09.23

第二章课后习题：2、8、12、17、31

2、一位篮球运动员练习投篮 100 次，且已知他前两次只投进了一次. 从第 3 球开始，假设他每次投篮的命中率为其前面所投进球的比率(比如他前 5 次投进了 4 个球, 则第 6 次他的投篮命中率为 4/5). 求他最终在这 100 次投篮中投进次数的分布律.

解：本题可使用数学归纳法。不妨记 $X_n(n \geqslant 3)$ 为投篮 n 次进球的次数。显然 X_3 服从取值为 $\{1,2\}$ 的离散均匀分布；故对于 X_4 可得

$$
\begin{aligned}
&P(X_4=1)=P(X_3=1)P(X_4=1|X_3=1)=1/2\times 2/3=1/3,\\
&P(X_4=2)=P(X_3=1)P(X_4=2|X_3=1)+P(X_3=2)P(X_4=2|X_3=2)=1/2\times 1/3+1/2\times 1/3=1/3,\\
&P(X_4=3)=P(X_3=2)P(X_4=3|X_3=2)=1/2\times 2/3=1/3.
\end{aligned}
$$

所以可以设 X_n 服从取值为 $\{1,\cdots,n-1\}$ 的离散均匀分布，在此归纳假设下可得: 当 $k<n$ 时，

$$
\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=k\right) &=\sum_{m=1}^{n} P\left(X_{n+1}=k \mid X_{n}=m\right) P\left(X_{n}=m\right) \\
&=\frac{1}{n-1}\left[P\left(X_{n+1}=k \mid X_{n}=k-1\right)+P\left(X_{n+1}=k \mid X_{n}=k\right)\right] \\
&=\frac{1}{n-1}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{n-k}{n}\right)=\frac{1}{n};
\end{aligned}
$$

当 $k=n$ 时，

$$P\left(X_{n+1}=k\right)=P\{\text{从第 3 球开始的每一球都中}\}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

所以可以得到 X_{100} 服从取值为 $\{1,\cdots,99\}$ 的离散均匀分布.

8、进行 20 次独立射击，且假设每次射击的命中率为 0.2。若以 X 记命中的次数，试求概率 $P(X\geqslant 1)$及 X 最有可能的取值.

解：命中 k 次的概率为

$$P(X=k)=C_{20}^{k}0.2^{k}0.8^{20-k}.$$

则

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.8^{20},$$

$$P(X = k) - P(X = k - 1) = \frac{20!}{(k!(21 - k)!} 0.2^{k-1} 0.8^{20-k} (4.2 - k),$$

因此 X 最可能的取值为 4.

12、设某种昆虫单只每次产卵的数量服从参数为 λ 的泊松分布，而每个虫卵能孵出幼虫的概率均为 p $(0 < p < 1)$ 且相互独立. 分别以 Y 和 Z 记一只昆虫一次产卵后幼虫的个数和未能孵出幼虫的虫卵的个数.试问 Y 和 Z 分别服从什么分布？它们是否相互独立？

解：记 X 为产卵的数量, 则

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

因此

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(Y = n \mid X = k) P(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \left[\sum_{k-n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda(1-p)} \right] \times \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p} = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

类似地，

$$P(Z = n) = \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} e^{-\lambda(1-p)},$$

故可知 Y 和 Z 分别服从参数为 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的泊松分布。

注意到，

$$\begin{aligned} P(Y = y, Z = z) &= P(Y = y \mid X = y + z) P(X = y + z) \\ &= \frac{(y+z)!}{y!z!} p^y (1-p)^z \frac{\lambda^{y+z}}{(y+z)!} e^{-\lambda} \\ &= P(Y = y) P(Z = z), \end{aligned}$$

因此 Y, Z 是独立的。

17、假定有 100 万注彩票出售，其中有 100 注有奖.

(1) 若一个人买了 100 注，求其中奖的概率；

(2) 一个人买多少注，才能保证有 0.95 的概率中奖？

解：(1) 记买 100 注的中奖注数为 X，由题干信息可得 X 近似服从 $B(100, 10^{-4})$，由泊松定理可知 X 近似服从 $P(0.01)$，则中奖概率

$$P_{100}\{\text{中奖}\} = P_{100}\{X \geqslant 1\} = 1 - P_{100}\{X = 0\} \approx 1 - \frac{0.01^0}{0!} e^{-0.01} \approx 0.01.$$

(2) 若 $P_n\{\text{中奖}\} = 1 - P_n\{X = 0\} \approx 1 - e^{-10^{-4}n} \geqslant 0.95$，则可等价推出

$$n \geqslant \left[\frac{\ln 0.05}{-10^{-4}} \right] + 1 = 29958,$$

故至少买 29958 注。

31、设随机变量 $X \sim N(1,4)$,

(1) 试求概率 $P(0 < X < 4)$, $P(X > 2.4)$ 和 $P(|X| > 2)$;

(2) 试求常数 c, 使得 $P(X > c) = 2P(X \leqslant c)$.

解：(1) 为计算方便，可设置新变量

$$Y = \frac{X-1}{2} \sim N(0,1).$$

则

$$\begin{aligned} P(0 \leqslant X \leqslant 4) &= P\left(-\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 2.4) &= P(Y > 0.7) \\ &= 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242 \end{aligned}$$

(2) 由于

$$P(X > c) = P\left(Y > \frac{c-1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-1}{2}\right),$$

$$P(X \le c) = P\left(Y < \frac{c-1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-1}{2}\right),$$

所以有

$$\Phi\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{1}{3} = 0.6667,$$

而 $\Phi(0.43) = 0.6664$，故可计算得 $c \approx 0.14$.