数学分析B2期末复习

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

主要内容

- 曲线积分和曲面积分
  (1) 第一型曲线积分
  (2) 第一型曲面积分
  (3) 第二型曲线积分
  (4) 第二型曲面积分
  (5) Gauss定理和Stokes定理
  (6) 保守场
- Fourier分析
  (1) Fourier级数
  (2) Fourier变换
- 反常积分和含参变量的积分

第二型曲线积分

- **定义**

向量场$\mathbf{v}$沿有向曲线L 的积分称为**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}(N_i)\cdot \Delta\mathbf{r}_i.$$

设$\mathbf{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 曲线$L$的**有向弧长微分**或**有向弧长元素**为

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).$$

$$\int_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=\int_L \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

第二型曲线积分又称为**对坐标的曲线积分**.

若L 是有向封闭曲线, $\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ 表示向量场$\mathbf{v}$ 沿环路L 的**环量** .

第二型曲线积分

- **基本性质**

(1) **(线性性)** 若$\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$，则有

$$\int_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=c_1\int_L \mathbf{v}_1\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}+c_2\int_L \mathbf{v}_2\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

特别地，如果把(P,Q,R)看成是$(P,0,0)$，$(0,Q,0)$，$(0,0,R)$的和，就有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L P\mathrm{d}x+\int_L Q\mathrm{d}y+\int_L R\mathrm{d}z.$$

(2) **(对积分曲线的可加性)** 若L_{AC}是由L_{AB}和L_{BC}连接而成的，则有

$$\int_{L_{AC}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s+\int_{L_{BC}} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

第二型曲线积分

- **基本性质**

(3) (积分的方向性) $\displaystyle\int_{L_{AB}} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{L_{BA}} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$

(4) (几个重要特例)

若曲线L在垂直于x轴的平面上，则$\mathrm{d}x=0$，从而$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x=0.$

若曲线L在垂直于y轴的平面上，则$\mathrm{d}y=0$，从而$\displaystyle\int_L Q\mathrm{d}y=0.$

若曲线L在垂直于z轴的平面上，则$\mathrm{d}z=0$，从而$\displaystyle\int_L R\mathrm{d}z=0.$

注记： 对于形如$\int_L P\mathrm{d}x$ 的积分，应该理解成是一个特殊的向量场$\mathbf{v}=(P,0,0)$ 的第二型曲线积分，而不是通常的定积分.

第二型曲线积分的计算

设$\mathbf{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$在区域$D$内连续，光滑定向曲线$L\subset D$的参数方程为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

- **化为第一型曲线积分**

$$\begin{aligned}\int_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

- **参数法**

$$\int_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{\text{起点参数值}}^{\text{终点参数值}}\Big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)$$
$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

第二型曲线积分的计算

- **格林(Green)定理:** 设D是由分段简单光滑闭曲线$L=\partial D$围成的平面有界闭区域, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

  其中闭曲线L的方向这样选取, 沿此方向行进时, 区域D始终在它的左侧, 习惯上称其为正方向.上述公式称为**Green公式**.

注记: 若D是单连通区域, L为逆时针方向; 若D是多连通区域, L的外边界为逆时针方向, 而内边界为顺时针方向.

格林(Green)公式

推论 设D是满足Green定理中条件的区域，D的面积为$\sigma(D)$，∂D为D的分段光滑的边界，则有

$$\sigma(D)=\oint_{\partial D} x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial D} y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_{L} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

特别，若∂D的参数方程为$x=x(t)$，$y=y(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)\mathrm{d}t\right|.$$

格林(*Green*)公式

Green 公式把沿着平面有界闭区域边界的第二型曲线积分，转化成在这个区域上的二重积分. 正确使用Green公式注意三个条件：**封闭性**、**方向性**和**偏导数的连续性**.

1. **曲线L必须是封闭的**. 若不封闭，需添加适当的辅助线使之封闭，添加部分要与L同向，且这部分线上积分易积，即**补线法**.
2. **曲线L的方向是正方向**. 否则加负号.
3. **函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上须有一阶连续偏导数**. 若在D 内存在$P(x,y)$或$Q(x,y)$的无定义点、不连续点、不可导点，则一般不能直接用$Green$ 公式，需挖去这些点，即**挖洞法**.

Green公式

1. 计算曲线积分 $I = \int\limits_C (xe^x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + \sin y)\,\mathrm{d}y$, 其中积分曲线 C 分别是:
   (1) 正向圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$;
   (2) 从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(2,3)$ 的任意分段光滑曲线.
2. 计算曲线积分$I = \oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心, R为半径的圆周$(R > 1)$, 取逆时针方向.

答案

1. 0; $e^2 + 2e^{-1} - \cos 3 + 25$. 2. π.

第二型曲线积分

Green公式

3. 计算曲线积分$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周曲线 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 取顺时针方向.

4. 设L为圆周曲线 $x^2+y^2=1$, 按逆时针方向, 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$.

5. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$, $(A,C,AC-B^2>0)$, 其中L为二维区域包含原点的封闭逆时针曲线.

答案

3. -2π.   4. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.   5. $\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

Green公式

6. 设函数$f(x,y)$是整个平面上具有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任意x,y,t，有$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$成立.
(1) 证明$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$.
(2) 设D是由圆周L：$x^2+y^2=4$所围成的区域，证明

$$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}s=\iint\limits_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7. 已知$f(x)$是正值连续函数，曲线L：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，证明$\oint_L -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x+xf(y)\mathrm{d}y\geqslant 2\pi$.

Green公式

8. 设$f(x,y)$, $g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$上有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$，证明:在单位圆盘上存在一点$(\xi,\eta)$，使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

9. 设$\overline{D}$是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域，$u(x,y)\in C^{(2)}(\overline{D})$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，
(1) 试证: $\displaystyle\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$，其中$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$为$\overline{D}$内沿简单光滑闭曲线$L$上单位外法线方向上的方向导数;
(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时，$u(x,y)=A$(常数)，证明: $u(x,y)\equiv A,\ (x,y)\in D$.

Green公式

10. 设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上，有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s=0$，其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量，证明在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.

11. 设$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$，$D:\ x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求积分$\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$，其中$\mathbf{n}$为单位外法向.

12. 设$f(x,y)\in C^{(2)}(D)$，$D:\ x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求证$\iint_D (xf_x'+yf_y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{2e}$.

答案

11. $\pi(1-e^{-1})$.

Green公式

13. 设$P(x,y),Q(x,y)$在$\mathbf{R}^2$ 上具有连续偏导数，且对以任意点(x_0,y_0)为圆心，任意$r>0$为半径的半圆
$L:\ x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta\ \ (0\le\theta\le\pi)$，
恒有$\displaystyle\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$
证明$P(x,y)=0,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0,\ (x,y)\in\mathbf{R}^2.$

Stokes 定理

定理: 设S 是以封闭曲线L 为边界的分片光滑曲面, P, Q, R 是在包含曲面S 的一个空间区域上具有连续偏导数的函数. 则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \iint_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

或 $$\oint_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \nabla\times\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

其中L的环行方向与S的定向符合右手法则, 即若四个手指的方向为L的方向, 则大拇指所指的方向就是曲面S的定向.

注记: 当曲面S是平面Oxy上的一个区域D时, $Stokes$ 公式就变成了$Green$公式. $Stokes$ 公式是$Green$ 公式在空间的推广. 它把沿一块空间曲面的边界环线的第二型曲线积分同这块曲面上的第二型曲面积分联系起来. 运用$Stokes$公式须注意以下三点:

1. **曲线L必须是封闭的**. 由于以L为边界的曲面很多, 应选择一张使得计算简便的曲面为宜.
2. **曲线L是有方向的**, L的环行方向与S的定向符合右手法则.
3. 函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在包含曲面S在内的某个空间区域上具有**一阶连续偏导数**.

Stokes公式

1. $\int_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$ 其中L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 和平面$x+y+z=0$的交线，L的方向与z 轴正向成右手系.
2. 计算曲线积分$\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (2z^2-x^2)\mathrm{d}y + (3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z轴正向来看，C沿逆时针方向.
3. 求积分$\int_L xz\mathrm{d}y - yz\mathrm{d}x$，其中$L$为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$与$x^2+y^2=x$的交线，从$z$轴正向为逆时针方向.

答案

1. $-2\sqrt{3}\pi a^2$.　　2. -24.　　3. $\frac{2}{3}$.

Stokes公式

4. 计算曲线积分

$$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

其中L 是球面$x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面$x^2+y^2=2x$交线($z\geq 0$), 从z 轴的正向看去L 沿顺时针方向.

(答案: -4π 用参数法也很简单)

定义

向量场$\mathbf{v}$在定向曲面S上的积分

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}(M_i)\cdot\boldsymbol{n}(M_i)\Delta S_i$$

称为**第二型曲面积分**, 或向量场$\mathbf{v}$通过曲面S指定侧的**通量**.

设$\mathbf{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 单位法向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

有向面积元 $\mathrm{d}\mathbf{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$,

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

第二型曲面积分又称为**对坐标的曲面积分**.

基本性质

(1) **对场的线性性.** 若$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, 则有

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = c_1\iint_S \mathbf{v}_1\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + c_2\iint_S \mathbf{v}_2\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

(2) **对积分曲面的可加性.** 若定向曲面S是由定向曲面S_1和定向曲面S_2拼接而成的, 则有

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

(3) **对曲面的方向性.** 若用S^+和S^-表示曲面的不同两侧, 则

$$\iint_{S^-} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\iint_{S^+} \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

基本性质

(4) **几个重要特例.**

若S是母线平行于x轴的定向柱面，则 $\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$

若S是母线平行于y轴的定向柱面，则 $\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0.$

若S是母线平行于z轴的定向柱面，则 $\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$

计算方法

(1) **化为第一型曲面积分**

如果已知曲面S的单位法向量

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

那么

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

计算方法

(2) **参数法.** 设光滑曲面S的参数方程为

$$\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in D.$$

曲面S指定侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\varepsilon\frac{\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|}$, 其中$\varepsilon=\pm1$, 正负号的选择由曲面$S$指定侧的法向$\boldsymbol{n}$唯一确定, $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$与$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v$成右手系, $\mathrm{d}S=|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 则有

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\varepsilon\iint_D \mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\varepsilon\iint_D\begin{vmatrix}P&Q&R\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\varepsilon\iint_D\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

注记:

1. 这里有向面积微元在坐标平面上的代数投影

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

如: $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}>0$表示曲面前侧投影, 否则是后侧. 与二重积分的变量代换不同, 二重积分中面积微元是非负的, 即

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2. $\iint R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是特殊的向量场曲面积分, 向量场$\mathbf{v}=(0,0,R)$, 不是二重积分.

计算方法

(3) **投影法.** 若曲面S有显式表示, $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, 则有

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\varepsilon\iint_D\begin{vmatrix}P & Q & R\\ 1 & 0 & f'_x\\ 0 & 1 & f'_y\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\varepsilon\iint_D\left(-Pf'_x-Qf'_y+R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

显式曲面S的定侧是上侧$\varepsilon=1$, 是下侧$\varepsilon=-1$.

注记:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S 为上侧时, 上式右边取正号, S 为下侧时, 取负号.

第二型曲面对称性:

- **关于坐标平面的对称性(偶零奇倍).** 例如：曲面S关于yOz平面左右对称，在对称部分上法向量分别指向前、后侧，则

  当$P(-x,y,z)=-P(x,y,z)$时，
  $$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{S_{前}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
  当$P(-x,y,z)=P(x,y,z)$时，
  $$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$
  其他情况类似.

- **轮换对称性.** 曲面S关于变量x,y,z具有轮换对称性，例如有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S P(y,z,x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_S P(z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Example

计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},$$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧.

解法1: 球面S关于Ozx平面对称及关于变量x, y, z具有轮换对称性，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2 y} = 0, \quad \iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x} = \iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

$$\therefore \quad I = \iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z} = 2\iint_{s_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

S_1为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧，在xOy面的投影为D：$x^2+y^2\le 1$，于是

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}} = -4\pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}} \\ &= 4\pi\tan 1. \end{aligned}$$

解法2: S的单位法向为$\mathbf{n}=(x,y,z)$, 化为第一型曲面积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{2}{x\cos^2 x}, \frac{1}{\cos^2 y}, -\frac{1}{z\cos^2 z}\right)\cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S \\ &= \iint_S \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{y}{\cos^2 y}-\frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由对称性 $\displaystyle\iint_S \frac{y}{\cos^2 y}\mathrm{d}S=0, \quad \iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\cos^2 x}=\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\cos^2 z}$

$$\begin{aligned} \therefore \quad I &= \iint_S \frac{\mathrm{d}S}{\cos^2 z} = 2\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= 4\pi\tan 1. \end{aligned}$$

计算方法

(4) *Gauss* **公式.**

定理: 设空间区域V由分片光滑的双侧封闭曲面S围成, $\mathbf{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 是V 上的光滑向量场(即有一阶连续偏导数), 则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

或 $$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}V=\iiint_V \mathbf{div}\ \mathbf{v}\mathrm{d}V.$$

其中S的方向为外侧.

Gauss 定理

推论: 设空间区域V由分片光滑的封闭曲面S围成, 则有V的体积

$$\begin{aligned}\Delta V &= \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$Gauss$ 定理

注记: $Gauss$ 公式把沿着空间有界闭区域外侧边界的第二型曲面积分，转化成在这个区域上的三重积分. 运用$Gauss$公式须注意三个条件: **封闭性**(封闭曲面)、**方向性**(封闭曲面的外侧)、向量场的**偏导连续性**:

1. **曲面S必须是封闭的.** 若不封闭，需添加辅助面使其封闭，添加的辅助面的定向要与S的方向协调，且这部分的曲面积分易计算，即**补面法**.
2. **曲面S的方向为外侧.** 否则加负号.
3. **函数P, Q, R在V中有一阶连续偏导数.** 若在V内存在P或Q 或R 的无定义点、不连续点、不可导点，则一般不能直接用$Gauss$公式，需用封闭曲面挖去这些点，即**挖洞法**.

Gauss公式

1. $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$, 法线方向朝上.(答案: $\frac{5}{3}\pi$)
2. $\iint\limits_{S^+} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$的下侧. (答案: $\frac{21}{10}\pi$)
3. 计算 $\iint\limits_{S}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为有向曲面$z=x^2+y^2$ $(0\leq z\leq 1)$, 其法向与z轴夹角为锐角.(答案: $-\frac{\pi}{2}$)
4. S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的下侧, 求 $\iint\limits_{S}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.(答案: $-\frac{116}{5}\pi$)

Gauss公式

5. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{S^+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, S^+ 为光滑闭曲面的外侧, 且原点不在曲面S^+上.(答案: 4π)

6. 设向量场$\vec{v}(x,y,z) = (yz, zx, 2)$, 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma^+} \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$, Σ^+ 为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$的上侧, $\vec{n}$是其上的朝上的单位法向.(答案: 2π)

7. $\displaystyle\iint\limits_{S^+} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geqslant 0, R > 0)$的上侧.
(答案: $2\pi R^3 + \pi R^2$)

Gauss公式

8. $\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$的外侧.

(答案：1 (提示:本题难点在三重积分变量代换))

9. $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 其中 Σ 是曲面 $(x-1)^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的外侧.

(答案：$0<a<1$时,$I=0$; $a>1$时, $I=2\pi$.)

10. $\iint_S 2(1+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 S 是曲线 $y=\sqrt{x}$ $(0\leq x\leq 1)$绕x轴旋转生成的旋转面, 且法向量与x轴正向夹角为钝角. (答案：-3π.)

保守场、有势场及无旋场

【保守场与有势场的关系】

设$\mathbf{v}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ 是空间区域V中的连续向量场，则下面几个命题相互等价

1. $\mathbf{v}$是V内的保守场;
2. $\mathbf{v}$ 在V内的曲线积分与路径无关;
3. $\mathbf{v}$为V内的有势场;
4. 在V内，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$是全微分.

注记: 设保守场$\mathbf{v}$的势函数为φ，则$\mathbf{v}$沿L_{AB}的曲线积分表示为

$$\int_{L_{AB}}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_A^B\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\varphi(B)-\varphi(A),$$

这可看成牛顿—莱布尼兹公式的推广.

保守场、有势场及无旋场

【各场之间的关系】

设V是曲面单连通区域，$\mathbf{v}$是V上的光滑(或C^1)向量场，则

$\mathbf{v}$是V中的保守场$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{v}$是V中的有势场$\Longleftrightarrow$$\mathbf{v}$是$V$中的无旋场.

求势函数两种方法：**折线法**和**凑微分法**

保守场$\mathbf{v}$的势函数可取为变上限积分

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

折线段$(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$ 在V内，

$$\varphi=\int_{x_0}^{x} P(u,y_0,z_0)\mathrm{d}u+\int_{y_0}^{y} Q(x,v,z_0)\mathrm{d}v+\int_{z_0}^{z} R(x,y,w)\mathrm{d}w.$$

这种求势函数的方法称为**折线法**.

定理: 设D是平面单连通区域, $\mathbf{v}=(P(x,y),Q(x,y))$, 且$P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(D)$, 则以下几个命题相互等价:

(1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 在$D$内处处成立, 即$\mathbf{v}$是**无旋场**;

(2) 对D内任意一条分段光滑闭曲线L都有$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, 即$\mathbf{v}$是**保守场**;

(3) 第二型曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在D上与路径无关, 只与L的起点A和终点B的位置有关, 从而有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y;$$

(4) 在D内存在一个可微函数$\varphi(x,y)$, 使得$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$是它的全微分, 即有

$$\mathrm{d}\varphi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

(5) 在D内存在一个可微函数$\varphi(x,y)$, 使得$\mathbf{grad}\varphi=(P(x,y),Q(x,y))=\mathbf{v}$, 即$\mathbf{v}$ **是有势场**, 势函数

$$\varphi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(u,y_0)\mathrm{d}u+\int_{y_0}^{y}Q(x,v)\mathrm{d}v+C;$$

(6) 一阶微分方程$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}x=0$是全微分方程.

势函数

1. 已知向量场$\vec{v} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy)$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, 证明$\vec{v}$是有势场, 并求全体势函数.

2. 设$f(x)$, $g(y)$在$(-\infty, +\infty)$上有连续的导函数, $f(0) = g(0) = 1$, 且第二型曲线积分 $\int_{L_{AB}} yf(x)dx + (f(x) + zg(y))dy + g(y)dz$ 与路径无关, 求向量场$(yf(x), f(x) + zg(y), g(y))$的势函数.

3. 设$f(z)$是$(-\infty, +\infty)$上的可微函数, $f(0) = 0$, 且向量场$\vec{v} = (2xz, 2yf(z), x^2 + 2y^2z - 1)$是整个空间区域上的保守场, 求$\vec{v}$的一个势函数.

答案

1. $\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$. 2. $ye^x + ze^y + C$.
3. $x^2z + y^2z^2 - z$.

保守场

势函数

4. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数，$f(0)=1$，且向量场 $\overrightarrow{F}=(yf(x),f(x)+ze^y,e^y)$是整个空间区域上的保守场，求向量场$\overrightarrow{F}$的势函数.

5. $\overrightarrow{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2})$，$(y>0,z>0)$是否是有势场？若是，请说明理由，并求它的一个势函数；若不是有势场，请证明.

6. 证明向量场 $\overrightarrow{F}=yz(2x+y+z)\overrightarrow{i}+zx(x+2y+z)\overrightarrow{j}+xy(x+y+2z)\overrightarrow{k}$是有势场，并求其势函数.

答案

4. ye^x+ze^y+C.　5. $x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}-1$.　6. $xyz(x+y+z)+C$.

势函数

7. 设曲线积分 $\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中$\varphi(x)$连续可导，且$\varphi(0)=0$，求$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$

8. 已知可微向量场 $\mathbf{V} = (f(y,z), xz, xy)$，其中 $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
   (1) 求函数 $f(y,z)$，使得 $\mathbf{V}$ 是有势场;
   (2) 当 $f(0,0)=0$ 时，求 $\mathbf{V}$ 的一个势函数 $u(x,y,z)$;
   (3) 求出上述势函数 $u(x,y,z)$ 在点 $M(1,1,1)$ 处方向导数的最大值和最小值.

答案

7. $\frac{1}{2}$;　8. $f(y,z) = yz + C$, C为任意常数;　$u(x,y,z) = xyz$;　最大值为$|\text{grad } u|_M = |(1,1,1)| = \sqrt{3}$;最小值为$-|\text{grad } u|_M = -\sqrt{3}$.

曲线积分与路径无关

1. 证明曲线积分 $\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$ 与路径无关; 并求
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z.$$
2. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0.$
(1) 求函数 $\varphi(x)$. (2) 设 C 是绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

答案

1. 0. 2. $-x^2$; 0.

曲线积分与路径无关

3. 设函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，对任一围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线C^+，曲线积分$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$的值相同.

(1) 设L^+是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，证明：

$$\int_{L^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0;$$

(2) 求函数$\varphi(x)$;

(3) C^+是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，求$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

12.1 周期函数的Fourier级数

设$f(x) \in \mathbf{R}[-\pi,\pi]$，或者在$[-\pi,\pi]$上**可积且绝对可积**，就可以计算出Fourier 系数a_n, b_n，然后构造一个三角级数

$$f(x) \longrightarrow \{a_n,\ b_n\} \longrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

称它为$f(x)$ 的**Fourier级数**. 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x$$

12.1 周期函数的Fourier级数

- **Dirchlet 收敛定理:**
  设周期函数$f(x)$的周期为2π.
  (1) 如果在任何有限区间上$f(x)$逐段光滑, 那么它的Fourier级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

  (2) 如果函数处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其Fourier 级数就在整个数轴上绝对一致收敛于$f(x)$.

  注记: Dirchlet收敛定理中的**逐段光滑**是指, 函数除有限个点外, $f(x)$ 连续且有连续的微商$f'(x)$, 而这有限个点只能是$f(x)$ 或$f'(x)$ 的第一类间断点.

Parseval等式

设$f(x) \in L^2[a,b]$, **Fourier 级数**为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{b-a} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{b-a} x \right),$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a} x \mathrm{d}x, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a} x \mathrm{d}x, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Parseval 等式为

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x.$$

Fourier级数及数项级数和

1. 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

求$f(x)$ 的Fourier 级数，并利用所得结果计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

答案

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx,\qquad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^3}{32},\frac{\pi^4}{96},\frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

2. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$ 展开以2π 为周期的余弦级数(须讨论其收敛性)，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.
3. 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$ 展开成余弦级数(讨论收敛性).

答案

2. $1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad \frac{\pi^2}{12}, \frac{\pi^4}{90};$
3. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos nx = x^2, \ x\in[0,\pi]$

Fourier级数及数项级数和

4. 设$f(x)$ 是以2 为周期的周期函数, 其在区间$[1,3]$上的取值为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\le 2,\\ 3-x, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

1) 试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图, 并将$f(x)$展开为Fourier 级数;

2) 试画出$f(x)$Fourier 级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图;

3) 求数项级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right),\quad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6}.$$

Fourier级数及数项级数和

5. $f(x)$是以2为周期的周期函数，在$(-1,1]$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\end{cases}$.

(1) 将$f(x)$展开为$Fourier$ 级数，并说明该$Fourier$级数的收敛性;

(2) 写出相应的$Parseval$ 等式;

(3) 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right);\ \frac{\pi^4}{96},\ \frac{\pi^4}{90}.$$

Fourier级数及数项级数和

6. 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$展开成2π 为周期的余弦级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le|x|<\pi.\end{cases}$
试将$f(x)$ 展开以2π 为周期的Fourier 级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2};\qquad \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)x.$$

Fourier级数及数项级数和

8. 将$f(x)=\dfrac{\pi}{2}-x,\ x\in[0,\pi]$展开为余弦级数；求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

答案

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}-x.$$

Fourier级数

9. 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且满足α $(0 < \alpha < 1)$ 阶Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}.$$

记a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是$f(x)$ 的Fourier 系数. 求证:

$$|a_n| \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}, \quad |b_n| \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

10. $f(x)$在$[0, 2\pi]$上可积且平方可积, 证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\pi - x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

其中$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ $(n \geq 1)$为$f(x)$奇延拓的$Fourier$系数.

12.3 Fourier变换

- **定义:**

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t$$

称为函数$f(x)$ 的**Fourier变换** 或 **像函数**, 记为$F=\mathcal{F}[f]$; 而函数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

称为函数$F(\lambda)$的**Fourier逆变换**或**本函数**,记为$f=\mathcal{F}^{-1}[F]$.

12.3 Fourier变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(1) 若函数$f(x)$是偶函数, 则$f(x)$的Fourier变换为

$$F(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的**Fourier余弦变换**; 其逆变换公式为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda.$$

12.3 Fourier变换

- **余弦变换与正弦变换:**

(2) 若函数$f(x)$是奇函数, 则$f(x)$的Fourier变换为

$$F(\lambda) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t,$$

为避免出现复数因子i, 定义函数

$$G(\lambda) = iF(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t,$$

称它为$f(x)$的**Fourier正弦变换**; 其逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda.$$

Fourier变换

1. 求函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0, & others\end{cases}$ 的Fourier 变换.
2. 求函数$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\geq 0\\ e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的Fourier 变换.

答案

$\dfrac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}$; $F(\lambda)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos\lambda x\mathrm{d}x=\frac{4}{4+\lambda^2}$.

含参变量积分的性质

1. 计算 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$.
2. 设 $G(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x, F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 求 $G'(\alpha)$, $F'(\alpha)$.
3. $I(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{x^2+xu}\,dx$, 求 $I'(0)$.

答案

1. $\dfrac{\pi}{4}$;　　2. $G'(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$,

$F'(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha$.　3. $\frac{e-3}{2}$.

含参变量积分的性质

4. 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数，
$$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx,\text{ 求}F'(\alpha).$$

5. 设 $g(x)=\int_{2^x}^{\cos^3 x}(e^{-xt^2}+\cos(xt)^2)\ \mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$ 与 $g'(0)$.

答案

4. $F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\,dx-\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)$.

5. $g'(x)=$
$$-\int_{2^x}^{\cos^3 x} t^2(e^{-xt^2}+2x\sin(xt)^2)\mathrm{d}t-3\cos^2 x\sin x(e^{-x\cos^6 x}+\cos(x^2\cos^6 x))-2^x\ln 2(e^{-x4^x}+\cos(x^2 4^x));\ g'(0)=-2\ln 2.$$

讨论含参变量反常积分的一致收敛性

1. 讨论$I(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$在给定区间的一致收敛性

   (1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty),\ \alpha_0>0$;　(2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

2. 含参变量函数$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$在$\alpha\in[b,B],\ 0<b<B$上是否一致收敛？并说明理由.

答案

1. (1) 一致收敛;　(2)非一致收敛.　　2. 一致收敛.

利用含参变量积分性质计算积分

1. 计算$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\,dx, \quad (u>0)$.
2. 计算$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}dx$ ，其中$\alpha>0$.
3. 计算$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$ ，其中$\alpha>0$.

答案

1. $\pi\ln\frac{u+1}{2}$; 2. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; 3. $\pi\ln(1+\alpha)$.

利用含参变量积分性质计算积分

- 证明广义含参变量积分$g(\alpha) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ 对任意α收敛，并求$g(\alpha)$的初等表达式.

答案

$g(\alpha) = \frac{\pi}{2}(|\alpha| + 1 - \sqrt{1+\alpha^2})sgn\alpha \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$

利用几个重要积分计算积分

1. 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.
2. 利用Euler积分计算 $\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$, 其中 $\alpha>0$.
3. 求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(9+x^2)^5}\,\mathrm{d}x$.
4. 试求曲线 $x^n+y^n=a^n$ 当 $x>0,y>0,n>0$ 时所围成平面图形的面积.

答案

1. $\frac{\pi}{2}$; 2. $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$; 3. $\frac{\pi}{2^5\cdot 3^3\cdot 4!}$; 4. $\frac{a^2}{n}\mathrm{B}(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1)$.

含参变量广义积分收敛证明及计算

- (1) 求使积分$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛的α 取值范围;

  (2) 收敛时，利用Euler积分计算$\varphi(\alpha)$;

  (3) 证明含参广义积分$\varphi(\alpha)$ 在区间$[-\alpha_0,\alpha_0]$上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

答案

(1) $\alpha\in(-1,1)$;　　(2) $\frac{\pi}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}$