2021年春《力学B》考试

1. （10分）竖直发射一火箭，已知火箭初始质量 m_0，燃料相对火箭喷射速率 u，重力加速度为 g。

（1）若火箭燃料质量变化率为一常数 m_1（kg/s），求火箭速度与时间关系。

（2）若火箭以等加速度 a 飞行，求火箭质量与时间变化关系。

【解】

（1） 由动量定理 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F$ 可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg$$

代入 $m=m_0-m_1t$

$$\mathrm{d}v=-\frac{m_1u}{m_0-m_1t}\mathrm{d}t-g\mathrm{d}t \qquad \text{（3分）}$$

两侧积分，由初始条件 $t=0$ 时，$m=m_0$

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_0-m_1t}-gt \qquad \text{（2分）}$$

(2)同样由动量定理 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-mg$$

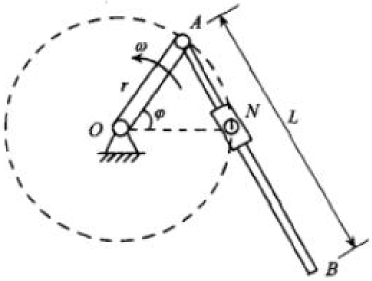
代入 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$

$$m(a+g)=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow\frac{a+g}{u}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}m}{m} \qquad \text{（3分）}$$

两侧积分，由初始条件 $t=0$ 时，$m=m_0$

$$m=m_0e^{-\frac{(a+g)}{u}t} \qquad \text{（2分）}$$

2.（12分）曲柄 0A=r，绕定轴 O 以匀角速度ω转动,连杆 AB 用铰链与曲柄端点 A 连接，并可在具有铰链的滑套 N 内滑动。当$\varphi=0$ 时，A 端位于滑套 N 处。已知 AB=$L>2r$，求当$\varphi=0$ 时，连杆上 B 点的速度，加速度的大小，切向加速度，法向加速度和轨道的曲率半径。



【解】

取直角坐标 Oxy，x 轴沿 ON 方向，y 轴竖直向上。

则 B 点坐标为

$$x = r\cos\varphi + l\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = r\cos\varphi + l\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$y = r\sin\varphi - l\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = r\sin\varphi - l\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{x} =- r\sin\varphi\dot{\varphi} - l\cos\frac{\varphi}{2}\frac{\dot{\varphi}}{2} =- r\omega\sin\varphi + \frac{1}{2}l\omega\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{y} = r\omega\cos\varphi + \frac{1}{2}l\omega\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = [(r\omega)^2 + (\frac{1}{2}l\omega)^2 - rl\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}]^{1/2}$$ （2 分）

$$\ddot{x} =- r\omega^2\cos\varphi - \frac{1}{4}l\omega^2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\ddot{y} =- r\omega^2\sin\varphi + \frac{1}{4}l\omega^2\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = [(r\omega^2)^2 + (\frac{1}{4}l\omega^2)^2 - \frac{1}{2}rl\omega^4\sin\frac{\varphi}{2}]^{1/2}$$ （2 分）

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2v}\frac{dv^2}{dt} =- \frac{1}{4v}rl\omega^3\cos\frac{\varphi}{2}$$ （2 分）

$\varphi = 0$ 时:

$$v = \omega(r^2 + \frac{1}{4}l^2)^{1/2}$$ （1 分）

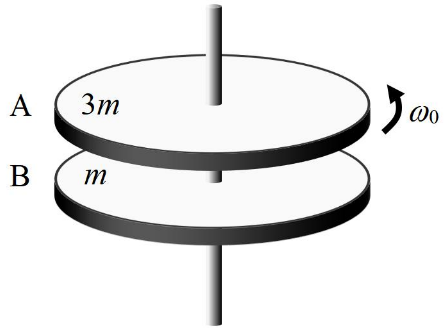
$$a = \omega^2(r^2 + \frac{1}{16}l^2)^{1/2} = \frac{1}{4}\omega^2(16r^2 + l^2)^{1/2}$$ （1 分）

$$a_\tau =- \frac{1}{4\omega(r^2+\frac{1}{4}l^2)^{1/2}}rl\omega^3 =- \frac{rl\omega^2}{2(4r^2+l^2)^{1/2}}$$ （1 分）

$$a_n = (a^2 - a_\tau{}^2)^{1/2} = \frac{8r^2+l^2}{4(4r^2+l^2)^{1/2}}\omega^2$$ （1 分）

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4r^2+l^2)^{3/2}}{8r^2+l^2}$$ （2 分）

3.（12 分）两个半径均为 R，质量分别为 $3m$ 和 m 的圆盘 A、B 均在同一轴上，均可绕轴无摩擦地旋转。A 盘的初始角速度为ω_0，B 盘开始时静止，现将上盘放下，使两盘互相接触。若两盘间的摩擦系数为μ，试问：（1）经过多少时间两盘



以相同角速度旋转？（2）它们共同旋转的角速度为多大？

【解】

上盘与下盘间的摩擦力矩改变两圆盘角动量

根据摩擦力的方向和与转轴中心的位置，可以确定，圆盘 A 上任意微元产生的力矩都是沿着转轴方向。

考虑圆盘 A 上离转轴距离为 $r \to r+\mathrm{d}r$ 间的微元对圆盘 B 产生的摩擦力矩

$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}f = r \times \mu g \mathrm{dm} = r \times \mu g \times \frac{3m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r$ （2 分）

积分得到圆盘 A 对圆盘 B 产生的总力矩为

$M = \int_0^R \frac{6\mu m g}{R^2} r^2 dr = 2\mu m g R$ （2 分）

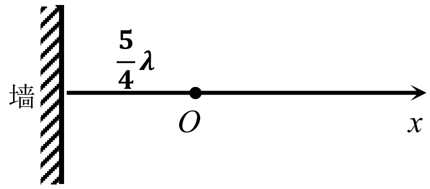
圆盘 A 的转动：$I_A(\omega - \omega_0) = -M\Delta t$ （2 分）

圆盘 B 的转动：$I_B(\omega - 0) = M\Delta t$ （2 分）

其中 $I_A = \frac{3}{2}mR^2, I_B = \frac{1}{2}mR^2$ （2 分）

解得：$\omega = \frac{3}{4}\omega_0$，$\Delta t = \frac{3\omega_0 R}{16\mu g}$ （2 分）

4.（16 分）如图所示一拉直绳子左端固定于墙上，绳子的简谐波自 x 轴正方向远处沿 x 轴负方向入射而来。入射波在坐标原点 O 的振动为 $\xi_0 = A\cos\omega t(\mathrm{m})$， O 点与墙相距 $\frac{5}{4}\lambda(\mathrm{m})$，其中$\lambda$为入射波的波长。入射波遇绳子固定于墙的端点将发生反射，反射波的振幅仍为$A(\mathrm{m})$，角频率仍为$\omega(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$，波长仍为$\lambda(\mathrm{m})$，但相位有$\pi$突变，使绳子固定端合振动为 0。求：（1）入射波的波方程；（2）反射波的波方程；（3）叠加后的波方程，并画出其波形曲线。



【解】

（1）由已知的入射波在原点 O 的振动，可得左行的入射波为

$\xi_{\mathrm{IN}} = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ (m)　　（2 分）

（2）传播到反射点的相位为

$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{5}{4}\lambda = \omega t - \frac{5}{2}\pi$　　（2 分）

反射后相位有π突变，故反射波在反射点的相位为$\omega t - \frac{7}{2}\pi$，在 O 点的相位又比反射点的相位落后$\frac{5}{2}\pi$，故反射波在 O 点的相位为

$\omega t - \frac{7}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi = \omega t - 6\pi$　　（2 分）

据此，反射波的数学表达式为

$\xi_{\mathrm{OUT}} = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - 6\pi\right)$ (m)

或等效地改述成 $\xi_{\mathrm{OUT}} = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ (m)　　（2 分）

（3）绳中的合成波为

$\xi = \xi_{\mathrm{IN}} + \xi_{\mathrm{OUT}} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$(m)　　（2 分）

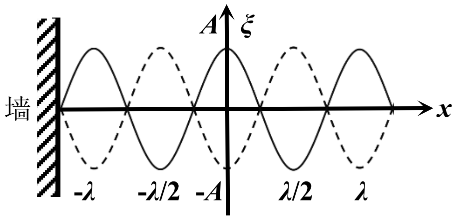
此即为驻波方程。当$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时振幅为 0，对应波节，波节的位置可表述为

$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$(m)，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$　　（2 分）

类似地可导得振幅最大的各点，即波腹的位置为

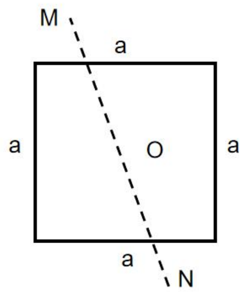
$x = k\frac{\lambda}{2}$(m)，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$　　（2 分）

驻波波形解图见下图：



（2 分）

5. 匀质正方形薄板质量为 m，各边长为 a，如图所示，在板平面上设置过中心 O 的与竖直方向夹角为 30 度的转轴 MN，求板相对该轴的转动惯量I.(6 分)



【解】

做垂直于 MN 过 O 点的转轴m_2n_2，因对称有

$$I = I_2$$

(2 分)

在板平面建立 Oxy 坐标架，相对 x，y 轴转动惯量相同

$$Ix = Iy = \frac{1}{12}ma^2$$

(1 分)

再根据垂直轴定理

$$I + I_2 = Iz \qquad Ix + Iy = Iz$$

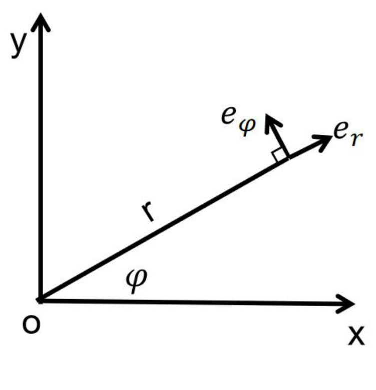
(2 分)

得

$$I = Ix = \frac{1}{12}ma^2$$

(1 分)

6. 一个质点在 xy 平面内的运动方程为$r = e^{ct}, \varphi = bt, r, \varphi$为极坐标，此平面以等角速度ω绕固定的 x 轴转动。求质点的绝对速度和绝对加速度。(10 分)



【解】

$$\omega = \omega \boldsymbol{i}$$

$$\frac{de_r}{dt} = \frac{\tilde{d}e_r}{dt} + \omega \boldsymbol{i} \times e_r = \dot{\varphi} e_\varphi + \omega sin\varphi \boldsymbol{k}$$

(2 分)

$$\frac{de_\varphi}{dt}=\frac{\tilde{d}e_\varphi}{dt}+\omega\boldsymbol{i}\times e_\varphi=-\dot{\varphi}e_r+\omega cos\varphi\boldsymbol{k}$$

（2 分）

$$\frac{dk}{dt}=\omega\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\omega\boldsymbol{j}=-\omega(sin\varphi e_r+cos\varphi e_\varphi)$$

（2 分）

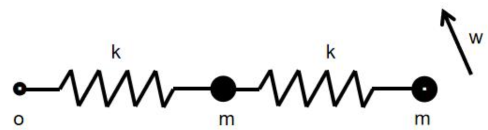
$$\dot{\varphi}=b$$
$$r=e^{ct}e_r$$
$$v=\frac{dr}{dt}=ce^{ct}e_r+be^{ct}e_\varphi+e^{ct}\omega sin\varphi\boldsymbol{k}$$

（2 分）

$$a=\frac{dv}{dt}=e^{ct}[(c^2-b^2-\omega^2sin^2\varphi)e_r+(2bc-\omega^2sin\varphi cos\varphi)e_\varphi+2\omega(bcos\varphi+csin\varphi)\boldsymbol{k}]$$

（2 分）

7. 如图两个质量均为 m 的小球串在质量可忽略的光滑细杆上，用两根完全相同的弹簧相连，两弹簧的劲度系数均为 k，原长为 l，左侧弹簧的左端固定在细杆的 0 点，细杆绕 0 点在水平面内转动。试求:1. 当细杆的角速度从零无限缓慢增加到ω时，外力所做的功。2. 当细杆以角速度ω转动时，两弹簧的长度之比是多少？对ω有何限制。（10 分）



【解】

$$\mathrm{k(l_1-l_0)-k(l_2-l_0)=ml_1\omega^2}$$
$$\mathrm{k(l_2-l_0)=m(l_1+l_2)\omega^2}$$

（2 分）

另

$$\mathrm{x=\frac{m}{k}\omega^2}$$

解出

$$l_1=\frac{l_0}{x^2-3x+1}$$
$$l_2=\frac{l_0(1-x)}{x^2-3x+1}$$

(2 分)

求机械能

$$E=[\frac{1}{2}ml_1^2\omega^2+\frac{1}{2}m(l_1+l_2)^2\omega^2]+[\frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2+\frac{1}{2}k(l_2-l_0)^2]$$

(2 分)

把 L1，L2 带入

$$E=\frac{1}{2}kxl_0^2\frac{(2x^3-9x^2+9x+5)}{(x^2-3x+1)^2}$$

$$\frac{l_2}{l_1}=1-x=1-\frac{m}{k}\omega^2$$

(2 分)

$$x^2-3x+1\neq 0$$

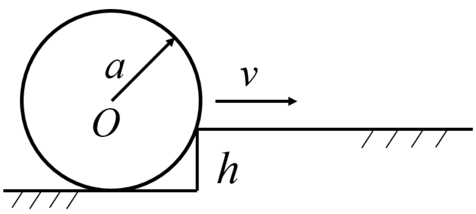
因 l2 是正值，要求 1-x>0 即 x<1 即

$$\frac{m}{k}\omega^2<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\omega<\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}(\sqrt{5}-1)$$

(2 分)

8. 一个粗糙的圆环，半径为 a，质量为 m，在水平地板上以速度 v 滚向高为 h $(h<a/2)$ 的非弹性台阶。环面垂直，且垂直于台阶的棱。证明：圆环与台阶碰撞后不脱离它并能滚上台阶的条件为 $4a^2hg<v^2(2a-h)^2<4a^2(a-h)g$. (12 分)



【解】

证：设碰撞点为 A，碰撞前圆环对 A 点的角动量为

$$mv(a-h)+ma^2\frac{v}{a}=mv(2a-h)$$

碰撞后设圆盘转动角速度为 ω，对 A 点角动量为 $2ma^2\omega$，由角动量守恒得

2 分

$$mv(2a-h)=2ma^2\omega$$

设 A 点所在平面为零势能面，碰撞后圆环机械能为

$$E_0=\frac{1}{2}2ma^2\omega^2+mg(a-h)$$

当圆环中心 O 与 A 连线与水平夹角为 θ 时，圆环机械能为

$$E=\frac{1}{2}2ma^2\dot{\theta}^2+mgasin\theta$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}2ma^2\omega^2+mg(a-h)=\frac{1}{2}2ma^2\dot{\theta}^2+mgasin\theta$$ 3 分

圆环能滚上台阶的条件为 $\theta=\pi/2$ 时，$\dot{\theta}>0$。当 $\theta=\pi/2$ 时，机械能守恒可写为

$$a\dot{\theta}^2=a\omega^2-g\frac{h}{a}$$

结合角动量守恒消去 ω 得

$$a\dot{\theta}^2=\frac{v^2}{a}(1-\frac{h}{2a})^2-g\frac{h}{a}$$

有 $a\dot{\theta}^2>0$，即可得

$$4a^2hg<v^2(2a-h)^2$$ 3 分

另一方面，圆环不能脱离台阶要求 A 对圆环得约束反力 $N>0$。列出指向圆环中心方向的动力学方程

$$mgsin\theta-N=ma\dot{\theta}^2$$ 1 分

联立机械能守恒方程得

$$N=2mgsin\theta-\frac{mv^2}{a}\left(1-\frac{h}{2a}\right)^2-mg(1-\frac{h}{a})$$ 1 分

要求满足 $N_{min}>0$，且$sin\theta_{min}=1-h/a$，故

$$N_{min}=-\frac{mv^2}{a}\left(1-\frac{h}{2a}\right)^2+mg\left(1-\frac{h}{a}\right)>0$$

即

$$v^2(2a-h)^2<4a^2(a-h)g$$ 2 分

9. 质量为 m 的质点，受到牛顿引力 $F=-\alpha m/r^2$ 的向心力作用。证明

(1) 如果质点沿一半长轴为 a 的椭圆轨道运动，其运动速度满足 (8 分)

$$v^2 = \alpha(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

(2) 对双曲线轨道，有 (2 分)

$$v^2 = \alpha(\frac{2}{r} + \frac{1}{a})$$

(3) 对抛物线轨道，有 (2 分)

$$v^2 = \frac{2\alpha}{r}$$

【解】

证：椭圆轨道轨迹方程为

$$r = \frac{p}{1 + ecos\theta}$$ 1 分

有半长轴距离

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$ 1 分

又有角动量守恒

$$r^2\dot{\theta} = h$$ 1 分

则

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{ehsin\theta}{p}$$ 1 分

则

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{p^2}(e^2 - 1 + 2\frac{p}{r})$$ 2 分

将 a 代入得

$$v^2 = \frac{h^2}{p}(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$ 1 分

又有引力常数 $\alpha = h^2/p$，则有

$$v^2 = \alpha(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$ 1 分

对于双曲线轨道，下式仍然成立

$$r = \frac{p}{1 + ecos\theta}$$

$$r^2\dot{\theta} = h$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{ehsin\theta}{p}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{p^2}(e^2 - 1 + 2\frac{p}{r})$$

但是

$$p = a(e^2 - 1)$$

1 分

可得

$$v^2 = \frac{h^2}{p}(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

即

$$v^2 = \alpha(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$$

1 分

对于抛物线轨道，

$$e = 1$$

$$v^2 = \frac{2h^2}{rp}$$

1 分

即

$$v^2 = \frac{2\alpha}{r}$$

1 分