第一次习题课

一、作业问题

1. 第一章 39.(5)：对C取条件。

2. 第二章 2：每次投篮命中率确实都是$\frac{1}{2}$，但分布律是离散的均匀分布（条件概率）

3. 第二章 16,17：利用Poisson近似

二、补充题目

1.（几何概型的Bertrand奇论）：在单位圆内任作一弦，求弦长大于$\sqrt{3}$的概率

[几何概型概率公式：$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$，$\Omega$为样本空间，$L(\ )$为测度]

解：法一：取定弦的一个端点A，以A为顶点作内接正三角形$\triangle AMN$，

则当且仅当弦AB与MN相交时，AB弦长$>\sqrt{3}$，则

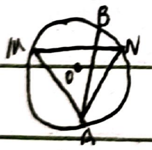
$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{L(\overset{\frown}{MN})}{L(\text{圆周})}=\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

法二：弦AB长度仅由中点位置确定，当且仅当中点K位于$\frac{1}{2}$半径同心圆内时，弦长大于$\sqrt{3}$，

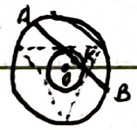
则$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{1}{4}$

法三：取定一条直径MN，考虑与MN垂直的弦AB，AB中点K与圆心O距离小于$\frac{1}{2}$时，AB长度$>\sqrt{3}$

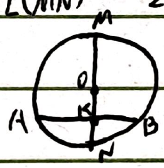
则$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{L(KO)}{L(MN)}=\frac{1}{2}$



法一



法二



法三

2. 向区间$[0,1]$内随机抛一个点，求点落在区间$(0,1)$内的概率

RK：零概率事件$\neq$不可能事件，概率为1的事件$\neq$必然事件（几乎必然事件）

3. 定理：若随机变量$Y\sim U(0,1)$，则对$\forall$分布函数$F(x)$，$X=F^{-1}(Y)$服从分布$F(x)$

[$F(x)$不一定严增，定义其反函数为$F^{-1}(u)=\inf\{x\mid F(x)\geq u\}$]

证：由$F^{-1}(u)=\inf\{x\mid F(x)\geq u\}$ 知 $F(x)\geq u \Leftrightarrow x\geq F^{-1}(u)$

则$P(X\leq x)=P(F^{-1}(Y)\leq x)=P(Y\leq F(x))=F(x)$

推论1：$\forall$在R上满足非降性、右连续性、规范性的函数都是一个随机变量的分布函数.

推论2：若r.v. X的cdf $F(x)$连续，则r.v. $Y=F(X)\sim U(0,1)$

证：$P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$

4：(r.v.的切尾)，第二章. 49.(2)：$X\sim U(0,1)$，求$Z=XI_{(a,1]}(X)$的分布.

解：$F(z)=P(Z\le z)=P(Z\le z\,|\,0\le X\le a)P(0\le X\le a)+P(Z\le z\,|\,a<X\le 1)P(a<X\le 1)$

$$=P(0\le z)\cdot a+P(X\le z\,|\,a<X\le 1)\cdot(1-a)$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ a, & 0\le z\le a\\ z, & a<z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}$$

RK：1. cdf不连续，无pdf.（$Z=0\ (0\le X\le a)$无反函数）

2.（切尾）：设X为R上的r.v.，$a<b$，$Y=\begin{cases}X, & a\le X\le b\\ 0, & 其它\end{cases}$，则$Y$称为$X$的切尾r.v.

（限尾）：$Y=\begin{cases}a, & X<a\\ X, & a\le X\le b\\ b, & X>b\end{cases}$，$Y$称为$X$的限尾r.v.

切尾与限尾统称截尾

3. 示性函数：分段函数的表示工具.

如限尾r.v.：$Y=aI_{(-\infty,a)}(X)+XI_{[a,b]}(X)+bI_{(b,+\infty)}(X)$