多变量微积分期中复习

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

- 微分学
  (1) 极限与连续
  (2) 微分与偏导数
  (3) 泰勒公式与极值
  (4) 空间曲线与曲面
- 积分学
  (1) 重积分
  (2) 第一型曲线与曲面积分
  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

主要内容

- 微分学

  (1) 极限与连续

  (2) 微分与偏导数

  (3) 泰勒公式与极值

  (4) 空间曲线与曲面

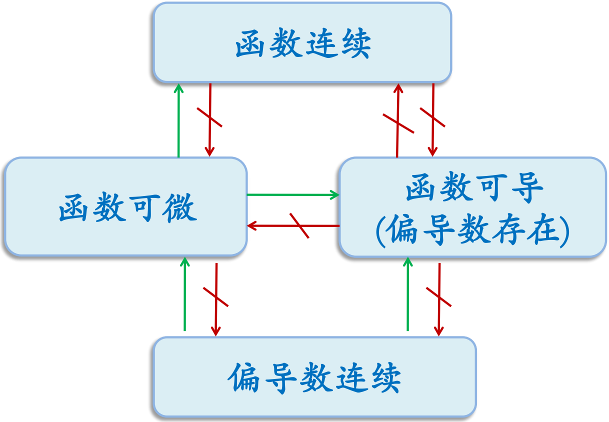
- 积分学

  (1) 重积分

  (2) 第一型曲线与曲面积分

  (3) 第二型曲线与曲面积分

多元函数连续、可微与可导的关系



极限与连续

- 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ 的存在性.
- 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

答案

极限都不存在。取$y=kx^2-x$; $y=-\frac{3}{2}x+\sqrt[4]{|x|}$

极限: e; 0.

极限与连续

- 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ 的存在性.
- 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

答案

极限都不存在。取$y=kx^2-x$; $y=-\frac{3}{2}x+\sqrt[4]{|x|}$

极限: e; 0.

极限与连续

- 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ 的存在性.
- 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

答案

极限都不存在。取$y=kx^2-x$; $y=-\frac{3}{2}x+\sqrt[4]{|x|}$
极限: e; 0.

连续与可微

- 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点连续.

(2) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点可微.

答案：(1) $b=0$；(2) $a=0, b=0$.

连续与可微

- 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点连续.

(2) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点可微.

答案：(1) $b=0$； (2) $a=0,b=0$.

连续与可微

- 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点连续.

(2) 当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点可微.

答案：(1) $b=0$；(2) $a=0,b=0$.

微分与偏导数

- 设函数$f(x,y)$可微, $f(1,1)=0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le |x-y|$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le |x-y|$, 证明: $|f(2,0)| \le 2$.
- 若函数$u=f(x,y,z)$在凸的开区域Ω内可微(开区域Ω中任意两点的连线段还在Ω内), 并且存在正数$M>0$, 使$|grad\, u| \le M$. 证明: 对Ω 中任意两点A,B 都有

$$|f(A)-f(B)| \leqslant M \cdot \rho(A,B),$$

其中$\rho(A,B)$是A,B两点间的距离.

微分与偏导数

- 设函数$f(x,y)$可微, $f(1,1)=0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le |x-y|$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le |x-y|$, 证明: $|f(2,0)| \le 2$.
- 若函数$u=f(x,y,z)$在凸的开区域Ω内可微(开区域Ω中任意两点的连线段还在Ω内), 并且存在正数$M>0$, 使$|grad\, u| \leqslant M$. 证明: 对Ω 中任意两点A,B 都有

$$|f(A)-f(B)| \leqslant M\cdot\rho(A,B),$$

其中$\rho(A,B)$是A,B两点间的距离.

微分与偏导数

- 设函数$f(x,y)$可微, $f(1,1)=0$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |x-y|$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x-y|$, 证明: $|f(2,0)| \leq 2$.

- 若函数$u=f(x,y,z)$在凸的开区域Ω内可微(开区域Ω中任意两点的连线段还在Ω内), 并且存在正数$M>0$, 使$|grad\, u| \leqslant M$. 证明: 对Ω 中任意两点A,B 都有

$$|f(A)-f(B)| \leqslant M \cdot \rho(A,B),$$

其中$\rho(A,B)$是A,B两点间的距离.

复合函数的偏导数

- 设$z=f(t,x),t=\varphi(x+y)$其中φ,f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
- 设$z=f(u)$, $u=\varphi(u)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$, 其中$f(u)$可微，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$, $P(t)$连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
- 设函数$w=f(x+y+z,xyz)\in C^2$, 求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

答案:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\varphi'^2+f''_{12}\varphi'+f'_1\varphi''$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2f'(u)\dfrac{P(x+y)}{1-\varphi'(u)}$.

$\dfrac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+yf''_{12}(x+z)+xy^2zf''_{22}+yf'_2$.

复合函数的偏导数

- 设$z=f(t,x), t=\varphi(x+y)$其中φ, f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
- 设$z=f(u)$，$u=\varphi(u)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$，其中$f(u)$可微，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$，$P(t)$连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
- 设函数$w=f(x+y+z,xyz)\in C^2$，求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

答案：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\varphi'^2+f''_{12}\varphi'+f'_1\varphi''.\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2f'(u)\frac{P(x+y)}{1-\varphi'(u)}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+yf''_{12}(x+z)+xy^2zf''_{22}+yf'_2.$$

复合函数的偏导数

- 设$z=f(t,x), t=\varphi(x+y)$其中φ, f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
- 设$z=f(u)$，$u=\varphi(u)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$，其中$f(u)$可微，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$，$P(t)$连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
- 设函数$w=f(x+y+z,xyz)\in C^2$，求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

答案：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\varphi'^2+f''_{12}\varphi'+f'_1\varphi''.\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2f'(u)\frac{P(x+y)}{1-\varphi'(u)}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+yf''_{12}(x+z)+xy^2zf''_{22}+yf'_2.$$

复合函数的偏导数

- 设$z=f(t,x),t=\varphi(x+y)$其中φ,f分别有连续的二阶导数和二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
- 设$z=f(u)$, $u=\varphi(u)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}P(t)dt$, 其中$f(u)$可微，$\varphi'(u)$连续，且$\varphi'(u)\neq 1$, $P(t)$连续，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
- 设函数$w=f(x+y+z,xyz)\in C^2$, 求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

答案:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}\varphi'^2+f''_{12}\varphi'+f'_1\varphi''.\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2f'(u)\frac{P(x+y)}{1-\varphi'(u)}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f'_1+yzf'_2,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+yf''_{12}(x+z)+xy^2zf''_{22}+yf'_2.$$

复合函数的偏导数

- 设$u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中$\varphi$具有二阶导数, ψ具有一阶导数, 证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- 设函数$u=xye^{x+y}$ 求$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}$, 其中$p,q$为正整数.
- 设函数$f(u)$具有二阶连续导数, 函数$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$, 求$f(u)$所满足的常微分方程.

答案:

$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}=(x+p)(y+q)e^{x+y}$. $f''=f+1$.

复合函数的偏导数

- 设$u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中$\varphi$具有二阶导数, ψ具有一阶导数, 证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- 设函数$u=xye^{x+y}$ 求$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, 其中$p,q$为正整数.
- 设函数$f(u)$具有二阶连续导数, 函数$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$, 求$f(u)$所满足的常微分方程.

答案:

$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}=(x+p)(y+q)e^{x+y}$. $f''=f+1$.

微分与偏导数

复合函数的偏导数

- 设$u=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- 设函数$u=xye^{x+y}$ 求$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$，其中$p,q$为正整数.
- 设函数$f(u)$具有二阶连续导数，函数$z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$，求$f(u)$所满足的常微分方程.

答案：

$$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}=(x+p)(y+q)e^{x+y}. \quad f''=f+1.$$

微分与偏导数

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$，令$u=x+ay,v=x+by$，则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y},v=x,w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程，其中$z(x,y),w(u,v)\in C^2$，求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)},y\right)=xg(y)$，可微函数$g(y)\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案：

$a=-1,b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3},b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$，令$u=x+ay, v=x+by$，则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程，其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$，求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)},y\right)=xg(y)$，可微函数$g(y)\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案：

$a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

微分与偏导数

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$，令$u=x+ay, v=x+by$，则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程，其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$，求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)}, y\right)=xg(y)$，可微函数$g(y)\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案：

$a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$，令$u=x+ay, v=x+by$，则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程，其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$，求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)}, y\right)=xg(y)$，可微函数$g(y)\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案：

$a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

微分与偏导数

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$, 令$u=x+ay, v=x+by$, 则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程, 其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$, 求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)}, y\right)=xg(y)$, 可微函数$g(y)\neq 0$, 求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案:

$a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$, 令$u=x+ay,v=x+by$, 则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y},v=x,w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程, 其中$z(x,y),w(u,v)\in C^2$, 求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)},y\right)=xg(y)$, 可微函数$g(y)\neq 0$, 求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案:

$a=-1,b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3},b=-1$. $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{v}{u}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

复合函数的偏导数

- 设$z=z(x,y)\in C^2$, 令$u=x+ay, v=x+by$, 则方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数$a,b$.
- 变量代换$u=\frac{x}{y}, v=x, w=xz-y$ 把函数$z=z(x,y)$的方程 $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}$ 化为函数$w=w(u,v)$ 的方程, 其中$z(x,y), w(u,v)\in C^2$, 求$w=w(u,v)$ 所满足的方程.
- 设$z=f\left(\dfrac{x}{g(y)},y\right)=xg(y)$, 可微函数$g(y)\neq 0$, 求$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

答案:

$a=-1, b=-\frac{1}{3}$或$a=-\frac{1}{3}, b=-1$. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\dfrac{v}{u}$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2g(y)g'(y)$.

隐函数的偏导数

- 设f可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.
- 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分dz及$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\frac{du}{dx}$.
- 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组 $y+f(xy,z)=0$, $z+g(xy,z)=0$确定y和z是x的函数，求$\frac{dz}{dx}$.

隐函数的偏导数

- 设f可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.
- 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分dz及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\dfrac{du}{dx}$.
- 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组 $y+f(xy,z)=0$, $z+g(xy,z)=0$确定y和z是x的函数，求$\dfrac{dz}{dx}$.

隐函数的偏导数

- 设f可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.
- 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分dz及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\dfrac{du}{dx}$.
- 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组 $y+f(xy,z)=0$, $z+g(xy,z)=0$确定y和z是x的函数，求$\dfrac{dz}{dx}$.

隐函数的偏导数

- 设f可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.
- 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分dz及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\dfrac{du}{dx}$.
- 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组 $y+f(xy,z)=0$, $z+g(xy,z)=0$确定y和z是x的函数，求$\dfrac{dz}{dx}$.

隐函数的偏导数

- 设f可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，函数$z=z(x,y)$为由方程$3x+2y^2+z^3=6xyz$在$P_0(1,1,1)$附近确定的隐函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}$.
- 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2-4z=0$所确定，求微分dz及$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 设$u=f(x,y,z)\in C^1$，函数$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定，求$\frac{du}{dx}$.
- 设$f(u,v),g(u,v)$有连续偏导数，方程组 $y+f(xy,z)=0$，$z+g(xy,z)=0$确定y和z是x的函数，求$\frac{dz}{dx}$.

极值与最值

- 求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的所有极值.
- 求函数$z=(2x+3y-6)^2$在椭圆$x^2+4y^2\leq 4$中的最值.
- 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的函数，求$z=z(x,y)$的极值点与极值.
- 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.
- 求函数$f(x,y,z)=x+y-z$在$x^2+y^2+z^2\leq 1$上的最值.

答案：前两个辅导书上

极小值点$(9,3)$,极小值为3，极大值点$(-9,-3)$,极大值为-3.
最长和最短距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.
最大值$\sqrt{3}$,最小值$-\sqrt{3}$.

极值与最值

- 求函数$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$的所有极值.
- 求函数$z = (2x + 3y - 6)^2$在椭圆$x^2 + 4y^2 \le 4$中的最值.
- 设$z = z(x, y)$是由方程$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$所确定的函数，求$z = z(x, y)$的极值点与极值.
- 抛物面$z = x^2 + y^2$被平面$x + y + z = 1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.
- 求函数$f(x, y, z) = x + y - z$在$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$上的最值.

答案：前两个辅导书上

极小值点$(9, 3)$,极小值为3，极大值点$(-9, -3)$,极大值为-3.

最长和最短距离为$\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$，$\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.

最大值$\sqrt{3}$,最小值$-\sqrt{3}$.

极值与最值

- 求函数$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$的所有极值.
- 求函数$z=(2x+3y-6)^2$在椭圆$x^2+4y^2\le 4$中的最值.
- 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的函数，求$z=z(x,y)$的极值点与极值.
- 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.
- 求函数$f(x,y,z)=x+y-z$在$x^2+y^2+z^2\le 1$上的最值.

答案：前两个辅导书上

极小值点$(9,3)$,极小值为3，极大值点$(-9,-3)$,极大值为-3.

最长和最短距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

最大值$\sqrt{3}$,最小值$-\sqrt{3}$.

极值与最值

- 求函数$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$的所有极值.
- 求函数$z = (2x + 3y - 6)^2$在椭圆$x^2 + 4y^2 \le 4$中的最值.
- 设$z = z(x, y)$是由方程$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$所确定的函数，求$z = z(x, y)$的极值点与极值.
- 抛物面$z = x^2 + y^2$被平面$x + y + z = 1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.
- 求函数$f(x, y, z) = x + y - z$在$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$上的最值.

答案：前两个辅导书上

极小值点$(9, 3)$,极小值为3，极大值点$(-9, -3)$,极大值为-3.
最长和最短距离为$\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$，$\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.
最大值$\sqrt{3}$,最小值$-\sqrt{3}$.

空间曲线与曲面

- 求常数λ的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.
- 设函数$f(u,v)$可微，证明曲面$f\left(\frac{y-b}{x-a},\frac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.
- 证明曲面$z^2=(x^2+y^2)f\left(\frac{x}{y}\right)$的切平面恒过原点($f$可微).

答案：

切点$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,切平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

定点(a,b,c).

空间曲线与曲面

- 求常数λ的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.
- 设函数$f(u,v)$可微，证明曲面$f\left(\dfrac{y-b}{x-a},\dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.
- 证明曲面$z^2=(x^2+y^2)f\left(\dfrac{x}{y}\right)$的切平面恒过原点($f$可微).

答案：

切点$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,切平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

定点(a,b,c).

空间曲线与曲面

- 求常数λ的值，使得曲面$xyz=\lambda$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限内相切，并求出切点处两曲面的公共切平面.
- 设函数$f(u,v)$可微，证明曲面$f\left(\dfrac{y-b}{x-a},\dfrac{z-c}{x-a}\right)=0$的所有切平面都通过同一个定点.
- 证明曲面$z^2=(x^2+y^2)f\left(\dfrac{x}{y}\right)$的切平面恒过原点($f$可微).

答案：

切点$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,切平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

定点(a,b,c).

二重积分

- $$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为x轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$围成.
- $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为双纽线
  $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$所围区域.

答案:

$2\pi R^4$. $\frac{2}{3}$. $\frac{\pi}{8}a^4$.

二重积分

- $$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为x轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$围成.
- $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$所围区域.

答案：

$2\pi R^4$. $\frac{2}{3}$. $\frac{\pi}{8}a^4$.

二重积分

- $$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为x轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$围成.
- $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$所围区域.

答案：

$2\pi R^4$. $\frac{2}{3}$. $\frac{\pi}{8}a^4$.

二重积分

- $$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为x轴和上半圆周$x^2+y^2-2x=0$围成.
- $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (a>0)$所围区域.

答案:

$2\pi R^4$. $\frac{2}{3}$. $\frac{\pi}{8}a^4$.

二重积分

- 设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (t>1)$，求$F'(2)$.
- $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y.$
- 已知函数$f(x,y)\in C^2$，且$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0,$
  $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a,\ D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\},$
  计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$

答案：

e^{-4}.　$\frac{e-1}{2}$.　a.

二重积分

- 设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (t>1)$，求$F'(2)$.
- $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y$.
- 已知函数$f(x,y)\in C^2$，且$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$，
$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a$，$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，
计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

答案：

e^{-4}.　$\frac{e-1}{2}$.　a.

二重积分

- 设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (t>1)$, 求$F'(2)$.
- $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y.$
- 已知函数$f(x,y)\in C^2$, 且$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$,
  $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a,\ D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,
  计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$

答案:

e^{-4}. $\frac{e-1}{2}$. a.

二重积分

- 设$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad (t>1)$，求$F'(2)$.
- $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{y^2}\mathrm{d}y$.
- 已知函数$f(x,y)\in C^2$，且$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，
  $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=a$，$D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，
  计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

答案：

e^{-4}.　$\frac{e-1}{2}$.　a.

二重积分

- 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，平面积分区域$D=[a,b]^2$，试证明

$$\iint\limits_D \frac{1+y^4 f^2(x)}{1+x^4 f^2(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant (b-a)^2.$$

三重积分

- $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与$z=8$围成.
- $\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由平面$z=0$和椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成, $a,b,c>0$.
- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成.

答案:

$\frac{1024}{3}\pi$. $\frac{\pi abc^2}{4}$. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^4}{4}$.

三重积分

- $\displaystyle\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与$z=8$围成.
- $\displaystyle\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由平面$z=0$和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成, $a,b,c>0$.
- $\displaystyle\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成.

答案:

$\frac{1024}{3}\pi$. $\frac{\pi abc^2}{4}$. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^4}{4}$.

积分学

三重积分

- $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与$z=8$围成.
- $\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由平面$z=0$和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成, $a,b,c>0$.
- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成.

答案:

$\frac{1024}{3}\pi$. $\frac{\pi abc^2}{4}$. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^4}{4}$.

三重积分

- $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由曲面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$与$z=8$围成.
- $\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由平面$z=0$和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分围成, $a,b,c>0$.
- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成.

答案:

$\frac{1024}{3}\pi$. $\frac{\pi abc^2}{4}$. $\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^4}{4}$.

第一型曲线积分

- $\int\limits_L (2x+y)^5 \mathrm{d}s$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.
- $\int\limits_L (x^2 + x\cos x)\mathrm{d}s$, L 为单位圆周$x^2+y^2=1$.

答案:

$\frac{33+63\sqrt{2}}{6}$. π.

第一型曲线积分

- $\displaystyle\int_L (2x+y)^5 \mathrm{d}s$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.
- $\displaystyle\int_L (x^2 + x\cos x)\mathrm{d}s$, L 为单位圆周$x^2+y^2=1$.

答案:

$\frac{33+63\sqrt{2}}{6}$. π.

第一型曲线积分

- $\displaystyle\int_L (2x+y)^5 \mathrm{d}s$, 其中$L$ 是连接$(0,0),(1,0)$ 和$(0,1)$ 的三角形.
- $\displaystyle\int_L (x^2+x\cos x)\mathrm{d}s$, L 为单位圆周$x^2+y^2=1$.

答案:

$\frac{33+63\sqrt{2}}{6}$. π.

第一型曲面积分

- $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
- $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
- 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.
- $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

答案:

3π. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. $V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$.

积分学

第一型曲面积分

- $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
- $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
- 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.
- $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

答案:

3π. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. $V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$.

积分学

第一型曲面积分

- $\displaystyle\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
- $\displaystyle\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
- 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.
- $\displaystyle\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

答案:

3π. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. $V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$.

第一型曲面积分

- $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
- $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
- 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.
- $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

答案:

3π. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. $V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$.

第一型曲面积分

- $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分.
- $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$x^2+y^2=z^2$中满足$0\le z\le a\ (a>0)$的那部分.
- 求由曲面$z=x^2+y^2$和$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体体积和表面积.
- $\iint\limits_S x^2y^3z\,dS$, S 是平面$x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

答案:

3π. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. $V=\frac{5}{6}\pi, S=[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}]\pi$. $\frac{\sqrt{3}}{3360}$.