# 关于连续与一致连续的讨论

余启帆[*]

2021 年 9 月 28 日

## 0.1 连续与一致连续的定义：不同的出牌顺序

**定义 1 (连续)** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 $f$ 在点 $x_0\in(a,b)$ **连续**, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 即,

$$对\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 使得当\ |x-x_0|<\delta\ 时,\ 有\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

**定义 2 (不连续, 连续的否命题)** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 $f$ 在点 $x_0\in(a,b)$ **不连续**, 如果:

$$\exists\varepsilon_0>0,\ 对\ \forall\delta>0,\ 均\ \exists x':|x'-x_0|<\delta,\ 但\ |f(x')-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

**定义 3 (一致连续)** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上**一致连续**, 如果:

$$对\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 使得对\ \forall x_1,x_2\in[a,b]\ 且\ |x_1-x_2|<\delta,\ 有\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

**定义 4 (不一致连续, 一致连续的否命题)** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上**不一致连续**, 如果:

$$\exists\varepsilon_0>0,\ 对\ \forall\delta>0,\ 均\ \exists x_1,x_2\in[a,b],\ 满足:\ |x_1-x_2|<\delta,\ 但\ |f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

**定义 5 (不一致连续, 与上述定义等价)** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上**不一致连续**, 如果:

$$\exists\varepsilon_0>0,\ 对\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 均\ \exists x_1,x_2\in[a,b],\ 满足:\ |x_1-x_2|<\frac{1}{n},\ 但\ |f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

## 0.2 连续与一致连续的区别：局部与整体的性质

**1 常见误区** 不少同学会理解为: 一致连续性是一种更加严格的连续性, 因为连续性是针对一个点 $x_0$ 的邻域, 而一致连续性是针对函数定义域中的某一个区间.

**2 分析** 所谓的更加 “严格” 的意思是指, 如果性质 $p$ 比性质 $q$ 更严格, 则我们可以通过 $p\implies q$, 而反之不然. 就好像严格的不等关系 $a>b$, 我们可以推出不严格的关系 $a\geqslant b$, 反之不然. 那么在 Cantor 定理中, 为什么却能通过闭区间上的连续性推导出更加 “严格” 的一致连续性呢? 因此上述的理解并不准确.

[*]闻道有先后, 文章有疏漏. 发现错误欢迎联系我: qifan@mail.ustc.edu.cn

**3 从定义上区别** 在**连续**的定义中, 我们选取的 $\delta$ 是对于 $x_0$ 选取的, 也就是说, 我们在选定了 $x_0$ 后, 才根据 $x_0$ 去选取合适的 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 表示 $\delta$ 的取值与 $\varepsilon, x_0$ 有关;

而在**一致连续**的定义中, 我们选取的 $\delta$ 是对于整个区间 $[a, b]$ 来选取的, 这是一个对于整个区间都统一的 $\delta$, 也就是说, 我们在选定了 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 之后, 才在区间上选取两点 $x_1, x_2$, 而此时 $\delta$ 的取值只与 $\varepsilon$ 有关, 这里强调的是 $\delta$ 不依赖于 $x_1, x_2$.

因此, 两者的区别在于 "出牌顺序" 不同, 我们究竟是先选取 $x_0$ (连续), 还是先选取 $\delta$ (一致连续).

**4 正确理解** 我们通常不说 "一致连续性是比连续性更加严格的性质", 因为我们知道, 闭区间上的连续性和一致连续性是等价的.

更加准确的理解应当是, 两者的区别是*局部*和*整体*的性质.

**连续**是对于某个点定义的, 是一种*局部*的性质, 因此也称为 "逐点连续"; **一致连续**是对于某个区间定义的, 是一种*整体*的性质. 这么看来, 在推导 Cantor 定理时, 我们只是在用一个局部的性质推导一个整体的性质, 也就不难理解了. 这就好像函数在一个区间上每一点处都连续 (局部性质), 那么这个函数在整个区间上也连续 (整体性质). 对于这样的局部和整体的性质, 在后面的学习中还将遇到, 如, 函数项级数的**收敛 (逐点收敛)** 和**一致收敛**...

## 0.3 Cantor 定理

**定理 1 (Cantor 定理)** 有限闭区间上的连续函数在这个区间上必一致连续.

请判断下列关于 Cantor 定理证明的正确性. 对于你认为是正确的证明, 请仔细体会在哪些推导过程中用到了定理所给出的条件; 对于你认为的伪证, 请具体地指出在哪里出现了问题, 这将有利于你更加透彻地理解一致连续的概念和定义.

**注意** 下面有的证明不一定正确, 可能存在伪证!

**证明 (1)** 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不是一致连续的, 则存在某个正数 $\varepsilon_0$, 使得对任意自然数 $n$, 都存在 $x_n, y_n \in [a, b]$ 满足 $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$, 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. 由 Bolzano-Weierstrass Theorem, 数列 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x \in [a, b]$. 从 $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k}$ 知, $\{y_{n_k}\}$ 也收敛于 $x$. 由于 $f$ 连续, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(x) - f(x) = 0$. 这与 $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ 是矛盾的. 证毕. □

**证明 (2)** 由 $f$ 在 $[a, b]$ 上连续得:

$$\forall x_0 \in [a, b], \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall |x - x_0| < \delta, \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

令 $x_0$ 历遍 $[a, b]$, 则 $(x, x_0)$ 历遍 $\left\{(x_1, x_2) \middle| (x_1, x_2) \in [a, b]^2\right\}$, 故 $f$ 在 $[a, b]$ 上一致连续. □

**证明 (3)** 用反证法. 假设 $f$ 在 $[a, b]$ 上连续但不一致连续, 则

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta, \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0.$$

固定 $x_2$, 不妨记为 $x_2 = x_0$, 即对 $x_0$, $\exists x_1 : |x_1 - x_0| < \delta$, 但 $|f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. 故 $f$ 在 $x_0$ 处不连续, 矛盾! 证毕. □

**分析**　**证明 (1)** 是正确的, 也是大多数教材所采用的证法, 而**证明 (2)(3)** 都是伪证!

Cantor 定理要求区间必须是闭的、有限的, 在**证明 (1)** 中, 分别在 Bolzano-Weierstrass 定理和最后取极限的过程中用到了有限、闭区间的性质; 而**证明 (2)(3)** 从头到尾到没有用到任何关于闭区间的性质, 因此伪证是必然的.

对于**证明 (1)**, 其逻辑是: 为了证明一致连续性, 我们用反证法, 假设其不一致连续, 从而我们得到了两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足某些条件, 这些条件由假设的不一致连续性给出, 我们只需要利用这个数列中的某些项 $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, 就能够得出矛盾, 从而推翻假设, 完成证明.

对于**伪证 (2)**, 细心的读者应当发现, 此处得到的 $\delta$ 依赖于 $x_0$ 的位置, 即 $\delta = \delta(x_0)$, 当 $x_0$ 历遍 $[a, b]$ 时, $\delta$ 也随之变化, 并不能保证这样最小的、统一的正数 $\delta$ 存在 (这样所有的 $\delta$ 构成的集合确实有下确界, 但 $\inf E = 0$ 时, $\delta = 0$ 不为正数). 而 "最小的正数 $\delta$ 存在, 是一个对区间 $[a, b]$ 上的任意数都统一的量" 这一点恰为一致连续的重点!

对于**伪证 (3)**, 不一致连续的定义中 "$\forall \delta > 0$, $\exists x_1, x_2$" 表明 $x_2$ 的取值依赖于 $\delta$, 即 $x_2 = x_2(\delta)$. 故取定了 $x_2$ 也就意味着 $\delta$ 也同时被取定.

而不连续的定义中要求: 对于 $x_2$, $\forall \delta > 0$, $\exists x' \cdots$, 注意: 是任意的 $\delta > 0$!

故此处对于 $x_2$ 能够找到这样的 $x_1 : |x_1 - x_2| < \delta$, 但 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$, 仅仅是因为 $x_1$ 与 $x_2$ 还不够接近. 要证明函数在 $x_2$ 不连续, 必须说明: 即使是与 $x_2$ 充分接近的 $x'$, 都仍然有 $|f(x') - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

## 0.4　Cantor 定理的再解读

Cantor 定理中之所以能通过连续性推出一致连续性, 是因为 "有限闭区间" 的条件为我们搭建了桥梁, (1) 有限, (2) 闭区间, 这两个条件都是必不可少的, 当然要是没有 "连续性" 的条件, 那就更别提 "一致连续" 了.

我们存在这样的反例:

**1 若没有了 "闭区间" 的条件**　函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 上连续, 但我们知道它并不一致连续.

**2 若没有了 "有限" 的条件**　证明存在这样的函数: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续. (**习题 2.2.16**)

## 0.5　一致连续的直观理解

**说明**　下面这些话说得比较 "浪漫", 不适合出现在明面上, 写出来只是帮助大家理解.

函数在区间上一致连续可以大体上理解为: 其变化的趋势不会在某一点附近变得越来越厉害, 例如, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 在 $x = 0$ 附近增加得 "越来越快", 因此不一致连续; 又例如, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 附近 "振荡得越来越厉害", 因此也不一致连续.

对于可导的函数, 导函数有界是一致连续的充分条件, 因为导函数有界限制了函数的变化趋势 "不会太快", 其严格的证明将在学习了 Lagrange 中值定理后给出.

值得注意的是, 即使是对于可导的函数, 导函数有界也不是一致连续的必要条件. 例如, 我们考虑函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $(x \in [-1, 1])$, 其导函数在端点处趋于无穷, 但这仍然是一个在 $[-1, 1]$ 上一致连续的函数.