由 $|b_n| = b_n^+ + b_n^-$，即知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-. \tag{8}$$

由式(6)～(8)，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

从式(5)可以看出，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

这是条件收敛级数与绝对收敛级数最大的不同之处. 正是从这一事实出发，Riemann 证明了下面关于条件收敛级数的一个非常深刻的结果.

定理 14.5.3(Riemann 定理) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则适当交换各项的次序，可使其收敛到任一事先指定的实数 S，也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明 分两种情形来讨论.

(a) 不妨假定 $S>0$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

为了使级数的和为 S，我们这样来安排级数中项的次序：按照级数原来的次序，把它的正项取出来，只要它们的和还不大于 S，就一直取下去，直到这些项的和刚刚大于 S 为止. 接着就取级数的负项(按照它们原来的次序)，我们又可取得足够多的负项，使得整个和刚好小于 S 为止. 然后再按原来的次序把剩下的正项依次取出来，直到整个和刚好大于 S 为止. 这个过程无休止地进行下去. 把上面这个过程用符号表示出来，就是先按次序选取 k_1 个正项，使得

$$\sum_{j=1}^{k_1-1} a_j^+ \leqslant S < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+.$$

由此可得

$$0 < \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+ - S \leqslant a_{k_1}^+.$$

为简化记号，记 $A_1^+ = \sum_{j=1}^{k_1} a_j^+$. 那么上式可写为

$$0 < A_1^+ - S \leqslant a_{k_1}^+. \tag{9}$$

再按次序取出 l_1 个负项,使得

$$A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1} a_j^- < S \leqslant A_1^+ - \sum_{j=1}^{l_1-1} a_j^-.$$

记 $A_1^- = \sum_{j=1}^{l_1} a_j^-$.从上式可得

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^-) \leqslant a_{l_1}^-. \tag{10}$$

再取 k_2 个正项,使得

$$A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2-1} a_j^+ \leqslant S < A_1^+ - A_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+.$$

记 $A_2^+ = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j^+$.从上式可得

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - S < a_{k_2}^+. \tag{11}$$

把这个过程无限次地继续下去,可得下面的无穷级数:

$$A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots. \tag{12}$$

从式(9)~(11)知,式(12)满足以下不等式:

$$0 < A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - S \leqslant a_{k_n}^+, \tag{13}$$

$$0 < S - (A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots + A_n^+ - A_n^-) \leqslant a_{l_n}^-. \tag{14}$$

如果记式(12)的部分和为 S_n,那么式(13)和式(14)可分别写为

$$0 < S_{2n-1} - S \leqslant a_{k_n}^+, \quad 0 < S - S_{2n} \leqslant a_{l_n}^-.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n}^+ = \lim_{n\to\infty} a_{l_n}^- = 0$.由此即得

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

即级数(12)的和是 S.最后应用定理 14.1.5,即得

$$a_1^+ + \cdots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{l_1}^- + \cdots = S.$$

(b) 现在考虑 $S = +\infty$ 或 $-\infty$ 的情形.为了使级数发散到 $+\infty$,我们这样来安排级数的项:先按级数原来的次序取出若干正项,使其和大于 1,在这些项的后面放上级数的第一个负项;然后再在余下的正项中取若干项,使整个和大于 2,又在这些项之后放上级数的第二个负项;再在余下的正项中取出若干项,使整个和大于 3,接着放上第三个负项.这个过程无限次地继续下去,就得到一个新级数,它是由原级数交换无限多项的次序得到的.由于 n 充分大时 a_n^- 可以任意小,故当 $n > N$ 时,负项的出现并不影响级数部分和的增大,因而级数发散到 $+\infty$.同样,可以适当

交换项的次序，使其发散到 $-\infty$. □

让我们用一个例子作为本节的结尾.

例2 把交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的项重新这样安排：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去. 问所得的新级数是否收敛？如果收敛，求级数的和.

解 设重排之后的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. 对任意给定的正整数 N，记 $m=[N/(p+q)]$，则当 $N\to\infty$ 时，有 $m\to\infty$，且

$$m(p+q)\leqslant N<(m+1)(p+q).$$

把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和写成

$$\sum_{n=1}^{N} a_n=\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n+\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n. \tag{15}$$

因为 $N-m(p+q)<p+q$，这说明上式中第二个和式的项数不超过 $p+q$，所以当 $N\to\infty$ 时，有

$$\left|\sum_{n=m(p+q)+1}^{N} a_n\right|\leqslant\sum_{n=m(p+q)+1}^{N}|a_n|\leqslant(p+q)\frac{1}{m(p+q)}=\frac{1}{m}\to 0.$$

于是从式(15)，便得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m(p+q)} a_n\\&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

从上册7.3节中的式(8)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

得到

$$\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{mq}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln mq+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}&=\sum_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n}\\&=\ln 2mp+\gamma-\frac{1}{2}\ln mp-\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)\end{aligned}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln mp + \frac{1}{2}\gamma + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{18}$$

把式(17)和式(18)代入式(16),得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

由此知所得的新级数收敛,且其和为 $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$. □

例如,取 $p=1, q=1$,就得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

这就是上册 7.3 节的例 4 中已经得到的结果.

再取 $p=1, q=2$,就得

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

最后取 $p=2, q=3$,就得

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}.$$

练 习 题 14.5

1. 在下列级数中,哪些是绝对收敛的?哪些是条件收敛的?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}(\alpha > 1)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{n^{10}}{a^n}(a > 1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;　　(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$.

2. 讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+(1/n)}}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n}{n^p}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^{1/n} - 1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - \frac{b^{1/n} + c^{1/n}}{2}\right)(a > 0, b > 0, c > 0)$.

3. 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分条件是,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛.