第2次习题课

本质: one-to-one transformation from y to x

一、Key Points

1. 密度变换公式: $f_X(x) = f_Y(y(x))\left|\frac{dy(x)}{dx}\right|$ 且 $g(x)=\frac{dy(x)}{dx}$ 单调可微不为0

往往不使用会更简单，直接用 $P(X\le x) = P(Y\le y(x))$ 再对 x 求导

比如 hw4 37(3) 40 (1-3) 46

本质: ···

多维情形 $f_{X,Y}(x,y) = f_{U,V}(u(x,y), v(x,y)) \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)\right|$

from (u,v) to (x,y)

比如 hw5 6(1) 12

2、条件概率公式 由于离散 or 连续，有多种公式

$P(X) = \underset{X}{E}[1]$ 因此概率⇔期望都可用 hw5 11

★ $P(Y\in\mathcal{Y}, X\in\mathcal{X}) = P(Y\in\mathcal{Y} \mid X\in\mathcal{X})\,P(X\in\mathcal{X})$

(★.1) $P(Y=y, X=x) = P(Y=y \mid X=x)\,P(X=x)$ 离散 pmf hw6 25(4)

(★.2) $f_{(X,Y)}(x,y)\,\cancel{dxdy} = f_{Y|X}(y|x)\,f_X(x)\,\cancel{dxdy}$ 连续 pdf hw5 11 12 17

3. 全概率公式 由于离散 or 连续，有多种公式

★ $P(Y\in\mathcal{Y}) = \sum_k P(Y\in\mathcal{Y} \mid X\in I_k)\,P(X\in I_k)$

(★.1) $P(Y=y) = \sum_k P(Y=y \mid X=k)\,P(X=k)$ x,y 离散 hw5 6(2) 7

(★.2) $P(Y=y) = \int_{x\in\mathcal{X}} P(Y=y \mid X=x)\,dF_X(x)$ y离散, x连续 hw5 19

(★.3) $f_Y(y)\,\cancel{dy} = \int_{x\in\mathcal{X}} f_{Y|X}(y|x)\,dF_X(x)\,\cancel{dy}$ y, x 连续 hw5 18

(★.4) $f_Y(y)\,\cancel{dy} = \sum_k f_{Y|X}(y|k)\,P(X=k)\,\cancel{dy}$ y连续, x离散

以上都是在理解基础上可以随手写出的公式，把握基础！

4. 常用概率分布 标·的现在需掌握(概率) 。在期末前也会学到(统计部分)

(一) 连续类

· $Exp(\lambda)$ i.e. $\Gamma(1,\lambda)$ $\xrightarrow[\alpha \text{可推广为} \mathbb{R}]{\alpha \text{个} Exp(\lambda)}$ · $\Gamma(\alpha,\lambda)$ 关于α有再生性，由定义易见

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I\{x>0\}$

$f(x) = \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I\{x>0\} / \Gamma(\alpha)$

↑ 特例

· $N(0,1)$ $\xrightarrow{n\text{个} N(0,1) \text{平方}}$ ∘ $\chi^2_n \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ ⟶ ∘ $F_{n,m} \sim \frac{X/n}{Y/m}$

$X\sim\chi^2_n$, $Y\sim\chi^2_m$ 独立

$N(\mu,\sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$

$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} I\{x>0\}$

↓

· $Cauchy(0,1)$ i.e. t_1 $\xrightarrow{\text{特例}}$ ∘ $t_n \overset{d}{=} \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ $X\sim N(0,1)$ $Y\sim\chi^2_n$ 相独立

i.e. $\sqrt{F_{1,n}}$

$Cauchy(x_0,\gamma)$

$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}$

(二) 离散族

$\text{Bernoulli}(p) \xrightarrow{n\text{个独立}} B(n,p) \xleftrightarrow[\text{多项分布}]{\text{对比}} M(n;p_1,p_2,\cdots,p_n)$ hw6 25

$\text{Geo}(p) \xrightarrow{n\text{个独立}} NB(n,p)$

$\text{Geo}^*(p) \xrightarrow{n\text{个独立}} NB^*(n,p)$ [关于n有再生性，由定义易知]

$\text{Poisson}(\lambda)$ [关于λ有再生性 hw6 补]

5、剖析

(1) 独立 ⟹ 不相关，反之未必，除非正态 ⟺

(2) 连续型随机变量是 F连续，不是 f

(3) 变量分离时可以直接看出各边际，最多需配凑一个常数

球球别考场时候还算了半天边际…

(4) if $X \sim N(\mu, \Sigma)$ then $AX \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$

二、往年题目：

常用概率分布

21-22(二)

(3) 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,1;0)$，则 $E[\sqrt{X^2+Y^2}] =$ ______.

$X^2+Y^2 \overset{d}{=} \chi^2_2 = \Gamma(1,\frac{1}{2}) = \text{Exp}(\frac{1}{2})$ $\Gamma(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

记 $Z \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$

则 $E\sqrt{Z} = \int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}dz = \sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})\int_0^{+\infty}\boxed{\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}}dz$

$= \sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ $\Gamma(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

21-22(二)

(6) 设 X 和 Y 为两个独立的标准正态随机变量，则 $(X+Y)^2/(X-Y)^2$ 的分布为(　)
(A) χ^2_1 分布　(B) $F_{1,1}$ 分布　(C) $F_{2,2}$ 分布　(D) 以上均不对

$(X+Y) \sim N(0,2)$ hw7 补3 居然有同学

$(X-Y) \sim N(0,2)$ 分布里还有5…

$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ 要对分布有基本的观察…

$\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ B

21-22 (一)

iid 独立同分布

(7) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自标准正态总体的一组简单随机样本, 且记统计量 $Y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 + \sum_{i=1}^{5} X_{2i-1}X_{2i}$, ~~则 Y 的分布为~~( )
(A) χ_4^2 (B) χ_5^2 (C) χ_9^2 (D) χ_{10}^2

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 + \sum_{i=1}^{5} X_{2i-1}X_{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(X_{2i-1}+X_{2i})^2$$

由于 $\frac{X_{2i-1}+X_{2i}}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ 独立 B

条件概率 & 全概率公式

21-22 (一)

(4) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则对任一正整数 n, 概率 $P(X^n + Y > 1) =$ ______.

$$P(X^n+Y>1 \mid Y=y) = P(X>\sqrt[n]{1-y} \mid Y=y) = P(X>\sqrt[n]{1-y}) = 1-\sqrt[n]{1-y}$$

$$P(X^n+Y>1) = \int_0^1 P(X^n+Y>1 \mid Y=y) f(y)\,dy = \left[y + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}(1-y)^{1+\frac{1}{n}}\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

20-21 (一)

一(6) 已知 $X \sim Poi(\lambda)$ $Y \sim Poi(\mu)$ X, Y 独立 求 $E[X \mid X+Y]$

$X+Y \sim Poi(\lambda+\mu)$ hw6. 补 Poisson 再生性

$$P(X=k \mid X+Y=\ell) = P(X=k, X+Y=\ell) \,/\, P(X+Y=\ell)$$

$$= P(X=k, Y=\ell-k) \,/\, P(X+Y=\ell)$$

$$= \frac{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\mu^{\ell-k} e^{-\mu}}{(\ell-k)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^\ell e^{-(\lambda+\mu)}}{\ell!}} = \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{\ell-k} = \binom{\ell}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{\ell-k}$$

故 $X \mid X+Y \sim B\left(X+Y, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

$$E[X \mid X+Y] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(X+Y)$$

在学习随机过程后, 同学们将会对 Poisson 分布分类性质有更深体会

21-22(二)

二、(16分) 设随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=cx(y-x)\mathrm{e}^{-y},\quad 0\le x\le y<\infty.$$

(1) 求常数 c.

(2) 分别求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

(3) 求期望 $\mathrm{E}[XY]$.

(4) 求 X 和 Y 的相关系数 $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

二 (1) $\int_0^{+\infty}\int_0^{y} cx(y-x)e^{-y}\,dx\,dy$

$=\int_0^{+\infty} ce^{-y}\left(\frac{y}{2}y^2-\frac{y^3}{3}\right)dy$

$=\frac{c}{6}\int_0^{+\infty} 1^4 e^{-y}y^3\,dy$ $\Gamma(4,1)$ 故 $c=1$

(2) $f_X(x)=\int_x^{+\infty}f(x,y)\,dy = xe^{-x}$

$f_Y(y)=\int_0^{y}f(x,y)\,dx=\frac{1}{6}y^3e^{-y}$

$X\sim\Gamma(2,1)$ $Y\sim\Gamma(4,1)$

$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\cdots$

(3) 从 $f(x,y)$ 形式中可看出 令 $Z=Y-X$,

应该与 X 独立! (idea)

由变量分离知独立

这际不用算 也知道…

$X\sim\Gamma(2,1)$ $Z\sim\Gamma(2,1)$

由 $Z=Y-X$ 也知道这很合理, $Y\sim\Gamma(4,1)$ $X\sim\Gamma(2,1)$

令 $Z=Y-X$

$$\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$\left|\dfrac{\partial(X,Z)}{\partial(X,Y)}\right|=1$ 因此

$f_{(X,Z)}(x,z)=f_{(X,Y)}(x,x+z)\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}\right|=xze^{-x}e^{-z}$

$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X(Z+X)]=\mathbb{E}[XZ]+\mathbb{E}[X^2]$

$=\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Z+(\mathbb{E}X)^2+\mathrm{Var}(X)$

$=2\cdot 2+2^2+2=10$

若 X_1 X_2 独立 $\Rightarrow$ 不相关

$\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)$

而 X 是由两独立 Exp(1) 相加…

因此口算就好~

为啥 Var(X) 显然?

(4). $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y=2$

$\mathrm{Var}(X)=2$ $\mathrm{Var}(Y)=4$

$\mathrm{Corr}(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$