

### 数字图像处理习题课(2-7章)

助教:曾凌子

2013-5-23









实验常见问题

2-1 马赫带和同时对比度反映了什么共同问题?

#### 参考答案:

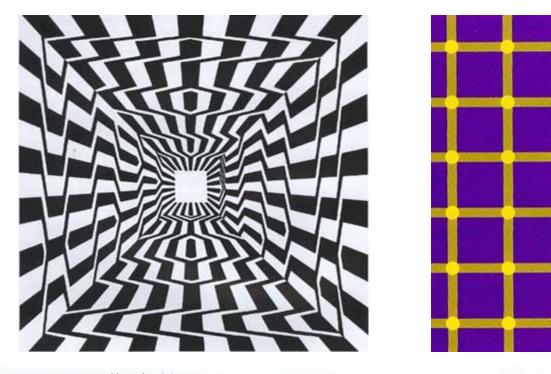
马赫带效应:视觉系统有趋向于过高或过低估计不同亮度区域边界值的现象。

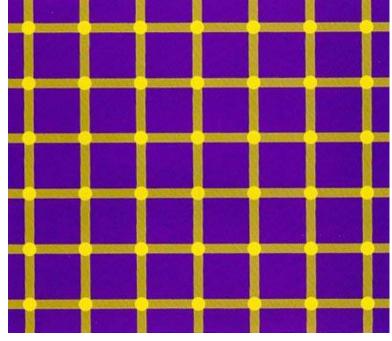
同时对比度:人眼对某个区域感觉到的亮度并不仅仅依赖于它的强度。

人类视觉所感知的主观亮度并不是物体表面照度的简单函数



2-2 列举几个视觉错觉的例子。





曲线的正方形

闪烁的网格

2-3 计算5×5邻域各像素到中心象素的的欧式距离, 街区距离和棋盘距 离。

2√2	√5	2	√5	2√2
√5	$\sqrt{2}$	1	√2	√5
2	1		1	2
√5	$\sqrt{2}$	1	√2	√5
2√2	√5	2	√5	2√2

欧式距离

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1		1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

街区距离

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1		1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

棋盘距离



2-4 分别写出RGB模型和HSI模型中8个特征点(红黄绿青蓝紫黑白)的rgb值和hsi值。

	R	G	В	Н	S	I
红	1	0	0	0	1	1/3
黄	1	1	0	60	1	2/3
绿	0	1	0	120	1	1/3
青	0	1	1	180	1	2/3
蓝	0	0	1	240	1	1/3
紫	1	0	1	300	1	2/3
黑	0	0	0	无意义	无意义	0
白	1	1	1	无意义	0	1

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\left[ (R-G) + (R-B) \right]/2}{\sqrt{(R-G)^2 + (R-B)(G-B)}} \right\}$$

$$H = \begin{cases} \theta & B \le G \\ 360 - \theta & B > G \end{cases}$$

$$S = 1 - \frac{3 \cdot \min(R, G, B)}{R + G + B}$$

$$I = (R + G + B)/3$$

3-1 计算下图的DFT, DCT, Hadamard变换和Haar变换。

- 2 -j-1 0 j-1
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0

DFT

- 2 0 0 -2
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0

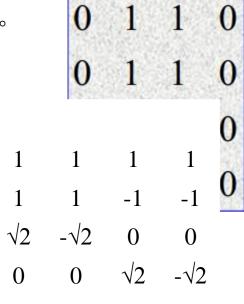
Hadamard

- 2 0 -2 0
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0
  - 0 0 0

**DCT** 

- $0 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0
- 0 0 0 0

Haar





T=AFA

3-2 设有一组64\*64的图像,它们的协方差矩阵式单位矩阵.如果只使用一半的原始特征值计算重建图像,那么原始图像和重建图像间的均方误差是多少?

### 参考答案:

对于64\*64的图像, 其协方差矩阵为((64\*64)\*(64\*64)大小。

由协方差矩阵是单位矩阵,即  $\lambda_i = 1$ 

故 
$$e_{ms} = \sum_{j=1}^{64 \times 64} \lambda_j - \sum_{j=1}^{64 \times 64/2} \lambda_j = 2048$$

4-1 为什么一般情况下对离散图像的直方图均衡 化并不能产生完全平 坦的直方图?

参考答案: 灰度级是离散的,同一灰度级的像素不能映射到不同的灰度级上。

4-2 设已用直方图均衡化技术对一幅数字图像进行了增强, 试证明再用这个方法对所得的结果增强并不改变结其结果?

参考答案:直方图均衡化所用的变换函数为原始图像的累积直方图,均衡化后得到的增强图像的累积直方图除有些项合并外,其余项与原始图像的累积直方图相同。再次进行均衡化,所用的是均衡化后的增强图像的累积直方图(并且不会有新的合并项),所以不会改变其结果。



- 设第一次概率直方图为 $s_k$ ,累计直方图为 $t_k = \sum s_j$
- 则计算映射后灰度:  $p_k = int[(L-1)\sum_{j=1}^{k} s_j + 0.5]$
- 得到灰度映射关系:  $k \to p_{\iota}, k = 0,..., L-1$
- 第二次概率直方图为n, ,其中:

$$n_k = \sum_{j=a_k}^{b_k} s_j, (a_k \le j \le b_k, \forall j, p_j = k)$$

对于任意k,使得 $a_k,b_k$ ] $\notin \emptyset$ 

- 计算累计直方图:

$$m_k = \sum_{j=0}^k n_j = \sum_{j=0}^k \sum_{i=a_j}^{b_j} s_i = \sum_{j=0}^{b_k} s_j = t_{b_k}$$

### 表明新图累计直 方图项和原图累

- 计算映射后灰度:  $q_k = \inf[(L-1)\sum_{j=0}^{b_k} s_j + 0.5] = p_{bk} = k$ 

得到灰度映射关系:  $k \to k, [a_k, b_k] \notin \emptyset$  表明,经过第一次均衡后 直方图中概率不为零的项,

区间 为  $[a_k,b_k]$  原图像中

映射为 $n_k$ 的灰度区间,并

且由于映射函数的单值单增

性,  $[a_k,b_k]$  将[0,L-1] 进行划

分,即  $\cup ([a_{k},b_{k}])=[0,L-1]$ 

2013/5/24



示例:

序号	运算	运 算 步骤和结果 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·							
1	列出原始图灰度级 s <sub>k</sub> , k = 0,1,,7	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计原始直方图各灰度级象素 n <sub>k</sub>	790	1023	850	656	329	245	122	81
3	计算原始直方图	0.19	0.25	0.21	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
4	计算累计直方图	0.19	0.44	0.65	0.81	0.89	0.95	0.98	1.00
5	取整 $t_k = \inf[(N-1)t_k + 0.5]$	1	3	5	6	6	7	7	7
6	确定映射对应关系 $(s_k \rightarrow t_k)$	0→1	1→3	2→5	3,4	→6	5,	6,7 → 7	
7	统计新直方图各灰度级象索 n <sub>k</sub>		790		1023		850	985	448
8	用计算新直方图		0.19		0.25		0.21	0.24	0.11
9	计算累计直方图	0	0. 19	0. 19	0.44	0.44	0. 65	0.89	1
10	取整	0	1	1	3	3	5	6	7
11	映射关系	0-0	1-1	2-1	3-3	4-3 (	5-5	6-6	(7-7)

$$a_6 = 3, b_6 = 4$$
 所以  $m_6 = \sum_{j=0}^{6} n_j = \sum_{j=0}^{6} \sum_{i=a_j}^{b_j} s_i = \sum_{j=0}^{4} s_i = t_4$  6 → 6

### 注:

- ▶数字图像,不是连续的图像,许多同学用连续的图像做说明,认为均衡后得到均匀的分布,即常数分布,再进行均衡没有效果。但是题目针对的是数字图像。
- ▶ 有的同学说直方图均衡后得到平坦分布,再对均匀分布 做直方图均衡效果不变。但是4-1就说了,一般情况下均 衡后我们根本就得不到平坦分布。



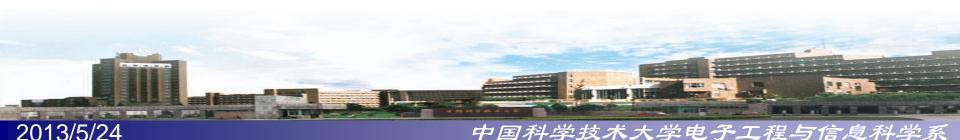
4-3 讨论用于空间滤波的平滑滤波器和锐化滤波器的相同点,不同点以及联系。

	相同点	不同点	联系
平滑	都是通过减弱或 消除信号傅里叶 空间的某些分量 来达到增强图像	减弱或消除高频 分量,增强低频,平滑图像。	两者效果相反, 互为补充,从原 始图像中减去平 滑滤波器的结果
锐化	的效果; 实现方法类似。	减弱或消除低频 分量,增强高频,锐化图像。	得到锐化滤波器的效果,反之亦然。



4-4 有一种常用的图像增强技术是讲高频增强和直方图均衡 化结合起来以达到是边缘锐化的反差增强效果,以上两个操 作的先后次序对增强效果有影响吗,为什么?

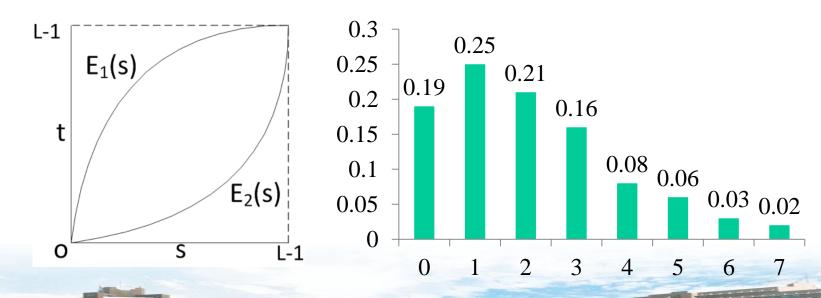
高频增强是一种线性操作,直方图均衡是一种非线性操作。根据信号与系统的知识可知:线性操作与非线性操作不可互换次序。 比如非线性函数  $f(x)=x^2$  和线性函数 g(x)=2x+1,那么  $f(g(x)) \neq g(f(x))$ 





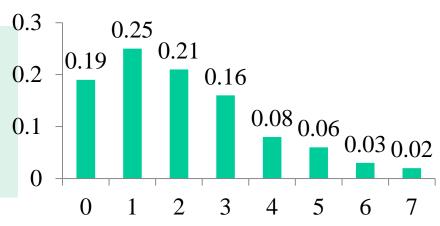
- 先做直方图均衡,会使得像素点的灰度值尽可能达到均匀分布,这样再做高频增强就更容易使边缘得到突出。(因为在均衡化过程中,像素值间差别在统计意义上增大了)。
- 考虑极端情况,对于一幅几乎没有高频分量的图像,先做高频增强,基本上还是原图,再进行直方图均衡,则会增强对比度;若先进行直方图均衡,则会人为的增加高频分量,再进行高频增强,会使得高频分量进一步增强。

- 4-8 E<sub>1</sub>(s)和E<sub>2</sub>(s)为两条灰度变换曲线:
- (1)讨论着两条曲线的特点,功能及适合应用的场合;
- (2) 设L=8, $E_1(s)=int[(7s)^{1/2}+0.5]$ ,对图4. 4. 3(a) 直方图对应的图像进行变换,给出变换后的直方图;
- (3) 设L=8, $E_1(s)=int[s^2/7+0.5]$ ,对图4.4.3(a) 直方图对应的图像进行变换,给出变换后的直方图。



#### 参考答案:

(1)E<sub>1</sub>(s)为凸函数,扩展图像低灰度 范围,压缩高灰度范围,压缩原原图 像的动态范围图明亮部分的反差,的 反差 E<sub>2</sub>(s)与之相反。



(2)	S	0	1	2	3	4	5	6	7
	$E_1(s)$	0	3	4	5	5	6	6	7
	$P(n_k)$	0.19	0	0	0.25	0.21	0.24	0.09	0.02

(3)	S	0	1	2	3	4	5	6	7
	$E_1(s)$	0	0	1	1	2	4	5	7
	$P(n_k)$	0.44	0.37	0.08	0	0.06	0.03	0	0.02

4-19 将M幅图像相加求平均可以起到消除噪声的效果,用一个n\*n的模板进行平滑滤波也可以起到消除噪声的效果,试比较这两种方法的消噪效果。

参考答案:将M幅图像相加求平均利用了M幅图像中同一个位置的M个像素的平均值,用一个n\*n的模板进行平滑滤波利用了同一幅图像中的n\*n个像素的平均值。因为参与的像素个数越多,消除噪声的能力越强,所以如果M>n\*n,则前者消除噪声的效果越好,反之则后者效果较好。

- 6-6 有一种计算梯度的基本步骤是计算f(x,y)和f(x+1,y)的差。
- (1)给出在频域进行等价计算所用的滤波器转移函数H(u, v);
- (2)证明这个运算相当于一个高通滤波器的功能。

#### 参考答案:

- (1) 滤波空域函数为: g(x,y) = f(x+1,y) f(x,y) 平移性质进行傅立叶变换:  $G(u,v) = F(u,v)(\exp(j2\pi u/N)-1)$  转移函数为:  $H(u,v) = \exp(j2\pi u/N)-1$
- (2)  $||H(u,v)|| = ||\cos(2\pi u/N) 1 + j \cdot \sin(2\pi u/N)||$   $= [\cos(2\pi u/N) 1]^2 + \sin^2(2\pi u/N)$   $= 2[1 \cos(2\pi u/N)]$ 得证。

7-1 有许多方法可以获得与三基色直接混合相同的视觉效果,例如(1)将三基色光按一定顺序快速轮流地投射到同一表面; (2)将三基色光分别投射到同一表面上相距很近的三个点; (3)让两只眼睛分别观测不同颜色的同一图像。这些方法分别利用了人类视觉系统的哪些性质?

#### 参考答案:

- (1)视觉惰性(时间混色法的基础);
- (2)人眼分辨率的有限性(空间混色法的基础);
- (3) 生理混色。



5-1 画出图象变质及图象恢复模型的方框图,数学公式表示及说明其物 理意义。

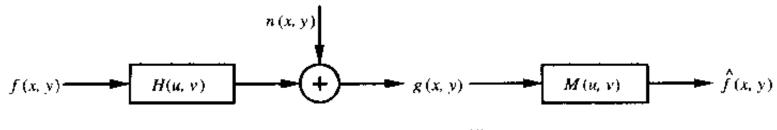


图 5.3.1 图象退化和恢复模型

退化模型: G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)

恢复模型:  $\hat{F}(u,v) = G(u,v)M(u,v)$ 

其中: H(u,v)为点扩展函数 h(x,y)的傅里叶变换

n(x,y)为加性噪声

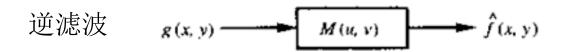
M(u,v)为恢复模型

g(x,y)为退化后图像

 $\hat{f}(u,v)$  为恢复的图像



5-2 列出逆滤波和维纳滤波图象恢复的具体步骤。



- 1. 对g(x,y)和h(x,y)做傅里叶变换得到G(u,v)和H(u,v)
- 2. 设计恢复转移函数M(u,v):

$$M(u,v) = \begin{cases} 1/H(u,v), & \text{if } u^2 + v^2 < w_0^2 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

or

$$M(u,v) = \begin{cases} k & \text{if } H(u,v) < d \\ 1/H(u,v) & \text{, else} \end{cases}$$

- 3.  $\hat{F}(u,v) = G(u,v) * M(u,v)$
- 4. 对  $\hat{f}(u,v)$  做傅里叶逆变换得到  $\hat{f}(x,y)$



5-2 列出逆滤波和维纳滤波图象恢复的具体步骤。

维纳滤波:一般情况下,没有噪声和原信号的功率谱信息

- 1. 对g(x,y)和h(x,y)做傅里叶变换得到G(u,v)和H(u,v)
- 2. 设计恢复转移函数M(u,v):

$$M(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} * \frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2 + K} \qquad \text{Th} \qquad M(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + K}$$

- 3.  $\hat{F}(u,v) = G(u,v) * M(u,v)$
- 4. 对  $\hat{F}(u,v)$  做傅里叶逆变换得到 $\hat{f}(x,y)$



5-2 列出逆滤波和维纳滤波图象恢复的具体步骤。

#### 比较

$$M(u,v) = \begin{cases} 1/H(u,v), & \text{if } u^2 + v^2 < w_0^2 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

$$Or$$

$$M(u,v) = \begin{cases} k & \text{if } H(u,v) < d \\ 1/H(u,v) & \text{, else} \end{cases}$$

$$M(u,v) = \frac{H^{*}(u,v)}{|H(u,v)|^{2} + K}$$

维纳滤波不存在除零的风险





5-3 推导水平匀速直线运动模糊的点扩展函数的数学公式并画出曲线。

#### 参考答案:

实际采集的运动模糊图像为:

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)]dt$$

傅立叶变换可表示为:

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \exp[-j2\pi(ux+vy)] dxdy$$

$$= \int_{0}^{T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f[x-x_{0}(t), y-y_{0}(t)] \exp[-j2\pi(ux+vy)] dxdy \right] dt$$

$$= F(u,v) \int_{0}^{T} \exp\{-j2\pi[ux_{0}(t)+vy_{0}(t)]\} dt$$

点扩展函数为:

$$H(u,v) = \int_0^T \exp\{-j2\pi[ux_0(t) + vy_0(t)]\}dt$$



5-3 推导水平匀速直线运动模糊的点扩展函数的数学公式并画出曲线。

水平匀速直线运动  $x_0(t) = ct/T$ ,  $y_0(t) = 0$ 

则:

$$H(u,v) = \int_0^T \exp[-j2\pi uct/T]dt = \frac{T}{\pi uc}\sin(\pi uc)\exp[-j\pi uc]$$

己知傅立叶变换:

$$f(t) = \begin{cases} T/c, |t| < c/2 \\ 0, |t| \ge c/2 \end{cases} \Leftrightarrow T \frac{\sin(\pi uc)}{\pi uc}$$

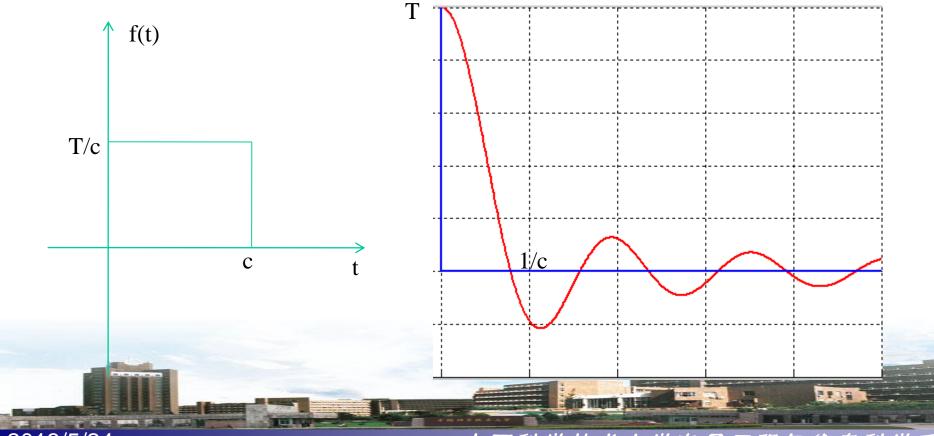
由平移性质:

$$T\frac{\sin(\pi uc)}{\pi uc}\exp(-j\pi uc) \Leftrightarrow f(t-c/2)$$

$$T\frac{\sin(\pi uc)}{\pi uc}\exp(-j\pi uc) \Leftrightarrow f(t) = \begin{cases} T/c, 0 < t < c \\ 0, else \end{cases}$$



$$T\frac{\sin(\pi uc)}{\pi uc}\exp(-j\pi uc) \Leftrightarrow f(t) = \begin{cases} T/c, 0 < t < c \\ 0, else \end{cases}$$





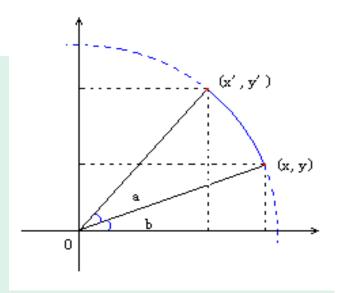
### 5-4 写出图像任意角度旋转算法。

己知: 
$$\tan(b) = y/x$$
 (1)

$$tan(a+b) = y'/x'$$
 (2)

$$x^{2} + y^{2} = (y')^{2} + (x')^{2}$$
 (3)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \tag{4}$$



#### (1)(4)可得:

$$\tan(a) + y / x = (y'/x')*(1 - \tan(a)*(y/x))$$
 (5)

$$x' = y'(x - y \tan(a))/(x \tan(a) + y)$$
 (6)

#### (3)(6)可得:

$$y' = x\sin(a) + y\cos(a) \tag{7}$$

$$x' = x\cos(a) - y\sin(a) \tag{8}$$



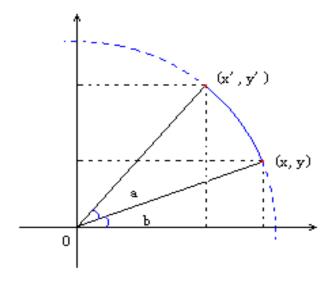
#### 逆时针旋转a角度

#### 正向映射

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



注:正映射得到的图片可能出现空洞,所以一般常使用逆映射;

进行旋转之前要先将坐标中心移到图像中心点;

插值方式: 1)最近邻 2)双线性 3)其他。



### 旋转步骤:

- ▶ 根据旋转角度计算新图的空间,并初始化为0。
- 对新图的每一个点利用逆映射公式得到其在原图中的对应点位置(浮点数)。
- ▶ 使用双线性插值(或者其他)计算当前点的灰度值。



6-1 简述CT的发明过程。

参考答案:略。

6-2 设有一个线性位移不变的图象退化系统,它的脉冲响应可以写成  $h(x-a,y-b) = \exp\{-[(x-a)^2 + (y-b)^2]\}$ ,如果给系统输入一个位于 x=a处的无穷长细直线信号,它可用  $f(x,y) = \delta(x-a)$  模型化,求系统的输出。

参考答案:  $f(x,y) = \delta(x-a)$ 

$$h(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$$



$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \sqrt{\pi} \exp[-(x-a)^2]$$



6-3 试证明投影定理。

证明: 先证  $\theta = 0$ 的情况。

图像f(x,y)在x方向上的投影:  $g_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$ 

其傅立叶变换为:

$$G_{y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{y}(x) \exp[-j2\pi ux] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi ux] dx dy$$

图像f(x,y)的傅立叶变换为:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp[-j2\pi(ux+vy)] dxdy$$

令v=0,则得到:

$$G_{v}(u) = F(u,0)$$



6-3 试证明投影定理。

#### 证明2:

图像
$$f(x,y)$$
在 $\theta$ 方向上的投影:  $g(s,\theta) = \int_{(s,\theta)} f(x,y)dt$ 

其傅立叶变换为:
$$G(R,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s,\theta) \exp(-j2\pi Rs) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp[-j2\pi Rs] ds dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp[-j2\pi R(x\cos\theta + y\sin\theta)] dx dy$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1$$

$$dsdt = dxdy$$



6-3 试证明投影定理。

图像f(x,y)的傅立叶变换可化为:

$$F(R\cos\theta, R\sin\theta) = \iint f(x, y) \exp[-j2\pi(R\cos\theta \cdot x + R\sin\theta \cdot y)] dxdy$$



$$G(R,\theta) = F(R\cos\theta, R\sin\theta)$$



- 7-1 (1)请说明是否能用变长变码法压缩1幅已直方图均衡化的具有2°级灰度的图?
  - (2)这样的图像中包含像素间冗余吗?
  - (1) 对数字图像进行直方图均衡化得到的结果中的各灰度值的出现概率并不相等,所以依然存在编码冗余,但均衡化再用变长编码法得到的数据的压缩率一般不高。
  - (2) 因为直方图是一维的,所以均衡化后图像中由几何或者结构 所产生的像素间的相关性依然存在,即仍有像素间冗余,仍 可以进行压缩。



7-2 (1)对一个具有3个符号的信源,有多少唯一的Huffman码? (2)构造这些码。

4种唯一的Huffman码

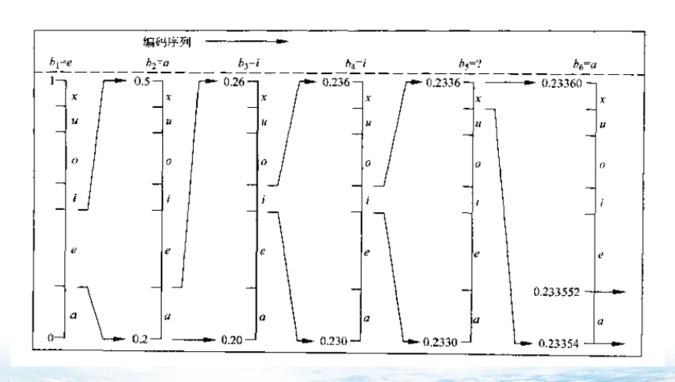
符号	第一种	第二种	第三种	第四种
A	0	0	1	1
В	10	11	01	00
С	11	10	00	01





7-3 已知符号a,e,i,o,u,x的出现概率分别是0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 对 0.23355进行解码,解码长度为6。

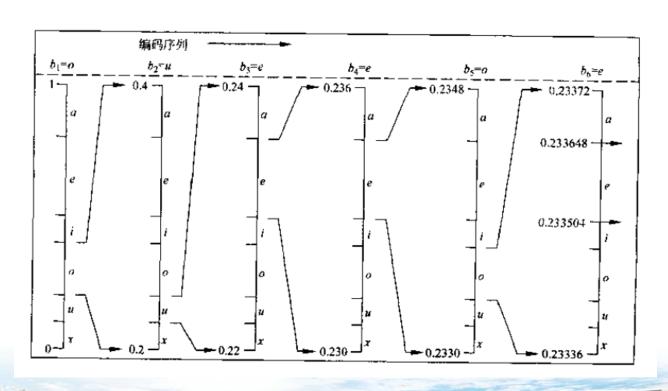
参考答案:从0开始排a,e,i,o,u,x,解码为:eaiixa





7-3 已知符号a,e,i,o,u,x的出现概率分别是0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 对 0.23355进行解码,解码长度为6。

参考答案:从1开始排a, e, i, o, u, x,解码为: oueeoe







习题解答



实验常见问题



- 1图象统计参数:最大、小值,均值,直方图统计;
- 2对比度增强: 直方图均衡, 灰度拉伸;
- 3图象几何变换: 旋转) 平移,缩放;
- 4图象线性变换:(FFT,) DCT
- 5图象平滑:中值滤波,均值滤波;
- 6图象锐化: Sobel算子, Laplace算子;



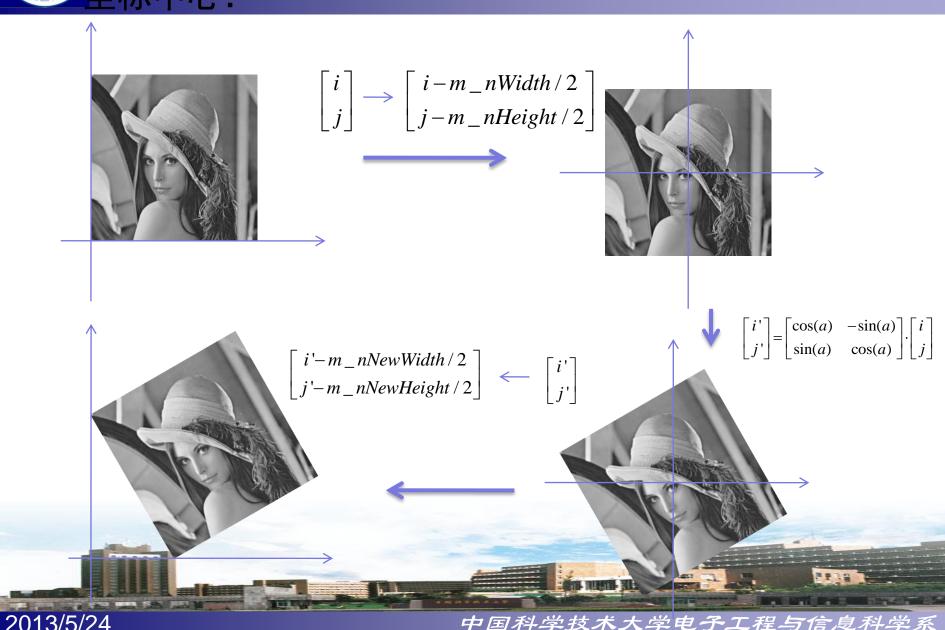
## • 图像旋转:

- 1 Windows规定一个扫描行所占的字节数必须是4的倍数,不足的以0 填充,···Step为4的倍数;
- 2 根据旋转角度计算新图的空间,并初始化为0;
- 3 对新图的每一个点利用逆映射公式得到其在原图中的对应点位置(浮点数)
- 4 使用双线性插值(或者其他)计算当前点的灰度值

#### 问题:

- 1 原图映射到新图
- 2 均值滤波

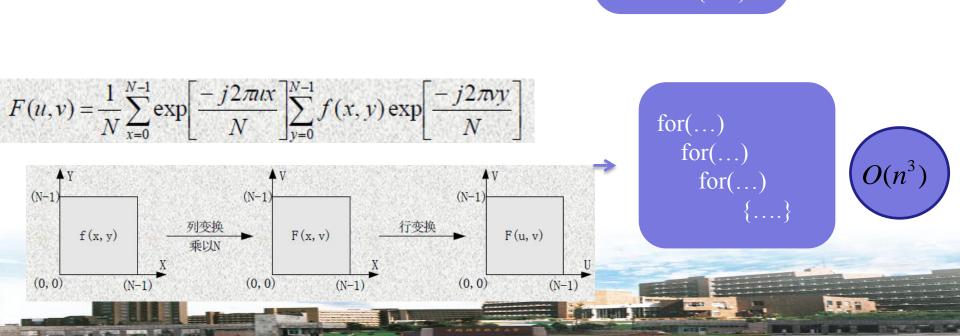






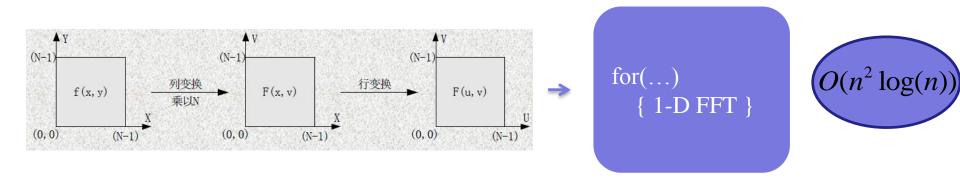
- 复数的表示
- FFT

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \Rightarrow \begin{cases} for(...) \\ for(...) \\ for(...) \\ for(...) \\ for(...) \end{cases}$$





#### FFT



#### 使用一维的FFT代替DFT

$$O(n^4) > O(n^3) > O(n^2 \log(n))$$



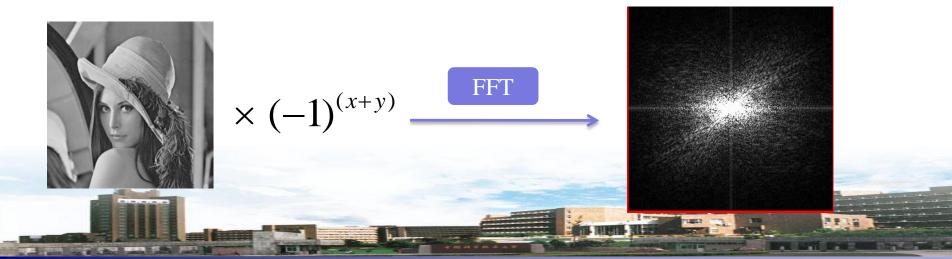
## • FFT的频谱搬移

$$f(x-a, y-b) \Leftrightarrow \exp(-j2\pi(au/M+bv/N))F(u,v)$$

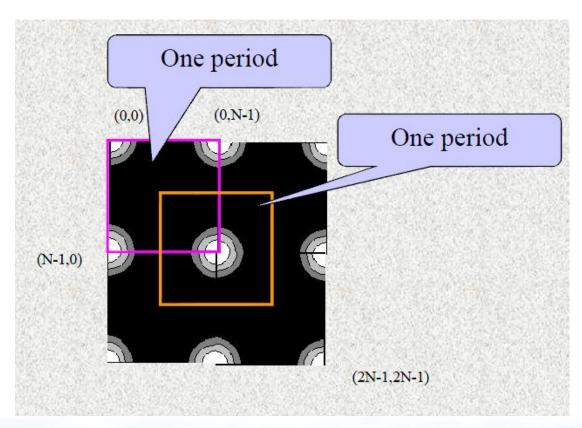
$$F(u-c,v-d) \Leftrightarrow \exp(-j2\pi(cx/M+dy/N))f(x,y)$$

令c=M/2,d=N/2,得

$$F(u-M/2, v-N/2) \Leftrightarrow (-1)^{(x+y)} f(x, y)$$









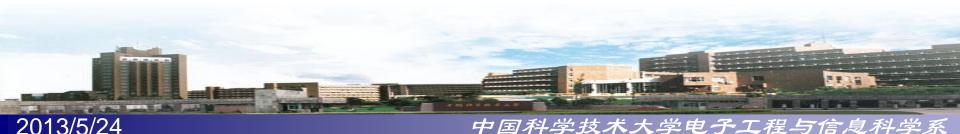
## Laplace

- 计算出的值可正可负
- 取绝对值

$$G = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

#### Sobel

$$G_{x} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad G_{y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$





# 謝謝 祝大家考试顺利