(应该是) 2021 年秋季学期《数理逻辑与图论》期末试卷

不愿（敢）透露姓名的同学

2023–12–19

1.（每题 3 分, 共 12 分） 选择题（多选题）

(a) 设 p, q, r 为命题, x, y 的论域均为整数集合, $F(\cdot), G(\cdot)$为谓词函数, 以下命题为矛盾式的是

(A) $(p \leftrightarrow \neg r) \to (q \leftrightarrow r)$

(B) $p \wedge r \wedge \neg(q \to p)$

(C) $\forall x(F(x) \to F(x)) \to \exists y(G(y) \wedge \neg G(y))$

(D) $\forall x(F(x) \to (F(x) \wedge G(x)))$

(b) 设 A, B, C 是任意集合, 则以下选项正确的是

(A) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

(B) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

(D) 若 $A \subseteq B$, 则 $C - B \subseteq C - A$

(c) 设 R, S, T 是非空集合 A 上的非空二元关系, 则以下说法正确的是

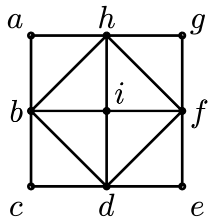
(A) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

(B) $R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$

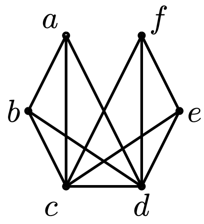
(C) 若 R 是自反的, 则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的

(D) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 也是传递的

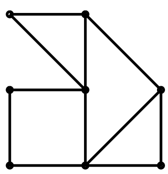
(d) 以下四个简单图中, 具有哈密顿回路的是 (　　)



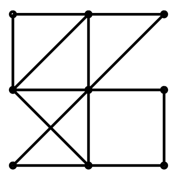
(A)



(B)



(C)



(D)

2.（每题 3 分, 共 15 分）填空题

(a) 将复合命题 $(p \to (q \wedge r)) \vee p$ 转化成仅使用逻辑运算符 $\{\neg, \wedge\}$ 的等价命题为：_____

(b) 设 A, B, C 为集合， 则 $(A - B) \cup (A - C) = \varnothing$ 的充分必要条件是 _____

(c) 合肥市的电话号码为 8 位, 其中第一位是 “6” 或者 “8”, 则在所有可能得合肥市电话号码中, 只包含两个不同数字的电话号码的个数是 _____.（如 63363666 只包含 “6,3″， 87878778 只包含 “7,8″ 等。注意：不能只包含一个数字）

(d) 设集合 A 的基数为 3, 则集合 A 上共有 ____ 个不同的等价关系。

(e) 顶点数为 6 的不同构的树共有 ____ 种。

3.（每题 3 分, 共 12 分）判断题（若判断为对, 简要说明或证明; 若判断为错, 简要说明或举出反例）

(a) 设函数 f 为集合 A 到集合 B 的函数, 函数 g 为集合 B 到集合 C 的函数, 若 f 和 g 均为映上函数，则函数组合 $g \circ f$ 也是映上函数。

(b) 存在集合 A 使得 $A \subseteq A \times A$

(c) 令 $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}^+\}$，考虑在集合 A 上的关系 $R = \{((a, b), (c, d)) \mid ac = bd\}$。关系 R 是等价关系

(d) 设简单图 G 包含 11 个顶点，则图 G 和它的补图 $\overline{G}$ 至少有一个是非可平面图

4.（ 6 分）

设 $F(x), G(x), R(x)$ 为命题函数，论域均为集合 A。请用逻辑等价规则和推理证明规则，若前提 $\forall x(F(x) \vee G(x)), \forall x(\neg G(x) \vee \neg R(x)), \forall x R(x)$ 均为真，则结论 $\forall x F(x)$ 也为真

5.（ 8 分）

设 A, B, C, D 为集合,

(a) 证明：$(A - B) \times (C - D) \subseteq (A \times C) - (B \times D)$

(b) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$ 是否成立？若成立。请证明；若不成立，请给出一个反例

6.（ 12 分）

设 R 是非空集合 A 上的二元关系， $B \subseteq A$，在 B 上定义二元关系如下：

$R \upharpoonright B = R \cap (B \times B)$，证明：

(a) 若 R 是 A 上的偏序关系，则 $R \upharpoonright B$ 是 B 上的偏序关系

(b) 若 R 是 A 上的全序关系，则 $R \upharpoonright B$ 是 B 上的全序关系

(c) 若 R 是 A 上的良序关系，则 $R \upharpoonright B$ 是 B 上的良序关系

7.（ 10 分）

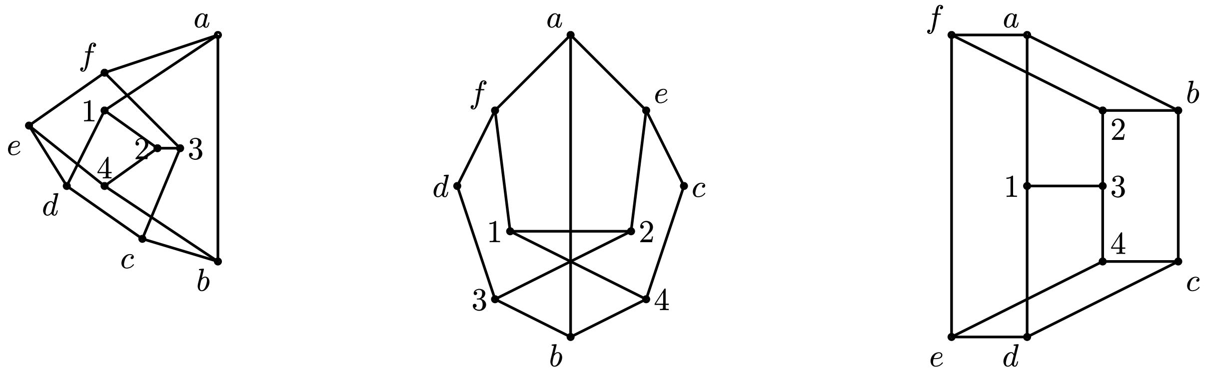
考虑三进制序列（序列中的每一位的取值为 0,1 或 2）中的一类特殊序列，在这类特殊序列中 “0” 后必然跟着 “1″ ，"1” 后必然跟着 “2″ ，例如 “0120120120″ 、"01212” 和 “222201” 均属于这列特殊序列，"0120112” 则不是。令 a_n 代表长度为 n 的这类序列的个数（注意：特殊序列中包含长度为 0 的空序列）

(a) 找出关于序列 $\{a_n\}$ 的递推关系

(b) 证明：对 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq 3^{n/3}$

8.（ 8 分）

判断以下三图是否彼此同构。若同构，请给出同构映射；若不同构，请说明理由



(a) (b) (c)

9.（ 8 分）

下图为一开发商设计的房屋的平面图，缺口处表示门的位置。如果希望从户外进入该房屋，穿过每个门一次且恰好一次，最后回到户外。目前的设计能实现这个愿望吗？如果不能，应当如何修改设计，通过增加最少的门来实现这个愿望？

不画图了

10.（ 10 分）

假设对于无向连通图 G 的任意三个顶点 A, B, C, 都存在一条从 A 到 B 的通路不经过 C。证明：对图 G 中的任意两个顶点 X, Y，从 X 到 Y 都存在两条不不相交的通路（即除了起点和终点外，两条通路没有公共顶点）。