第一次书面作业参考答案

1 课本习题

2. 插值点有三个，可得对应的三个 Lagrange 基函数为：

$$l_0(x) = \frac{(x-2.00)(x-5.00)}{(-2.00-2.00)(-2.00-5.00)} \times 0.00$$
$$l_1(x) = \frac{(x+2.00)(x-5.00)}{(2.00+2.00)(2.00-5.00)} \times 3.00$$
$$l_2(x) = \frac{(x+2.00)(x-2.00)}{(5.00+2.00)(5.00-2.00)} \times 6.00$$

可得：

$$L_2(x) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = \frac{1}{28}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{14}$$

分别代入 $x = 1.2, x = -1.2$ 可得：$L_2(1.2) = 2.3086, L_2(-1.2) = 0.5086$

4. 考虑在 $(a,0),(b,0)$ 两点插值 $f(x)$ 的多项式 $L(x)$，易知 $L(x) = 0$，且误差为：

$$\begin{aligned}|R(x)| = |f(x) - L(x)| = |f(x)| &= |\frac{f''(\epsilon)}{2}(x-a)(x-b)| \quad (\epsilon \in (a,b)) \\ &\leq \frac{M_2}{2}\frac{(b-a)^2}{4} \\ &= \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2\end{aligned}$$

另外本题也可考虑利用在 $x \in (a,b)$ 处的泰勒展开来做。

5. 考虑在 $(81,9),(100,10),(121,11)$ 三点处插值 $f(x) = \sqrt{x}$ 的多项式 $L(x)$，可得：

$$L(x) = \frac{(x-100)(x-121)}{(81-100)(81-121)} \times 9 + \frac{(x-81)(x-121)}{(100-81)(100-121)} \times 10 + \frac{(x-81)(x-100)}{(121-81)(121-100)} \times 11$$

带入 $x=105$，可得：$f(105)\approx L(105)=10.2481$，而 $\sqrt{105}=10.2470$，实际误差为 $|L(105)-\sqrt{105}|=0.0012$ ，误差界为：

$$|R(105)|\leq|\frac{f'''(81)}{3!}(105-81)(105-100)(105-121)|=0.0020>0.0012$$

7.(1)

$$\begin{aligned}N(x)&=f(4)+f[1,4](x-4)+f[1,3,4](x-1)(x-4)+f[1,2,3,4](x-3)(x-1)(x-4)\\&=-x^3+9x^2-22x+9\end{aligned}$$

(2)$f(2)=-7, f[2,3,4]=(2-1)f[1,2,3,4]+f[1,3,4]=0$

8. 见课本例 1.2

9.

$$\begin{aligned}f[2^0,2^1]&=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-2089\\f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7]&=\frac{f^{(7)}(\epsilon)}{7!}=1\quad(\epsilon\in(2^0,2^7))\\f[2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8]&=\frac{f^{(8)}(\epsilon)}{8!}=0\quad(\epsilon\in(2^0,2^8))\end{aligned}$$

12.

$$H(x)=f(3)+f[3,5](x-3)+f[3,5,5](x-3)(x-5)=5+5(x-3)+(x-3)(x-5)$$

$$R(x)=\frac{f^3(\epsilon)}{3!}(x-3)(x-5)^2\quad\epsilon\in[3,5]$$

$H(3.7)=7.5900$

15.

$$\begin{aligned}H(x)&=0.5+0.5\times(x-1)-1.5\times(x-1)^2(x-2)+3.5\times(x-1)^2(x-2)^2\\&=3.5x^4-22.5x^3+51.5x^2-49x+17\end{aligned}$$

$$R(x)=\frac{f^5(\epsilon)}{5!}(x-1)^2(x-2)^3\quad\epsilon\in[1,2]$$

表 1

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$\cdots$	
1	0.5				
1	0.5	0.5			
2	1	0.5	0		
2	1	-1	-1.5	-1.5	
2	1	-1	$\boldsymbol{\frac{f''(2)}{2!}=0.5}$	2	3.5

2 补充题

1. 证明：$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$ 线性无关

Pf: 只需证明：若存在 $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$, 使得 $\sum_{i=0}^n \lambda_i l_i(x)=0$，则必有 $\lambda_i=0,(i=0,\cdots,n)$。

注意到

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

，向 $\sum_{i=0}^n \lambda_i l_i(x)=0$ 左边分别代入 $x_0,\cdots,x_n$，立即可得 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$。

2. 记 $P_{i_0,i_1,\cdots,i_k}$ 为节点 $\{x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$ 上的 k 次插值多项式，证明：

$$L_n(x)=\frac{(x-x_j)P_{0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n}(x)-(x-x_i)P_{0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n}(x)}{x_i-x_j}$$

Pf: 注意到等式右边的多项式在 $x_0,\cdots,x_n$ 上插值 $f(x)$（不要省略代入验证的过程！），由该多项式次数不超过 n 与多项式插值的唯一性立即可得左右相等。

3. 证明差商性质 1~4

(3.1)$f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^k \frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$

Pf: 对 k 进行归纳或利用多项式插值的唯一性（这里若使用唯一性时要注意

不要和性质 1.4 形成循环论证）

(3.2) 若 $\{i_0, i_1, \cdots, i_k\}$ 为 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的任意排列，则：

$$f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}]$$

Pf: 由性质 1 立即可得

(3.3) 若 f(x) 为 m 次多项式，则 $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 为 m-k 次多项式。

Pf: 注意到 $f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k]$ 含因子 $(x - x_k)$，对 k 归纳即可。

(3.4) 若多项式 $p(x) \in P_n(x)$ 插值与 $f(x_0), \cdots, f(x_n)$，则 p(x) 最高次项 x^n 的系数为 $f[x_0, \cdots, x_n]$

Pf: 由性质 1 结合多项式插值唯一性立即可得或参考课本 P29,30 处的构造过程并结合多项式插值唯一性。

4. 证明 Hermite 插值的差商型公式。

分析：首先需要给出推广后的差商的定义：设 $x_1 \le x_1 \le \cdots \le x_n$，则广义差商可以定义为：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & x_0 \neq x_n, \\ \frac{f^n(x_0)}{n!} & x_0 = x_n \end{cases}$$

但值得注意的是，这种定义虽然“简明扼要”，但在实际应用时仍会有问题，其中一点就是并没有考虑交换性（节点顺序）的问题，或者说按照这种定义，重复的节点需要“聚在一起”，在处理类似 $f[a, b, a]$ 这种形式的差商时，如果仅从上述定义出发，要不在上述定义上补充一些取极限操作，要不就默认交换性成立（或放宽一些，默认重复的节点总是“聚在一起”），这次的问题为方便起见，我们采取后一种方式，同时考虑到一般性，我们将证明更强一些的结论：

设 f(x) 充分光滑，差商如上定义，$x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = \underbrace{\tau_1, \cdots, \tau_1}_{l_1} \le$

$\cdots \le \underbrace{\tau_d,\cdots,\tau_d}_{l_d}, l_1+\cdots+l_d=n+1$，并记全体次数不超过 n 的多项式组成的空间为 $\mathcal{P}_n$，证明：

$$H(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad \textbf{(1)}$$

满足插值条件，即：

$$H^{(k_i)}(\tau_i)=f^{(k_i)}(\tau_i) \quad k_i\in\{0,1,\cdots,l_i-1\}, i\in\{1,2,\cdots,d\}$$

引理 1: 满足上述插值条件的 $\mathcal{P}_n$ 中的多项式有且只有一个。
pf: 见群文件参考教材《数值分析》P270 定理 1（埃尔米特插值定理）

证明方法一（针对广义差商重新证明差商性质 4）

先证明一个引理。

引理 2: 差商 $f[x_0,x_1\cdots,x_n]$ 为在点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 插值于函数 f 的 $\mathcal{P}_n$ 中的多项式 $p_n(x)$ 的 x^n 项系数。
pf: 采用数学归纳法。

当 $n=1$ 时，若 $t_0<t_1$，这时线性插值多项式为

$$p_1(x)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+f(x_0)$$

它的一次方项系数为

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

此时引理成立。

当 $x_0=x_1$ 时，

$$p_1(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

它的一次方项系数为 $f'(x_0)=f[x_0,x_1]$，于是 n=1 时引理成立。设 n=k 时定理成立，即在 $\{x_i\}_{i=0}^k$ 插值于 f 的 $\mathcal{P}_k$ 的多项式 $p_k(x)$ 的 x^k 项系数为 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$. 则当 $n=k+1$ 时，若 $x_0=x_{k+1}$，由于

$$p_{k+1}(x)=p_k(x)+\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

的 x_{k+1} 项系数为 $\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}$, 此时引理成立。

若 $x_0 < x_{k+1}$，由归纳假设，在 $\{x_i\}_{i=0}^{k}$ 插值于 f 的 $\mathcal{P}_k$ 的多项式 $p_k(x)$ 的 x^k 项系数为 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$, 在 $\{x_i\}_{i=1}^{k+1}$ 插值于 f 的 $\mathcal{P}_k$ 的多项式 $q_k(x)$ 的 x^k 项系数为 $f[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}]$，考虑多项式

$$p_{k+1}(x) = \frac{(x - x_0)q_k(x) + (x_{k+1} - x)p_k(x)}{x_{k+1} - x_0}$$

$p_{k+1}(x) \in \mathcal{P}_{k+1}$, 它的 x^{k+1} 项系数为

$$\frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} = f[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}]$$

且由

$$p_{k+1}^{(j)}(\tau_i) = \frac{1}{x_{k+1} - x_0}(jq_k^{(j-1)}(\tau_i) + (\tau_i - x_0)q_k^{(j)}(\tau_i) - jp_k^{(j-1)}(\tau_i) + (x_{k+1} - \tau_i)q_k^{(j)}(\tau_i))$$

容易验证 $p_{k+1}(x)$ 在 $\{x_i\}_{i=0}^{k+1}$ 上插值于 f，即 n=k+1 时引理成立。

由引理 2 容易推出原定理成立。 □

证明方法一来自于冯玉瑜，曾芳玲，邓建松《样条函数与逼近论》. 中国科学技术大学出版社第九章定理 9.1

证明方法二（利用差商表证明 Hermite 插值是 Newton 插值的”极限”）

由引理一, 可以设满足题中插值条件的多项式为 $p*$, 同时注意到将 H(x) 中的 f 替换为 $p*$ 不会改变 H(x) 的定义，**于是不失一般性, 可以设$\boldsymbol{f \in \mathcal{P}_n}$**, 因此我们只需证明 $H(x) = f$.

对任意正数 ϵ，令 $\{\xi_i; i = 0, 1, \cdots, n\}$ 为 n+1 个相异节点，同时满足条件 $\{|\xi_i - x_i| \le \epsilon; i = 0, 1, \cdots, n\}$，易知 $\mathcal{P}_n$ 中在这 n 个点上插值 f 的多项式有且只有一个，就是 f 自己，即：

$$f(x) = f(\xi_0) + f[\xi_0, \xi_1](x - \xi_0) + \cdots + f[\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n](x - \xi_0)(x - \xi_1)\cdots(x - \xi_{n-1}) \quad \textbf{(2)}$$

由差商的定义可知，Newton 插值多项式与 Hermite 插值多项式的计算过程均可以由差商表给出，因此，我们只需要比较 (1) 式与 (2) 式对应的差商表 (实在不好打，大家自已脑补吧，另外到这里大家差不多也该明白这个证明方法是什么意思了，下面都是麻烦地说明两个表如何变成一样的过程了)。

对于计算 H(x) 的差商表，其中形如 $\frac{f^k(x_j)}{k!}$ 的项在计算 f 的差商表中的对应项为 $f[\xi_j, \cdots, \xi_{j+k}] = \frac{f^k(\xi)}{k!}$（差商与导数的关系），$\xi$ 属于包含点集 $\{\xi_i; i = j, \cdots, j+k\}$ 的最小区间，也即有 $\xi \in [x_j - \epsilon, x_j + \epsilon]$，因此由 ϵ 的

任意性，这些对应项之间的差可以任意小，而除此之外的对应项均可以由差商定义中的递归关系计算得到，而计算过程中涉及的非零分母 $(\xi_{j+k}-\xi_j)$ 也可以通过选择充分小的 ϵ 来任意接近 $(x_{j+k}-x_j)$，综上所述，可以选择充分小的 ϵ，使两表对应项的差任意小，也即，$\forall x$ 和 $\forall\sigma\in R^+$,$\exists\epsilon>0$ 使得，$|f(x)-H(x)|<\sigma$（注意 f 与 H 均次数有限），又 f 与 H 均与 ϵ 无关，所以有 $f=H$. □

证明方法二来自于群文件参考教材 M.J.D.Powell 的《Approxiamtion Theory and Methods》P56 Theorem 5.5