三 40 44 47 48

四 1. 2 (1)

40. 设随机向量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 X 与 Y 的边缘密度函数;

(2) 问 X 与 Y 是否相互独立?

(3) 计算 $P(X+Y\leqslant 1)$.

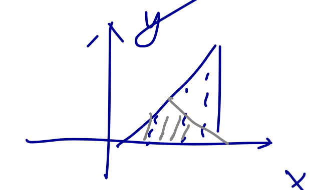
$f(y)=\int_0^1 3x\, I\{0<y<x\}\, dx=\frac{3}{2}(1-y^2)$ $\quad y\in(0,1)$

(1). $f(x)=\int_0^x f(x,y)\,dy=3x^2$ $\quad x\in(0,1)$

(2) $f(x,y)=3x\, I\{0<y<x<1\}$

无法变量分离 $\Leftrightarrow$ 不独立

(3) $f_{Y|X=x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{1}{x}I\{0<y<x\}$



☆ $Y|X=x\sim U(0,x)$

$P(X+Y\le 1\mid X=x)$

$=P(Y\le 1-x\mid X=x)=\min(\frac{1-x}{x},1)$ ☆

$P(X+Y\le 1)=\int_0^1 P(X+Y\le 1\mid X=x)\, f_X(x)\,dx$

$=\int_0^{\frac12}3x^2dx+\int_{\frac12}^1\frac{1-x}{x}\cdot 3x^2dx$

$=\frac18+\frac14=\frac38$

44.* 设连续型随机变量 $X\sim f(x)$, Y 为取有限值的离散型随机变量, 且 X,Y 相互独立.

(1) 求 $Z=X+Y$ 的分布. 由此回答随机变量 Z 是否为连续型的?

(2) 求 $W=XY$ 的分布, 问 W 是不是连续型随机变量? 以 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim B(1,p)$ 为例求出 W 具体的分布.

(1) 设 $Y\in\mathcal{Y}$ $\quad \#\mathcal{Y}<+\infty$

$f_Z(z)=\sum_{k\in\mathcal{Y}}P(Y=k)f(z-k)$

在单点 F_Z 无质量堆积

(2) $f_W(w)=\sum_{k\in\mathcal{Y}}P(Y=k)f(\frac{w}{k})$

when $w\neq 0$, 不妨 $f(+\infty)=0$

when $w=0$ then

连续型

$P(W=w)=P(Y=0)+P(Y\neq 0)P(X=0)=P(Y=0)\geq 0$

故 F_W 在 0 处有质量堆积

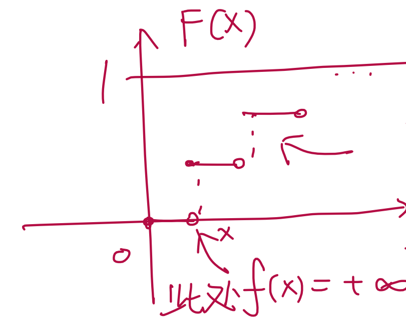
刚开始给几个同学判错了, 非常抱歉~

故不一定是连续型 r.v (除非 $P(Y=0)=0$)

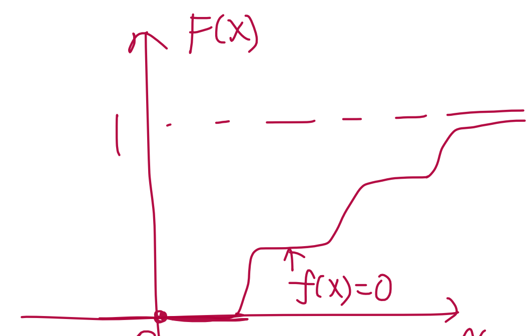
代入 $P(Y=0)=1-p$ $\quad P(Y=1)=p$

$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2\}$ 从而

$$f_W(w)=\begin{cases}1+p\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\}-1\right) & w=0\\ p\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}\} & \text{else}\end{cases}$$



跳变的是质量 而非密度 非连续型



连续型

47.* 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 证明: 存在常数 b, 使 $X+bY, X-bY$ 相互独立.

pf: ☆ 正态独立 $\Longleftrightarrow$ 不相关

$X+bY$, $X-bY$ 独立 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Cov}(X+bY,\ X-bY)=0$

由于 $\begin{pmatrix} X+bY \\ X-bY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} X+bY \\ X-bY \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1+b\mu_2 \\ \mu_1-b\mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{pmatrix} \right)$

$N\left(\begin{pmatrix} \mu_1+b\mu_2 \\ \mu_1-b\mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma_1+b\sigma_2)^2 & \sigma_1^2-b^2\sigma_2^2 \\ \sigma_1^2-b^2\sigma_2^2 & (\sigma_1-b\sigma_2)^2 \end{pmatrix} \right)$

因此 $\sigma_1^2 = b^2\sigma_2^2 \Longrightarrow b = \pm\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ □

48.* 设 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$, 证明

(1) 随机变量 X 与随机变量 $Z=\dfrac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ 相互独立;

(2) 利用 (1) 的结论证明

$$P(XY<0)=1-2P(X>0,Y>0)=\pi^{-1}\arccos\rho. \qquad (3.28)$$

pf: (1) $\mathrm{Cov}(X,Z) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{Cov}(X,Y) - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{Var}(X) = 0$

(X,Z) 服从二维正态, 独立 $\Longleftrightarrow$ 不相关 □

(2) step1 $P(XY<0) = P(X<0,Y>0) + P(X>0,Y<0)$

$\xlongequal{对称性} 2P(X<0,Y>0) = 2\big(P(Y>0) - P(X>0,Y>0)\big)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - P(X>0,Y>0)\right) = 1-2P(X>0,Y>0)$

step2 $P(X>0,Y>0) = P(X>0,\ \sqrt{1-\rho^2}Z+\rho X>0)$

$= \int_x P\left(Z>-\frac{\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}},\ X>0 \,\middle|\, X=x\right)\phi(x)\,dx \xlongequal[Z\perp X]{独立} \int_0^{+\infty}\int_{-\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\phi(z)\,dz\,\phi(x)\,dx$

idea: 积分限不能有变量!

step3 $= \int_0^{+\infty}\int_{-\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{z^2+x^2}{2}\right\}dz\,dx$

$\begin{cases} x=x \\ w=\frac{z}{x} \end{cases} \quad \frac{\partial(x,w)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$

令 $W=\frac{Z}{X}$

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2(1+w^2)}{2}\right\}x\,dw\,dx$$

还有同学在step3用了极坐标换元也正确，似乎很简便

$$=\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2(1+w^2)}{2}\right\}x\,dx\,dw$$

$$=\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+w^2}\int_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x^2(1+w^2)}{2}\right\}d\,\frac{x^2(1+w^2)}{2}\,dw$$

$$=\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi(1+w^2)}\int_0^{+\infty}\exp\{-y\}\,dy\,dw$$

$$=\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty}\frac{1}{2\pi(1+w^2)}\,dw=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}+\int_{-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{0}\right)d\arctan w$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\arctan\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

故 $1-2P(X>0,Y>0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}=\frac{1}{\pi}\arccos\rho$$

在考试阅卷时，一定也是按步骤给分的；如果能写到step 3 变量代换，哪怕最后结果有欠缺，也几乎不会影响得分！ 反之，算了一堆却不知道自己算啥的……

1. 篮球联赛的总决赛采用七战四胜制, 即哪支球队先获得四场比赛的胜利即可获得该年度的总冠军. 假设 A, B 两队势均力敌, 即每场各队获胜的概率都为 $p = 0.5$, 以 X 表示一届总决赛的比赛场次, 试求 $E(X)$. 若 A 队每场获胜的概率均为 $p = 0.6$ 呢?

sol: 设 C_i := {进行了 i 场比赛结束} $i = 4, 5, 6, 7$

AAAA

AAABA (fixxed)
AABAA
ABAAA
BAAAA C_4^1 种

同理 C_5^2 种

同理 C_6^3 种.

4场 5场 6场 7场

$$P(C_i) = C_i^{i-4} \, p^4 (1-p)^{i-4}$$

$$EX = \sum_{i=4}^{7} i \, P(C_i)$$

再代入 $p = 0.5$ 与 $p = 0.6$ 即可, 得 $\frac{93}{16}$ 与 $\frac{17804}{3125}$

2. 设随机变量 X 的期望存在, 试证明:

★经典结论

(1) 若 X 为非负整值随机变量, 则

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n);$$

pf: $$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

令 $n = n-1$ $$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geq n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) \qquad \square$$

X

★ Γ分布一定要熟! 推广 $\alpha \in \mathbb{R}$

(α 个 iid $Exp(\lambda)$ 求和 $\Rightarrow \Gamma(\alpha, \lambda)$)

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

设随机变量 X, Y 和 Z 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布. 记

$$U = \frac{X}{X+Y}, \quad V = \frac{X+Y}{X+Y+Z}, \quad W = X+Y+Z.$$

(1) 计算随机向量 (U, V, W) 的联合密度函数.

(2) 随机变量 U, V 和 W 是否相互独立? 请证明你的结论.

(3) 随机变量 $V_1 = X/(X+Y+Z)$ 和 $V_2 = Y/(X+Y+Z)$ 是否相互独立? 请证明你的结论.

Sol: (1)

$$f_{U,V,W}(u,v,w) = f_{X,Y,Z}(uvw, (1-u)vw, (1-v)w) \left| \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(U,V,W)} \right| = e^{-w} I\{u<1\} I\{v<1\} \begin{vmatrix} vw & uw & uv \\ -vw & (1-u)w & (1-u)v \\ 0 & -w & 1-v \end{vmatrix}$$

$$= e^{-w} v w^2 \begin{vmatrix} 1 & u & uv \\ -1 & 1-u & (1-u)v \\ 0 & -1 & 1-v \end{vmatrix}$$

$$= e^{-w} v w^2 I\{u<1, v<1\}$$

$$\begin{cases} X = UVW \\ Y = (1-U)VW \\ Z = (1-V)W \end{cases}$$

(2) 由分离变量知独立 不用算边际，而且边际是显然的 $W \sim \Gamma(3,1)$ $U \sim U(0,1)$ $V \sim f(v) = 2v\, I\{0<v<1\}$
显然的方法是对 pdf 足够了解 + 凑系数

(3) $V_1 = UV \quad V_2 = (1-U)V$

$U = \frac{V_1}{V_1+V_2} \quad V = V_1 + V_2$

有同学居然写 $\left|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(V_1,V_2)}\right|$ 之类，请问Jacobi你怎么求的…… 不熟的请看看微分B2……

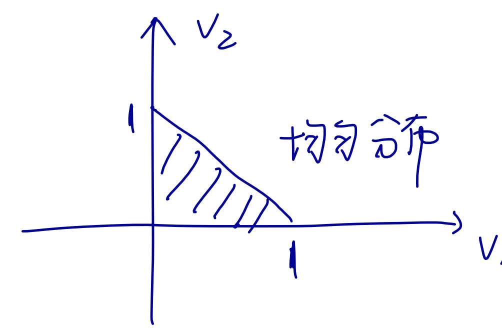
$$\left|\frac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(U,V)}\right| = \begin{vmatrix} V & U \\ -V & 1-U \end{vmatrix} = V$$

因此 $f_{(V_1,V_2)}(v_1,v_2) = f_{(U,V)}\left(\frac{v_1}{v_1+v_2}, v_1+v_2\right) \frac{1}{v_1+v_2}$

$= I\{v_1+v_2<1\} \cdot 2(v_1+v_2) \frac{1}{v_1+v_2} I\{0<v_1<1, 0<v_2<1\}$

$= 2 I\{v_1+v_2<1, 0<v_1<1, 0<v_2<1\}$

由于不能分离变量，因此不独立



设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = 3(x-1)^2$, $1 < x < 2$, 而 Y 与 X 相互独立且其分布律为

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

令 $Z = X + Y$. 问 Z 是否为连续型随机变量? 若是, 请计算其密度函数; 若否, 请说明理由.

结论：连续型 + 任意独立 r.v $\Rightarrow$ 连续型

sol: $f_Z(z) = P(Y=-1) f(z+1) + P(Y=0) f(z) + P(Y=1) f(z-1)$

$= \frac{1}{2} z^2 I\{0<z<1\} + (z-1)^2 \cdot I\{1<z<2\} + \frac{3}{2}(z-2)^2 I\{2<z<3\}$

单点无质量堆积，连续型

设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 记随机变量 $U=(X^2+Y^2)/\sigma^2$ 及 $V=|Y|/X$. 试求 (U,V) 的联合密度函数, 指出 U 和 V 各自服从的具体分布, 并证明两者相互独立.

$$f_{|Y|}(y) = 2f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\} I\{y>0\}$$

由于 X 与 Y 独立　X 与 $|Y|$ 也独立　且 $X=\pm\frac{\sigma\sqrt{U}}{\sqrt{1+V^2}}$　$|Y|=XV$

$$\left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(X,|Y|)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{2X}{\sigma^2} & \frac{2|Y|}{\sigma^2} \\ -\frac{|Y|}{X^2} & \frac{1}{X} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sigma^2}(1+V^2)$$

当 $u>0,\ v>0$ 时 $\Rightarrow X>0$

当 $u>0,\ v<0$ 时 由对称性同

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,|Y|)}\left(\frac{\sigma\sqrt{U}}{\sqrt{1+V^2}}, \frac{\sigma\sqrt{U}V}{\sqrt{1+V^2}}\right)\cdot\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{1+V^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\frac{\sigma^2U}{1+V^2}}{2\sigma^2}\right\}\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\sigma^2UV^2}{2\sigma^2(1+V^2)}\right\}\frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{1+V^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+V^2)}\exp\left\{-\frac{U}{2}\right\}$$

凑个小改，直接写　$U\sim Exp(-\frac{1}{2})$　$V\sim Cauchy(0,1)$

因此由可分离变量知 U,V 独立　$f_U(u)=\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{U}{2}\right\}$　$f_V(v)=\frac{1}{\pi(1+V^2)}$

一些题外话：希望大家提高学习效率与时间杠杆，一个小时的投入抵的上很久很久的无用功

不采用正确的方法，在考场不可能得分

学习正确方法的方法：听习题课，看讲义，问助教同学.