数分（B2）第10章综合习题解

1、计算
$$I=\int_L z\,\mathrm{d}s,$$
其中 L 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $y^2=ax\ (a>0)$ 交线上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧段.

注: 该题的关键是选取参变量, 接着就是计算.

解 取 y 为参变量, 因此
$$x(y)=\frac{y^2}{a},\ y=y,\ z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2},\ 0\leqslant y\leqslant a.$$
因此, 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y$$
$$\begin{aligned}\Longrightarrow I&=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$
为了计算上述积分, 作变换
$$u=y^2+\frac{9a^2}{16},\ b^2=\frac{17a^4}{16^2}$$
$$\Longrightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^{\frac{25a^2}{16}}\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u$$
我们知道（第一册）函数 $\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数可以按如下计算. 令
$$u=b\cosh t,\ \sqrt{u^2-b^2}=b\sinh t,\quad \mathrm{d}u=b\sinh t\,\mathrm{d}t,$$
所以
$$\int\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u=b^2\int\sinh^2 t\,\mathrm{d}t=b^2\int\frac{1}{2}(\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sinh 2t-\frac{1}{2}t.$$
将
$$t=\cosh^{-1}\frac{u}{b}$$

代入, 就得到$\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数, 再将上下限代入即得到积分的值.

2、设 $a,b,c>0$, 求曲线

$$L:\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$$

所围成的区域 D 的面积.

注: 该题中若 $n=1$, 则曲线就是著名的Descartes 叶形线.

解 由 Green 公式的推论知

$$\mu(D)=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

为了计算积分, 令$y=\dfrac{b}{a}xt$, 得

$$x=x(t)=ac\frac{t^n}{1+t^{2n+1}},\ y=y(t)=bc\frac{t^{n+1}}{1+t^{2n+1}},\ 0\leqslant t<+\infty.$$

$$\Longrightarrow x'(t)=ac\frac{nt^{n-1}-(n+1)t^{3n}}{(1+t^{2n+1})^2},\ y'(t)=bc\frac{(n+1)t^n-nt^{3n+1}}{(1+t^{2n+1})^2},$$

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-y(t)x'(t)+x(t)y'(t))\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\,\mathrm{d}t=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

3、求平面上两个椭圆

$$C_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad C_2:\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>b)$$

内部公共区域的面积.

解 由对称性, 只要计算在第一象限的公共区域D的面积即可.

为此, 先求两个椭圆在第一象限的交点坐标 $P(x_0,y_0)$: 两个方程相减, 得 $x_0=y_0$. 因此

$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

解得

$$x_0=y_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

因此, 在第一象限的公共区域D是由椭圆C_1 上从$P(x_0,y_0)$ 到y 轴上点 $A(0,b)$ 的弧段 L_{PA} 和 C_2 上从x 轴上点$B(b,0)$ 到 $P(x_0,y_0)$ 的弧段 L_{BP} 以及 x 轴上线段 $\overline{OB}$和 y 轴上线段 $\overline{AO}$ 围成的. 方向逆时针.

对于 L_{PA}, 取 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0$ 处, 有 $x_0=y_0$, 对应的 θ_0 满足

$$a\cos\theta_0=b\sin\theta_0,\Longrightarrow \tan\theta_0=\frac{a}{b},\ \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

在$A(0,b)$, 对应的 θ_1 满足

$$a\cos\theta_1=0,\Longrightarrow \theta_1=\frac{\pi}{2}.$$

因此 L_{PA} 的参数方程表示为

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta\ \ \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

同理, 对于 L_{BP}, 取 $x=b\cos\theta,\ y=a\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0$ 处, 有 $x_0=y_0$, 对应的 θ_2 满足

$$b\cos\theta_2=a\sin\theta_2,\Longrightarrow \tan\theta_2=\frac{b}{a},\ \theta_2=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

在$B(b,0)$, 对应的 θ_3 满足

$$a\sin\theta_3=0,\Longrightarrow \theta_3=0.$$

因此 L_{BP} 的参数方程表示为

$$x=b\cos\theta,\ y=a\sin\theta\ 0\leqslant\theta\leqslant\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

所以面积为

$$\mu(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y).$$

分段积分, 并注意到在直线 $\overline{OB}$ 上, $y=0$, $\mathrm{d}x=0$; 在 $\overline{AO}$ 上 $x=0$, $\mathrm{d}y=0$. 所以

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\frac{1}{2}\oint_{L_{PA}}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)+\frac{1}{2}\oint_{L_{BP}}(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)\\&=\frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}^{\frac{\pi}{2}}ab(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

总面积为$4\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

4、 (Poisson公式) 设 $S: x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 连续, 求证

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t,\ k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

证明 令 $\vec{n}=\dfrac{1}{k}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$, 那么球面 S 是单位圆以$\vec{n}$ 为旋转轴的旋转曲面, 设 $P(x,y,z)$ 为球面上一点, 则 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ 在 $\vec{n}$ 的投影为 $t=\vec{n}\cdot\vec{r}$, 绕 $\vec{n}$ 的旋转半径为

$$\rho=\sqrt{1-t^2},\ \ \mathrm{d}\rho=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Longrightarrow f(ax+by+cz)=f(kt)$$

只与 $t=\sqrt{1-\rho^2}$有关, 类似旋转曲面的面积元的计算, 面积元为

$$\mathrm{d}S=\pi(\rho+(\rho+\,\mathrm{d}\rho))\,\mathrm{d}s=2\pi\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=2\pi\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\iint_S f(kt)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t.$$

5、设 $S(t)$ 是平面 Π: $x+y+z=t$ 被球面 B: $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分,

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2),$$

求证: 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

证明 证明的过程实际上是一个计算的过程.

首先注意到平面 Π 的一个单位法向量是 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 不难计算原点到 Π 的距离为 $\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$, 所以当 $|t|>\sqrt{3}$ 时, Π 和球面 B 没有交.

其次注意到当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, S(t) 是一个圆盘, 圆盘的圆心为 $\left(\dfrac{t}{3},\dfrac{t}{3},\dfrac{t}{3}\right)$, 半径为

$$r_0=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}$$

设$S(t)$ 上任意一点 (x,y,z) 到 $S(t)$ 的圆心的距离为 r:

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)^2+\left(y-\frac{t}{3}\right)^2+\left(z-\frac{t}{3}\right)^2=r^2,$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{t^2}{3}+r^2$$

$S(t)$ 上面积元在极坐标下为

$$\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ 0\leqslant r\leqslant r_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{S(t)}F(x,y,z)\,\mathrm{d}S&=\iint_{S(t)}\left(1-\left(\frac{t^2}{3}+r^2\right)\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\left(1-\left(\frac{t^2}{3}+r^2\right)\right)r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned}$$

6. 设 $f(t)$ 在 $|t|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}t.$$

证明 令

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\theta,$$

其中 $0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 则

$$\begin{aligned}&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)r^2\sin\theta\\&=\int_0^1r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)\sin\theta\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi+c\cos\theta)\sin\theta\\&=\iint_{x^2+y^2+z^2=1}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S\\&=\frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1}f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

上式中最后一步利用了第4题中的Poisson公式.

点评: 本题中利用被积函数的特殊性, 通过换元, 把三重积分化成了曲面积分.

习题11.3中第7题：设 D 是平面上简单闭曲线 L 围成的区域, $L=\partial D$.

(1) 如果 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 证明

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s=\iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

这里 $\vec{n}$ 是曲线 ∂D 的单位外法向量, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace 算子, 因此当 $f(x,y)$ 满足 Laplace 方程 $\Delta f=0$ 时, 有

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s=0.$$

(2) 如果 $\vec{a}$ 是单位常向量, 证明：

$$\oint_{\partial D}\cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}s=0.$$

(3) 如果 $u(x,y),v(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 证明下列第二Green公式:

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\,\mathrm{d}s=\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明 (1) 设平面曲线 ∂D 的外法向量为 $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$, 那么$\partial D$ 的切向量 $\vec{\tau}$ 可以表示为

$$\vec{\tau}=\vec{k}\times\vec{n},\quad \text{或}\quad \vec{n}=\vec{\tau}\times\vec{k}.$$

且 $\vec{\tau}$ 的方向指向曲线 ∂D 的逆时针方向. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s&=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{\tau}\times\vec{k}\,\mathrm{d}s\\&=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

这里 $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, 因此

$$\vec{k}\times\nabla f=-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j}$$

所以, 利用Green 定理就有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial D} -\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(2) 设 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ 为平面单位常向量. 令 $f(x,y) = a_1x + a_2y$, 则

$$\nabla f = \vec{a},\quad \Delta f = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f\cdot\vec{n} = \vec{a}\cdot\vec{n} = \cos(\vec{a},\vec{n}),$$

由(1) 的结果就得到

$$\oint_{\partial D} \cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}s = 0.$$

(3) 类似 (1) 中的推导, 并利用Green 定理, 有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s &= \oint_{\partial D} v\vec{k}\times\nabla u\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \oint_{\partial D} -v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \left[v\Delta u + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

同理有

$$\oint_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[u\Delta v + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

两式相减得

$$\oint_{\partial D} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

7. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证:当 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时, 它在 D 上也恒为零.

点评: 本题的含义是下列微分方程的边值问题:

$$\begin{cases}\Delta f = 0 & (x,y)\in D\\ f\Big|_{\partial D} = 0\end{cases}$$

只有零解.

证明 类似习题11.3 第7题（3）中的计算, 有

$$\oint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[f\Delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

因为 $f\Big|_{\partial D} = 0$, 所以上式左边曲线积分为零. 再由 $\Delta f = 0$, 得

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

即 f 是 D 上常值函数, 并且在边界上取值为零，因此 $f(x,y) = 0$ 在 D 上成立.

8. 设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, 那么有

$$f(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $P_0 = (x_0,y_0)$, $B_r(P_0):\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant r \leqslant R$.

证明 令

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)ds.$$

取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x = x_0 + r\cos\varphi,\ \ y = y_0 + r\sin\varphi \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

所以

$$\begin{aligned}
g(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^r \mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

这是一个对 r 的变上限积分, 因此

$$\begin{aligned}
g'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} -\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\pi r}\iint_{B_r(P_0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,
\end{aligned}$$

(注: 也可以在 $g(r)$ 表达式中直接对 r 求导, 得到 $g'(r)$.)

$g'(r)=0$ 说明 $g(r)$ 为常数. 所以

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}\varphi=f(P_0).$$

9. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

求证: 若 $f(x,y)$ 不是常数, 则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值只能在 D 的边界 $L=\partial D$ 上取到.

证明 假设 $f(x,y)$ 在 D 的内部一点 $P_0(x_0,y_0)$ 取到最大值. 因为 P_0 是内点, 所以存在 $r>0$, 使得 $B_r(P_0)\subset D$. 在 $B_r(P_0)$ 上, 由第8题结果, 有

$$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)}[f(x_0,y_0)-f(x,y)]\,\mathrm{d}s=0,$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi}[f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi=0,$$

这里取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x=x_0+r\cos\varphi,\ \ y=y_0+r\sin\varphi\ \ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

由于 $f(x_0,y_0)$ 是最大值, 上述积分中被积函数为非负连续，因此积分为零推出被积函数恒为零, 即

$$f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)=0,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

或

$$[f(x_0,y_0)-f(x,y)]\Big|_{\partial B_r(P_0)}=0.$$

根据第7题结果, 推出

$$f(x,y)=f(x_0,y_0),\quad (x,y)\in B_r(P_0).$$

其次在 D 的内部任意一点 $P(x,y)\in D^\circ$, 用折线连接 P_0 和 P 点, 并可用有限个圆域 $B_{r_0}(P_0),\ B_{r_1}(P_1),\cdots,B_{r_n}(P_n)$ 覆盖该折线, 逐步递推得 $f(x_0,y_0)=f(x,y)$, 也

就是 $f(x,y)$ 在 D 的内部恒为常数 $f(x_0,y_0)$, 再利用函数的连续性得 f 在$\overline{D}$ 上恒为常数:

$$f(x,y)\Big|_{\overline{D}} = f(x_0,y_0).$$

这与 f 不是常值函数的条件矛盾. 因此 f 在D 的内部不可能取到最大值. 同理可证也不可能取到最小值.

10. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(P_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, 求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $B_r(P_0):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 类似第8题的证明, 取球面 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程表示

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

并记

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

对 r 求导得

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)}\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iiint_{B_r(P_0)}\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \end{aligned}$$

所以 $g(r)$ 是常值函数:

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0,y_0,z_0)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = f(P_0).$$