x_{11} x_{12} x_{15} x_{45}

简单毛收益率 $1+R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}$.

简单(净)收益率 $R_t=\frac{P_t}{P_{t-1}}-1$.

多期简单毛收益率 $1+R_t[k]=\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})$

对数收益率 $r_t=\ln(1+R_t)$

$r_t[k]=r_t+r_{t-1}+\cdots r_{t-k+1}$

~~E(X)~~

$E(r_t)=E(E(r_t|X))$ $\hat{\mu}_x=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t$

$\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^2$

$\hat{S}_x=\frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^3$

$\hat{K}_x=\frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\hat{\mu}_x)^4$

$\frac{\hat{S}(r)}{\sqrt{\frac{6}{T}}}$, $\frac{\hat{K}(r)-3}{\sqrt{\frac{24}{T}}}$

X的l阶矩 $=E(X^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x^l f(x)dx$

一阶矩是期望

二阶矩是方差，X取值的变化程度

正平方根σ_x称为标准差

X的l阶中心矩 $=E[(X-\mu_x)^l]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)^l f(x)dx$

~~三阶中心矩~~

标准化的三阶矩叫偏度，$S(x)=E\left[\frac{(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right]$

标准化的四阶矩叫峰度，$K(x)=E\left[\frac{(X-\mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right]$

$K(x)-3$叫超额峰度

弱平稳：r_t的均值与r_t和r_{t-l}的协方差不随时间改变，l为任意整数

即 (a) $Er_t=\mu$，μ为常数

(b) $Cov(r_t,r_{t-l})=\gamma_l$，$\gamma_l$只依赖于$l$

$\gamma_0=Var(r_t)$，$\gamma_{-l}=\gamma_l$

相关系数：$\rho_{x,y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}\in[-1,1]$ $=\frac{E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}{\sqrt{E(X-\mu_x)^2E(Y-\mu_y)^2}}$

$\hat{\rho}_{x,y}=\frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}}$

ACF：弱平稳性假定下，$\rho_l=\frac{Cov(r_t,r_{t-l})}{Var(r_t)}=\frac{\gamma_l}{\gamma_0}$

$\hat{\rho}_l=\frac{\sum_{t=l+1}^{T}(r_t-\bar{r})(r_{t-l}-\bar{r})}{\sum_{t=1}^{T}(r_t-\bar{r})^2}$，

$t=\frac{\hat{\rho}_l}{\sqrt{1+2\sum_{i=1}^{l-1}\hat{\rho}_i^2/T}}$，对有限样本，$\hat{\rho}_l$是$\rho_l$的有偏估计，在T比较小时不能忽视

混成检验：$Q(m)=T(T+2)\sum_{l=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l}$，$p<\alpha$时拒绝零假设$H_0$：$\rho_1=\rho_2=\cdots\rho_m=0$

白噪声：$\{r_t\}$有限均值，有限方差，独立同分布（若均值为0，方差为σ^2称为高斯白噪声）

线性序列：$r_t=\mu+\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i a_{t-i}$，$\mu$为$r_t$的均值，$\psi_0=1$，$\{a_t\}$零均值独立同分布

$E(r_t)=\mu$，$Var(r_t)=\sigma_a^2\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2<+\infty$，

故ψ_i^2收敛，故随着i增大，远处的扰动a_{t-i}对r_t的影响逐渐消失

$\gamma_l=Cov(r_t,r_{t-l})=\sigma_a^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+l}$

$\rho_l=\frac{\gamma_l}{\gamma_0}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+l}}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^2}$，$l\geq 0$

AR(1) 模型： $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$ (2.8)，a_t 是均值为0，方差为 σ_a^2 的白噪声序列

弱平稳： $E(r_t)=\mu$, $Var(r_t)=\gamma_0$，$Cov(r_t, r_{t-j})=\gamma_j$，均与t无关

$E(r_t)=\phi_0+\phi_1 E(r_{t-1})$，$\mu=\phi_0+\phi_1\mu$，$E(r_t)=\mu=\frac{\phi_0}{1-\phi_1}$

$r_t-\mu=\phi_1(r_{t-1}-\mu)+a_t$ (2.10) $r_t-\mu=a_t+\phi_1 a_{t-1}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_1^i a_{t-i}$

由平稳性与 a_t 独立性，$Cov(r_{t-1}, a_t)=E[(r_{t-1}-\mu)\cdot a_t]=0$，说明 a_t 不依赖过去的任何信息

对(2.10)两边平方取期望，$Var(r_t)=\phi_1^2 Var(r_{t-1})+\sigma_a^2$

根据平稳性假定，$Var(r_t)=\frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$，

(2.8)式定义的AR(1)模型是弱平稳的充要条件是 $|\phi_1|<1$

$E[a_t(r_t-\mu)]=\phi_1 E[a_t(r_{t-1}-\mu)]+E[a_t^2]=\sigma_a^2$

对(2.10)两边乘 $(r_{t-l}-\mu)$，取期望，$\gamma_l=\begin{cases}\phi_1\gamma_1+\sigma_a^2, & 当l=0时,\\ \phi_1\gamma_{l-1}, & 当l>0时,\end{cases}$

故 $Var(r_t)=\gamma_0=\frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$，$\gamma_l=\phi_1\gamma_{l-1}$，$\Rightarrow \rho_l=\phi_1\rho_{l-1}$，$\rho_l=\phi_1^l$

AR(2)模型： $r_t=\phi_0+\phi_1 r_{t-1}+\phi_2 r_{t-2}+a_t$，$E(r_t)=\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}$

改写成 $r_t-\mu=\phi_1(r_{t-1}-\mu)+\phi_2(r_{t-2}-\mu)+a_t$，两边同乘 $(r_{t-l}-\mu)$，我们有

$(r_{t-l}-\mu)(r_t-\mu)=\phi_1(r_{t-l}-\mu)(r_{t-1}-\mu)+\phi_2(r_{t-l}-\mu)(r_{t-2}-\mu)+(r_{t-l}-\mu)a_t$，

利用 $l>0$ 时，$E[(r_{t-l}-\mu)a_t]=0$，可得 $\gamma_l=\phi_1\gamma_{l-1}+\phi_2\gamma_{l-2}$，$l>0$，

同除以 γ_0，有 $\begin{cases}\rho_l=\phi_1\rho_{l-1}+\phi_2\rho_{l-2}, & l\geq 2\\ \rho_0=1,\\ \rho_1=\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\end{cases}$

二阶差分方程：$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\rho_l=0$，　$1-\phi_1 x-\phi_2 x^2=0$，$x=\frac{\phi_1\pm\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{-2\phi_2}$

特征根为实值，可分解成 $(1-w_1B)(1-w_2B)$ 的形式，视为两个AR(1)叠加，

特征根为共轭复对，随机环的平均长度 $k=\frac{2\pi}{\cos^{-1}[\phi_1/(2\sqrt{-\phi_2})]}$

AR(p)： $E(r_t)=\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p}$，多项式方程： $1-\phi_1 x-\phi_2 x^2-\cdots\phi_p x^p=0$，

该方程所有解的模大于1，则序列平稳，解的倒数为特征根

在这个条件下，递推式保证ACF随间隔l增加趋于0，

AIC $=-\frac{2}{T}\ln$(似然函数最大值) $+\frac{2}{T}$(参数个数)，越小越好

检验： AR(p)模型 Q(m) 服从自由度为 m-g 的 χ^2 分布，g为模型AR系数的个数

预测： 向前一步：

$\hat{r}_h(1)=E(r_{h+1}|F_h)=\phi_0+\sum_{i=1}^{p}\phi_i r_{h+1-i}$

误差 $e_h(1)=r_{h+1}-\hat{r}_h(1)=a_{h+1}$，　区间：$\hat{r}_h(1)\pm 1.96\times\sigma_a$

向前两步： 原模型： $r_{h+2}=\phi_0+\phi_1 r_{h+1}+\cdots\phi_p r_{h+2-p}+a_{h+2}$，

$\hat{r}_h(2)=E(r_{h+2}|F_h)=\phi_0+\phi_1\hat{r}_h(1)+\phi_2 r_h+\cdots\phi_p r_{h+2-p}$

$e_h(2)=r_{h+2}-r_h(2)=\phi_1[r_{h+1}-\hat{r}_h(1)]+a_{h+2}=a_{h+2}+\phi_1 a_{h+1}$

$Var[e_h(2)]=(1+\phi_1^2)\cdot\sigma_a^2$

向前多步： 向前l步预测误差 $e_h(l)=r_{h+l}-\hat{r}_h(l)$，对平稳序列AR(p)，$l\to\infty$ 时，$\hat{r}_h(l)$ 收敛于 $E(r_t)$

长期点预测趋于无条件均值，(均值回转)

模型： $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$ a_t是均值为0 方差为σ_a^2的白噪声序列

滑动平均模型(MA)：

MA(1)： $r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1}$,

MA(2)： $r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$,

MA(q)： $r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$ 或 $r_t = c_0 + (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) a_t$, $q > 0$

MA模型一定是弱平稳的，因为是白噪声序列的有限线性组合，前二阶矩不变，

$Var(r_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots \theta_q^2)\sigma_a^2$

自相关函数： MA(1)： $r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1}$, 同乘 r_{t-l} 取期望

$r_t r_{t-l} = c_0 \cdot r_{t-l} + a_t \cdot r_{t-l} - \theta_1 a_{t-1} r_{t-l}$

$\gamma_1 = -\theta_1 \cdot \sigma_a^2$, 当 $l > 1$ 时, $\gamma_l = 0$, $Var(r_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma_a^2$,

则 $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$, $\rho_l = 0$, $(l > 1)$

MA(1)模型的ACF在间隔为1后是截尾的，

MA(2)： $\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$, $\rho_2 = -\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$, $\rho_l = 0, (l > 2)$

预测： MA(1): $r_{h+1} = c_0 + a_{h+1} - \theta_1 a_h$

$\hat{r}_h(1) = E(r_{h+1} | F_h) = c_0 - \theta_1 a_h$, $e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = a_{h+1}$

$r_{h+2} = c_0 + a_{h+2} - \theta_1 a_{h+1}$,

$\hat{r}_h(2) = E(r_{h+2} | F_h) = c_0$, $e_h(2) = r_{h+2} - \hat{r}_h(2) = a_{h+2} - \theta_1 a_{h+1}$ 均值回转仅需一个周期

对一个MA(p)模型，向前q步以后的预测为模型均值

ARMA： $r_t - \phi_1 r_{t-1} = \phi_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1}$ ARMA(1,1)

两边乘a_t取期望， $E(r_t a_t) = E(a_t^2) - \theta_1 E(a_t a_{t-1}) = \sigma_a^2$,

$r_t = \phi_1 r_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$, 设 $\phi_0 = 0$,

$Var(r_t) = \phi_1^2 Var(r_{t-1}) + \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 - 2\phi_1\theta_1 E(r_{t-1} a_{t-1})$

可得 $Var(r_t) = \frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2) \cdot \sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$, 平稳性条件与AR(1)一样

两端乘 r_{t-l} 取期望， $r_t r_{t-l} - \phi_1 r_{t-1} r_{t-l} = a_t r_{t-l} - \theta_1 a_{t-1} r_{t-l}$

$$\begin{cases} \gamma_l - \phi_1 \gamma_{l-1} = 0, \\ \gamma_1 - \phi_1 \gamma_0 = -\theta_1 \sigma_a^2 \end{cases}$$

对平稳ARMA(1,1)，有 $\rho_1 = \phi_1 - \frac{\theta_1 \sigma_a^2}{\gamma_0}$, $\rho_l = \phi_1 \rho_{l-1}$, $l > 1$

三种表示： ① $(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) r_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) a_t$

$E(r_t) = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$

$e_h(1) = r_{h+1} - \hat{r}_h(1) = a_{h+1}$, $Var[e_h(1)] = \sigma_a^2$

② AR表示： $r_t = \frac{\phi_0}{1 - \theta_1 \cdots - \theta_q} + \pi_1 r_{t-1} + \pi_2 r_{t-2} + \cdots a_t$, $\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}$

可逆性的充分条件为：多项式$\theta(B)$的所有零点模大于1

③ MA表示： $r_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots = \mu + \psi(B) a_t$, $\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$

平稳性：ψ_i随i增加指数衰减

单位根非平稳性：

随机游动：$p_t = p_{t-1} + a_t$，　$\{a_t\}$是白噪声序列，则不可预测，均值回转不成立

$\hat{p}_h(l) = p_h$，~~[illegible]~~

ARIMA模型（自回归求和滑动平均）：ARMA模型推广到允许AR多项式以1作为特征根

ARCH：(1) 资产收益率的扰动a_t是序列不相关的，但不是独立的

(2) a_t的不独立性由其延迟值的简单二次函数来描述

ARCH(m)：　$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$，　$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots \alpha_m a_{t-m}^2$

$\{\varepsilon_t\}$为均值0，方差1的独立同分布随机变量序列

ARCH(1)：　$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$，$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$

a_t的无条件均值仍是0，$E(a_t) = E(E(a_t | F_{t-1})) = E[\sigma_t E(\varepsilon_t)] = 0$，

无条件方差：$Var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2 | F_{t-1})] = E[\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$

$Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$，　$0 \le \alpha_1 < 1$，

考虑a_t的四阶矩：$E(a_t^4 | F_{t-1}) = 3[E(a_t^2 | F_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$，

故 $E(a_t^4) = E[E(a_t^4 | F_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4]$

$= 3\alpha_0^2(1 + 2 \cdot \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}) + 3\alpha_1^2 \cdot E(a_t^4)$

故 $E(a_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$，由于四阶矩是正的，$1-3\alpha_1^2 > 0$，

且 a_t无条件峰度为 $\frac{E(a_t^4)}{[Var(a_t)]^2} = 3 \cdot \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$，超额峰度是正的，厚尾

缺点：(1) ~~[illegible]~~ ARCH模型假定正、负扰动对波动率有相同的影响，实际不相同

(2) 对参数限制很强，$1-3\alpha_1^2 > 0$，

(3) 无法解释金融时间序列变化的来源

(4) ~~[illegible]~~ 波动率预报值偏高

可证明：a_t^2服从一个AR(1)模型

设 $v_t = a_t^2 - \sigma_t^2$，　则 $a_t^2 = \sigma_t^2 + (a_t^2 - \sigma_t^2) = \sigma_t^2 + v_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + v_t$，

若$\{v_t\}$是白噪声，则结论成立，下证。

由于 $v_t = a_t^2 - \sigma_t^2 = a_t^2 - E(a_t^2 | F_{t-1})$，故 $E(v_t) \equiv 0$，(鞅差序列)

$Var(v_t) = E(v_t^2) = E[(\sigma_t^2\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2)^2] = E[\sigma_t^4(\varepsilon_t^2-1)^2] = E[(\varepsilon_t^2-1)^2]\, E(\sigma_t^4)$

常数

$E(a_t^4) = E(\varepsilon_t^4 \sigma_t^4) = E(\varepsilon_t^4)\, E(\sigma_t^4)$，与上式类似，可解得

常数

$E(a_t^4) = E(\varepsilon_t^4) \cdot \frac{\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}{1 - \alpha_1^2 \cdot E(\varepsilon_t^4)}$，此式 >0 即可

x_{11} x_{12} x_{15} x_{45}

GARCH: 以GARCH(1)为例

$a_t=\sigma_t\varepsilon_t,\ \sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1 a_{t-1}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2,\quad 0<\alpha_1,\quad \beta_1\le 1,\quad \alpha_1+\beta_1<1$

$E(a_t)=E[E(a_t|F_{t-1})]=E[E(\sigma_t\varepsilon_t|F_{t-1})]=E[\sigma_t E(\varepsilon_t|F_{t-1})]=0,$

$Var(a_t)=E[\sigma_t^2E(\varepsilon_t^2|F_{t-1})]=E[\sigma_t^2E(\varepsilon_t^2)]=E[\sigma_t^2]$

$=E[\alpha_0+\alpha_1a_{t-1}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2]=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)\cdot E(a_{t-1}^2)$

$Var(a_t)=\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$, 超额峰度大于3，厚尾

预测: $\sigma_{h+1}^2=\alpha_0+\alpha_1a_h^2+\beta_1\sigma_h^2$,

向前一步: $\sigma_h^2(1)=\alpha_0+\alpha_1a_h^2+\beta_1\sigma_h^2$

向前多步: 代入 $a_t^2=\sigma_t^2\varepsilon_t^2$, $\sigma_{t+1}^2=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)\sigma_t^2+\alpha_1\sigma_t^2(\varepsilon_t^2-1)$

由 $E(\varepsilon_{h+1}^2-1|F_h)=0$, 有 $\sigma_h^2(2)=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)\sigma_h^2(1)$

推广, $\sigma_h^2(l)=\alpha_0+(\alpha_1+\beta_1)\cdot\sigma_h^2(l-1)$,

$$\sigma_h^2(l)=\frac{\alpha_0\cdot[1-(\alpha_1+\beta_1)^{l-1}]}{1-\alpha_1-\beta_1}+(\alpha_1+\beta_1)^{l-1}\cdot\sigma_h^2(1),$$

若 $\alpha_1+\beta_1<1$, 则 $\sigma_h^2(l)\to\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$

当预测步长趋于无穷时，GARCH(1,1)模型的向前多步波动率预测收敛于$Var(a_t)$

VAR: $r_t=(r_{1t},r_{2t},\cdots r_{kt})'$, $\mu=E(r_t)=(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_k)'$

协方差矩阵 $\Gamma_0=E[(r_t-\mu)(r_t-\mu)']$ $k\times k$

Γ_0的第i,j个元素是r_{it}与r_{jt}的协方差

r_t的延迟为l的交叉协方差矩阵 $\Gamma_l=E[(r_t-\mu)(r_{t-l}-\mu)']$

交叉相关矩阵 $\rho_l=D^{-1}\Gamma_lD^{-1}$,

$D=diag\{\sqrt{Var(r_{1t})},\sqrt{Var(r_{2t})},\cdots,\sqrt{Var(r_{kt})}\}$

$k=2$时, VAR(1): $r_{1t}=\phi_{10}+\Phi_{11}r_{1,t-1}+\Phi_{12}r_{2,t-1}+a_{1t}$

$r_{2t}=\phi_{20}+\Phi_{21}r_{1,t-1}+\Phi_{22}r_{2,t-1}+a_{2t}$,

结构方程: $G=L^{-1}\Sigma(L^{-1})'$ 是对角阵（特征值>0，对角元大于0）

$L^{-1}\begin{pmatrix}a_{1t}\\a_{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{1t}\\b_{2t}\end{pmatrix}$

选最后一条方程，得到r_{2t}的结构方程

行列同时交换，计算r_{1t}的结构方程

x_{11} x_{12} x_{15} x_{45}

平稳性条件：原模型：$\underset{k\times1}{r_t} = \underset{k\times1}{\phi_0} + \underset{k\times k}{\Phi} r_{t-1} + \underset{k\times1}{a_t}$

若弱平稳，$E(r_t) = \phi_0 + \Phi E r_{t-1}$，由 $E r_{t-1} = E r_t$，得 $I-\Phi$ 满秩时，

$$\mu = E(r_t) = (I-\Phi)^{-1}\phi_0 ，代回，$$

$$r_t - \mu = \Phi(r_{t-1}-\mu) + a_t$$

记 $\tilde{r}_t = r_t - \mu$，则 $\tilde{r}_t = \Phi \tilde{r}_{t-1} + a_t$

递归，$\tilde{r}_t = a_t + \Phi a_{t-1} + \Phi^2 a_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j a_{t-j}$

平稳性 $\Leftrightarrow$ Φ 的所有特征值的模都小于1，使 $\Phi^j \to 0\ (j\to\infty)$

$\Leftrightarrow$ $|\lambda I - \Phi|$ 的根的模都小于1

或 $|P(z)| = |I - \Phi z|$，模大于1

例：$\Phi = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix}$，

$(\lambda-0.2)(\lambda-1.1) + 0.3\cdot0.6 = 0$，

$\lambda = 0.5$ 或 0.8，都小于1，平稳

协整：$x_t = (x_{1t}, x_{2t})^T$，若 x_{1t} x_{2t} 都是一元单位根过程，存在非零线性组合 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$，使 $z_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t}$ 弱平稳，则存在协整关系，$(\beta_1, \beta_2)^T$ 即协整向量

VARMA：$P(B)\cdot r_t = Q(B)\, a_t$，$P(B) = I - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p$

$Q(B) = I + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & -1.0 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

$|P(z)| = 1 - z$ 有一个单位根

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-0.5B & B \\ 0.25B & 1-0.5B \end{pmatrix}}_{P(B)}\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0.2B & 0.4B \\ 0.1B & 1-0.2B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

，两边左乘 $P(B)$ 的伴随矩阵，$A\cdot adj(A) = |A|\, I$

$$Adj\, P(B) = \begin{pmatrix} 1-0.5B & -B \\ -0.25B & 1-0.5B \end{pmatrix}$$