第十三次书面作业参考答案

1 补充教材

10.10 利用以下公式计算:

$$\begin{aligned}
p_0 &= -g_0 = b - Ax_0, \lambda_0 = -\frac{p_0^T g_0}{p_0^T A p_0}, x_1 = x_0 + \lambda_0 p_0 \\
g_k &= Ax_k - b \\
\beta_{k-1} &= \frac{g_k^T A p_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}} \\
p_k &= -g_k + \beta_{k-1} p_{k-1} \\
\lambda_k &= -\frac{p_k^T g_k}{p_k^T A p_k} \\
x_{k+1} &= x_k + \lambda_k p_k (k = 1, 2, \cdots, n-1)
\end{aligned}$$

可以得到:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{41} \\ \frac{7}{41} \\ -\frac{21}{41} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{18}{47} \\ \frac{14}{47} \\ -\frac{22}{47} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.11.

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
x_1 &= \begin{pmatrix} 0.5882 \\ 1.1764 \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} 1.1367 & -0.0796 \\ -0.0796 & 0.1349 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 3.3218 \\ -0.4152 \end{pmatrix} \\
x_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10.14 (1)

$$
\begin{aligned}
&(A+uv^T)(A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u})\\
=&I+uv^TA^{-1}-\frac{uv^TA^{-1}+uv^TA^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\\
=&I+uv^TA^{-1}-\frac{u(1+v^TA^{-1}u)v^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\\
=&I+uv^TA^{-1}-uv^TA^{-1}\\
=&I
\end{aligned}
$$

(2) 由 DFP 公式（严格来说应称之为 H_k 的 DFP 校正公式）：

$$H_{k+1}=H_k+\frac{s_ks_k^T}{s_k^Ty_k}-\frac{H_ky_ky_k^TH_k}{y_k^TH_ky_k}$$

及 $H_k\leftrightarrow B_k, s_k\leftrightarrow y_k$ 的对偶关系：$H_{k+1}y_k=s_k, B_{k+1}s_k=y_k$，可以直接将 H_k 的 DFP 公式中的 H_k, H_{k+1} 换成 B_k, B_{k+1}，s_k, y_k 调换位置，便可以得到 B_k 的 BFGS 校正公式：

$$B_{k+1}=B_k+\frac{y_ky_k^T}{y_k^Ts_k}-\frac{B_ks_ks_k^TB_k}{s_k^TB_ks_k}$$

，对其求逆的结果称之为 H_k 的 BFGS 校正公式（对这个公式用对偶性调换得到的结果称为 B_k 的 DFP 校正公式，可以由 H_k 的 DFP 校正公式求逆得到），下面展示求逆的过程：由 Sherman-Morrison 定理可以得到：

$$(A+\frac{uv^T}{\alpha})^{-1}=a^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{\alpha+v^TA^{-1}u}$$

观察 B_k 的 BFGS 公式，记 $M=B_k+\frac{y_ky_k^T}{y_k^Ts_k}$，则：

$$M^{-1}=B_k^{-1}-\frac{B_k^{-1}y_ky_k^TB_k^{-1}}{y_k^Ts_k+y_k^TB_k^{-1}y_k} \tag{1}$$

$$B_{k+1}^{-1}=M^{-1}-\frac{M^{-1}B_ks_ks_k^TB_kM^{-1}}{-s_k^TB_ks_k+s_k^TB_kM^{-1}B_ks_k} \tag{2}$$

将 (1) 式代入 (2) 式，并利用 $H_kB_k=I$，可得：

$$H_{k+1}=H_k+(1+\frac{y_k^TH_ky_k}{s_k^Ty_k})\frac{s_ks_k^T}{s_k^Ty_k}-\frac{s_ky_k^TH_k+H_ky_ks_k^T}{s_k^Ty_k}$$