均值函数$\mu_X(t)=E[X(t)]$，方差函数$Var[X(t)]$，

联合分布$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2)$，

自相关函数$r_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$，协方差函数$R_X(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][X(t_2)-\mu_X(t_2)]\}$

同分布：$F_X(x)$和$F_{X'}(x)$对任意 x 都是相等的

平稳过程：主要性质只与时间间隔有关，与考察起始点无关。

严格平稳：X(t)对任意 t_i∈T 和任何 h∈T 有

$$(X(t_1+h),\dots,X(t_n+h))=_d(X(t_1),\dots,X(t_n))$$

习题 1.8：一列独立随机变量 X_i 如果同分布，那么过程严平稳。

宽平稳：随机过程的所有二阶矩存在并有 EX(t)=m，及协方差函数 $R_X(t,s)$只与时间差 t-s 有关，或称之为二阶矩平稳。

宽平稳过程：$R_X(s,t)=R_X(0,t-s):=R_X(t-s)$

平稳独立增量过程的均值函数一定是 t 的线性函数。

独立和：Z_i 独立同分布，独立和 $X_n=\Sigma_{0\sim n}Z_i$，$\{X_n\}$是**独立增量过程**

证明：即证 ΔX_n 之间相互独立即可。

条件期望：$E(X|Y=y)=\int xf(x|y)dx$；$f(x,y)=f(x|y)f(y)$

平滑公式：$EX=E[E(X|Y)]=\int E(X|Y=y)dF_Y(y)$

$$E[\phi(X,Y)|Y=y]=E[\phi(X,y)|Y=y]$$

矩母函数：$g(t)=E(\exp\{tX\})=\int\exp\{tX\}dF(x)$

矩母函数（if 存在）唯一确定了 X 的分布，通过它可求 X 的各阶矩：$E[X^n]=g^{(n)}(0)$, n≥1, 对独立的 r.v. X, Y, 有 $g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)$

随机和：**X_i，i.i.d**，$Y=\sum_{i=1}^N X_i$，**N 也是一个独立 r.v.** 对 N 取条件，求 exp{tY}的条件期望，可得 $g_Y(t)=E[(g_X(t))^N]$，对此关于 t 求一阶两阶导可得 EY = E[NE(X)]=EN·EX，$EY^2=EN\cdot VarX+EN^2E^2X$，$VarY=EN\cdot VarX+E^2X\cdot VarN$

概率生成函数：X 是离散 r.v.，$\phi_X(s)=E(s^X)$，$P(X=k)=p_k\to\phi_X(s)=\sum_{0\sim\infty}p_ks^k$，且$\phi(0)=p_0$，$p_k=\phi^{(k)}(0)/k!$，$\phi_{X+Y}(s)=\phi_X(s)\phi_Y(s)$，$EX=\phi_X'(1)$，$EX(X-1)\dots(X-r+1)=\phi_X^{(r)}(1)$，

随机和情形：$\phi_Y(s)=E(s^Y)=E[E(s^Y|N)]=E\left[(\phi_X(s))^N\right]=\phi_N(\phi_X(s))$.

Markov 不等式：$P(|EX-X|\ge a)\le\frac{VarX}{a^2}$。

均方收敛：$\lim_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$，均方收敛和几乎必然收敛（$P(\lim(X_n-X)=0)=1$）蕴含依概率收敛（$\lim P(|X_n-X|\ge a)=0$），反之不成；均方收敛和几乎必然收敛互不包含。

习题 1.6：Z_1, Z_2 iid ~ P(Z=±1)=1/2，$X(t)=Z_1\cos t+Z_2\sin t$，t∈R，证 X(t)不是严平稳。解：$F_t(x)=P(Z_1\cos t+Z_2\sin t\le x)$，考虑 $F_t(0)$，t=0 时 $F_t(0)=1/2$，t=π/4 时 $F_t(0)=3/4$，$F_t(x)\sim t$，所以非严平稳。

习题 1.13：$X_{1\sim n}$ i.i.d. ~ εxp(λ)，则 $T=\Sigma_{1\sim n}X_i\sim\Gamma(n,\lambda)$，即 $f(t)=\lambda\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!$，t≥0。验证方法：求矩母函数（**求分布**可用）

Poisson 过程定义：(i) N(0)=0; (ii) N(t)增量独立; (iii) 任何 t>0, s≥0，Δ=N(t+s)-N(s) ~ Poi(λt)，即$P(\Delta=k)=\frac{(\lambda t)^k\exp(-\lambda t)}{k!}$, $k=0,1,\dots$。性质：EN(t)=VarN(t)=λt，λ 强度/速率。

定理 2.1：若 N(t)为 PoiProc，$W_i=\Sigma_{1\sim i}X_j$是等待时间，给定 N(t)=n 下等待时间的联合**密度**是 $f_{W1,\dots,Wn|N(t)=n}(w_1,\dots,w_n|n)=n!/t^n$。

例题 2.2：顾客按 PoiProc N(λ, t)到达车站，若 t 时刻离站，问(0,t]区间顾客的平均总等待时间。解：设第 i 位顾客到达时间为 W_i，总等待时间为 $t-W_i$；要求的总等待时间就是$\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)$，求条件期望 $E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)|N(t)=n]=E[\sum_{i=1}^{n}(t-W_i)|N(t)=n]=nt-E[\sum_{i=1}^{N(t)}W_i|N(t)=n]$，给定 n，$W_i$ 的联合密度与(0,t]上均匀分布随机样本的次序统计量的联合密度一样，$E[\sum_{i=1}^{N(t)}W_i|N(t)=n]=E[\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}]=E[\sum_{i=1}^{n}U_i]=\frac{nt}{2}$，再对结果求期望，结果是 $\lambda t^2/2$。

非齐次 PoiProc ：$P(N(t+h)-N(t)=k)=\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k\exp\left(-\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)}{k!}$, $k=0,1\dots$;

记录值：X_i i.i.d, F(x), f(x)，λ(t)=f(t)/[1-F(t)]称为失效率，X0=0，当 $X_n>\max_{1\sim n-1}X_i$ 称创纪录，X_n是记录值，记录值比 t 小的新记录次数记为 N(t)，则第 n 次记录在 t 时刻之前发生，则 N(t)是非齐次 PoiProc，强度是 λ(t)；$P(N(t)=0)=P(X_1>t)$。

更新过程：把 PoiProc def 中的 poi 改成任意分布。W_n 为第 n 次事件发生的时刻，$N(t)=\max\{n: W_n\le t\}$；$P(N(t)=n)=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)$，这里不是求导是卷积，$EN(t)=m(t)=\Sigma_{1\sim\infty}F^{(n)}(t)$；重要的是 N(t)≥n 等价于 $W_n\le t$。

习题 2.1：$P(N_s=k|N_t=n)=P(N_s=k,N_t=n)/P(N(t)=n)=P(N_s-N_0=k,N_t-N_s=n-k)/P(N(t)-N(0)=n)$。

习题 2.7：N(t)~ PoiProc(λ)，给定 N(t)=n，求第 r≤n 个事件发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{Wr|N(t)=n}(w_r|n)$。解：$f_{Wr|N(t)=n}(w_r|n)\cdot\Delta w_r=P(N(w_r)-N(0)=r-1,N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1|N(t)=n)$。然后两边除以 Δw_r 并让其趋于 0 可得表达式。

习题 2.8：有 n 个泊松过程，T 是这些里面第一次发生事件的时刻，求分布。解：$F(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N_i(t)=0, i=1,\dots)$。提示：对非负随机变量 $ET=\int_0^\infty P(T>t)dt$。

Markov 性质：$P(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\dots X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，Xn 是离散时间 Markov 链。

转移概率$P_{ij}^{n,n+1}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，与 n 无关时为平稳转移概率$P_{ij}$。$\sum_{j=0}^\infty P_{ij}=1$，注意求和变量是 j。

n 步转移概率$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}P_{kj}^{(n-1)}$, 约定$P_{ii}^{(0)}=1, j\ne i$: $P_{ij}^{(0)}=0$。

$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$, 这是由 Markov 定义和矩阵乘法定义恰好相容得到的。

CK 方程：$P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}$。

可达：存在 n, $P_{ij}^{(n)}>0$，则称 i 可达 j。互达性是等价关系。

如果 Markov 链只有一个等价类，称之为不可约；不可约过程的各个状态都是互达的。

状态 i 的周期：使得$P_{ii}^{(n)}>0$的所有正整数 n 的最大公约数，记作 d(i)，如果任意 n 都有$P_{ii}^{(n)}=0$就定义周期为∞，d(i)=1 是非周期的。如果 n 不能被 d(i)整除，则$P_{ii}^{(n)}=0$.

命题 3.2：$i\leftrightarrow j$则$d(i)=d(j)$。

命题 3.3：如果状态 i 有周期 d(i)，则存在整数 N，使得对于所有的 n>N 恒有$P_{ii}^{(nd(i))}>0$。**推论**：如果$P_{ji}^{(m)}>0$，则存在正整数 N 使得对所有的 n≥N 恒有$P_{ji}^{(m+nd(i))}>0$。

命题 3.4：**P** 不可约、非周期有限状态，则必然存在 N，使得 n≥N 时 $\mathbf{P}^{(n)}$的所有元素都非 0.

从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率：$f_{ij}^{(0)}=0, f_{ij}^{(n)}=P(X_n=j,X_k\ne j,k<n|X_0=i)$。从 i 出发在第 n 次转移时首次回到 i 的概率。$f_{ii}^{(0)}=0, f_{ii}^{(n)}=P(X_n=i,X_k\ne i,k<n|X_0=i)$. 记$f_{ij}=\sum f_{ij}^{(n)}$，是从 i 出发最终转入 j 的概率，若 i≠j，则 i→j 当且仅当 $f_{ij}>0$。状态 i 常返：$f_{ii}=1$；非常返状态就是瞬过的。

状态 i 常返的充要条件：$\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}=\infty$，瞬过充要$\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}<\infty$

证明：由 Markov 性，从 i 出发***至少***回到 i 两次的概率是 f_{ii}^2，K 为返回 i 的次数，则$P(K\ge k|X_0=i)=f_{ii}^k, k=1,2,\dots$。且$E(K|X_0=i)=\frac{f_{ii}}{1-f_{ii}}$。

推论：常返性也是等价关系。$P_{ji}^{(m)}>0, P_{ij}^{(n)}>0$，则$P_{jj}^{(m+s+n)}\ge P_{ji}^{(m)}P_{ii}^{(s)}P_{ij}^{(n)}$，两边求和，对右边求和是∞。

常返时：首次返回状态 i 的时刻 T_i，$\mu_i=ET_i=\sum_{n=1}^\infty nf_{ii}^{(n)}$。

零常返：μi=∞（可列无穷多个状态才会出现），正常返：μi<∞

T_i还可记为$T_i=\min\{n\ge 1: X_n=i\}$，$f_{ii}^{(n)}=P(T_i=n|X_0=i)$

定理 3.3：(a) 若状态 i 是瞬过的或者是零常返的，则$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$，(b) 若状态 i 是周期为 d 的常返状态，则$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$，(c) 若状态 i 是非周期的正常返状态，则$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}$。

证明：求形式矩母函数：$P_i(t)=\sum e^{tn}P_{ii}^{(n)}$, $F_i(t)=\sum e^{tn}f_{ii}^{(n)}$, $t<0$，则$P_i(t)=P_{ii}^{(0)}+\sum_1^\infty e^{tn}P_{ii}^{(n)}=1+\sum_{n=1}^\infty e^{tn}\sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)}P_{ii}^{(n-k)}=1+P_i(t)F_i(t)$，……

一个正常返非周期状态也称作是遍历的，遍历状态 i 有 $\lim P_{ii}^{(n)}=1/\mu_i$。

平稳分布：如果一个概率分布$\{\pi_i\}$满足$\pi_j=\sum_{i=0}^\infty\pi_iP_{ij}$，则称。若一个不可约 MC 中所有状态都是遍历的，则平稳分布就是这个 MC 的极限分布。

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ \frac12&\frac12&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\ \pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}$$

分支过程：记 Xn 为第 n 代后裔的大小，{Xn}就是分支过程，Zi 是第 n 代中第 i 个个体繁衍的后代数，则 $X_{n+1}=\Sigma_{i=1}^{X_n}Z_i$，假设 Zi i.i.d, P(Z1=k)=pk，EZ1=μ，VarZ1=σ^2，则 $EX_{n+1}=\mu^{n+1}$，$VarX_{n+1}=\begin{cases}\frac{\sigma^2\mu^n(1-\mu^{n+1})}{1-\mu},\mu\ne1\\(n+1)\sigma^2,\mu=1\end{cases}$，当 μ<1 时群体终将消亡（切比雪夫不等式），≥1 时较为复杂。

定理 3.5：对分支过程 Xn，若 $p_0>0$, $p_0+p_1<0$，群体消亡概率π是$\phi(s)=s$的最小正解，$p_k=P(X_1=k)$。

$\pi=1$当且仅当$\mu=EZ_1\le1$

习题 3.9：设$f_{ij}^{(n)}$表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率，试证明$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$。引入$T_j=\min\{n: n\ge0\&X_n=j\}$, $P_{ij}^{(n)}=P(X_n=j|X_0=i)=\sum_{k=0}^nP(X_n=j,T_j=k|X_0=i)=\sum_{k=0}^nP(T_j=k|X_0=i)P_{jj}^{(n-k)}$……

习题 3.11：一 MC 有状态 0~3 和 **P**=$\begin{pmatrix}0&\frac12&0&\frac12\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\\frac12&0&0&\frac12\end{pmatrix}$，试求$f_{00}^{(n)}$。

$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0$, $f_{00}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac12\end{pmatrix}^T=\frac14$,

对 n⩾2 有$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&\frac12\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac12\end{pmatrix}$

当 n=3 时$f_{00}^{(3)}=\frac18$，当 n⩾4 时$f_{00}^{(n)}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}$

习题 3.15：有限状态 MC 至少有一个状态是常返的。

证明：反设所有状态都是瞬过或者零常返的，则对$\forall i\in S$，有$\lim_{n\to+\infty}P_{ii}^{(n)}=0\,(*)$，考虑$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$，则有$\sum_{k=1}^l f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}\le P_{ij}^{(n)}\le\sum_{k=1}^l f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+\sum_{k=l}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}\,(**)$

固定 l，令 n→∞，由（*）得 $0\le\lim_{n\to+\infty}P_{ij}^{(n)}\le0+\sum_{k=l}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}\,(***)$

在（***）中令 l→∞，由于$\sum_{k=l}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}\le1$收敛，所以$\lim_{n\to+\infty}P_{ii}^{(n)}=0(*4)$，若此 MC 有 N 个状态，则$\sum_{k=1}^NP_{ik}^{(n)}=1$，令 n→∞，由(*4)得 0=1，矛盾。

标准自相关函数：$\rho(v)=\frac{R(v)}{R(0)}$，$\rho(0)=1, |\rho(v)|\le1$

Gauss 过程：G: G(t_i)的联合分布是 k 维正态分布。

平稳白噪声序列：X_n是一列两两不相关的 r.v. $EX_n=0$, $EX_n^2=\sigma^2$，且 $EX_mX_n=0(m\ne n)$，则 $X=\{X_n\}$是平稳序列，因为协方差函数仅与 m-n 有关。

三角多项式过程：设 A，B 同分布，均值为 0，方差为 σ^2，且 A 和 B 不相关，Cov(A,B)=EAB=0，对 ω∈[0,Π]，定义 $X_t=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，则 $X=\{X_t\}$是平稳过程。

滑动平均序列：设$\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\pm2\dots\}$是一列不相关的有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量，设 $a_1\sim a_k$是任意的 k 个实数，定

义$X_n = a_1\varepsilon_n + \cdots + a_k\varepsilon_{n-k+1}, n = 0, \pm 1 \ldots$，则 X={$X_t$}平稳过程。

周期平稳过程：X={X(t)}是平稳过程，如果存在正常数 κ 使得 X(t+κ)=X(t)，则称之。κ 为过程的周期，如果 X 是周期平稳过程，则其协方差与过程有相同的周期。

遍历性：设 X={X_t}平稳过程，若$\bar{X} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt =_{L_2} m$或者$\bar{X} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(t) =_{L_2} m$，称 X 均值有遍历性。如果$\hat{R}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X_t - m)(X_{t+\tau} - m)dt =_{L_2} R(\tau)$ 或者

$\hat{R}(\tau) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^{n}(X_{k+\tau} - \hat{m}_n)(X_k - \hat{m}_n) =_{L_2} R(\tau)$

则称 X 的协方差函数有遍历性.若随机过程(或序列)的均值和协方差函数都有遍历性，则称此随机过程有遍历性.

定理 4.1：（均值遍历性定理）（1）设 X={X_n, n=0,±1,…}是平稳序列，则 X 有遍历性的充要条件是 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0.$

（2）若 X={X(t), t∈R}为平稳过程，则 X 有遍历性的充要条件是$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau = 0$。

推论：若$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)| < \infty$，则均值遍历性成立。

推论：对平稳序列而言，若$R(\tau) \to 0(\tau \to \infty)$，则均值遍历。

定理：设 X={X_n, n=0,±1,…}是均值为 0 的 Gauss 平稳过程，如果$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) = 0$, 则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性

协方差函数：对平稳过程 X 的协方差函数 R(τ)有如下性质：

（1）对称性（2）有界性（3）非负定性，即对任意的时刻 t_n 及实数 a_n，n=1,…,N，有$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_n a_m R(t_n - t_m) \geq 0$。

（4）平稳过程 n 阶导数的协方差函数为

Cov($X^{(n)}$(t), $X^{(n)}$(t+τ))=$(-1)^n R^{(2n)}(\tau)$，这里导数指的是满足定义

$\lim_{h\to 0} E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h} - Y(t)\right|^2 = 0$的 Y(t)。

振幅调制波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的实平稳过程，λ 为实数，则 Z(t)=Y(t)$e^{j\lambda t}$是一个复值的平稳过程。$R_Z(\tau)=R_Y(\tau)e^{j\lambda\tau}$。

频率调制波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的 Gauss 平稳过程，设 X(t)=cosY(t)，得$R_X(\tau) = e^{-R_Y(0)}\left(\cosh\left(R_Y(\tau)\right) - 1\right)$。

平方检波：{Y(t), t∈R}是一个零均值的 Gauss 平稳过程，设 X(t)=Y^2(t)，则 $R_X(\tau)=2R_Y^2(\tau)$。

功率谱密度：$\bar{S}(\omega) = S(\omega) \geq 0$,偶函数。

定理 4.4：假定 EX(t)=0，且$\int|R(\tau)|d\tau < \infty$，则

$S(\omega) = \int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$，$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$

$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\rho^{|\tau|}$ ，$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega$

可以用 S(w)和 R(τ)的偶函数性质来做一点点简化。

$S(\omega) = 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau, R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega$

δ 函数：$\int\delta(\tau - \tau_0)f(\tau)d\tau = f(\tau_0)$，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}d\omega = \delta(\tau)$，$\int\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 1$，当 R(t)=1, S(w)=2Πδ(w)，当 S(w)=1 时，R(t)=δ(t)。$\cos\omega\tau = \frac{1}{2}(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau})$，$\sin\omega\tau = \frac{1}{2j}(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})$

S(w)的分母不能有实根，分母多项式次数至少比分子高 2.

例 4.14：已知谱密度为$S(\omega) = \frac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+4}$，求协方差函数。

$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+4}e^{j\omega\tau}d\omega$ 由留数定理（对 τ≥0 利用上半平面围道，τ<0 时利用下半平面上的围道）可算得$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}2\pi j[\frac{z^2+2}{z^4+5z^2+4}e^{jz|\tau|}在z = j, 2j处的留数和] = \frac{1}{6}(e^{-|\tau|} + e^{-2|\tau|})$

f(z)在 z_0 处的留数 Res[f(z), z_0]=$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

$2\cos a\sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b)$

$2\cos a\cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

$2\sin a\sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

B(n,p)，矩母函数$(pe^t+(1-p))^n$　　Poisson，g(t)=exp[λ(e^t-1)]

几何分布 g(t)=$pe^t/[1-(1-p)e^t]$，EX=1/p，VarX=q/p^2

均匀分布 g(t)=$(e^{ta}-e^{tb})$/(ta-tb)，EX=(a+b)/2，VarX=$(b-a)^2$/12

指数分布 f(x)=$\lambda e^{-\lambda x}$，g(t)=λ/(λ-t)，EX=1/λ，VarX=1/λ^2

Γ 分布(n,λ)，f(x)=$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, x \geq 0$，g(t)=$[\lambda/(\lambda-t)]^n$，EX,VarX 都是指数分布的 n 倍。

正态分布$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，g(t)=exp[μt+$\frac{\sigma^2 t^2}{2}$]

$R(t) = \max\left\{1 - \frac{|t|}{T}, 0\right\}, S(\omega) = 4\sin^2\frac{\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$

$R(\tau) = e^{-a|t|}, S(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$R(t) = (1 + k|t|)e^{-k|t|}, S(\omega) = \frac{4k^3}{(k^2+\omega^2)^2}$

$R(t) = (1 - k|t|)e^{-k|t|}, S(\omega) = \frac{4k\omega^3}{(k^2+\omega^2)^2}$

$R(t) = e^{-\frac{k^2t^2}{2}}, S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}e^{-\frac{\omega^2}{2k}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$　　　$\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-\frac{(x-b)^2}{c^2}}dx = ac\sqrt{\pi}$

习题 4.16：设 X_0 为随机变量，其概率密度函数为$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, else \end{cases}$，$X_{n+1}$ 在给定 X_0~X_n 下是(1-X_n,1]上的均匀分布，证明{X_n}均值有遍历性。对给定条件用全期望公式：

EX_{n+1}=E[E(X_{n+1}|X_n)]=E[$\int_{1-x_n}^{1}\frac{x_{n+1}}{x_n}dx_{n+1}$]；$EX_nX_m$=E[E($X_nX_m$|$X_n$)]

=E[X_nE(X_{n+m}|X_n)]