随机过程 重点总结

BY RYAN, VIOLET,
SERANDT

1 引论

- 随机过程$\{X(t), t\in T\}$：均值函数$\mu_X(t)=E[X(t)]$，自相关函数$r_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$，协方差函数$R_X(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))=E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))\overline{(X(t_2)-\mu_X(t_2))}]$，标准自相关函数：$\rho(v)=\frac{R(v)}{R(0)}$
- **独立增量过程**：$\forall t_1,\ldots,t_n\in T, X(t_2)-X(t_1),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立
- **平稳独立增量过程**：独立增量过程$\wedge\forall t_1,t_2\in T, X(t_1+h)-X(t_1)$与$X(t_2+h)-X(t_2)$同分布
- **随机变量的矩母函数**：$g(t)=E[\mathrm{e}^{tX}]=\int \mathrm{e}^{tX}\mathrm{d}F(x), E[X^n]=g^{(n)}(0)$

  若两变量独立，则$g_{X+Y}(t)=g_X(t)\cdot g_Y(t)$

表格. 常用分布矩母函数

分布	密度函数(/分布函数)	矩母函数	均值	方差
二项分布 $n, 0\le p\le 1$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k=0,\ldots,n$	$(p\mathrm{e}^t+(1-p))^n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\lambda>0$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,\ldots$	$\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$	λ	λ
几何分布 $0\le p\le 1$	$p(1-p)^{k-1}, k=1,\ldots$	$\frac{p\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\mathrm{e}^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
负二项分布 r,p	$\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, k=r,\ldots$	$\left(\frac{p\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\mathrm{e}^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
均匀分布 (a,b)	$\frac{1}{b-a}, a<x<b$	$\frac{\mathrm{e}^{tb}-\mathrm{e}^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
指数分布 $\lambda>0$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, x\ge 0/1-e^{-\lambda x}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}\ (t<\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γ-分布 $(n,\lambda),\lambda>0$	$\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, x\ge 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
正态分布 (μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	μ	σ^2
B-分布 $a,b>0$	$cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0<x<1$, $c=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

随机和$Y=\sum_{i=1}^N X_i$, X_i i.i.d, 与N独立, 矩母函数$g_Y(t)=E_N[g_X(t)^N]$, $EY=E[NE[X]]=EN\cdot EX$

$EY^2=EN\cdot\mathrm{Var}\,X+EN^2\cdot E^2X$，$\mathrm{Var}\,Y=EN\cdot\mathrm{Var}\,X+E^2X\cdot\mathrm{Var}\,N$

- 对于离散随机变量X，$P(X=k)=p_k, k=0,\ldots$，则生成函数$\phi_X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$

  若两变量独立，则$\phi_{X+Y}(t)=\phi_X(t)\cdot\phi_Y(t)$，$E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]=\frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)|_{s=1}$

  随机和：$\phi_Y(s)=E[\phi_X(s)^N]=\phi_N(\phi_X(s))$
- **收敛性**：依概率收敛: $\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geqslant\epsilon)=0$, $\{X_n, n\geqslant 1\}$, $X_n\xrightarrow{p}X$; 几乎必然收敛: $\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|=0)=1$, $X_n\to X$; 均方收敛: $\lim_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$, $\{X_n, n\geqslant 1\}$, $X_n\xrightarrow{L_2}X$.

2 Poisson 过程

- 强度为$\lambda>0$的Poisson过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$定义 (1).$N(0)=0$；(2).$N(t)$是独立增量过程；(3).$\forall t>0, s\geqslant 0, N(s+t)-N(s)\sim\mathrm{Pois}(\lambda t)$
- Poisson过程等价定义 (1).$\forall t_0=0<t_1<\cdots<t_n, N(t_1-t_0),\ldots,N(t_n-t_{n-1})$相互独立 (2).$\forall t\geqslant 0, h>0, N(t+h)-N(t)$的分布只依赖于区间长度$h$ (3).$\exists\lambda>0$, 当$h\to 0, P(N(t+h)-N(t)\geqslant 1)=\lambda h+o(h)\wedge P(N(t+h)-N(t)\geqslant 2)=o(h)$
- $E[N(t)N(t+s)]=\lambda t(\lambda(t+s)+1)$
- Pois过程中事件以p被观测,观测到事件$N_1(t)\sim\mathrm{Pois}(\lambda tp)$；$P_{N_1(t)=n}=\sum_k\binom{n+k}{n}p^n(1-p)^k P_{N(t)=n+k}$

  $N_1(t)$与$N_2(t)=N(t)-N_1(t)$独立：$P_{N_2=m_2,N_1=m_1}=\lambda t\frac{e^{\lambda tm}}{m!}\frac{m!}{m_1!m_2!}p^{m_1}(1-p)^{m_2}=P_{N_2=m_2}P_{N_1=m_1}$
- Poisson过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$事件$n-1$ 事件n间隔X_n，事件n到达时间$W_n=\sum_{i=1}^n X_i$

  $X_n\sim\mathrm{Exp}(\lambda), n=1,2,\ldots$且相互独立，$W_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

  $f_{W_1,\ldots,W_n|N(t)=n}(w_1,\ldots,w_n|n)=\frac{n!}{t^n}, 0<w_1<\cdots<w_n\leqslant t$ $\boldsymbol{N(t)\geqslant n\Leftrightarrow W_n\leqslant t}$

  $E[W_k|N(t)=n]=EU_{(k)}=\frac{tk}{n+1}$; $E\left[\sum_{i=1}^n W_i\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^n U_{(i)}\right]=\frac{nt}{2}$; $U_{(k)}/t\sim\mathrm{B}(k,n-k+1)$
- **非齐次Poisson过程**：修改定义(3).$\forall t>0, s\geqslant 0, m(t)=\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u, N(s+t)-N(t)\sim\mathrm{Pois}(m(s+t)-m(t))$
- **复合Poisson过程**：$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，$Y_i$独立同分布，$EY=\mu, \mathrm{Var}\,Y=\tau^2$，$N(t)\sim\mathrm{Pois}(\lambda)$：$E[X(t)]=\lambda\mu t$, $\mathrm{Var}[X(t)]=\lambda(\tau^2+\mu^2)t$（随机和矩母函数处的性质）
- **更新过程**：X_i i.i.d，$W_n=\sum_{i=1}^n X_i$，$N(t)=\max\{n: W_n\leqslant t\}=\sum_{n=1}^{\infty}I_n$

3 Markov 过程

- **离散时间Markov链**：X_{n+1}仅与X_n有关; 转移概率：$P_{ij}^{n,n+1}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$, 与$n$无关则为平稳转移概率$P_{ij}$
- **n步转移概率**：$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}P_{kj}^{(n-1)}$ **Chapman-Kolmogorov方程**：$P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}$
- **可达与互达**：(1).$\exists n\geqslant 0, P_{ij}^{(n)}>0$, $i\to j$；(2).互达：$i\leftrightarrow j$，是等价关系

  如果Markov链所有状态在互达性下都居于同一等价类，则称该Markov链是**不可约的**
- **周期性**：(1).使$P_{ii}^{(n)}>0$的所有正整数n的gcd称为状态i的周期$d(i)$；(2).if$\forall n\geqslant 1, P_{ii}^{(n)}=0, d(i)=\infty$；(3).$d(i)=1$的状态$i$称为是**非周期的**

  (1).if $i\leftrightarrow j$, then $d(i)=d(j)$

  (2).for i and $d(i)$, $\exists N$, $\forall n>N$, $P_{ii}^{(nd(i))}>0$

  (3).if$P_{ji}^{(m)}>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, $P_{ji}^{(m+nd(i))}>0$

  (4).P为不可约 非周期 有限状态Markov链的转移概率矩阵，则$\exists N$, $\forall n\geqslant N$, $P^{(n)}>0$
- $f_{ij}^{(n)}$ 从i出发 n步首达j的概率，$f_{ij}^{(0)}=0, f_{ij}^{(n)}=P(X_n=j, X_k\neq j, k=1,\ldots,n-1|X_0=i)$；$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$

  常返与瞬过：如果$f_{ii}=1$，则状态i是常返的，否则就是瞬过的.

  (1).状态i常返$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}=\infty$

  (2).状态i瞬过$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}<\infty$

  (3).状态i常返，且$i\leftrightarrow j\Rightarrow$状态$j$常返

  正常返与零常返：常返状态i，$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}=\infty$，则状态$i$为零常返的；否则为正常返的

  遍历的：正常返非周期

  有限状态Markov链：(1).至少1个常返状态 (2).常返状态均正常返。

  证明：(1).若所有状态瞬过：$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}<\infty\Rightarrow P_{ii}^{(n)}\to 0$, $\forall l\leqslant n$, $\boldsymbol{P_{ij}^{(n)}}=\sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}\leqslant\sum_{k=1}^{l-1}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+\boldsymbol{\sum_{k=l}^n f_{ij}^{(k)}}\xRightarrow{n\to\infty}\lim P_{ij}^{(n)}\leqslant\sum_{k=l}^n f_{ij}^{(k)}\xRightarrow{l\to\infty}\lim P_{ij}^{(n)}=0$, 与$\sum_{j=1}^n P_{ij}^{(n)}=1$矛盾。

  (2). 若有零常返状态i, i所在不可约子链均零常返，则子链中任一状态j有$\sum_{n=1}^{\infty}P_{jj}^{(n)}=\infty$, 同(1)可知矛盾。
- **一维随机游走**：向右挪一个的概率为p，向左挪一格的概率为$q=1-p$，$P_{00}^{(2n)}=C_{2n}^n p^n q^n\sim\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$

  当$p=q=\frac{1}{2}$时，零常返；当$p\neq q$时，瞬过
- **Markov链的基本极限定理**：

  (1).状态i是瞬过的或零常返的$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$

  (2).状态i是周期为d的常返状态$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$

(3).状态i是遍历状态$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

(4).状态i是遍历的$\Rightarrow \forall i \to j, \lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$

- **平稳分布**$\pi = \{\pi_j, j \geqslant 0\}$：$\sum_j \pi_j = 1, \sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j$; 含义：$\pi_j$可表示处于状态$j$的时间占比。

  平稳分布存在$\Leftrightarrow \exists$正常返状态的不可约子链。

  平稳分布存在且唯一$\Leftrightarrow$正常返状态的不可约子链唯一; 平稳分布无穷多$\Leftrightarrow$正常返状态的不可约子链不唯一。

- **极限分布** $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = c_i$.

  定理：对**不可约**的Markov链：(1). 若所有状态**遍历**，则$\forall i, j$，极限$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$存在且等于极限分布，且是一个平稳分布; (2). 若所有状态瞬过/零常返，极限分布不存在; (3). 若所有状态正常返但周期，则极限分布不一定存在。

- **分支过程**：$\{X_n, n \geqslant 0\}$，X_n为第n代后裔数，Z_i为第i个个体的繁衍数，$X_0 = 1, X_1 \sim Z_1$，i.i.d, $EZ = \mu, \mathrm{Var}\, Z = \sigma^2$, $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_i$

$$EX_{n+1} = EX_n \cdot EZ = \mu^{n+1}$$

$$\mathrm{Var}\, X_{n+1} = EX_n \cdot \mathrm{Var}\, Z + E^2 Z \cdot \mathrm{Var}\, X_n = \begin{cases} \sigma^2 \mu^n \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, \mu \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2, \mu = 1 \end{cases}$$

  X_n生成函数：$\phi_{n+1}(s) = \phi_n(\phi(s)) = \phi(\phi_n(s))$，记$\pi_n = P(X_n = 0) = \phi_n(0)$为在第$n$代前消亡的概率;

  $p_0 + p_1 < 1$时：群体最终消亡的概率为$\pi = \phi(\pi)$最小正解；$\pi = 1 \Leftrightarrow \mu \leqslant 1$.

4 平稳过程

- **严平稳过程**：$\forall t_1, \ldots, t_n \in T, \forall h > 0, (X(t_1), \ldots, X(t_n))$与$(X(t_1+h), \ldots, X(t_n+h))$同分布

  一个判定非严平稳的方法：$\neg$宽平稳$\wedge$二阶矩存在$\to \neg$严平稳

- **宽平稳（二阶矩平稳）**：$E[X^2(t)] < \infty$, $E[X(t)] = m$, $R_X(t,s)$只与$t-s$有关

- **Gauss过程**：$G = \{G(t), -\infty < t < \infty\}, \forall k \in N, t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k, (G(t_1), \ldots, G(t_k))$的联合分布为$k$维正态分布，对于Gauss过程，**严平稳$\Leftrightarrow$宽平稳**

- **周期平稳过程**：$\{X(t), t \in T\}$为平稳过程，$X(t+\kappa) = X(t)$，那么协方差函数也是周期函数

- **遍历性**：$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$为平稳过程

		离散	连续
均值遍历性	定义	$\overline{X} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{k=-N}^{N} X(k) \xlongequal{L_2} m$	$\overline{X} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt \xlongequal{L_2} m$
	定理	$\Leftrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$ 充分条件：$R(\tau) \to 0 (\tau \to \infty)$	$\Leftrightarrow \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R(\tau)\, d\tau = 0$ 充分条件：$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert R(\tau) \rvert\, d\tau < \infty$
协方差函数遍历性	定义	$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{k=-N}^{N} (X(k+\tau) - \hat{m}_n)(X(k) - \hat{m}_n) \xlongequal{L_2} R(\tau)$	$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (X(t) - m)(X(t+\tau) - m)\, dt \xlongequal{L_2} R(\tau)$
	定理		$\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau_1}{2T}\right) (B(\tau_1) - R^2(\tau))\, d\tau_1 = 0$ $B(\tau_1) = EX(t+\tau+\tau_1) X(t+\tau_1) X(t+\tau) X(t)$

  Gauss过程协方差函数遍历性$\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) = 0$

- **协方差函数的性质**：(1)$R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$；(2).$\lvert R(\tau) \rvert \leqslant R(0)$；

  (3).非负定性：$\forall t_n, a_n, n = 1, \ldots, N, \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_n a_m R(t_n - t_m) \geqslant 0$

  (4).n阶导数的协方差函数：$\mathrm{Cov}(X^{(n)}(t+\tau), X^{(n)}(t)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$

- 平方检波：$\{Y(t), t \in R\}$为零均值平稳Gauss过程，$X(t) = Y^2(t) \Rightarrow R_X(\tau) = 2R_Y^2(\tau)$

- **功率谱密度**：$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} E\frac{1}{2T} \lvert F(\omega, T) \rvert^2$, $\quad F(\omega, T) = \int_{-T}^{T} X(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} dt$

  判断一个函数能否作为功率谱密度函数：$\overline{S}(\omega) = S(\omega) \geqslant 0, S(-\omega) = S(\omega)$

  W-K公式：$EX(t) = 0, \int \lvert R(\tau) \rvert d\tau < \infty \Rightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau}\, \mathrm{d}\tau, R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{j\omega\tau}\, \mathrm{d}\omega$

  $EX(t) = m$, $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau}\, d\tau, r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{j\omega\tau}\, \mathrm{d}\omega$

  离散形式：$S(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\omega\tau} R(\tau), R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \cos \omega\tau\, \mathrm{d}\omega$

  不满足$\int \lvert R(\tau) \rvert d\tau < \infty$时，$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{\lvert\tau\rvert}{2T}\right) R(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau}\, \mathrm{d}\tau$

5 Brown 运动

- $\{X(t), t \geqslant 0\}$为Brown运动的**定义**：

  (1).$X(0) = 0$；(2).X有平稳独立增量；(3).$\forall t > s > 0, X(t) - X(s) \sim N(0, c^2(t-s))$ (一般$c = 1$: 标准Brown运动)

  性质：$\forall 0 < t_1 < \cdots < t_n, f_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \ldots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$

- **Brown运动是Gauss过程**：$EX(t) = 0$，$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \min\{s, t\}$

- **Brown桥过程**：Brown运动$W(t)$，$\{B(t) = W(t) - tW(1), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$为Brown桥过程, $W(0) = W(1) = 0$.

  也是Gauss过程：$EB(t) = 0$，$EB(s)B(t) = s(1-t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$

  平移不变性：$\{W(t) - W(a), t \geqslant a\}$是Brown运动 **刻度不变性**：$\left\{\frac{W(ct)}{\sqrt{c}}, t \geqslant 0\right\}$是Brown运动

6 数学工具

- 留数定理：$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{j\omega\tau} d\omega = j \sum \mathrm{Res}[S(z) \mathrm{e}^{jz\lvert\tau\rvert}, a]$

  a为$S(z)\mathrm{e}^{jz\lvert\tau\rvert}$的上半平面的$m$级极点，且$\mathrm{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to a} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} ((z-a)^m f(z))$

- δ函数：$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau)$, $\delta(\tau) = \delta(-\tau)$

- 三角函数公式：$S_\alpha + S_\beta = 2\, S_{\alpha+\beta/2} C_{\alpha-\beta/2}$, $C_\alpha + C_\beta = 2\, C_{\alpha+\beta/2} C_{\alpha-\beta/2}$, $C_\alpha - C_\beta = -2\, S_{\alpha+\beta/2} S_{\alpha-\beta/2}$

  $S_\alpha C_\beta = {}^1\!/_2\, (S_{\alpha+\beta} + S_{\alpha-\beta})$, $C_\alpha C_\beta = {}^1\!/_2\, (C_{\alpha+\beta} + C_{\alpha-\beta})$, $S_\alpha S_\beta = -{}^1\!/_2 (C_{\alpha+\beta} - C_{\alpha-\beta})$

- $\mathbb{E}$与$\int$的交换：$\mathbb{E}\left[\left(\int X \mathrm{d}t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int X \mathrm{d}t \int X \mathrm{d}s\right] = \iint \mathbb{E}[X] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s$

- Stirling's approximation $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, ({}^n\!/_e)^n$

- $\mathbb{E}X = \int P(X > x) \mathrm{d}x$

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$, $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$