10.28

第四章课后习题：14、17、18、21、22

14. 设随机变量 X 服从参数为 u 和 σ^2 的对数正态分布，即 $\ln X \sim N(u,\sigma^2)$，其密度函数见例 4.15. 试求 X 的密度函数 $p(x)$，期望 $E(X)$ 和方差 $Var(X)$。

解：

$$Y = \ln X \sim N(u,\sigma^2),$$

$$\therefore \quad X = e^Y \triangleq g(Y) \quad Y = h(X) = \ln X.$$

$$h'(x) = \tfrac{1}{x}$$

$$\therefore\ p_x(x) = p_y(h(x))|h'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}\}, \quad x > 0$$

$$令\ y = \frac{\ln x - u}{\sigma}. \quad 故\ x = e^{\sigma y + u},\ dx = \sigma e^{\sigma y+u} dy.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ EX &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}\}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{\sigma y+u}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2 - 2\sigma y + \sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} + u\right\}dy \\
&= (\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}\}dy)\exp\{\frac{\sigma^2}{2}+u\} = \exp\{\frac{\sigma^2}{2}+u\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{+\infty} x^2 p(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\sigma y + u + \sigma y + u - \frac{y^2}{2}\right\}dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2 - 4\sigma y + 4\sigma^2}{2} + 2\sigma^2 + 2u\right\}dy \\
&= \exp\left\{2\sigma^2 + 2u\right\}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(y - 2\sigma\sigma^2\right.}{2}\right\}dy \\
&= e^{2\sigma^2+2u}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = e^{2\sigma^2+2u} - e^{\sigma^{\sigma^2+2u}} = e^{\sigma^2+2u}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

17.设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty.$$

试求$E(\min\{|X|,1\})$.

解：

$$\begin{aligned}E(\min\{|X|,1\})&=\int_{-\infty}^{\infty}\min\{|x|,1\}f(x)dx\\&=\int_{-1}^{1}|x|f(x)dx+\int_{1}^{\infty}f(x)dx+\int_{-\infty}^{1}f(x)dx\\&=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x|_1^{\infty}\\&=\frac{\ln 2}{\pi}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

18. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=1)=P(X=2)=1/2$, 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数；

(2) 求期望 $E(Y)$.

解：(1) 已知

$$0<Y<2.$$

$$P(Y\leqslant y)=P(Y\leqslant y\mid X=1)P(X=1)+P(Y\leqslant y\mid X=2)P(X=2).$$

$a.\ 0<y\leqslant 1:$

$$P(Y\leqslant y)=y\cdot\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}y$$

$b.\ 1<y<2:$

$$P(Y\leqslant y)=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{y}{4}+\frac{1}{2}$$

所以

$$F(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{3}{4},y & 0<y\le 1;\\ \frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & 1<y\le 2;\\ 1, & y>2.\end{cases}$$

(2)

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p(y)dy=\int_0^1\frac{3}{4}ydy+\int_1^2\frac{y}{4}dy=\frac{3}{8}y^2\Big|_0^1+\frac{y^2}{8}\Big|_1^2=\frac{3}{4}.$$

21. (1) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从泊松分布，参数分别为 λ 与 u. 对任何给定的非负整数 $k\leqslant m$,求 $P(X=k\mid X+Y=m)$ 及 $E(X\mid X+Y=m)$;

(2) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从二项分布 $B(n,p)$,对任何给定的非负整数 $k \leqslant m$,求 $P(X=k \mid X+Y=m)$ 及 $E(X \mid X+Y=m)$.

解：(1) 由 $Poisson$ 分布再生性，$X+Y \sim Poi(\lambda+u)$.

$$\begin{aligned}
P(X=k \mid X+Y=m) &= \frac{P(X=k \cdot X+Y=m)}{P(X+Y=m)} = \frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot \frac{u^{m-k}}{(m-k)!}e^{-u}}{\frac{(\lambda+u)^m}{m!}e^{-(\lambda+u)}} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{\lambda^k u^{m-k}}{(\lambda+u)^m} \\
&= \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+u}\right)^k\left(\frac{u}{\lambda+u}\right)^{m-k} \quad \sim B\left(m, \frac{\lambda}{\lambda+u}\right)
\end{aligned}$$

所以

$$E[X \mid X+Y=m] = m \cdot \frac{\lambda}{\lambda+u} = \frac{\lambda m}{\lambda+u}.$$

(2) 这一小问用到了二项分布的再生性： $X, Y \sim B(n,P),\ X+Y \sim B(2n,P)$.

$$\begin{aligned}
\therefore P(X=k \mid X+Y=m) &= \frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}
\end{aligned}$$

故 $X \mid X+Y=m \sim H(m,n,2n)$，即超几何分布。利用超几何分布的期望计算公式可得

$$E[X \mid X+Y=m] = m \cdot \frac{n}{2n} = \frac{m}{2}$$

或

$$\begin{aligned}
E[X \mid X+Y=m] &= \sum_{k=0}^{m} \frac{k \cdot \binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}} \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{k \cdot 1/n!(n!(n-k)!(m-k)!(n-m+k)!}{k}. \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n!}{(m-k)!(n-m+k)!} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}\frac{n!}{(m-i-1)!(n-m+i+1)!} \\
&= \frac{n}{\binom{2n}{m}} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i}\binom{n}{m-i-1} = \frac{n}{\binom{2n}{m}}\binom{2n-1}{m-1} = \frac{m}{2}
\end{aligned}$$

22. 假设随机变量 X 有分布律 $P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=1/3$, 随机变量 Y 在 $X=k$ 的条件下服从均值为 k, 方差为 1 的正态分布，即 $Y|X=k \sim N(k,1)$.

(1) 求随机变量 Y 的概率密度函数和期望;

(2) 求随机变量 $X+Y$ 的分布函数；

(3) 求随机变量 X 和 Y 的协方差.

解：(1)

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=\sum_{k=0}^{2}P(Y\leqslant y\mid x=k)P(x=k)=\frac{1}{3}(\Phi(y)+\Phi(y-1)+\Phi(y-2))$$

对其求导可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}+e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}+e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}\right)$$

故

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_Y(y)dy=\frac{1}{3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}\right]=\frac{1}{3}(0+1+2)=1$$

(2)

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(z)=P(X+Y\leqslant z)&=\sum_{k=0}^{2}P(X+Y\leqslant z\mid X=k)P(X=k)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}P(Y\leqslant z-k\mid x=k)\\&=\frac{1}{3}[P(Y\leqslant z\mid X=0)+P(Y\leq z-1\mid X=1)+P(Y\leq z-2\mid X=2)]\\&=\frac{1}{3}[\Phi(z)+\Phi(z-1)+\Phi(z-2-2)]=\frac{1}{3}[\Phi(z)+\Phi(z-2)+\Phi(z-4)]\end{aligned}$$

(3) 协方差公式为 $\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$.

$$\begin{aligned}EXY&=E[E[XY\mid X]]\\&=E[XY\mid X=0]P(X=0)+E[XY\mid X=1]P(X=1)+E[XY\mid X=2]P(X=2)\\&=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

再结合 $EX=EY=1$ 由协方差公式计算得 $\operatorname{cov}(X,Y)=2/3$.