交叉学科电磁学习题答案

第 1 章 电力与电场

1.1

通过摩擦可以使物体直接从原子或分子层面获得或失去电子，因此产生的电荷量较大。而接触带电则需要通过已经带电电物体来传递电荷，这个过程中会有电荷的损耗，因此产生的电荷量相对较少。

1.2

在静电单位制中，当 2 个电荷量为 Q 的正电荷相距 $r = 1\ \text{cm}$ ，作用力为 $F = 1\ \text{g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$ 时，那么

$$Q^2 = Fr^2 = 1\text{g}\cdot\text{cm}^3/\text{s}^2,$$

$$Q = 1\ \text{g}^{1/2}\cdot\text{cm}^{3/2}/\text{s}.$$

在国际单位制中，假设满足上述条件的电荷对应电荷量为 q ，那么

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 F r^2 = 3.335\times10^{-10}\ \text{C}.$$

因此，在数值上，我们需要将静电单位制对应的电荷量乘 3.335×10^{-10} 以得到国际单位制对应的电荷量。而静电单位制电子的电荷量为 4.774×10^{-10} ，转换为国际单位制，可得

$$e = 4.774\times10^{-10}\times3.335\times10^{-10} = 1.592\times10^{-19}\ \text{C}.$$

1.3

令地球与月球的电荷量分别为 q_1, q_2 ，那么 $q_1 + q_2 = Q$ ，库仑力为 $\dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，万有引力为 $\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ 。因此

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

$$q_1q_2 = 4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2.$$

(1) $Q = q_1 + q_2 \ge 2\sqrt{q_1q_2}$ ，因此

$$Q \ge 2\sqrt{4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2} = 1.14\times10^{-14}\ \text{C}.$$

(2) 此时 $q_1 = Cm_1, q_2 = Cm_2$ ，其中 C 是常数。因此

$$(Cm_1)(Cm_2) = 4\pi\epsilon_0 G m_1 m_2,$$

$$C = \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}\,.$$

因此

$$Q = q_1 + q_2 = C(m_1 + m_2) = \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}(m_1 + m_2) = 5.21 \times 10^{14}\ \mathrm{C}\,.$$

1.4

质子与中子质量相近，约为 $m_0 = 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ 。因此，人体内质子与中子数量总和约为

$$N = \frac{50}{1.67 \times 10^{-27}} = 2.99 \times 10^{28}\,.$$

而一个质子带电量为 $e = 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ ，质子数量与中子数量近似相等，因此人体带正电荷总量为

$$Q_+ = \frac{1}{2}Ne = 2.39 \times 10^{9}\ \mathrm{C}\,.$$

正电荷与负电荷对应总电量约为

$$Q = 10^{-8}Q_+ = 23.9\ \mathrm{C}\,.$$

因此，静电力为

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 5.14 \times 10^{12}\ \mathrm{N}\,.$$

「所以你觉得这个情况会发生吗？」

万有引力为

$$F' = \frac{Gm^2}{r^2} = 1.67 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}\,.$$

万有引力远远小于静电力。

1.5

(1) 电量值为

$$Q = -\frac{mg}{E} = -3.33 \times 10^{-2}\ \mathrm{C}\,.$$

(2) 小球的体积为

$$V = \frac{m}{\rho} = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,$$

半径为

$$R = \left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{1/3} = 0.1\ \mathrm{m}\,.$$

表面的电场强度为

$$E = \frac{\left|Q\right|}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 3 \times 10^{10}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1},$$

这远大于击穿空气的电场强度 $3 \times 10^5\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$ ，因此空气会被击穿，无法实现实验。

1.6

选取距离圆心 $(x, x + dx)$ 的线段，它受到的库仑力为

$$dF = \frac{Q(\lambda dx)}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)} \frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}} = \frac{Q\lambda x dx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}\,.$$

因此，直线受到的库仑力为

$$F = \int_0^\infty \frac{Q\lambda x dx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\infty \frac{t dt}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\,.$$

1.7

小球受到的库仑力为

$$F = m\ddot{x} = -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \approx -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,.$$

因此，小球做周期振动，其规律为

$$x = x_0 \cos\left(\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}\right)^{1/2} t\right).$$

1.8

不会，建议别碰

1.9

无论电子束的厚度是多少，它对应的面电荷密度都保持不变，都是

$$\sigma = n d_0 .$$

因此，根据高斯定理，电子束边缘的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{n e d_0}{2\epsilon_0} .$$

假设电子束离开窄缝的时间为 t 后，电子束的宽度为 $h(t)$ ，因此

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{2eE}{m} = \frac{n e^2 d_0}{\epsilon_0 m} .$$

「注意，电子束是往两边扩展的，所以需要乘 2」而刚从窄缝出来的电子是平行运动的，因此

$$h\Big|_{t=0} = d_0, \qquad \frac{dh}{dt}\Bigg|_{t=0} = 0.$$

$$h(t) = d_0 + \frac{n e^2 d_0}{2\epsilon_0 m} t^2 .$$

当 $h(t) = 2d_0$ 时，

$$t = \left(\frac{2\epsilon_0 m}{n e^2}\right)^{1/2},$$

此时电子运动距离为

$$x = vt = v\left(\frac{2\epsilon_0 m}{n e^2}\right)^{1/2} = 2.5 \text{ cm} .$$

1.10

根据高斯定理，柱内部 $\mathscr{R} < R$ 的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi \mathscr{R} \epsilon_0} \int_0^{\mathscr{R}} \rho 2\pi r dr = \frac{1}{2\pi \mathscr{R} \epsilon_0} \int_0^{\mathscr{R}} \left(ar - br^3\right) 2\pi r dr = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} a \mathscr{R} - \frac{1}{4} b \mathscr{R}^2\right) .$$

柱外部为 $\mathscr{R} < R$ 的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^R \rho 2\pi r dr = \frac{1}{2\pi\mathscr{R}\epsilon_0}\int_0^R \left(ar - br^3\right) 2\pi r dr = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{aR^3}{3\mathscr{R}} - \frac{bR^4}{4\mathscr{R}}\right).$$

1.11

选取 AC 上任意 D 点使得 $OD = x$ ，其中 $-R < x < R$ ，负号表示 D 在 O 的左侧。我们只需证明 D 点电场强度在 AC 方向的分量为 0 即可。因此，

$$\cos\angle BDC = \frac{(R-x,\, 0)\cdot(R\cos\theta - x, R\sin\theta)}{(R-x)\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{1/2}} = \frac{R\cos\theta - x}{\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{1/2}}.$$

根据余弦定理，

$$\left|BD\right|^2 = R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2.$$

$(\theta, \theta + d\theta)$ 段的电荷在 D 点产生的电场 AC 方向的分量为

$$dE^{\top} = -\frac{\lambda_0 \sin\theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 \left|BD\right|^2}\cos\angle BDC = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{(R\cos\theta - x)\sin\theta d\theta}{\left(R^2 - 2Rx\cos\theta + x^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{(t-\cos\theta)\sin\theta d\theta}{\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)^{3/2}},$$

其中 $t = x/R \in (-1,\, 1)$ 。因此， D 点电场强度在 AC 方向的分量为

$$E^{\top} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{(t-\cos\theta)\sin\theta d\theta}{\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{(t-u)du}{\left(1 - 2tu + t^2\right)^{3/2}} = 0.$$

「实际上，我还真不知道它为什么为 0 」

1.12

半圆形部分在 O 点产生的电场强度为

$$E_1 = \int_0^{\pi}\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

右上方部分在 O 点产生的电场强度水平分量为

$$E_2 = \int_0^{\infty} -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)}\frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\infty}\frac{tdt}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

同样的，右下方部分在 O 点产生的电场强度水平分量也为 E_2 。因此， O 点的电场强度为

$$E = E_1 + 2E_2 = 0.$$

1.13

根据高斯定理，线电荷密度为 λ 的无限长直导线在距离为 R 的位置产生的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

因此，半圆柱角度为 $(\theta, \theta + d\theta)$ 的区域在 O 点电场强度的垂直分量为

$$dE^{\perp} = \frac{\sigma R d\theta}{2\pi\epsilon_0 R}\sin\theta = \frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0}\sin\theta.$$

O 点电场强度为

$$E^{\perp} = \int_0^{\pi} \frac{\sigma d\theta}{2\pi\epsilon_0}\sin\theta = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}.$$

1.14

$$\begin{aligned}
E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(r+l)^2}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - 2\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{2x^2\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2} \\
&\approx \frac{3qx^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{3ql^2}{2\pi\epsilon_0 r^4},
\end{aligned}$$

其中 $x = l/r \ll 1$ 。

1.15 – 1.17

直接空着，别浪费时间

1.18

「这一题是不严谨的」选取靠近狭缝距离为 d 的位置，其中 $d \ll a$ ，因此，我们可以将狭缝视为无穷大平板。根据高斯定理，它产生的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

如果狭缝被补上，那么整个体系就是完整的圆柱面，根据高斯定理，内部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_1 = 0.$$

外部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

因此，如果狭缝是存在的，那么内部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_1' = E_1 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

外部（靠近圆柱，并且距离远小于 a）电场强度为

$$E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

1.19

(1) 根据高斯定理，选取上下表面积为 A 的圆柱面，因此

$$(E_1 - E_2)A = \frac{\rho A h}{\epsilon_0}.$$

电荷体密度为

$$\rho = \frac{\epsilon_0(E_1 - E_2)}{h} = -1.32 \times 10^{-13}\ \mathrm{C \cdot m^{-3}}.$$

其中 $E_1 = 60\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}, E_2 = 200\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}, h = 300 - 200 = 100\ \mathrm{m}$.

(2) 电场强度随高度的变化率为

$$\lambda = \frac{E_1 - E_2}{h} = -1.40\ \mathrm{N \cdot m^{-1} \cdot C^{-1}}.$$

因此，在贴近地面的地方，电场强度为

$$200 - 200\lambda = 480\ \mathrm{N \cdot C^{-1}}.$$

根据高斯定理，假设地面上的面电荷密度为 σ，那么在贴近地面的地方，电场强度为

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

因此

$$\sigma = 480\epsilon_0 = 4.25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}}.$$

1.20

根据高斯定理，在 N 区、 P 区以外，电场强度均为 0 。

为了计算 N 区的电场强度，选取两侧分别位于 $x_1 < -x_n, -x_n \le x_2 \le 0$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$EA = \frac{N_D e\left(x_n + x\right)A}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{N_D e\left(x_n + x\right)}{\epsilon_0}.$$

选取两侧分别位于 $0 \le x_1 \le x_p, x_2 > x_p$ ，横截面积为 A 的圆柱面，同理可得， P 区的电场强度为

$$E = \frac{N_A e\left(x_p - x\right)}{\epsilon_0}.$$

1.21

根据高斯定理，

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^2}\int_0^R r e^{-kr} dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 R^2 k}\left(1-(1+kR)e^{-kR}\right).$$

1.22

假设此时地球带电量为 Q ，那么地球外部电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

无穷远处电势为 0 ，那么地球表面的电势为

$$V = \int_R^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 RV = 7.12\times 10^{-4}\ \mathrm{C}.$$

它对应电子个数为

$$N = \frac{Q}{|e|} = 4.45\times 10^{15}\ \mathrm{C}.$$

总质量为

$$m = Nm_e = 4.05\times 10^{-15}\ \mathrm{kg}.$$

1.23

我们可以构建一个光滑的长方形管道 $ABCD$ ，其两侧 AB, CD 平行于电场强度方向，另外两侧 BC, DA 垂直于电场强度方向。根据题目可得，在平行于电场强度方向的两侧，电场强度大小是不同的：不失一般性，假设 AB 侧电场强度大于 CD 侧电场强度。

将正电荷放入管道内部的 A 点。正电荷在 AB 侧被电场加速，之后落入 BC 侧。而 BC 侧电场不会对正电荷做功，所以正电荷在 BC 侧动能不变，直到落入 CD 侧为止。之后正电荷在 CD 侧被电场减速，但是 CD 侧电场强度较小，因此正电荷并不会被停下来，这样就可以落入 DA 侧。与 BC 侧相同，正电荷在 DA 侧动能不变，直到落入 AB 侧为止。因此，正电荷以大于 0 的动能回到了 A 点。如此往复，我们就能够得到一个永动机！

1.24

电势为

$$V(R) = \int_R^\infty E dr = \frac{kq}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

距离中心为 $(R, R + dR)$ 的区域在该点产生的电场强度为

$$dE = \frac{k\sigma 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + R^2\right)^{3/2}} \frac{r}{\left(r^2 + R^2\right)^{1/2}} = \frac{k\sigma r R dR}{2\epsilon_0 \left(r^2 + R^2\right)^2},$$

其中 σ 是导体板的面电荷密度。该点的总电场强度为

$$E = \int_0^\infty \frac{k\sigma r R dR}{2\epsilon_0 \left(r^2 + R^2\right)^2} = \frac{k\sigma}{2\epsilon_0 r} \int_0^\infty \frac{t dt}{\left(1 + t^2\right)^2} = \frac{k\sigma}{4\epsilon_0 r}.$$

电势为

$$V(R) = \int_R^\infty E dr = \frac{k\sigma}{4\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r},$$

该反常积分是不收敛的。

1.25

假设内球带电量为 q 。

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，选取半径为 $r \in \left(R_2, R_3\right)$ 的球面，可以得出，球壳内侧带电量为 $-q$ 。而球壳内侧与外侧总带电量为 Q ，因此球壳外侧带电量为 $Q + q$ 。因为导体电势处处相等，所以对于球的电势，我们只需计算球心处的电势即可，其取值为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{-q}{R_2} + \frac{Q + q}{R_3} \right) = 0.$$

因此

$$q = \frac{R_1R_2}{R_1R_3 - R_1R_2 - R_2R_3} Q\,.$$

区域 (R_3, ∞) 之间的电场强度为

$$E = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

因此，球壳的电势为 R_3 处的电势，

$$V = \int_{R_3}^{\infty} E dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}\,.$$

1.26

不会

1.27

假设在一定范围内，电场强度的形式为

$$\mathbf{E}(x,y,z) = E(x,y,z)\mathbf{i},$$

其中 $\mathbf{i}$ 是 x 轴方向的单位向量。我们只需证明 $E(x,y,z)$ 取到常数即可，这等价于证明

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

因为静电场满足

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{curl } \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

其中 div, curl 分别代表向量场的散度与旋度。所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

1.28

电场强度为

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}}.$$

电势为

$$V = \int_x^\infty E dr = \int_x^\infty \frac{Qrdr}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{x/R}^\infty \frac{tdt}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}}.$$

1.29

$$\begin{aligned} E^1 &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Ax}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}, \\ E^2 &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Ay}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}, \\ E^3 &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbf{E} = E^1\mathbf{i} + E^2\mathbf{j} + E^3\mathbf{k} = \frac{Ax}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{Ay}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}\mathbf{j}.$$

$$\left|\mathbf{E}\right| = \left(\left(E^1\right)^2 + \left(E^2\right)^2 + \left(E^3\right)^2\right)^{1/2} = \frac{A\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}}{\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}}.$$

1.30

根据高斯定理， $R \geq r_a$ 的电场强度为 0 。 $R < r_a$ 的电荷密度「不考虑原子核」为

$$\rho = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi r_a^3} = -\frac{3Ze}{4\pi r_a^3}.$$

因此，电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(Ze + \rho\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{R^3}{r_a^3}\right).$$

电势为

$$V = \int_r^{r_a} E dR = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3} - \frac{1}{2r_a}\right) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3}\right).$$

1.31

根据高斯定理， $r < R$ 处的电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r.$$

因此，电荷受到的电场力为

$$F = m\ddot{r} = -qE = -\frac{q\rho}{3\epsilon_0}r.$$

电荷做周期振动，其规律为

$$r(t) = R\cos\left(\left(\frac{q\rho}{3\epsilon_0 m}\right)^{1/2}t\right).$$

1.32

根据高斯定理，当 $x \le -d/2$ 时，

$$E = -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

当 $x \ge d/2$ 时，

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$

对于 $-d/2 < x < d/2$ ，选取两侧分别位于 $x_1 < -d/2, -d/2 \le x_2 \le d/2$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$\left(E + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\right)A = \frac{1}{\epsilon_0}\rho A\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

1.33

根据高斯定理，当 $y \le a$ 时，

$$E = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

当 $y \geq a$ 时，

$$E = \frac{\rho a}{\epsilon_0}.$$

对于 $-a < y < a$ ，选取两侧分别位于 $y_1 < -a, -a \leq y_2 \leq a$ ，横截面积为 A 的圆柱面，因此

$$\left(E + \frac{\rho a}{\epsilon_0}\right) A = \frac{1}{\epsilon_0} \rho A (y + a),$$

$$E = \frac{\rho y}{\epsilon_0}.$$

因此，当 $y \leq a$ 时，电势为

$$V = -\int_{-b}^{y} -\frac{\rho a}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b + y).$$

当 $-a < y < a$ 时，电势为

$$V = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b - a) - \int_{-a}^{y} \frac{\rho Y}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(-\frac{a^2}{2} + ab - \frac{y^2}{2}\right).$$

当 $y \geq a$ 时，电势为

$$V = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(-a^2 + ab\right) - \int_{a}^{y} \frac{\rho a}{\epsilon_0} dY = \frac{\rho a}{\epsilon_0}(b - y).$$

1.34

距离中心为 $(R, R + dR)$ 的区域在 P 点产生的电场强度为

$$dE = \frac{\sigma 2\pi R dR}{4\pi\epsilon_0\left(x^2 + R^2\right)} \frac{x}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

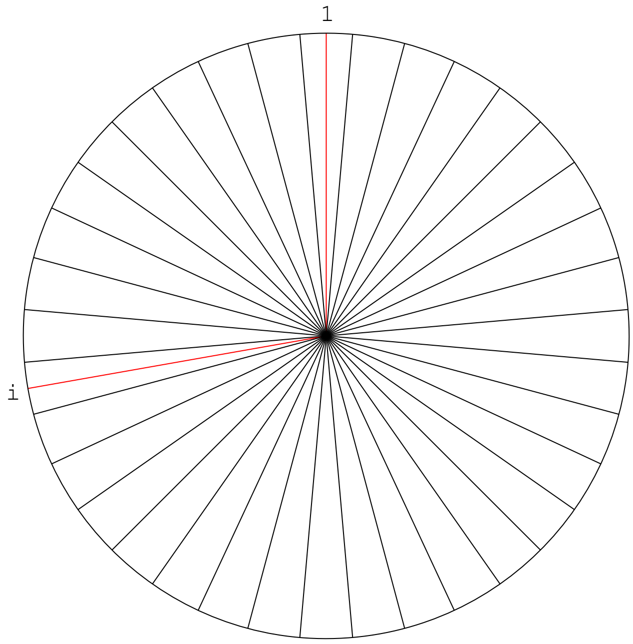
因此， P 点的电场强度为

$$E = \int_{r}^{\infty} \frac{\sigma x R dR}{2\epsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{r/x}^{\infty} \frac{t dt}{\left(1 + t^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0\left(r^2 + x^2\right)^{1/2}}.$$

电势为

$$V = -\int_{0}^{x} \frac{\sigma y}{2\epsilon_0\left(r^2 + y^2\right)^{1/2}} dy = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\left(r^2 + x^2\right)^{1/2} - r\right).$$

1.35



将圆柱面等分为 $N(N \gg 1)$ 等份，每一份可以视为线电荷密度为 $\lambda = \dfrac{2\pi R\sigma}{N}$ 的无限长直导线。

第 $i(2 \le i \le N)$ 份“无限长直导线”在第 1 份“无限长直导线”处产生的电场强度为

$$E_{1i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\left(2R\sin\frac{\theta_{1i}}{2}\right)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R\sin\frac{\theta_{1i}}{2}},$$

其中 $\theta_{1i} = \dfrac{2\pi}{N}(i-1)$ 是红线之间的夹角，如图所示。因此，第 $i(2 \le i \le N)$ 份“无限长直导线”对第 1 份“无限长直导线”单位长度的作用力法向分量为

$$F_{1i} = \lambda E_{1i}\cos\left(\frac{\pi-\theta_{1i}}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N^2}.$$

这是一个常数。因此，第 1 份“无限长直导线”单位长度受到的作用力为

$$F_1 = (N-1)F_{1i} \approx \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}.$$

为了计算一半圆柱面单位长度受到的作用力，我们需要计算第 1 份至第 $\lfloor N/2 \rfloor$ 份“无限长直导线”单位长度受到的总作用力。很显然，总作用力方向是向左的，第 $i(1 \le i \le \lfloor N/2 \rfloor)$ 份“无限长直导线”单位长度受到的作用力向左的分量为

$$G_i = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{1i}\right) = \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\sin\theta_{1i} \approx \frac{\pi R\sigma^2}{\epsilon_0 N}\sin\frac{2\pi i}{N}.$$

因此，一半圆柱面单位长度受到的作用力为

$$G = \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} G_i = \frac{\pi R \sigma^2}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{N} \sin \frac{2\pi i}{N} \approx \frac{\pi R \sigma^2}{\epsilon_0} \int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\, dx = \frac{R\sigma^2}{\epsilon_0}.$$

1.36

(1) 当 $r \le R_1$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

当 $R_1 < r \le R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

当 $r > R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

(2) 当 $r \le R_1$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

当 $R_1 < r \le R_2$ 时，电场强度

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi \epsilon_0 r}.$$

当 $r > R_2$ 时，电场强度

$$E = 0.$$

第 2 章 静电场中的物质与电场能量

2.1

因为 q_1, q_2 位于空腔的中心，所以空腔内表面的感应电荷是均匀分布的，这表明 q_1, q_2 受到的静电力为 0 。

根据导体内部电场强度为 0 的性质，以及高斯定理，可以得出， q_1, q_2 对应空腔内表面的感应电荷分别为 $-q_1, -q_2$ 。这表明 A 外表面的电荷量为 q_1+q_2 。因此，根据高斯定理， q_3 处的电场强度为 $\frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，这表明 q_3 受到的静电力为 $\frac{(q_1+q_2)\,q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。根据牛顿第三定律，导体受到的静电力与三个电荷受到的总静电力大小相同，方向相反，因此其取值为 $-\frac{(q_1+q_2)\,q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

2.2

导体板在 AB 位置时，假设左侧与右侧电荷量分别为 Q_1, Q_2 ，左边区域与右边区域电场强度分别为 E_1, E_2 。因此 $Q_1+Q_2=Q$ 。根据高斯定理可得

$$E_1 = -\frac{Q_1}{\epsilon_0 A}, \qquad E_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 A},$$

其中 A 是导体板的面积。因为电容器两端电势差为 V ，所以

$$-E_1 L - E_2(4L) = V,$$

$$Q_1 = \frac{1}{5}\left(4Q + \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right),$$
$$Q_2 = \frac{1}{5}\left(Q - \frac{\epsilon_0 AV}{L}\right).$$

$$E_1 = -\frac{Q_1}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(-\frac{4Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right),$$
$$E_2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{5}\left(\frac{Q}{\epsilon_0 A} - \frac{V}{L}\right).$$

电场能量为

$$W_1 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 AL + \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 A(4L) = \frac{2QL^2}{5\epsilon_0 A} + \frac{\epsilon_0 AV^2}{10L}.$$

导体板在 CD 位置时，假设左侧与右侧电荷量分别为 Q_3, Q_4 ，左边区域与右边区域电场强度分别为 E_3, E_4 。因此 $Q_3+Q_4=Q$ 。根据高斯定理可得

$$E_3 = -\frac{Q_3}{\epsilon_0 A}, \qquad E_4 = \frac{Q_4}{\epsilon_0 A},$$

其中 A 是导体板的面积。因为电容器两端电势差为 V ，所以

$$-E_3(3L)-E_4(2L)=V,$$

$$Q_3=\frac{1}{5}\left(2Q+\frac{\epsilon_0 AV}{L}\right),$$
$$Q_4=\frac{1}{5}\left(3Q-\frac{\epsilon_0 AV}{L}\right).$$

$$E_3=-\frac{Q_3}{\epsilon_0 A}=\frac{1}{5}\left(-\frac{2Q}{\epsilon_0 A}-\frac{V}{L}\right),$$
$$E_4=\frac{Q_4}{\epsilon_0 A}=\frac{1}{5}\left(\frac{3Q}{\epsilon_0 A}-\frac{V}{L}\right).$$

电场能量为

$$W_2=\frac{1}{2}\epsilon_0 E_3^2 A(3L)+\frac{1}{2}\epsilon_0 E_4^2 A(2L)=\frac{3QL^2}{5\epsilon_0 A}+\frac{\epsilon_0 AV^2}{10L}.$$

需要做功

$$W=W_2-W_1=\frac{QL^2}{5\epsilon_0 A}.$$

「为什么和答案不一样？」

2.3

假设它们分别为 $Q_1,\ldots,Q_8$ 。根据高斯定理可得，

$$Q_2+Q_3=0,$$
$$Q_4+Q_5=0,$$
$$Q_6+Q_7=0.$$

每块板上带电量是已知的，因此

$$Q_1+Q_2=5\text{ C},$$
$$Q_3+Q_4=1\text{ C},$$
$$Q_5+Q_6=1\text{ C},$$
$$Q_7+Q_8=2\text{ C}.$$

而导体板内部电场强度为 0 ，我们分析最左边的导体板可得

$$\frac{Q_1}{2\epsilon_0 A}-\frac{Q_2}{2\epsilon_0 A}-\cdots-\frac{Q_8}{2\epsilon_0 A}=0,$$

$$Q_1-Q_2-\cdots-Q_8=0.$$

可以得出

$$Q_1, \ldots, Q_8 = 4.5,\ 0.5,\ -0.5,\ 1.5,\ -1.5,\ 2.5,\ -2.5,\ 4.5\ (\mathrm{C})\,.$$

如果用一根导线把中间两个板接通，那么 D, E 表面电荷被中和，因此

$$Q_1', \ldots, Q_8' = 4.5,\ 0.5,\ -0.5,\ 0,\ 0,\ 2.5,\ -2.5,\ 4.5\ (\mathrm{C})\,.$$

2.4

不能，因为电介质是不导电的。

2.5

因为输电线距离很远，所以它们带电可以近似视为均匀的。假设半径分别为 a, b 的输电线单位长度带电量分别为 $\lambda, -\lambda$ ，输电线连线处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-r)},$$

其中 r 是参考点与半径为 a 的输电线之间的距离。因此，电势差为

$$V = \int_a^{d-b} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\log\frac{d-b}{a} + \log\frac{d-a}{b}\right).$$

单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log\frac{(d-a)(d-b)}{ab}}\,.$$

2.6

假设地球与月球的带电量分别为 $Q, -Q$ ，连线处的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (d-r)^2},$$

其中 r 是参考点与地球之间的距离。因此，电势差为

$$V = \int_a^{d-b} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d-a}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a+b}\,.$$

如果利用一根导线接通，假设地球与月球带电量分别为 Q_1, Q_2 ，因此地球与月球的电势分别为

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a}, \qquad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

它们电势是相同的「因为被导线接通」，所以

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

系统的电容为

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_1} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{Q_1}{V_1} = 4\pi\epsilon_0(a + b).$$

2.7

假设两个极板内侧带电量分别为 Q_1, Q_2 ，外侧带电量分别为 Q_3, Q_4 。根据高斯定理可得

$$Q_1 + Q_2 = 0.$$

根据电荷守恒可得「因为电荷可能会通过电路转移，所以 $Q_1 + Q_2, Q_3 + Q_4$ 并不一定等于 Q」

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 2Q.$$

而极板内部的电场强度为 0 ，因此

$$\frac{Q_3}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_1}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_4}{2\epsilon_0 A} = 0,$$

$$Q_3 - Q_1 - Q_2 - Q_4 = 0.$$

极板之间的电势差为

$$V = \frac{Q_1}{C}.$$

因此

$$\begin{aligned} Q_1 &= CV, \\ Q_2 &= -CV, \\ Q_3 &= Q, \\ Q_4 &= Q. \end{aligned}$$

2.8

假设半径为 a 的球壳外表面带电量为 Q_1 ，半径为 b 的球壳内表面、外表面带电量分别为 $-Q_1, Q_2$ ，半径为 d 的球壳内表面带电量为 $-Q_2$ 。因此，电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & a < r \le b; \\ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & b < r \le d\,. \end{cases}$$

内外球壳之间的电势差为「因为导线相连，所以电势差为 0」

$$0 = \int_a^d E dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right),$$

$$Q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + Q_2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) = 0.$$

系统的电容为

$$C = \frac{Q_1 - Q_2}{\int_a^b E dr} = 4\pi\epsilon_0 \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{b^2(d-a)}{(b-a)(d-b)}\,.$$

如果中间球壳带电量为 Q ，那么

$$-Q_1 + Q_2 = Q\,.$$

因此

$$-Q_1 = \frac{a(d-b)}{b(d-a)}Q,$$
$$Q_2 = \frac{d(b-a)}{b(d-a)}Q\,.$$

2.9

横坐标为 $x(0 \le x \le b)$ 的电场强度为

$$E = \frac{V}{d + \frac{x}{b}h}\,.$$

根据高斯定理，极板在该处面电荷密度为

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 V}{d + \frac{x}{b}h}\,.$$

极板带电量为

$$Q = \int_0^b \sigma a \, dx = \frac{\epsilon_0 V a b}{h} \log \frac{d+h}{d} .$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 a b}{h} \log \frac{d+h}{d} .$$

2.10

假设上半部分与下半部分电场强度分别为 E_1, E_2 。根据高斯定理，

$$E_1 - E_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S} .$$

极板之间的电势差为

$$V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} .$$

因此

$$E_1 = \frac{V}{d} + \frac{q}{2\epsilon_0 S},$$
$$E_2 = \frac{V}{d} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} .$$

薄片电势为

$$V' = E_1 \frac{d}{2} = \frac{V}{2} + \frac{qd}{4\epsilon_0 S} .$$

2.11

假设 C_1, C_2, C_3 左极板、右极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$ 。一开始， C_1 左极板、右极板带电量分别为 $C_1 V_0, -C_1 V_0$ 。因此

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= C_1 V_0, \\ -Q_2 + Q_3 &= 0, \\ -Q_1 - Q_3 &= -C_1 V_0, \\ \frac{Q_1}{C_1} &= \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{C_1^2 \left(C_2 + C_3\right) V_0}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}, \\ Q_2 = Q_3 &= \frac{C_1 C_2 C_3 V_0}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} . \end{aligned}$$

$$V_1=\frac{Q_1}{C_1}=\frac{C_1\left(C_2+C_3\right)V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1},$$
$$V_2=\frac{Q_2}{C_2}=\frac{C_1C_3V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1},$$
$$V_3=\frac{Q_3}{C_3}=\frac{C_1C_2V_0}{C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1}.$$

2.12

假设 $C_1,...,C_5$ 极板带电量分别为 $Q_1,-Q_1;...;Q_5,-Q_5$ 。因此

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}&=\mathscr{E},\\
\frac{Q_4}{C_4}+\frac{Q_5}{C_5}&=\mathscr{E},\\
\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_3}{C_3}&=\frac{Q_4}{C_4},\\
-Q_1+Q_2+Q_3&=0,\\
-Q_3-Q_4+Q_5&=0.
\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{C_1}&=225\ \mathrm{V},\\
\frac{Q_2}{C_2}&=375\ \mathrm{V},\\
\frac{Q_3}{C_3}&=37.5\ \mathrm{V},\\
\frac{Q_4}{C_4}&=262.5\ \mathrm{V},\\
\frac{Q_5}{C_5}&=337.5\ \mathrm{V}.
\end{aligned}$$

2.13

假设金属球带电量为 Q ，因此电场强度为

$$E=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0r^2}.$$

电势差为

$$V_0=\int_{R_1}^{R_2}Edr=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

因此

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 V R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

电极处的电场强度为

$$E\Big|_{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{V R_2}{R_1\left(R_2 - R_1\right)} = \frac{V}{R_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)}.$$

因此 $R_2 \to \infty$ 时，电场强度取到最小值 $\frac{V}{R_1}$ 。

当

$$E\Big|_{r=R_1} = \frac{V}{R_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)} = \frac{4V}{R_1}$$

时，

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4}.$$

2.14

假设电容器左极板、右极板带电量为 $Q, -Q$ 。因此左边导体、右边导体带电量分别为

$$Q_1' = Q_1 - Q,$$
$$Q_2' = Q_2 + Q.$$

左边导体、右边导体的电势分别为

$$V_1' = \frac{Q_1'}{Q_1} V_1 = \left(1 - \frac{Q}{Q_1}\right) V_1,$$
$$V_2' = \frac{Q_2'}{Q_2} V_2 = \left(1 + \frac{Q}{Q_2}\right) V_2.$$

电容器的电势差为

$$V = \frac{Q}{C}.$$

因此

$$V_1' = V + V_2.$$

$$Q = \left(\frac{V_1}{Q_1} + \frac{V_2}{Q_2} + \frac{1}{C}\right)^{-1} \left(V_1 - V_2\right).$$

$$V = \frac{Q}{C} = \left(\frac{CV_1}{Q_1} + \frac{CV_2}{Q_2} + 1\right)^{-1} \left(V_1 - V_2\right).$$

2.15

体积为 $\mathrm{Vol} = 1\ \mathrm{m}^3$ 的水具有水分子的个数为

$$N = \frac{1{,}000{,}000\ \mathrm{g}}{18.015\ \mathrm{g/mol}} N_A = 3.342 \times 10^{28}.$$

极化强度为

$$P = \frac{Np}{\mathrm{Vol}} = 2.039 \times 10^{-2}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}.$$

直径为 $\mathrm{diam} = 1\ \mathrm{mm}$ 的水滴电偶极矩为

$$p = \frac{1}{6}\pi(\mathrm{diam})^3 P = 1.068 \times 10^{-11}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}.$$

距离水滴 $r = 10\ \mathrm{cm}$ 处的电场强度为

$$E = \left|\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3} = 1.922 \times 10^2\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}.$$

2.16

介质 1, 2 的电位移均为

$$D_1 = D_2 = \sigma.$$

介质 1, 2 的电场强度为

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_{r1}\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$
$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}.$$

介质 1, 2 的极化强度为

$$P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = \frac{\sigma}{2},$$
$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{2\sigma}{3}.$$

电势为

$$V=-\int_0^x Edr=\begin{cases}-\frac{\sigma x}{2\epsilon_0}, & 0\le x\le x_1;\\ -\frac{\sigma x_1}{2\epsilon_0}-\frac{\sigma(x-x_1)}{3\epsilon_0}, & x_1< x\le x_2\,.\end{cases}$$

其中 $x_1=1.0\ \text{cm}, x_2=3.0\ \text{cm}$ 。

界面极化电荷面密度分别为

$$\sigma_1'=-P_1=-\frac{\sigma}{2},$$
$$\sigma_2'=P_1-P_2=-\frac{\sigma}{6},$$
$$\sigma_3'=P_2=\frac{2\sigma}{3}\,.$$

2.17

空间的电位移分布为

$$D=\frac{q}{4\pi r^2}\,.$$

电场强度分布为

$$E=\begin{cases}0, & r\le a;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, & a<r\le b;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r>b\,.\end{cases}$$

电势分布为

$$V=\int_R^\infty Edr=\begin{cases}\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & R\le a;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}, & a<R\le b;\\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & R>b\,.\end{cases}$$

2.18

如图所示，假设从下往上三个区域电场强度分别为 E_1, E_2, E_3 ，介电常数分别为 $\epsilon_1, \epsilon_0, \epsilon_2$ 。因此

$$\begin{aligned} E_1 d + E_2 d + E_3 d &= V_a, \\ \epsilon_0 E_2 - \epsilon_1 E_1 &= \sigma_s, \\ \epsilon_2 E_3 - \epsilon_0 E_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\epsilon_0\epsilon_2 V_a - \epsilon_0\sigma_s d - \epsilon_2\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}, \\ E_2 &= \frac{\epsilon_1\epsilon_2 V_a + \epsilon_2\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}, \\ E_3 &= \frac{\epsilon_0\epsilon_1 V_a + \epsilon_0\sigma_s d}{\left(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_0\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2\right) d}. \end{aligned}$$

「之后我也不会做了，但是可以根据答案来做题」

只需满足 $E_1 < E_2$ 即可，因此

$$\epsilon_0\epsilon_2 V_a - \epsilon_0\sigma_s d - \epsilon_2\sigma_s d > \epsilon_1\epsilon_2 V_a + \epsilon_2\sigma_s d,$$

$$V_a < -\frac{\left(\epsilon_0 + 2\epsilon_2\right)\sigma_s d}{\left(\epsilon_1 - \epsilon_0\right)\epsilon_2}.$$

2.19

将墨滴密度近似视为水的密度。因此，墨滴质量为

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 6.54 \times 10^{11}\ \mathrm{kg}.$$

电场强度为

$$E = \frac{V}{d}.$$

y 方向的加速度为

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md}.$$

因此

$$y = \frac{1}{2} a \left(\frac{L}{u_0}\right)^2 = \frac{qVL^2}{2mdu_0^2} = 0.31\ \mathrm{mm}.$$

$$\theta = \arctan\frac{2y}{L} = 3.5^\circ.$$

2.20

假设内球带电量为 $-Q$ ，因此电位移分布为

$$D = -\frac{Q}{4\pi r^2}.$$

电场强度分布为

$$E = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}, & R_1 \le r \le a; \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}, & a < r \le R_2. \end{cases}$$

电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{a}\right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_2}\right).$$

电容为

$$C = \frac{-Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 R_1 R_2 a}{\epsilon_1 R_1\left(R_2 - a\right) + \epsilon_2 R_2\left(a - R_1\right)}.$$

$r = R_1, a, R_2$ 处的极化电荷面密度分别为

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= -\left(D - \epsilon_0 E\right)\Big|_{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right), \\ \sigma_2' &= \left(D - \epsilon_0 E\right)\Big|_{r\nearrow a} - \left(D - \epsilon_0 E\right)\Big|_{r\searrow a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right), \\ \sigma_3' &= \left(D - \epsilon_0 E\right)\Big|_{r=R_2} = -\frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right). \end{aligned}$$

2.21

左半部分、右半部分的电场强度可以被表示为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{C_1}{r^2}, \\ E_2 &= \frac{C_2}{r^2} \end{aligned}$$

的形式，其中 C_1, C_2 是常数。因此，两个极板之间的电势差为

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E_1 dr = C_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \int_a^b E_2 dr = C_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

因此 $C_1 = C_2$ ，这表明电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2 \frac{\epsilon_1 C}{r^2} + 2\pi r^2 \frac{\epsilon_2 C}{r^2} = Q,$$

$$C = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}.$$

电场强度为

$$E = \frac{C}{r^2} = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) r^2}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

电容为

$$\text{Capacity} = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right) a b}{b - a}.$$

2.22

与 2.21 类似，电场是球对称分布的，记为

$$E = \frac{C}{r^2}.$$

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_1; \\ \frac{\epsilon_2 C}{r^2}, & \mathbf{r} \in \Omega_2. \end{cases}$$

因此

$$2\pi r^2\frac{\epsilon_1 C}{r^2}+2\pi r^2\frac{\epsilon_2 C}{r^2}=q,$$

$$C=\frac{q}{2\pi\left(\epsilon_1+\epsilon_2\right)}.$$

电位移为

$$D=\begin{cases}\frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}, & \mathbf{r}\in\Omega_1;\\ \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)r^2}, & \mathbf{r}\in\Omega_2.\end{cases}$$

自由面电荷分布为

$$\sigma=\begin{cases}\frac{\epsilon_1 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R^2}, & \mathbf{r}\in\Omega_1;\\ \frac{\epsilon_2 q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)R^2}, & \mathbf{r}\in\Omega_2.\end{cases}$$

2.23

假设金属球带电量为 q ，因此电场分布为

$$E=\begin{cases}\frac{q+q_0\frac{r^3-R^3}{7R^3}}{8\pi\epsilon_0 r^2}, & R\le r\le 2R;\\ \frac{q+q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r>2R.\end{cases}$$

金属球的电势为

$$V=\int_R^\infty E dr=0,$$

$$q=-\frac{16}{21}q_0.$$

外表面的电势为

$$V'=\int_{2R}^\infty E dr=\frac{q+q_0}{8\pi\epsilon_0 R}=\frac{5q_0}{168\pi\epsilon_0 R}.$$

2.24

带电粒子受到的电场力随时间的平均是竖直向上的，它与重力平衡。「你去看答案就知道作者到底是什么水平了」

2.25

充电后， A 极板带电量为

$$Q=\frac{\epsilon SV}{d_1},$$

其中 S 是极板的面积。接通可调电源后，假设 C 极板下表面、 A 极板上表面与下表面、 B 极板上表面电荷量分别为 $Q_1,-Q_1,Q_2,-Q_2$ 。因为 A 极板不与外界接触，所以带电量仍然为 Q ，因此

$$-Q_1+Q_2=Q=\frac{\epsilon SV}{d_1}.$$

AC,AB 之间的电场强度分别为

$$E_1=\frac{Q_1}{\epsilon_0 S},$$
$$E_2=\frac{Q_2}{\epsilon S}.$$

因此

$$\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}d_2+\frac{Q_2}{\epsilon S}d_1=V_0.$$

$$Q_1=\frac{\epsilon_0\epsilon S\left(V_0-V\right)}{\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2},$$
$$Q_2=\frac{\epsilon S\left(\epsilon_0 V_0 d_1+\epsilon V d_2\right)}{d_1\left(\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2\right)}.$$

P 点的电场强度为

$$E_1=\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}=\frac{\epsilon\left(V_0-V\right)}{\epsilon_0 d_1+\epsilon d_2}.$$

2.26

假设电介质的介电常数为 ϵ ，记内球壳、外球壳的半径分别为 $R_1;R_2=5\ \mathrm{cm}$ ，带电量分别为 $Q,-Q$ 。因此，电场强度为

$$E=\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2},\qquad R_1\le r\le R_2.$$

为了避免电场强度超过击穿强度 $E_0 = 2.0 \times 10^7\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ ，需要满足

$$Q \leq 4\pi\epsilon R_1^2 E_0 .$$

电容器的电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \leq \left(R_1 - \frac{R_1^2}{R_2}\right) E_0 \leq \frac{1}{4} R_2 E_0 = 2.5 \times 10^5\ \mathrm{V} .$$

2.27

假设内层圆柱单位长度的带电量为 λ 。因此，电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r}, & a \leq r \leq b; \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r}, & b < r \leq c . \end{cases}$$

两层介质最大的电场强度为

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 a},$$
$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 b} .$$

为了使这两者相同，需要满足

$$b = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} a = 2a .$$

电势差为

$$V = \int_a^c E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} \log\frac{b}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2} \log\frac{c}{b} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} \log 2 + \frac{\lambda}{\pi\epsilon_1} \log\frac{c}{2a} .$$

因此

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1} = \frac{V}{\log 2 + 2\log\frac{c}{2a}},$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 b} = \frac{V}{2a\log 2 + 4a\log\frac{c}{2a}} .$$

所以这代表 $c \to 2a$ 才能取到极值？什么脑残题目？

2.28

电位移为

$$D = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi a^3}, & r \le a; \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r > a\,. \end{cases}$$

电场强度为

$$E = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^3}, & r \le a; \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > a\,. \end{cases}$$

场能密度为

$$w = \frac{1}{2}DE = \begin{cases} \frac{q^2r^2}{32\pi^2\epsilon_r\epsilon_0 a^6}, & r \le a; \\ \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r > a\,. \end{cases}$$

电场能量为

$$W = \int_0^\infty w4\pi r^2 dr = \int_0^a \frac{q^2r^4}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^6}dr + \int_a^\infty \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}\left(1 + \frac{1}{5\epsilon_r}\right).$$

2.29

令 $R_1 = 100$ cm, $R_2 = 1$ mm ， $V = 100$ V 。因此，肥皂泡带电量为

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R_1 V.$$

电场能量为

$$W_1 = \frac{1}{2}QV = 2\pi\epsilon_0 R_1 V^2.$$

收缩后，电势变为

$$V' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{R_1}{R_2}V.$$

电场能量变为

$$W_2 = \frac{1}{2}QV' = 2\pi\epsilon_0\frac{R_1^2}{R_2}V^2.$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = 2\pi\epsilon_0 R_1 V^2\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) = 5\times 10^{-8}\ \mathrm{J}\,.$$

2.30

我是没有心情和玩这些傻逼做题技巧的。不过随便糊弄点吧，万一给你对了呢（滑稽）：

假设粒子的速度分别为 v_1, v_2, v_3 ，根据动量守恒与能量守恒可得

$$m v_1 + 2m v_2 + 5m v_3 = 0,$$
$$\frac{1}{2}m v_1^2 + m v_2^2 + \frac{5}{2}m v_3^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 r}\,.$$

可得动能为

$$K_1 = \frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{9q^2}{16\pi\epsilon_0 r},$$
$$K_2 = m v_2^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r},$$
$$K_3 = \frac{5}{2}m v_3^2 = \frac{5q^2}{16\pi\epsilon_0 r}\,.$$

2.31

雨滴表面的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\,.$$

电场能量为

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

两个相同的雨滴电场能量之和为

$$W' = 2\frac{(Q/2)^2}{8\pi\epsilon_0(R/2^{1/3})} = \frac{1}{4^{1/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

n 个相同的雨滴电场能量之和为

$$W'' = n\frac{(Q/n)^2}{8\pi\epsilon_0(R/n^{1/3})} = \frac{1}{n^{2/3}}\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

2.32

内球电势为

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}\,.$$

因此

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V - \frac{R_1}{R_2} q_2\,.$$

电场强度为

$$E = \begin{cases} \dfrac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & R_1 \le r \le R_2; \\ \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_2\,. \end{cases}$$

电场能量为

$$W = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 V^2 R_1 - \frac{q_2^2\left(R_1 - R_2\right)}{8\pi\epsilon_0 R_2^2}\,.$$

2.33

第二个电容器的带电量为

$$Q = C\left(V - V'\right) = 100\ \mathrm{pF}\left(100\ \mathrm{V} - 30\ \mathrm{V}\right).$$

而并联电势差相等，因此第二个电容器的电势差同样为 $V' = 30\ \mathrm{V}$ ，这表明电容大小为

$$C' = \frac{Q}{V} = \frac{70}{30}\cdot 100\ \mathrm{pF} = 233\ \mathrm{pF}\,.$$

损失能量为

$$\Delta W = \frac{1}{2}CV'^2 + \frac{1}{2}C'V'^2 - \frac{1}{2}CV^2 = -3.5\times 10^{-7}\ \mathrm{J}\,.$$

因为充电时，电容器极板之间的电场强度会发生变化，因此会产生位移电流，使得电容器极板之间具有非零的磁场，自然具有非零的坡印廷矢量——这表明电容器会往外以电磁波的形式发射能量。「这是最后一章的内容」

2.34

假设 C_1, C_2, C_3 极板带电量分别为 $Q_1, -Q_1; Q_2, -Q_2; Q_3, -Q_3$ 。因此

$$
\begin{aligned}
-Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 0,\\
\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} &= 0,\\
\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} &= V.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 6.3 \times 10^{-4}\ \mathrm{C},\\
Q_2 &= 2.7 \times 10^{-4}\ \mathrm{C},\\
Q_3 &= 3.6 \times 10^{-4}\ \mathrm{C}.\\
V_1 &= \frac{Q_1}{C_1} = 210\ \mathrm{V},\\
V_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = 90\ \mathrm{V},\\
V_3 &= \frac{Q_3}{C_3} = 90\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

系统能量为

$$
W = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 + \frac{1}{2}C_3V_3^2 = 94.5\ \mathrm{J}.
$$

2.35

(1) 假设 B 板上表面、下表面的电荷密度为 σ_1, σ_2 ，因此上半部分、下半部分电场强度分别为

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0},\\
E_2 &= -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.
\end{aligned}
$$

因为 A, C 接地，所以它们的电势差为 0 ，因此

$$
E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0.
$$

而上半部分电场强度为

$$
E_1 = \frac{mg}{q}.
$$

因此

$$\begin{aligned}E_2 &= -\frac{d_1}{d_2}\frac{mg}{q},\\ \sigma_1 &= \epsilon_0 E_1 = \frac{mg\epsilon_0}{q},\\ \sigma_2 &= -\epsilon_0 E_2 = \frac{d_1}{d_2}\frac{mg\epsilon_0}{q}.\end{aligned}$$

B 板的带电量为

$$Q = \left(\sigma_1 + \sigma_2\right) S = \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)\frac{mg\epsilon_0 S}{q}.$$

总共滴入油滴的个数为

$$N = \frac{Q}{q} = \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)\frac{mg\epsilon_0 S}{q^2}.$$

因此这是第 $N+1$ 滴。

(2) 此时 B 板的电荷密度为

$$\sigma = \frac{(N-1)q}{S}.$$

假设 B 板上表面、下表面的电荷密度为 σ_1, σ_2 ，因此

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{(N-1)q}{S}.$$

上半部分、下半部分电场强度分别为

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\sigma_1}{\epsilon_0},\\ E_2 &= -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$

因为 A, C 接地，所以它们的电势差为 0 ，因此

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = 0.$$

可得

$$E_1 = \frac{(N-1)q}{\epsilon_0 S\left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)}.$$

液滴在电场向上的加速度为

$$a = \frac{qE_1}{m} - g = \frac{(N-1)^2 q^2}{m\epsilon_0 S\left(1+\frac{d_1}{d_2}\right)} - g\,.$$

因此

$$H = \frac{gh}{a} = \frac{h}{\frac{(N-1)^2 q^2}{mg\epsilon_0 S\left(1+\frac{d_1}{d_2}\right)} - 1}\,.$$

2.36

电场分布为

$$E = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(r^3 - R_1^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}, \qquad R_1 \le r \le R_2\,.$$

电场能量为

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2\left(-5R_1^6 + 9R_1^5 R_2 - 5R_1^3 R_2^3 + R_2^6\right)}{45\epsilon_0 R_2}\,.$$

因为外球壳电势为 0 ，所以球心的电势为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\rho\left(R_2 - R_1\right)^2\left(2R_1 + R_2\right)}{6\epsilon_0 R_2}\,.$$

2.37

假设上面的电容器与下面的电容器极板间距分别为 d_1, d_2 ，因此

$$d_1 + d_2 = a - b\,.$$

两个电容器的电容大小分别为

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1},$$
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}\,.$$

因此，串联电容大小为

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{\epsilon_0 S}{a-b}\,.$$

电容器的总储能为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2(a-b)}\,.$$

2.38

(1) 球内的电场为

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2AR^{3/2}}{7\epsilon_0}, \qquad R \le a\,.$$

球外的电场为

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^a \rho 4\pi r^2 dr = \frac{2Aa^{7/2}}{7\epsilon_0 R^2}, \qquad R > a\,.$$

(2) 球外的电势为

$$V_2 = \int_R^\infty E_2 dr = \frac{2Aa^{7/2}}{7\epsilon_0 R}, \qquad R > a\,.$$

球内的电势为

$$V_1 = \int_R^a E_1 dr + \int_a^\infty E_2 dr = -\frac{4AR^{5/2}}{35\epsilon_0} + \frac{2Aa^{5/2}}{5\epsilon_0}, \qquad R \le a\,.$$

(3) 电场能量为

$$W = \int_0^R \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A^2 a^6}{21\epsilon_0}\,.$$

(4) 这是什么?

2.39

势能的最大值为

$$\sup V = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

很显然，势能函数是奇函数，因此势能的最小值为

$$\inf V = -\frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

粒子最大速度对应经过势能最小值的位置，此时粒子的动能为

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \inf V = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 + v_0^2 \right).$$

粒子最小速度对应经过势能最大值的位置，此时粒子的动能为

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \sup V = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_0^2 \right).$$

因此最大速度与最小速度比值为

$$\lambda = \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{v_1^2 + v_0^2}{v_1^2 - v_0^2} \right)^{1/2}.$$

2.40

当 A, C 达到最近，三者的相对速度均为 0 ，这表明三者以相同速度 v 运动。根据动量守恒定律可得

$$v = \frac{M v_0}{M + 2m}.$$

假设 A, C 最近距离为 x ，根据能量守恒定律可得

$$\frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} (M + 2m) v^2 = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 x} - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 l},$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2l} + \frac{4\pi \epsilon_0 M m v_0^2}{Q^2 (M + 2m)}}.$$

当三个球位于一条直线上时，假设 B 的速度为 u_1 ， A, C 的速度为 u_2 。根据动量守恒与能量守恒定律可得

$$\begin{aligned} M v_0 &= M u_1 + 2m u_2, \\ \frac{1}{2} M v_0^2 &= \frac{1}{2} M u_1^2 + m u_2^2. \end{aligned}$$

该方程具有两组解：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_0, \\ u_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2m - M}{2m + M} v_0, \\ u_2 &= \frac{4m}{2m + M} v_0. \end{aligned}$$

2.41

(1) 假设隧穿之前，电容器两端电势差为 V ，因此左边极板、右边极板带电量分别为 $CV, -CV$ 。隧穿之后，左边极板、右边极板带电量分别为 $CV \pm e, -CV \mp e$ 。为了防止隧穿现象发生，需要满足

$$\frac{(CV+e)^2}{2C} - \frac{1}{2}CV^2 > 0,$$
$$\frac{(CV-e)^2}{2C} - \frac{1}{2}CV^2 > 0.$$

因此

$$e + 2CV > 0,$$
$$e - 2CV > 0.$$

$$-\frac{e}{2C} < V < \frac{e}{2C}.$$

(2) $C = \frac{e}{2V} = 8.0 \times 10^{-16}\ \mathrm{F}.$

(3) 假设两个 MIM 结带电量分别为 Q_1, Q_2 。因此

$$-Q_1 + Q_2 = ne,$$
$$\frac{Q_1}{C_S} + \frac{Q_2}{C_D} = V.$$

$$Q_1 = \frac{C_S}{C_S + C_D}\left(C_D V - ne\right),$$
$$Q_2 = \frac{C_D}{C_S + C_D}\left(C_S V + ne\right).$$

电场能量为

$$W = \frac{Q_1^2}{2C_S} + \frac{Q_2^2}{2C_D} = \frac{n^2e^2 + C_S C_D V^2}{2\left(C_S + C_D\right)}.$$

岛上的电子带来的静电能「电子的存在对电场能量带来的影响」为

$$W_0 = \frac{n^2 e^2}{2\left(C_S + C_D\right)}.$$

第 3 章 电流与电路

3.1

(1) $J = \dfrac{I}{A} = \dfrac{5 \times 10^{-4}}{0.10 \times 10^{-6}} = 5.0 \times 10^{3}\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

(2) $\sqrt{\left\langle v^{2}\right\rangle} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\dfrac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{9.1 \times 10^{-31}}} = 1.1 \times 10^{5}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

(3) 单位体积电子个数为单位体积铝原子个数的三倍，其取值为

$$n = 3\frac{\text{Density} \cdot N_A}{M} = 3 \times \frac{2.7 \times 10^{3} \times 6.0 \times 10^{23}}{27 \times 10^{-3}} = 1.8 \times 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

$$\tau = \frac{2m_e}{\rho n e^{2}} = \frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31}}{2.8 \times 10^{-8} \times 1.8 \times 10^{29} \times (1.6 \times 10^{-19})^{2}} = 1.4 \times 10^{-14}\ \mathrm{s}.$$

(4) $\langle \lambda \rangle = \sqrt{\left\langle v^{2}\right\rangle}\tau = 1.1 \times 10^{5} \times 1.4 \times 10^{-14} = 1.6 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}$.

(5) $E = \rho J = 2.8 \times 10^{-8} \times 5.0 \times 10^{3} = 1.4 \times 10^{-4}\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

3.2

假设从内球壳到外球壳通有电流 I 。因此，电流密度为

$$J = \frac{I}{4\pi r^{2}}.$$

电场强度为

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^{2}}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

电阻为

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

3.3

(1) 假设从内筒到外筒通有电流 I 。因此，电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r l}.$$

电场强度为

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi r l}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\rho I}{2\pi l} \log \frac{b}{a}.$$

电阻为

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \log \frac{b}{a}.$$

(2) 假设内筒、外筒带电量分别为 $Q, -Q$ 。因此，电场强度为

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l}.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \log \frac{b}{a}.$$

电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon l}{\log \frac{b}{a}}.$$

(3) $RC = \rho \epsilon_0$.

3.4

如 125 页所示，电导率为

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e} = \frac{7.5 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 1.7 \times 10^{-14}}{9.1 \times 10^{-31}} = 3.6 \times 10^7 \ \mathrm{S \cdot m^{-1}}.$$

电阻率为 $\rho = 1/\sigma = 2.8 \times 10^{-8} \ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

3.5

电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}\,.$$

电场强度为

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi r^2}\,.$$

电势差为

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

因此跨步电压分别为

$$V_1 = \frac{10^2 \times 200}{2\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1.6}\right) = 1194\ \text{V},$$
$$V_2 = \frac{10^2 \times 200}{2\pi}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10.6}\right) = 18\ \text{V}\,.$$

3.6

(1) 电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}\,.$$

电场强度为

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}\,.$$

电势差为

$$V = \int_R^\infty E dr = \frac{I}{2\pi\sigma R}\,.$$

电阻为

$$\text{Resistance} = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma R}\,.$$

(2) 电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} + \frac{I}{2\pi (d-r)^2}\,.$$

电场强度为

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi \sigma r^2} + \frac{I}{2\pi \sigma (d-r)^2}\,.$$

电势差为

$$V = \int_R^{d-R} E dr = \frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right).$$

电阻为

$$\text{Resistance} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right).$$

3.7

假设 50 只安培表读数分别为 $I_1, \ldots, I_{50}$ ，那么 50 只伏特表读数分别为

$$\left(I_1 - I_2\right) R, \ldots, \left(I_{49} - I_{50}\right) R, I_{50} R,$$

其中 R 为伏特表的内阻。因此所有伏特表读数总和为

$$\left(I_1 - I_2\right) R + \cdots + \left(I_{49} - I_{50}\right) R + I_{50} R = I_1 R\,.$$

因为 $I_1 = 9.5$ mA 是已知的，所以我们只需得知伏特表的内阻即可。根据题目信息可得

$$\left(I_1 - I_2\right) R = V_1\,.$$

因此

$$R = \frac{V_1}{I_1 - I_2} = \frac{9.6}{(9.5 - 9.2) \times 10^{-3}} = 3.2 \times 10^4\ \Omega\,.$$

所有伏特表读数总和为

$$I_1 R = 9.5 \times 10^{-3} \times 2.4 \times 10^4 = 304\ \text{V}\,.$$

3.8

假设通过 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ 的电流强度分别为 I_1, I_2 ，因此

$$\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 - I_1 R_2 - \left(I_1 + I_2\right) R_1 = 0,$$
$$\mathscr{E}_2 - I_2 r_2 - I_2 R_3 - \left(I_1 + I_2\right) R_1 = 0.$$

$$I_1 = 0.508\ \mathrm{A},$$
$$I_2 = -0.162\ \mathrm{A}.$$

a, b 两点的电势分别为

$$V_a = \mathscr{E}_1 - I_1 r_2 = 2.75\ \mathrm{V},$$
$$V_b = \mathscr{E}_2 - I_1 r_2 - I_1 R_2 = 1.73\ \mathrm{V}.$$

R_1, R_2, R_3 上消耗的电功率分别为

$$Q_1 = \left(I_1 + I_2\right)^2 R_1 = 0.598\ \mathrm{W},$$
$$Q_2 = I_1^2 R_2 = 0.516\ \mathrm{W},$$
$$Q_3 = I_2^2 R_3 = 0.105\ \mathrm{W}.$$

3.9

(1) 两个白炽灯的电阻分别为

$$R_1 = \frac{V_1^2}{Q_1} = \frac{100^2}{40} = 2.5 \times 10^2\ \Omega,$$
$$R_2 = \frac{V_2^2}{Q_2} = \frac{110^2}{120} = 1.0 \times 10^2\ \Omega.$$

接入电源后，电流强度为

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{220}{2.5 \times 10^2 + 1.0 \times 10^2} = 0.629\ \mathrm{A}.$$

两个白炽灯的电功率分别为

$$Q_1 = I^2 R_1 = 98\ \mathrm{W},$$
$$Q_2 = I^2 R_2 = 40\ \mathrm{W}.$$

因此 100 V, 40 W 的白炽灯将被烧坏。

(2) 因为两个白炽灯规格相同，所以电势差都为 110 V ，属于正常范围，因此都不会被烧坏。

3.10

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{V_1}{I_0} - R_g = \frac{3}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 2{,}985\ \Omega, \\
R_2 &= \frac{V_2}{I_0} - R_1 - R_g = \frac{15}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 12{,}000\ \Omega, \\
R_3 &= \frac{V_3}{I_0} - R_1 - R_2 - R_g = \frac{150}{1.00 \times 10^{-3}} - 15 = 135{,}000\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

这些量程的电阻分别为

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1}{I_0} &= \frac{3}{1.00 \times 10^{-3}} = 3{,}000\ \Omega, \\
\frac{V_2}{I_0} &= \frac{15}{1.00 \times 10^{-3}} = 15{,}000\ \Omega, \\
\frac{V_3}{I_0} &= \frac{150}{1.00 \times 10^{-3}} = 150{,}000\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

3.11

假设通过 $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_3$ 的电流强度分别为 I_1, I_2 ，因此

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 - \mathscr{E}_2 - \left(I_1 + I_2\right) r_2 = 0, \\
\mathscr{E}_3 - I_2 r_3 - \mathscr{E}_2 - \left(I_1 + I_2\right) r_2 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{2}{15}\ \mathrm{A}, \\
I_2 &= \frac{1}{6}\ \mathrm{A}\,.
\end{aligned}
$$

因此，三个电源通过的电流分别为

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{2}{15}\ \mathrm{A}, \\
I_1 + I_2 &= \frac{1}{30}\ \mathrm{A}, \\
I_2 &= \frac{1}{6}\ \mathrm{A}\,.
\end{aligned}
$$

电压分别为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V}, \\
\mathscr{E}_2 + \left(I_1 + I_2\right) r_2 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V}, \\
\mathscr{E}_3 - I_2 r_3 &= \frac{23}{15}\ \mathrm{V}\,.
\end{aligned}
$$

输出功率分别为

$$
\begin{aligned}
\left(\mathscr{E}_1-I_1 r_1\right) I_1 &= -\frac{46}{225}\ \mathrm{V},\\
-\left(\mathscr{E}_2+\left(I_1+I_2\right) r_2\right)\left(I_1+I_2\right) &= -\frac{23}{450}\ \mathrm{W},\\
\left(\mathscr{E}_3-I_2 r_3\right) I_2 &= \frac{23}{90}\ \mathrm{W}.
\end{aligned}
$$

3.12

电流强度为

$$
I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}.
$$

输出功率为

$$
Q=I^2 R=\frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}=\frac{\mathscr{E}^2}{R+\frac{r^2}{R}+2 r} \leq \frac{\mathscr{E}^2}{4 r},
$$

当 $R=r$ 时取到等号。

3.13

热功率为

$$
Q=I_1^2 R_1+I_2^2 R_2=I_1^2 R_1+\left(I_0-I_1\right)^2 R_2.
$$

因此

$$
\frac{\partial Q}{\partial I_1}=2 I_1 R_1-2\left(I_0-I_1\right) R_2.
$$

当其取值为 0 时，

$$
I_1=\frac{R_1}{R_1+R_2} I_0.
$$

此时

$$
\frac{\partial^2 Q}{\partial I_1^2}=2 R_1+2 R_2>0.
$$

这表明 Q 取到极小值。而此时 I_1 的取值与实际情况完全吻合。

3.14

两种模型对应 1, 2 点之间的电阻分别为

$$\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}+R_{31}}\right)^{-1},$$

$$R_1+R_2\,.$$

代入题目表达式可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_{12}}+\frac{1}{R_{23}+R_{31}}\right)^{-1}&=\left(\frac{R_3}{Y}+\frac{R_1R_2}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}\\&=\left(\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}\\&=\left(\frac{Y}{Y(R_1+R_2)}\right)^{-1}=R_1+R_2\,.\end{aligned}$$

对于 1, 3; 2, 3 点，情况是相同的。因此这两种模型是等效的。

3.15

将 R_1, R_3, R_5 利用 3.14 题的变换：

$$\begin{aligned}R_5'&=\frac{R_1R_3}{\Delta},\\R_3'&=\frac{R_1R_5}{\Delta},\\R_1'&=\frac{R_3R_5}{\Delta},\end{aligned}$$

其中 $\Delta=R_1+R_3+R_5$ 。因此总电阻为

$$\begin{aligned}R_5'+\left(\frac{1}{R_3'+R_2}+\frac{1}{R_1'+R_4}\right)^{-1}&=\frac{R_1R_3}{\Delta}+\left(\frac{\Delta}{R_1R_5+R_2\Delta}+\frac{\Delta}{R_3R_5+R_4\Delta}\right)^{-1}\\&=\frac{R_1R_3}{\Delta}+\frac{(R_1R_5+R_2\Delta)(R_3R_5+R_4\Delta)}{\Delta(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)}\\&=\frac{R_1R_3(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)+(R_1R_5+R_2\Delta)(R_3R_5+R_4\Delta)}{\Delta(R_1R_5+R_2\Delta+R_3R_5+R_4\Delta)},\end{aligned}$$

经过化简可以得到答案。

3.16

假设电流 I 从 A 点流入，从无穷远处流出，那么 AB 段的电流为 I/n ，其中 n 是与 A 点相连边的个数；假设电流 I 从无穷远处流入，从 B 点流出，那么 AB 段的电流同样为 I/n 。

将这两种情况进行叠加，假设电流 I 从 A 点流入，从 B 点流出，那么 AB 段的电流为

$$\frac{I}{n}+\frac{I}{n}=\frac{2I}{n}.$$

AB 的电势差为

$$V=\frac{2I}{n}r.$$

等效电阻为

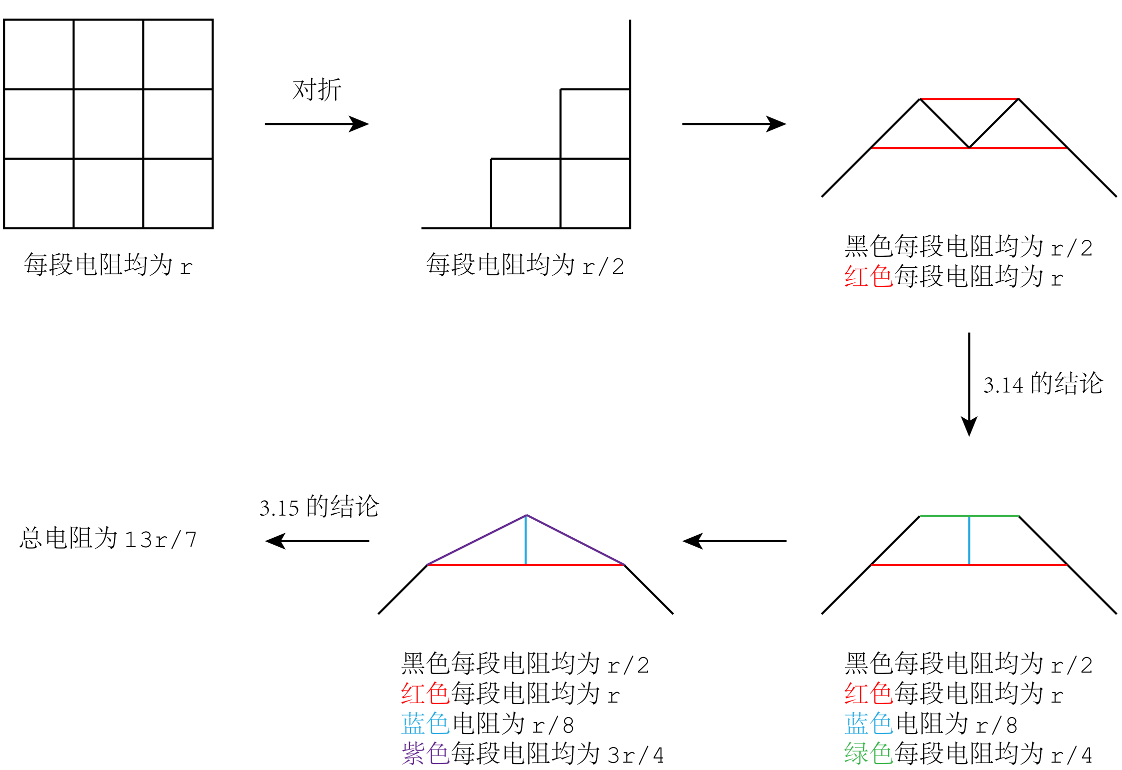
$$R=\frac{V}{I}=\frac{2}{n}r.$$

三个无限大网络分别对应 $n=4,6,3$ ，因此等效电阻分别为

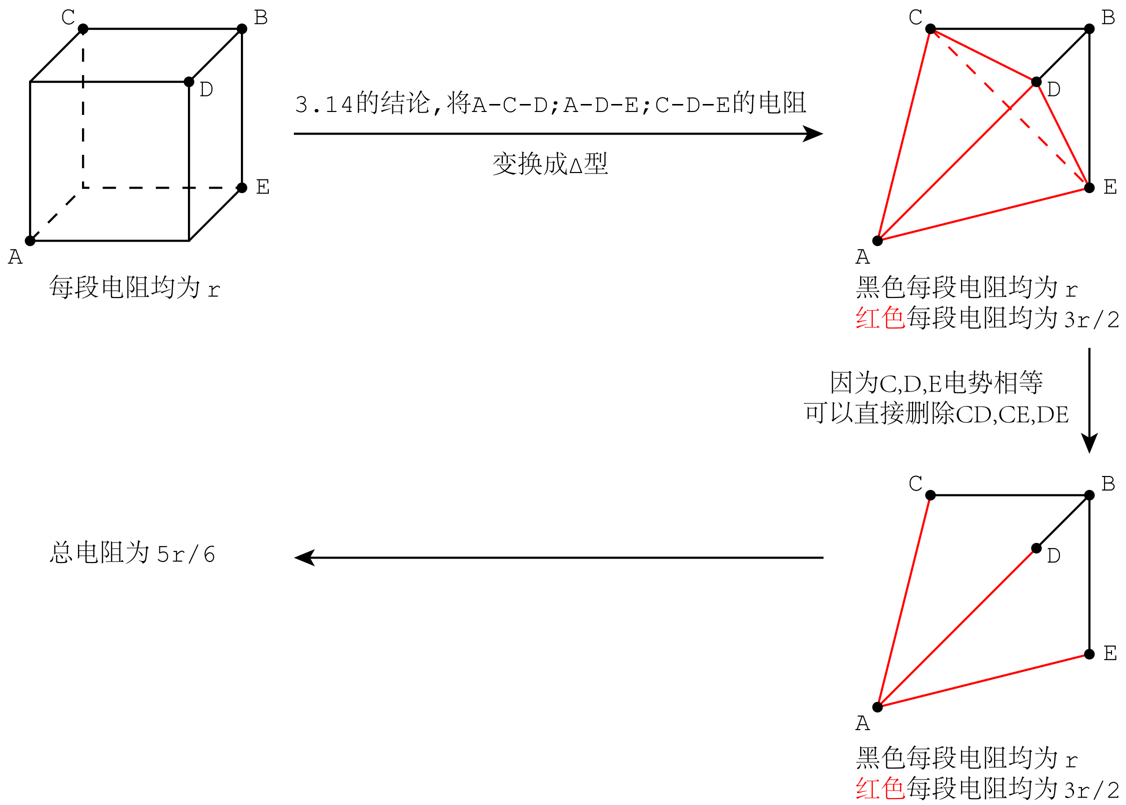
$$R=\frac{1}{2}r,\frac{1}{3}r,\frac{2}{3}r.$$

3.17

(a)

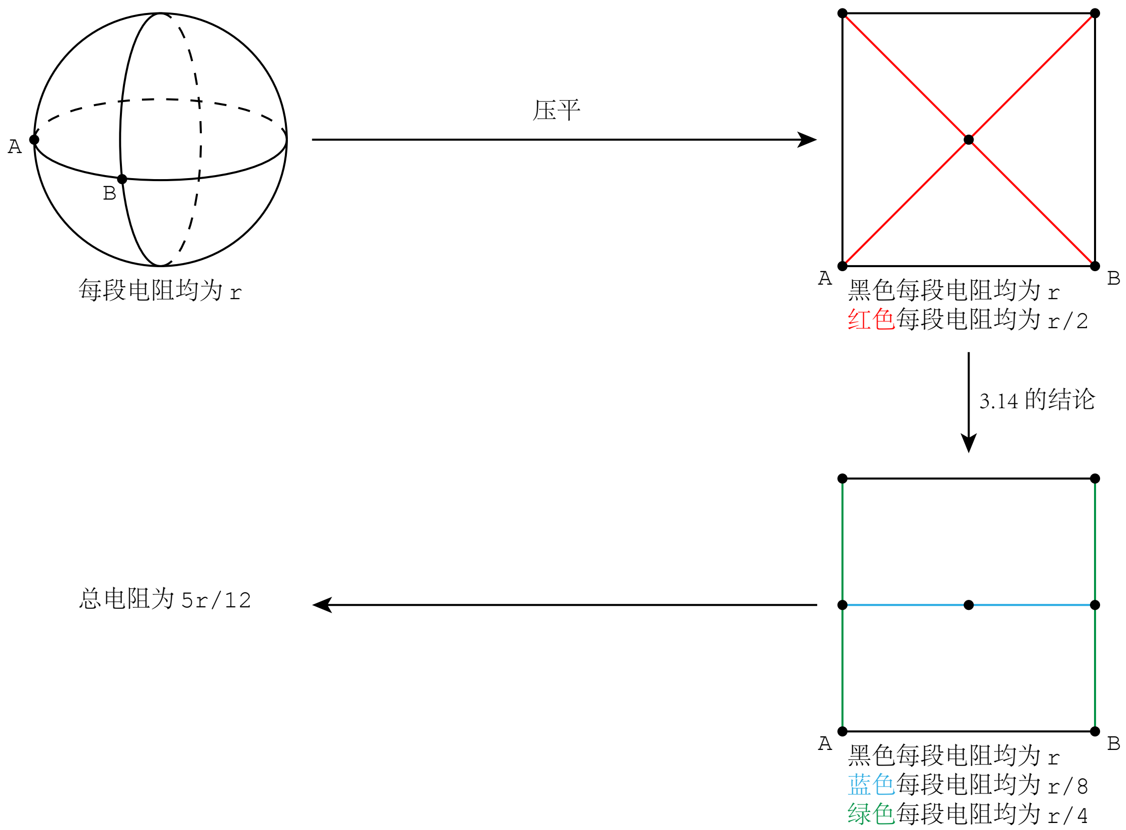


(b)



（箭头文字有误，需要修改为：将 A–C–D; A–C–E; A–D–E 的电阻变换成 Δ 型）

(c)



3.18

假设等效电阻为 R，那么

$$2r+\frac{Rr}{R+r}=R,$$

$$R=\left(\sqrt{3}+1\right)r.$$

3.19

假设等效电阻为 R，那么系统对应 3.15 题

$$\begin{aligned}
&R_1=r,\\
&R_2=r+\frac{Rr}{R+r},\\
&R_3=2r,\\
&R_4=r,\\
&R_5=r.
\end{aligned}$$

利用 3.15 的结论可以得出总电阻为

$$\frac{(13r+21R)r}{11r+15R}.$$

因此

$$\frac{(13r+21R)r}{11r+15R}=R,$$

$$R=\frac{5+2\sqrt{55}}{15}r.$$

3.20

假设每个伏特表的内阻均为 r，系统的电阻为 R，那么

$$r+\frac{(r+R)r}{2r+R}=R,$$

$$R=\sqrt{3}r.$$

因此，第一个格子里三个伏特表的读数分别为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\mathscr{E},\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E},\frac{1}{1+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E}=5.77,\ 4.23,\ 1.55\ (\mathrm{V}).$$

第二个格子左边两端电势差为

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathscr{E}=\left(2-\sqrt{3}\right)\mathscr{E}\,.$$

因此，第五个格子里三个伏特表的读数是第一个格子里的 $\left(2-\sqrt{3}\right)^4$ 倍。

3.21

与 3.3 (1) 相同。

3.22

R_1, R_2, R_3 的电势差分别为

$$\begin{aligned}V_1&=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2,\\ V_2&=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3,\\ V_3&=\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3\,.\end{aligned}$$

因此通过它们的电流分别为

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{V_1}{R_1}=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{R_1}=3\ \mathrm{A},\\ I_2&=\frac{V_2}{R_2}=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3}{R_2}=7\ \mathrm{A},\\ I_3&=\frac{V_3}{R_3}=\frac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3}{R_3}=0.8\ \mathrm{A}\,.\end{aligned}$$

3.23

假设通过上、下两个环路的电流「以逆时针为正方向」分别为 I_1, I_2 ，因此

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_3-I_1\left(R_3+R_4\right)+\left(I_2-I_1\right)R_2&=0,\\ \mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1-I_2R_1-\left(I_2-I_1\right)R_2&=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{2}{7}\ \mathrm{A},\\ I_2&=-\frac{6}{7}\ \mathrm{A}\,.\end{aligned}$$

因此， R_4 的电势差为 $I_1R_4=12/7\ \mathrm{V}$ ，通过 R_2 的电流为 $I_2-I_1=-8/7\ \mathrm{A}$ 。

3.24

(1) 因为 a, b 两点是断开的，所以 R_2 没有电流通过， R_1, R_3, R_4, R_5 通过的电流强度均为

$$I=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3}{R_1+R_3+R_4+R_5+r_1+r_3}=\frac{2}{5}\ \mathrm{A}.$$

a, b 两点的电势差为

$$I\left(R_1+R_5+r_1\right)-\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=0.$$

(2) 因为 a, b 两点的电势差为 0 ，所以即使将 a, b 接通，体系电流分布也不会受到影响，通过 R_1 的电流为

$$I=\frac{2}{5}\ \mathrm{A}.$$

3.25

假设电流从 B 点流入，从无穷远处流出。那么以 B 为中心，电场强度分布为

$$E_1=\frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

C, D 之间的电势差为

$$V_1=\int_a^{\infty} E_1 dr-\int_{\sqrt{2}a}^{\infty} E_1 dr=\frac{\rho I}{2\pi a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

假设电流从无穷远处流入，从 A 处流出。那么以 A 为中心，电场强度分布为

$$E_2=-\frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

C, D 之间的电势差为

$$V_2=\int_{\sqrt{2}a}^{\infty} E_2 dr-\int_a^{\infty} E_2 dr=\frac{\rho I}{2\pi a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

将这两种情况叠加，可得 C, D 之间的电势差为

$$V=V_1+V_2=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\rho I}{2\pi a}.$$

因此

$$\rho=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\pi a V}{I}.$$

3.26

(1) 只需要串联 $120/0.01-10=11{,}990\ \Omega$ 的电阻即可。

(2) 改装后的电流计内阻为

$$\frac{0.20}{10}=0.02\ \Omega\,.$$

这远远小于 $20\ \Omega$，因此只需并联 $0.02\ \Omega$ 的电阻即可。

3.27

因为电容与电阻两端电势差相等，所以电容带电量为

$$Q(t)=CV(t)\,.$$

因此电容通过的电流为

$$I_1(t)=\dot{Q}(t)=C\dot{V}(t)\,.$$

电阻通过的电流为

$$I_2(t)=\frac{V(t)}{R}\,.$$

而

$$\mathscr{E}-\big(I_1(t)+I_2(t)\big)\,r-V(t)=0.$$

因此

$$\mathscr{E}-Cr\dot{V}(t)-\frac{r+R}{R}V(t)=0.$$

根据边界条件 $V(0)=0$ 可得

$$V(t)=\frac{R\mathscr{E}}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{RrC}t}\right).$$

因此

$$I(t)=I_1(t)+I_2(t)=C\dot{V}(t)+\frac{V(t)}{R}=\frac{\mathscr{E}}{R+r}\left(1+\frac{R}{r}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}\right).$$

3.28

假设通过 $C_1, R_1; C_2, R_2$ 的电流分别为 $I_1(t), I_2(t)$ ， C_1, C_2 的带电量分别为 $Q_1(t), Q_2(t)$ 。因此

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \dot{Q}_1(t), \\
I_2(t) &= \dot{Q}_2(t), \\
\mathscr{E} &= \frac{Q_1(t)}{C_1} + I_1(t)R_1 + \left(I_1(t) + I_2(t)\right) r, \\
\mathscr{E} &= \frac{Q_2(t)}{C_2} + I_2(t)R_2 + \left(I_1(t) + I_2(t)\right) r.
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} + \dot{Q}_1(t)R_1 = \frac{Q_2(t)}{C_2} + \dot{Q}_2(t)R_2.$$

当 $R_1C_1 = R_2C_2$ 时，

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} + \dot{Q}_1(t)R_1 = \frac{1}{C_2}\left(Q_2(t) + \dot{Q}_2(t)R_1C_1\right) = \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{Q_2(t)}{C_1} + \dot{Q}_2(t)R_1\right).$$

令 $Q(t) = Q_1(t) - \frac{C_1}{C_2}Q_2(t)$ ，因此

$$\frac{Q(t)}{C_1} + \dot{Q}(t)R_1 = 0.$$

根据初始条件 $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ ，可得 $Q(0) = 0$ ，因此

$$Q(t) \equiv 0.$$

电流计两端的电势差为

$$V(t) = I_1(t)R_1 - I_2(t)R_2 = \dot{Q}_1(t)R_1 - \frac{C_1}{C_2}\dot{Q}_2(t)R_1 = \dot{Q}(t)R_1 \equiv 0.$$

因此电流计不会发生偏转。

3.29

$$\mathscr{E} = \frac{Q(t)}{C} + \dot{Q}(t)R\,.$$

根据边界条件 $Q(0) = 0$ 可得

$$Q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

因此电容器上电荷的增加速率为

$$\dot{Q}(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

储存能量的速率为

$$P_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{2C}\right) = \frac{Q(t)\dot{Q}(t)}{C} = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

热功率为

$$P_2 = \dot{Q}(t)^2R = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{2t}{CR}}\,.$$

电源提供的功率为

$$P = \mathscr{E}\dot{Q}(t) = \frac{\mathscr{E}^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = P_1 + P_2\,.$$

因此电源提供的功率完全用于电容储能和电阻发热。

3.30

(1) 根据高斯定理，电场强度为

$$E = \frac{k}{r}$$

的形式，其中 k 是常数。因此

$$V = \int_a^b E dr = k \log \frac{b}{a}.$$

$$k = \frac{V}{\log \frac{b}{a}}.$$

$$E = \frac{k}{r} = \frac{V}{r \log \frac{b}{a}}.$$

电流强度为

$$I = 2\pi r L J = 2\pi r L \frac{E}{\rho} = \frac{2\pi L V}{\rho \log \frac{b}{a}}.$$

(2) 洛伦兹力的存在，使得电流密度有切向分量。记电流密度为

$$\mathbf{J} = J^{\perp}\hat{r} + J^{\top}\hat{\theta}.$$

假设载流子平均漂移速度为 $\mathbf{v}$ ，因此

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{ne}.$$

而磁场 $\mathbf{B}$ 的存在等效于外加电场 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，因此

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} + \frac{1}{\rho n e}\mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

而

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \log \frac{b}{a}}\hat{r}, \qquad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

每个分量都要相等，因此

$$J^{\perp} = \frac{V}{\rho r \log \frac{b}{a}} + \frac{1}{\rho n e} J^{\top} B,$$
$$J^{\top} = -\frac{1}{\rho n e} J^{\perp} B.$$

可得

$$J^{\perp} = \frac{V}{\rho r \log \frac{b}{a} \left(1 + \left(\frac{B}{\rho n e}\right)^2\right)}.$$

因此电流强度为

$$I = 2\pi r L J^{\perp} = \frac{2\pi L V}{\rho \log \frac{b}{a} \left(1 + \left(\frac{B}{\rho n e}\right)^2\right)}.$$

3.31

根据电荷守恒定律

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

其中 div 代表向量场的散度， ρ 代表空间的自由电荷密度。而

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

并且电场强度与电流密度具有关系

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D}.$$

因此

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}.$$

因此，介质 1, 2 的自由电荷密度随时间的演化为

$$\begin{aligned}&\rho_1(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t},\\&\rho_2(t)\equiv 0.\end{aligned}$$

介质 1, 2 的电位移为

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1&=\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1\right)\hat{r}=\frac{\rho_1 r}{3}\hat{r}, && r<R_1;\\ \mathbf{D}_2&=\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho_1+4\pi R_1^2\lambda_1\right)\hat{r}=\left(\frac{\rho_1 R_1^3}{3r^2}+\frac{\lambda_1 R_1^2}{r^2}\right)\hat{r}, && R_1<r<R_2.\end{aligned}$$

其中 λ_1,λ_2 分别为半径 R_1,R_2 球面上的面电荷密度。

介质 1, 2 的电流密度为

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_1&=\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}\mathbf{D}_1=\frac{\sigma_1\rho_1 r}{3\epsilon_1}\hat{r}, && r<R_1;\\ \mathbf{J}_2&=\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}\mathbf{D}_2=\left(\frac{\sigma_2\rho_1 R_1^3}{3\epsilon_2 r^2}+\frac{\sigma_2\lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 r^2}\right)\hat{r}, && R_1<r<R_2.\end{aligned}$$

R_1,R_2 球面之所以有非零的面电荷密度，是因为 $\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2$ 的存在。根据电荷守恒定律可得

$$\begin{aligned}\frac{d\left(4\pi R_1^2\lambda_1\right)}{dt}&=4\pi R_1^2\left(J_1\Big|_{R_1}-J_2\Big|_{R_1}\right)=4\pi R_1^2\left(\frac{\sigma_1\rho_1 R_1}{3\epsilon_1}-\frac{\sigma_2\rho_1 R_1}{3\epsilon_2}-\frac{\sigma_2\lambda_1}{\epsilon_2}\right),\\ \frac{d\left(4\pi R_2^2\lambda_2\right)}{dt}&=4\pi R_2^2\,J_2\Big|_{R_2}=4\pi R_2^2\left(\frac{\sigma_2\rho_1 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2}+\frac{\sigma_2\lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 R_2^2}\right).\end{aligned}$$

化简可得

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt}&=\frac{\sigma_1\rho_0 R_1}{3\epsilon_1}e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t}-\frac{\sigma_2\rho_0 R_1}{3\epsilon_2}e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t}-\frac{\sigma_2\lambda_1}{\epsilon_2},\\ \frac{d\lambda_2}{dt}&=\frac{\sigma_2\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2}e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t}+\frac{\sigma_2\lambda_1 R_1^2}{\epsilon_2 R_2^2}.\end{aligned}$$

利用边界条件 $\lambda_1(0)=0$，第 1 行的求解结果为

$$\lambda_1(t)=\frac{1}{3}\rho_0 R_1\left(e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2}t}-e^{-\frac{\sigma_1}{\epsilon_1}t}\right).$$

因此

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\sigma_2 \rho_0 R_1^3}{3\epsilon_2 R_2^2} e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2} t}.$$

利用边界条件 $\lambda_2(0) = 0$ 可得

$$\lambda_2(t) = \frac{\rho_0 R_1^3}{3R_2^2} \left(1 - e^{-\frac{\sigma_2}{\epsilon_2} t}\right).$$