HW 9

4. 14 16 23 25 29 31 33 34 40

14. 设随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的对数正态分布, 即 $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其密度函数见例 4.15. 试求 X 的密度函数 $p(x)$, 期望 $E(X)$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)$.

Sol: 由于 $\frac{\ln X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 故令 $Y=\frac{\ln X-\mu}{\sigma}$ $\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{X}$ $(X>0)$

$$p(x) = p_Y\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} I\{x>0\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^{-\frac{1}{2\sigma^2}\ln x+\frac{\mu}{\sigma^2}-1} I\{x>0\}$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\, e^{\sigma Y+\mu} = e^{\mu}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = e^{\mu}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}}}_{N(\sigma,1)}\cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}dy$$

$$= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}\, e^{2\sigma Y+2\mu} = e^{2\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = e^{2\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2\sigma)^2}{2}}e^{2\sigma^2}dy$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}$$

Rmk: 虽然让求 $P(X)$, 但用 $P(X)$ 算 $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Var}(X)$ 很繁. 应充分使用正态标准化

16. 设 X 为一随机变量, 它的符号函数定义为

$$\mathrm{sgn}(X) = \begin{cases} 1, & X>0, \\ 0, & X=0, \\ -1, & X<0. \end{cases}$$

(1) 若 $X \sim U(-2,1)$, 试求 $\mathrm{Var}(\mathrm{sgn}(X))$;

(2) 若 X 服从标准正态分布, 试求 $E[\mathrm{sgn}(X)\cdot X]$.

Sol: (1) 令 $Y=\mathrm{sgn}(X)$ 则 Y 服从两点分布

Y	1	-1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\mathbb{E}Y = -\frac{1}{3}$ $\mathbb{E}Y^2=1$ $\mathrm{Var}(Y) = \frac{8}{9}$

(2) 易见 $\mathrm{sgn}(X)\cdot X = |X|$ 下求 $\mathbb{E}|X|$

$$\mathbb{E}|X| = 2\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \overset{令 y=\frac{x^2}{2}}{=} \int_0^{+\infty} 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y}dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

23. 某投资者希望投资两个金融产品，设两个金融产品在一年后的价值 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(\mu,2\mu,\sigma^2,3\sigma^2,0.5)$，其中负值表示损失，正值表示收益. 试求最优的投资组合，即找 $\omega\in[0,1]$ 使得 $\omega X+(1-\omega)Y$ 的夏普比率 (Sharpe ratio)

$$R(\omega)=\frac{E[\omega X+(1-\omega)Y]}{\sqrt{\operatorname{Var}(\omega X+(1-\omega)Y)}}$$

达到最大.

Sol:

$$Z:=wX+(1-w)Y=\begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$Z\sim N\left((w,1-w)\begin{pmatrix}\mu\\2\mu\end{pmatrix},\ (w,1-w)\begin{pmatrix}\sigma^2 & \frac{\sqrt3}{2}\sigma^2\\ \frac{\sqrt3}{2}\sigma^2 & 3\sigma^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\1-w\end{pmatrix}\right)$$

$$=N\left((2-w)\mu,\ [(4-\sqrt3)w^2+(\sqrt3-6)w+3]\sigma^2\right)$$

$$\frac{Z}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z)}}\sim N\left(\frac{(2-w)\mu}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z)}},\ 1\right)\qquad 记\ W=\frac{Z}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z)}}$$

$$R(w)=\mathbb{E}W=\frac{2-w}{\sqrt{(4-\sqrt3)w^2+(\sqrt3-6)w+3}}\cdot\frac{\mu}{\sigma}$$

求导得 $w=\frac{42-2\sqrt3}{73}$ 时 $R'(w)=0$

25. 设 X_1,X_2 是相互独立的随机变量，服从参数为 2 的指数分布，求 $E(\min\{X_1,X_2\})$ 和 $E(\max\{X_1,X_2\})$.

Sol: $P(X_1\wedge X_2>x)=P(X_1>x,X_2>x)\overset{独立}{=\!=}P(X_1>x)P(X_2>x)=e^{-4x}$ $(x>0)$

非负 r.v.

$$\mathbb{E}(X_1\wedge X_2)=\int_0^{+\infty}P(X_1\wedge X_2>x)\,dx=\frac14$$

(也可由 $f_{X_1\wedge X_2}(x)=4e^{-4x}$, $X_1\wedge X_2\sim Exp(4)$　$\mathbb{E}(X_1\wedge X_2)=4$)

$$\mathbb{E}(X_1\vee X_2)=\mathbb{E}(X_1+X_2)-\mathbb{E}(X_1\wedge X_2)=2\cdot\frac12-\frac14=\frac34$$

29. 设 X_1 和 X_2 是相互独立的指数分布随机变量, 期望分别为 1 和 2. 定义

$$Y=\min\{X_1,X_2\} \text{ 和 } Z=\max\{X_1,X_2\}. \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

求 (1) $E(Y)$ 和 $E(Z)$; (2) $\mathrm{Var}(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(Z)$.

sol: (1). $P(X_1\wedge X_2>x) = e^{-x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{3}{2}x} \quad (x>0)$

别再算 E, Var 了…
对分布熟一点吧…

$\therefore X_1\wedge X_2 \sim Exp(\frac{3}{2})$

$\mathbb{E}(Y)=\frac{2}{3} \quad \mathbb{E}Z=\mathbb{E}(X_1+X_2)-\mathbb{E}(Y) = 1+2-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

(2) $\mathrm{Var}(Y)=\frac{4}{9} \quad P(X_1\vee X_2\le x) = (1-e^{-x})(1-e^{-\frac{1}{2}x})$

$p_Z(x) = (1+e^{-\frac{3}{2}x}-e^{-x}-e^{-\frac{1}{2}x})'_x = e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x} \quad (x>0)$

$\mathbb{E}Z^2 = \int_0^{+\infty} x^2\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}\right)dx$

$= \int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\Gamma(3)}1^3 x^{3-1}e^{-1\cdot x}\right)}_{\Gamma(3,1)}dx\cdot\Gamma(3) + \int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2^3}\frac{1}{\Gamma(3)}x^{3-1}e^{-\frac{1}{2}\cdot x}\right)}_{\Gamma(3,\frac{1}{2})}dx\,4\,\Gamma(3)$ 凑分布归一!

$-\int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\frac{1}{\Gamma(3)}x^{3-1}e^{-\frac{3}{2}x}\right)}_{\Gamma(3,\frac{3}{2})}dx\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\Gamma(3)$

$=\Gamma(3)+4\Gamma(3)-\frac{4}{9}\Gamma(3) = \frac{41}{9}\Gamma(3) = \frac{82}{9}$

$\mathrm{Var}(Z)=\mathbb{E}Z^2-(\mathbb{E}Z)^2 = \frac{82}{9}-\frac{49}{9}=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$

31. 掷两颗均匀骰子, 以 X 表示第一颗骰子掷出的点数, Y 表示两颗骰子所掷出的点数中的最大值.

(1) 求 X, Y 的数学期望与方差; (2) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

补: $\sum_{i=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Sol: 令 $\tilde{X}$ 为第二颗点数 i.e. $Y = X \vee \tilde{X}$

$P(Y \le y) = \frac{y}{6} \cdot \frac{y}{6} = \frac{y^2}{36}$ $y = 1, 2, \cdots, 6$

$P(Y = y) = P(Y \le y) - P(Y \le y-1) = \frac{2y-1}{36}$

$\mathbb{E}Y = \sum_{y=1}^{6} y P(Y=y) = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{18} y^2 - \frac{1}{36} y = \frac{161}{36}$

$\mathbb{E}XY = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{E}[XY \mid X=k] \, P(X=k)$

$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k \, \mathbb{E}[Y \mid X=k]$

$Y \mid X=k \sim$

k	$k+1$	$\cdots$	6
$\frac{k}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{6}$

$\mathbb{E}[Y \mid X=k] = \frac{k^2}{6} + \sum_{t=k+1}^{6} \frac{t}{6}$

$= \frac{k^2 - k + 42}{12}$ $k = 1, 2, \cdots, 6$

$= \frac{1}{72} \sum_{k=1}^{6} k^3 - k^2 + 42k$

$= \frac{154}{9}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \, \mathbb{E}Y = \frac{35}{24}$

33. 设随机变量 $(X,Y) \sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,\rho)$，其中 $\rho > 0$. 问是否存在两个常数 α,β 使得 $\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=0$? 如果存在请求出，否则请说明原因.

$$\alpha X+\beta Y \sim N\left((\alpha+\beta)\mu,\ \alpha^2+2\alpha\beta\rho+\beta^2\right)$$

$$\alpha X-\beta Y \sim N\left((\alpha-\beta)\mu,\ \alpha^2-2\alpha\beta\rho+\beta^2\right)$$

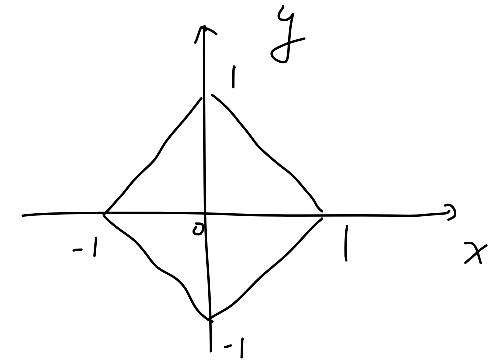
$$\begin{pmatrix}\alpha X+\beta Y\\ \alpha X-\beta Y\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\end{pmatrix},\ \sigma^2\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta & -\beta\end{pmatrix}\right)$$

$$= N\left(\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}\mu,\ \sigma^2\begin{pmatrix}\alpha^2+2\alpha\beta\rho+\beta^2 & \alpha^2-\beta^2\\ \alpha^2-\beta^2 & \alpha^2-2\alpha\beta\rho+\beta^2\end{pmatrix}\right)$$

当 $\alpha^2-\beta^2=0$ 时 $\Longleftrightarrow$ $\alpha=\beta$ 或 $\alpha=-\beta$

$\Longleftrightarrow$ 两者不相关

34. 设随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$ 中的均匀分布.
(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$; (2) X 与 Y 是否相互独立?



(1). $\mathrm{Cov}(X,Y) = EXY - EX\,EY$

$EXY = 0$ 由对称性

$EX = EY = 0$ 故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$

(2) 不独立 因为 $f(x,y) = \frac{1}{2}\cdot I\{|x|+|y|\leq 1\}$ 不可分离变量

40. 设 $N(t)$ 是一个依赖于变量 t 的随机变量, 对 $t>0$, $N(t)$ 的分布律为

$$P(N(t)=k)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

设 T 是一个期望为 a, 方差为 $b>0$ 的非负随机变量.

求 (1) $\mathrm{Cov}(T,N(T))$; (2) $\mathrm{Var}(N(T))$.

$\{N(t)\} \sim HPP(\lambda)$ 随机过程中齐次 Poisson 过程 不用知道这个

其中 $N(t) \sim Poi(\lambda t)$

$$Cov(T, N(T)) = \mathbb{E}\, T N(T) - \mathbb{E} T\, \mathbb{E} N(T)$$

$$\mathbb{E}[T N(T) | T] = T\, \mathbb{E}[N(T) | T] = \lambda T^2$$

$$\mathbb{E}[T N(T)] = \mathbb{E}[\lambda T^2] = \lambda(\mathbb{E}^2[T] + Var(T)) = \lambda(a^2+b)$$

$$Var(N(T)) = Var(\mathbb{E}[N(T)|T]) + \mathbb{E}[Var(N(T)|T)] \quad (\star)$$

$N(T)|T \sim Poi(\lambda T)$ $\qquad Var(\mathbb{E}[N(T)|T]) = Var(\lambda T) = \lambda^2 b$

$$\mathbb{E}[Var(N(T)|T)] = \mathbb{E}(\lambda T) = \lambda a$$

故 $Var(N(T)) = \lambda^2 b + \lambda a$

Pf of $(\star)$

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}(X|Y))$$

Pf: 令 $\psi(Y) = \mathbb{E}[X^2|Y]$ $\quad \phi(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$

$$\mathbb{E}[Var(X|Y)] = \mathbb{E}[\psi(Y) - \phi^2(Y)] = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}\phi^2(Y)$$

$$Var(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\phi^2(Y) - \mathbb{E}^2\phi(Y) = \mathbb{E}\phi^2(Y) - \mathbb{E}^2 X \quad \square$$