问题之一，具有多方面的应用. 无穷级数已经为此提供了一种方法，这就是研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛，若级数收敛，则就得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，容易理解这个方法不会很有效，若级数发散就不能作出任何结论. 但是对于单调数列，则有下面好得多的结果.

1[1] Sapagof 判别法

Sapagof 判别法：设正数数列$\{a_n\}$单调减少，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$的充分必要条件是正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散.

证明 充分性：记$b_n=1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散. 因为正数数列$\{a_n\}$单调减少，所以数列$\{a_n\}$有极限. 记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ，则$a\geq0$. 若$a>0$，由$b_n=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a}$（因为$a$是下确界）以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a$$

知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\right)$收敛（比较判别法）. 这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散矛盾. 结论：$a=0$.

必要性：因为正数数列$\{a_n\}$单调减少，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k}\geq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_{n+1}}=1-\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}} \tag{1}$$

对于任意给定的n，由$a_n\to0(n\to\infty)$，则总可以取得充分大的p，使(1)式大于$\dfrac{1}{2}$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散.

2 Sapagof 判别法的几种等价形式

A[1] 设$\{a_n\}$为单调增加的正数数列，则该数列与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$同敛散.

证明 先证由$\{a_n\}$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛. 因为数列$\{a_n\}$为单调增加的正数数列，所以$a_n\geq a_1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$. 记$u_n=\dfrac{1}{a_n}$，显然$\{u_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n>0$，由 Sapagof 判别法充分性的证明过程知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛.

* 收稿日期：2007－06－07

再证由$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛$\Rightarrow\{a_n\}$收敛. 若$\{a_n\}$不收敛，则由$\{a_n\}$为单调增加的正数数列知，$\{a_n\}$发散到$+\infty$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，于是$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$发散，即$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$发散，与假设矛盾.

B[2] 设$\{a_n\}$是单调增加的正数数列，则

(1)当$\{a_n\}$有上界时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛；

(2)当$\{a_n\}$趋于正无穷时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$发散.

C[1,3] 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n>0)$的部分和数列为$\{S_n\}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$同敛散.

证明 先证由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散. 由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，按照定义，数列$\{S_n\}$发散，今$a_n>0$，故$S_n\to+\infty\,(n\to\infty)$，从而$\frac{1}{S_n}\to 0\,(n\to\infty)$. 记$u_n=\frac{1}{S_n}$，则$\{u_n\}$为单调减少的正数数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，于是，由 Sapagof 判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$发散，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{S_{n+1}}}{\frac{1}{S_n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{S_n}{S_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}$$

发散，亦即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散.

再证由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散. 显然由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1}}\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{S_n}{S_{n+1}}\right)\text{发散}.$$

借助 Sapagof 判别法的等价形式 A 知，$S_n\to+\infty$，于是$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散到$+\infty$.

3 Sapagof 判别法的应用

例 1 证明下列数列收敛于 0.

(1)$\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}$；(2)$\left\{\frac{n^n}{e^n n!}\right\}$.

证明(1)设$a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. 容易算出$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$，所以$a_{n+1}<a_n$，数列$\{a_n\}$单调减少，又由$a_n>0$以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$$

发散，应用 Sapagof 判别法知，数列$\{a_n\}$收敛于 0.

(2)设$a_n=\frac{n^n}{e^n n!}$. 容易算出$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$，所以$a_{n+1}<a_n$，数列$\{a_n\}$严格单调减少. 下面证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散. 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\tag{2}$$

将级数(2)与调和级数进行比较，我们考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}} \tag{3}$$

对(3)式右端应用洛必达(L' Hospital)法则，其中分子的幂指函数用对数求导法，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

由带有佩亚诺(Peano)型余项的泰勒(Taylor)公式，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x^2}}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}$$

最终，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

因为调和级数发散，所以级数(2)发散，应用 Sapagof 判别法知，数列$\{a_n\}$收敛于 0.

例 2　设$\{x_n\}$为单调递增的正数数列，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \tag{3}$$

收敛的充分必要条件是数列$\{x_n\}$有界.

证明　将(3)变形为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)+\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)\right]$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$收敛. 因此，级数(3)收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \tag{4}$$

收敛. 已知$\{x_n\}$为单调递增的正数数列，借助 Sapagof 判别法的等价形式 A 知，级数(4)收敛的充分必要条件是数列$\{x_n\}$收敛，再由$\{x_n\}$为单调递增的正数数列知，$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是其有上界，而数列$\{x_n\}$显然有下界 x_1. 证毕.

参考文献

[1]谢惠民，恽自求，易法槐等. 数学分析习题课讲义(下册)[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[2]邝荣雨等，微积分学讲义(第二册)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2006，150.

[3]吴良森，毛羽辉，韩士安等. 数学分析学习指导书(下册)[M]. 北京：高等教育出版社，2004，6.

[2]Г. М. 菲赫金哥尔茨著，徐献瑜、冷生明、梁文骐译. 微积分学教程(第二卷)(第 8 版)[M]. 北京：高等教育出版社，2006，240.