五: 8.9 10

六: 1 3(3-5) 4(2,4,6) 5

8. 假设总体 X 服从 $0-1$ 分布 $B(1,p)$, 其中 p 为未知参数, $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 为从此总体中抽取的简单样本.

(1) 写出样本空间和抽样分布;

(2) 指出 X_1+X_2, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 5} X_i$, X_5+2p, $X_5-E(X_1)$, $\dfrac{(X_5-X_1)^2}{\mathrm{Var}(X_1)}$ 哪些是统计量, 哪些不是, 为什么?

(1). 样本空间 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): x_i \in \{0,1\}\ i\in\{1,2,3,4,5\}\}$

$P(X_1=x_1,\cdots X_5=x_5) = p^{\sum_{i=1}^{5} x_i}(1-p)^{5-\sum_{i=1}^{5} x_i}$

(2) X_1+X_2, $\min\limits_{1\le i\le 5} X_i$ 是 其余不是. 因为 p 未知 $\Rightarrow$ $EX_1 = p$ 未知 $Var(X_1) = p(1-p)$ 未知

9. 随机地取 7 只活塞环, 测得它们的直径为 (单位:mm)

74.001, 74.005, 74.003, 74.000, 73.908, 74.006, 74.002,

204

试求样本均值和样本标准差.

设样本为 x_i, $i=1,2,\cdots,7$

$\bar{X} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 73.989\ (mm)$

$\sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = 0.0359\ (mm)$

10. 设样本量为 10 的一个样本值为

0.4, 0.3, -0.3, -0.1, 1.7, 0.6, -0.1, 0.9, 2.6, 0.5,

试计算经验分布函数.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<-0.3 \\ 0.1 & 0.3 \le x < -0.1 \\ \vdots & \\ 1 & x \geqslant 2.6 \end{cases}$$

略

1. 设总体 X 的概率分布如下:

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<1/2$ 为未知参数. 现从此总体中抽出一样本量为 100 的简单随机样本, 其中 0 出现了 10 次, 1 出现了 53 次, 2 出现了 16 次, 3 出现了 21 次. 试求 θ 的矩估计.

$EX = \sum_{i=0}^{3} x_i P(X=x_i) = 3-4\theta$

$\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i = 1.48$

+X $\hat{E}X = 3-4\hat{\theta} = \bar{X} = 1.48$

得 $\hat{\theta} = 0.38$

3. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求总体 X 在具有下列概率质量函数时参数 θ 的矩估计:

(1) $p(x;\theta) = 1/\theta,\quad x = 0,1,2,\cdots,\theta-1$, 其中 θ (正整数) 是未知参数;

(2) $p(x;\theta) = \binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x},\quad x = 0,1,\cdots,m$;

(3) $p(x;\theta) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2},\quad x = 2,3,\cdots, 0<\theta<1$;

(4) $p(x;\theta) = -\theta^x/(x\ln(1-\theta)),\quad x = 1,2,\cdots, 0<\theta<1$;

(5) $p(x;\theta) = \theta^x e^{-\theta}/x!,\quad x = 0,1,2,\cdots$.

Attention:

① 不要写 $\mathbb{E}X = \cdots = \bar{X}$, 概念不清

② 3(4) 是超越函数, 直接解不出

求导为

系数

(3). $$\mathbb{E}X = \sum_{x=2}^{+\infty} x(x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2} = \theta^2 \frac{d^2}{d(1-\theta)^2}\sum_{x=2}^{+\infty}(1-\theta)^x = \theta^2\frac{d^2}{d(1-\theta)^2}\sum_{x=0}^{+\infty}(1-\theta)^x =$$

令 $q = 1-\theta$

$$= \theta^2 \frac{d^2}{d(1-\theta)^2}\frac{1}{\theta} = \theta^2\frac{d^2}{dq^2}\left[\frac{1}{1-q}\right] = \theta^2\cdot\frac{2}{\theta^3} = \frac{2}{\theta}$$

故 $$\hat{\theta} = \frac{2}{\widehat{\mathbb{E}X}} = \frac{2}{\bar{X}}$$

(4). $$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^{+\infty} x p(x,\theta) = -\frac{1}{\ln(1-\theta)}\frac{\theta}{1-\theta}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{x=1}^{+\infty} x^2 p(x,\theta) = \sum_{x=1}^{+\infty} -\frac{x\theta^{x-1}\theta}{\ln(1-\theta)} = \left(\sum_{x=1}^{+\infty}\theta^x\right)'_\theta\left[-\frac{\theta}{\ln(1-\theta)}\right] = -\frac{\theta}{(1-\theta)^2\ln(1-\theta)}$$

故有 $$\frac{\mathbb{E}X}{\mathbb{E}X^2} = (1-\theta)$$ 从而 $$\hat{\theta} = 1-\frac{\widehat{\mathbb{E}X}}{\widehat{\mathbb{E}X^2}} = 1-\frac{\bar{X}}{S_x^2}$$

(5) $\mathbb{E}X = \theta$ 故有 $\hat{\theta} = \bar{X}$

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个简单随机样本, 试求总体 X 在具有下列概率密度函数时参数 θ 的矩估计:

(1) $f(x;\theta) = \begin{cases} 2(\theta - x)/\theta^2, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(2) $f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \theta > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(3) $f(x;\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \theta > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(4) $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta\, c^\theta/x^{(\theta+1)}, & x > c\ (c > 0 \text{ 已知}), \theta > 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(5) $f(x;\theta) = \begin{cases} 6x(\theta - x)/\theta^3, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(6) $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^2 x^{-3} e^{-\theta/x}, & x > 0,\ \theta > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(2). $\mathbb{E}X = \int_0^1 x^{\theta+1}(\theta+1)\,dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} = 1 - \frac{1}{\theta+2}$

故 $\hat\theta = \frac{1}{1-\hat{\mathbb{E}}X} - 2 = \frac{2\bar X - 1}{1-\bar X}$

(4) $\mathbb{E}X = \int_c^{+\infty} \theta c^\theta \frac{1}{x^\theta}\,dx$

$= \frac{\theta}{1-\theta} c^\theta \quad x^{-\theta+1}\Big|_c^{+\infty}$

$= \frac{c\theta}{\theta-1} = \frac{c}{1-\frac{1}{\theta}} \qquad \hat\theta = \frac{\bar X}{\bar X - c}$

(6). $\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \theta^2 x^{-2} e^{-\theta/x}\,dx$

$= \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta/x}\, d\frac{\theta}{x} = \theta$

故 $\hat\theta = \hat{\mathbb{E}}X = \bar X$

5. 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\theta^2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat\theta$;

(2) 求 $\hat\theta$ 的方差.

(1) 由于 $\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\theta^2}\,dx$

令 $y = (\frac{x}{\theta})^2$

$= \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{\theta^2\sqrt{\pi}} e^{-y} \cdot \theta \left(\frac{2x}{\theta^2}\,dx\right)$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta 2y}{\sqrt{\pi}} e^{-y}\,dy = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}$

从而 $\hat\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\hat{\mathbb{E}}X = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\bar X$

(2). $Var(\hat\theta) = \frac{\pi}{4} Var(\bar X)$

$Var(\bar X) = \frac{Var(X)}{n}$

$Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$\mathbb{E}X^2 = \int_0^{+\infty} \frac{4x^4}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\theta^2}\,dx$

令 $y = (\frac{x}{\theta})^2$

$= \int_0^{+\infty} \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} y^{\frac{3}{2}} e^{-y}\,dy$

$= \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{5}{2})$

$= \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$

$= \frac{3\theta^2}{2}$

$Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{3\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{\pi}$

$Var(\hat\theta) = \frac{\pi}{4} Var(\bar X) = \frac{\pi}{4n} Var(X)$

$= \frac{3\pi - 8}{8n}\theta^2$