11.11

第四章课后习题：41、46、48、49、50

41. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(1,2,4,9,0.3)$, 求 $E(X|Y=2)$ 与 $E(XY^2+Y|Y=1)$.

解：由例 3.14 知 $X|Y=y \sim N(1+0.2(y-2), 0.91\cdot 4)$，故

$$E(X|Y=2)=1,\ E(XY^2+Y|Y=1)=1+E(X|Y=1)=1.8$$

46. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$为一列独立同分布的随机变量，满足$E(X_i^k)=\alpha_k,\ k=1,2,3,4,$ 利用中心极限定理说明 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 的渐近分布是什么.

解：由中心极限定理可知，

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}} \text{ 近似服从 } N(0,1)$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ 近似服从 } N(n\alpha_2, n(\alpha_4-\alpha_2^2))$$

48. (1) 一个复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成. 在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10. 为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率.

(2) 一个复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成，且必须至少有八成的部件工作才能使整个系统正常工作. 每个部件的可靠性为 0.90. 问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95?

解：(1)

$$X_i = I(\text{第}i\text{个部件起作用})$$

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$EX_i = 0.9 \quad \mathrm{Var}X_i = 0.9\times 0.1 = 0.09$$

$$
\begin{aligned}
P(\text{整个系统起作用}) &= P(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 85) \\
&= P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot EX_i}{\sqrt{100 \cdot VarX_i}} \geq \frac{85 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.09}}) \\
&= P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot EX_i}{\sqrt{100 \cdot VarX_i}} \geq -\frac{5}{3}) \\
&= 1 - P(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot EX_i}{\sqrt{100 \cdot VarX_i}} \leq -\frac{5}{3}) \\
&\approx 1 - \Phi(-\frac{5}{3}) = \Phi(\frac{5}{3}) \approx \Phi(1.67) \approx 0.9525.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&P(\text{整个系统可靠}) = P(S_n \geq 0.8n) = P(\frac{S_n - ESn}{\sqrt{VarSn}} \geqslant \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{n \cdot 0.09}}) \\
&\approx 1 - \Phi(-\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \geq 0.95 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \geqslant 1.65 \quad \Longrightarrow \quad n \geqslant 24.5025.
\end{aligned}
$$

所以 n 至少为 25.

49. 设某自动取款机每天有 200 次取款，设每次的取款额 (百元) 服从

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

上的离散均匀分布，且每次取款额是相互独立的. 试求该取款机要至少存入多少钱才能保证以 95% 的概率不会出现余额不足.

解：设每次取款额为 X_i $(i = 1, 2, \ldots, 200)$

$$EX_i = \sum_{k=1}^{10} k \cdot P(Xi = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} k = \frac{11}{2}$$

$$EX_i^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 \, P(X_i = k) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} k^2 = 38.5$$

$$VarX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = 38.5 - (5.5)^2 = 8.25$$

设 $S_n = \sum_{j=1}^{200} X_j$，至少要存入 x 百元.

$$P(\, S_n \leq x \,) = P\,(\, \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} \;\leq\; \frac{x - 200 \cdot 5.5}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} \,)$$

$$\approx \Phi(\frac{x-1100}{5\sqrt{66}}) \geq 0.95$$

$$\therefore \frac{x-1100}{5\sqrt{66}} \geq 1.65 \Longrightarrow x \geq 1167.023$$

故至少存 1168 百元。

50. 某种计算机在进行加法时，要对每个加数进行取整. 设每次取整的误差相互独立且服从 (-0.5,0.5) 上的均匀分布.

(1) 若现在要进行 1 500 次加法运算，求误差总和的绝对值超过 15 的概率；

(2) 若要保证误差总和的绝对值不超过 10 的概率不小于 0.90, 至多只能进行多少次加法运算？

解：(1) 记第 i 次运算的误差为 X_i $(i=1,\cdots,1500)$，则 $X_i \sim U(-0.5,0.5)$，故 $EX_i=0$, $VarX_i=1/12$；记 $S_n=\sum_{i=1}^{1500} X_i$

$$\begin{aligned} P(|S_n|>15) &= 1-P(|S_n|\leq 15) \\ &= 1-P(-15\leq S_n\leq 15) \\ &= 1-P(\frac{-15-0}{\sqrt{1500\cdot\frac{1}{12}}} \leq \frac{S_n-ES_n}{\sqrt{VarS_n}} \leq \frac{15-0}{\sqrt{1500\cdot\frac{1}{12}}}) \\ &\approx 1-\left[\Phi(\frac{3}{\sqrt{5}})-\Phi(-\frac{3}{\sqrt{5}})\right] = 1-\Phi(\frac{3}{\sqrt{5}})+1-\Phi(\frac{3}{\sqrt{5}}) \\ &= 2(1-\Phi(\frac{3}{\sqrt{5}})) \approx 2(1-\Phi(1.34)) \approx 2(1-0.9099) = 0.1802 \end{aligned}$$

(2)

设至多可进行 n 次加法

$$P_(|S_n|\leq 10) = P(-10\leq S_n\leq 10)$$

$$= P(\frac{-10-0}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{12}}} \leq \frac{S_n-ES_n}{\sqrt{VarS_n}} \leq \frac{10-0}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{12}}}) \approx \Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-\Phi(-\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})$$

$$= 2\Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-1 \geq 0.9$$

$$\therefore \Phi(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}}) \geq 0.95 \Rightarrow \frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{n}} \geq 1.65 \Rightarrow n \leq \frac{100.12}{(1.65)^2} \approx 440.7713 \quad \therefore \text{至多进行440次}$$