中国科学技术大学数学科学学院
2022—2023学年第二学期考试试卷

■A 卷　　　　□B 卷

课程名称　数理方程(B)　　　课程编号　001549

姓名________　　　学号________　　　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一(共25分=5+5+15)求解定解问题。

(1) 一根无限长理想金属细杆初始温度为$\varphi(x), x \in (-\infty, +\infty)$，金属杆内部无热源，与外界无热量交换，比热、密度、热传导系数均为1。写出金属杆温度变化的定解问题（无需求解）；

(2) 设$u = u(x, y)$, 求以下偏微分方程的通解。

$$u_{xy} = xy, \quad (-\infty < x, y < +\infty).$$

(3) 设$u = u(t, x)$,

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + f(t, x), \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u \mid_{t=0} = x, \quad u_t \mid_{t=0} = 2\sin x. \end{cases}$$

1. 如果$f(t, x) = 0$，求u；
2. 如果$f(t, x) = 3e^t \sin x$，求u。

二(共25分=10+15)

(1) 求以下固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \ (0 < x < 5) \\ Y'(0) = 0, \ \ Y(5) = 0. \end{cases}$$

并将$f(x) = 1, \ \ x \in (0, 5)$ 依固有函数展开。

(2) 设$u = u(t, x)$, 求解

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \pi^2 u, \ (t > 0, 0 < x < 1) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = \cos(\pi x), u_t(0, x) = 1 + \cos(2\pi x). \end{cases}$$

三(15分) 设$u = u(t, x, y)$，求解

$$\begin{cases} u_t = \Delta_2 u, \ (t > 1, x^2 + y^2 < 4) \\ u \mid_{x^2+y^2=4} = 0, \\ u(1, x, y) = 4. \end{cases}$$

四(10分) 设(r,θ,φ)为球坐标，求$u=u(r,\theta), r>2$ 使得

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\ (r>2)\\ \lim_{r\to+\infty}u=1, u_r\mid_{r=2}=(\cos\theta)^2+\cos\theta+1.\end{cases}$$

五(15分) 设$u=u(t,x)$,

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}+u_x+u,\quad (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

(1) 如果$\varphi(x)=\delta(x)$，求u；

(2) 如果$\varphi(x)=\sin(x)$，求u。

六(15分) 区域$\Omega=\{(x,y)\mid x>-4,-\infty<y<+\infty\}$, $\partial\Omega$ 为Ω 的边界。
1)求出Ω内泊松方程第一边值问题的格林函数。
2)设$u=u(x,y)$, 求以下定解问题的解:

$$\begin{cases}4u_{xx}+9u_{yy}=\delta(x,y),\ (x,y)\in\Omega\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi(y).\end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2)若ω是$J_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu 1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若ω是$J_\nu'(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu 2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\frac{1}{2}[a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

微分关系：$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}$；$(\frac{J_\nu}{x^\nu})'=-\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu}$.

3)勒让德多项式:$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,...$；模平方$\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$.

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$, 递推公式: $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2})$

5). 一些基本解：二维，$\Delta_2 u=\delta(x,y), U=\frac{\ln r}{2\pi}$；三维，$\Delta_3 u=\delta(x,y,z), U=-\frac{1}{4\pi r}$。

由区域D内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是: $u(M)=-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dl+\iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0$.

由空间V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是: $u(M)=-\iint_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dS+\iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0$.