第五次书面作业参考答案

1 习题 3

4.Newton 迭代格式：$x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k - sin(x_k) - cos(x_k)}{sin(x_k) - cos(x_k) + 2}$

6.$x_1 = 3.375, x_2 = 3.31713, x_3 = 3.31662, x_4 = 3.31662, \sqrt{11} \approx 3.31662$

7.Newton 迭代格式：$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^5 - 9}{5x_k^4}$
$x_1 = 1.71250, x_2 = 1.57929, x_3 = 1.55278, x_4 = 1.55185, \sqrt[5]{9} \approx 1.55185$

8.Newton 迭代格式：$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3}$
$x_1 = 2.33333, x_2 = 2.05556, x_3 = 2.00195, x_4 = 2.00000, x_5 = 2.00000$, 根为 2.00000

2 习题 4

1(2).（注意题目要求计算过程保留四位有效数字）Gauss 消元法:

$$\begin{bmatrix} 0.01 & -69.47 & -138.93 \\ 2.01 & 8.51 & 15.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.01 & -69.47 & -138.93 \\ 0 & 13970 & 27940 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2.000 \\ x_1 = 1.000 \end{cases}$$

列主元法:

$$\begin{bmatrix} 0.01 & -69.47 & -138.93 \\ 2.01 & 8.51 & 15.01 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -69.51 & -139.0 \\ 2.01 & 8.51 & 15.01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2.000 \\ x_1 = -1.000 \end{cases}$$

3(2).

$$\begin{vmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 444$$

5.Doolittle:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Crout:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -10 \\ x_3 = 9 \end{cases}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

7.(1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{14}{5} & 0 \\ 2 & \frac{13}{5} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

(2)

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&4&7\\3&8&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}6&9\\-4&1\\5&3\end{pmatrix}$$

8(2). 这道题我在给一些同学解答时犯了一个错误，虽然在实数范围内若 $A=LL^T$ 是要求是 A 对称正定的，但 $A=LDL^T$ 却不需要这样的限制，事实上只要 A 对称，且其所有顺序主子式不为 0（即可以 LU 分解），则存在唯一的下三角阵 L，对角阵 D 满足 $A=LDL^T$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&\frac{8}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&\frac{40}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&\frac{8}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=3\\x_2=0\\x_3=-2\end{cases}$$

9(2).

$$\begin{pmatrix}10&5&&\\2&2&1&\\&1&10&5\\&&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&&&\\2&1&&\\&1&9&\\&&2&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&&\\&1&1&\\&&1&\frac{5}{9}\\&&&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-3\\x_3=5\\x_4=-4\end{cases}$$

3 补充题

1. 证明: 若 $f(x)\in C^{m+1}[a,b]$,x^* 为 f(x) 的 m 重根, 则存在 $\sigma>0$, 使得对任意初值 $x_0\in(x^*-\sigma,x^*+\sigma)$, 修正的 Newton 迭代格式 $x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 是 2 阶收敛的。

Pf: 这道题有一些不严谨的地方，其实应该改为至少二阶收敛。

设 $f(x)=(x-x^*)^m h(x), h(x^*)\neq 0$, 记 $\varphi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$, 容易验证 $\varphi(x^*)=x^*$,

$$\varphi'(x^*)=1-\frac{m^2h(x^*)^2+m(x-x^*)^2(h'(x^*)^2-h(x^*)h''(x^*))}{m^2h(x^*)^2+2m(x-x^*)h(x^*)h'(x^*)+(x-x^*)^2h'(x^*)^2}=0$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*)\\ &= \varphi(x^*)+(x_k-x^*)\varphi'(x^*)+\frac{(x_k-x^*)^2}{2!}\varphi''(\epsilon)-\varphi(x^*)\\ &= \frac{(x_k-x^*)^2}{2!}\varphi''(\epsilon)\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x-x^*|^2}=\frac{\varphi''(x^*)}{2!}=\frac{h'(x^*)}{mh(x^*)}$$

注意 $h(x^*)\neq 0$ 不代表 $h'(x^*)\neq 0$，故可知修正的 Newton 迭代格式至少二阶收敛。

2. 证明: 若 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ 分解为 $A=LU$, 其中 L 为上三角阵, U 为下三角阵, 则 $L=\begin{pmatrix} u_1 & & & \\ w_1 & u_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & w_{n-1} & u_n \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} 1 & v_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Pf: 思路一：按照书上给的 Crout 分解的计算方法得出 LU 的形式（可以用归纳的方法，不具体展开了）

思路二：对 A 进行 n-1 步列操作容易得到一个下三角阵，记为 L，列操作可以看成对 A 右乘一个矩阵，即：

$$A*P_1P_2*\cdots*P_{n-1}=L$$
$$A=L*P_{n-1}^{-1}*P_{n-2}^{-1}\cdots P_1^{-1}$$

其中 $P_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & t_i & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & -t_i & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

记 $U = P_{n-1}^{-1} * P_{n-2}^{-1} \cdots P_1^{-1}$, 则容易验证 U 具有形式 $\begin{pmatrix} 1 & v_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ □

3. 若 $\{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ 为 R^n 的一组基，则定义在 R^n 上的任意范数 $\|\cdot\|$ 是关于向量在这组基下坐标的连续函数。

Pf: 这道题需要注意的地方一个是多元函数连续性的定义，在衡量坐标向量之间的距离时通常使用欧氏距离（2 范数）（当然这和使用各分量间距离均小于某个正数（无穷范数）其实是等价的，使用时最好说明一下，这里并没有扣分，但应该注意不要使用各分量连续，这和某点的连续性不等价），另外一点是 $\vec{e_i}$ 并未指明是单位向量，因此这个题实际需要证明如下结论：
设 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e_i}, \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e_i}$, 记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则当 $\|X - Y\|_2 \to 0$ 时，$|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \to 0$.

$\forall \epsilon > 0$, 取 $\sigma < \frac{\epsilon}{(\sum_{i=1}^n \|\vec{e_i}\|_2^2)^{\frac{1}{2}}}$, 则当 $\|X - Y\|_2 \le \sigma$ 时,

$$\begin{aligned} |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| &\le |\|\vec{x} - \vec{y}\|| \\ &= \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)\vec{e_i}\| \\ &\le \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|\vec{e_i}\| \\ &\le \|X - Y\|_2 (\sum_{i=1}^n \|\vec{e_i}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (Cauchy - Schwarz) \\ &\le \epsilon \end{aligned}$$

于是结论得证。 □

4. 证明：$\forall A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}, \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$（这里的矩阵范数应是诱导范数）.

Pf: 下面将矩阵范数记为 $\|*\|_M$，诱导其的向量范数记为 $\|*\|_V$，则 $\forall C \in \mathbf{R}^{n\times n}, z \in \mathbf{R}^n, \|Ax\|_V \leq \|C\|_M \|z\|_V$.

$\forall x \in \mathbf{R}^n, \|x\|_V = 1,$

$$\begin{aligned}
\|ABx\|_V &= \|A(Bx)\|_V \\
&\leq \|A\|_M \|Bx\|_V \\
&\leq \|A\|_M \|B\|_M \|x\|_V \\
&= \|A\|_M \|B\|_M
\end{aligned}$$

$$\therefore \|AB\|_M = \sup_{\|x\|_V=1} \|ABx\|_V \leq \|A\|_M \|B\|_M$$

$\square$