第七次书面作业参考答案

1 习题 8

4(2). 特征值为 $\{-1.6056\ 4.0000\ 5.6056\}$.

7. 考虑原点位移法，迭代格式为：

$$\begin{cases} Y^{(k)} = X^{(k)}/\|X^{(k)}\|_\infty \\ X^{(k+1)} = (A-1.2I)^{-1}Y^{(k)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \cdots$$

设置停止条件为 $\|Y^{(k+1)} - Y^{(k)}\|_2 < 10^{-4}$ (不唯一), 可得 $(A-1.2I)^{-1}$ 按模最大特征值为 14.7168，对应着 A 的最接近 1.2 的特征值为 $1.2 + 1/14.7168 \approx 1.2679$

8. 引理：实对称矩阵有 n 个线性无关的特征向量（实对称矩阵一定可以对角化）

于是可以设 A 的 n 个特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 对应的 n 个特征向量为 $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$，它们构成 $\mathcal{R}^n$ 的一组标准正交基，设

$$x^{(0)} = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

由 $x^{(k)} = A^kx^{(0)}$，可知：

$$x^{(k)} = a_1\lambda_1^kv_1 + a_2\lambda_2^kv_2 + \cdots + a_n\lambda_n^kv_n$$

于是

$$\frac{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^n a_i^2\lambda_i^{2k}}$$

又 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, 容易验证 $k \to +\infty$ 时,

$$\frac{(Ax^{(k)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})} \to \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right)$$

2 习题 7

1.$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$,可得 y 在 $0.1 \sim 0.5$ 的值为 $\{1, 1.1, 1.231, 1.4025, 1.6292, 1.9347\}$

4.$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))$, 可得 y 在 $1.2 \sim 2.0$ 的值为 $\{1.4840, 2.1793, 3.1499, 4.4741, 6.2472\}$