第十次书面作业参考答案

1 补充教材

19.

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

$$a_k = \int_{-1}^{1} x \cos k\pi x dx = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^{1} x \sin k\pi x dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin k\pi x$$

20.

$$g = \begin{pmatrix} 2.3750 \\ -0.3750 - 1.0732i \\ -0.0625 - 0.2500i \\ -0.3750 + 1.4268i \\ -1.6250 \\ -0.3750 - 1.4268i \\ -0.6250 - 0.2500i \\ -0.3750 + 1.0732i \end{pmatrix}$$

注意 matlab 自带的 fft 函数与补充教材上的差了一个系数 n（向量元素个数)。

21. 仿照教材 9.5 节上的过程：设 $n = 3m$, 有多项式

$$p(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i z^i$$

则 $g_k = p(\omega_n^k), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$ 考虑多项式：

$$p_0(z) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f_{3k} z^k$$

$$p_1(z) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f_{3k+1} z^k$$

$$p_2(z) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f_{3k+2} z^k$$

则 $p(z) = \frac{1}{3}\left(p_0(z^3) + zp_1(z^3) + z^2 p_2(z^3)\right)$ 于是计算 $p(z)$ 在 n 个点的值的问题被分解为了计算 $p_0(z^3), p_1(z^3), p_2(z^3)$ 在 n 个点的值的三个子问题，又注意到 $\omega_n^{3k} = \omega_m^k$，因此每个子问题实际上只需计算 m 个值即可，即对 $k = 0, 1 \cdots, m-1$:

$$\begin{aligned}
g_k &= p(\omega_n^k) \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_n^{3k}) + \omega_n^k p_1(w_n^{3k}) + \omega_n^{2k}(\omega_n^{3k})\right)}{3} \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_m^k) + \omega_n^k p_1(w_m^k) + \omega_n^{2k}(\omega_m^k)\right)}{3} \\
g_{k+m} &= p(\omega_n^{k+m}) \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_n^{3k+n}) + \omega_n^{k+m} p_1(w_n^{3k+n}) + \omega_n^{2k+2m}(\omega_n^{3k+n})\right)}{3} \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_m^k) + e^{-i2/3\pi}\omega_n^k p_1(w_m^k) + e^{i2/3\pi}\omega_n^{2k}(\omega_m^k)\right)}{3} \\
g_{k+2m} &= p(\omega_n^{k+2m}) \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_n^{3k+2n}) + \omega_n^{k+2m} p_1(w_n^{3k+2n}) + \omega_n^{2k+4m}(\omega_n^{3k+2n})\right)}{3} \\
&= \frac{\left(p_0(\omega_m^k) + e^{i2/3\pi}\omega_n^k p_1(w_m^k) + e^{-i2/3\pi}\omega_n^{2k}(\omega_m^k)\right)}{3}
\end{aligned}$$

22. 注意教材上的切比雪夫交错定理考虑的是 P_n，即不超过 n 次的多项式

全体组成的函数空间，这之中是包含常函数的，但本题只是求 x^2 在由 x 张成的一维空间中的最佳一致逼近，不能直接用切比雪夫交错定理（虽然答案是对的），但可以考虑用高中的分类讨论的方法：

$$\underset{x\in[0,1]}{max}|x^2-cx| = \begin{cases} 1-c, c\le 2\sqrt{2} \\ \frac{c^2}{4}, 2\sqrt{2}-2<c\le 2 \\ c-1, c>2 \end{cases}$$

由此可知 $c=2\sqrt{2}-2$ 即为所求，此时 $\underset{x\in[0,1]}{min}|x^2-cx| = 3-2\sqrt{2}$

23. $\frac{1}{2}(\underset{x\in[a,b]}{max}f(x)+\underset{x\in[a,b]}{min}f(x))$

24. 有切比雪夫交错定理很容易得到以下事实：

$$\begin{aligned} &p_n^*(x)\text{是}f(x)\text{的 n 次最佳一致逼近多项式} \\ \Rightarrow &p_n^*(-x)\text{是}f(-x)\text{的 n 次最佳一致逼近多项式} \\ &-p_n^*(x)\text{是}-f(x)\text{的 n 次最佳一致逼近多项式} \end{aligned}$$

（1）$f(x)$ 为奇函数：$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -p_n^*(x)=p_n^*(-x)$（最佳一致逼近的唯一性），$p_n^*(x)$ 为奇函数。
（2）$f(x)$ 为偶函数：$f(x)=f(-x)\Rightarrow p_n^*(x)=p_n^*(-x)$（最佳一致逼近的唯一性），$p_n^*(x)$ 为偶函数。

25.（1）由推论（9.18），我们可以设 $f-p^*$ 的交错点组为 $\{a,c,b\}$，并设 $\|f-p^*\|_\infty=\rho$，$\sigma=1\text{或}-1$ 则有方程组：

$$\begin{cases} f(a)-c_0-c_1a=\sigma\rho \\ f(c)-c_0-c_1x_1=-\sigma\rho \\ f(b)-c_0-c_1b=\sigma\rho \\ f'(c)-c_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ c_0=\frac{f(a)+f(c)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+c}{2} \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} c_1=-\frac{2}{\pi}\approx -0.6366 \\ c_0=\frac{1}{2\pi}(\pi+\sqrt{\pi^2+4})+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}\approx 1.1053 \end{cases}$$

26. 注意到 $f''=36>0$，因此可类似上题，设 f 的最佳一致逼近为 $p_2^*=c_2x^2+c_1x+c_0$，设交错点组为 $\{-1,a,b,1\}(-1<a<b<1)$，$\|f-p_2^*\|_\infty=\rho$，$\sigma=1$或-1 则有方程组：

$$\begin{cases} f(-1)-c_0+c_1-c_2=\sigma\rho \\ f(a)-c_0-c_1a-c_2a^2=-\sigma\rho \\ f(b)-c_0-c_1b-c_2b^2=\sigma\rho \\ f(1)-c_0-c_1-c_2=-\sigma\rho \\ f'(a)-c_1-2c_2a=0 \\ f'(b)-c_1-2c_2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0=4 \\ c_1=\frac{11}{2} \\ c_2=3 \\ a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ \rho=\frac{3}{2} \end{cases}$$

故：$p_2^*(x)=3x^2+\frac{11}{2}x+4$