线性代数 B1 习题讲义合集版

花开花败

2024 年 7 月 23 日

本讲义仅供参考

如有发现错误或者觉得讲义中有没讲清楚的地方, 欢迎邮件联系
zzp211476@mail.ustc.edu.cn
zzp211476@gmail.com

目录

1 线性代数预备知识

1.1 数分中可能会用到的相关知识

1.1.1 向量相关

Def. 设 $a, b \in R^3$,$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ 定义两个向量的点乘 (数量积) 如下:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Rmk. 在本学期的线性代数课程中, 我们会学习到更加一般的向量的定义, 与更加一般的内积定义. 向量指的是线性空间中的元素 (现在只需要记得, 向量不仅仅指上面那种数组向量), 内积指的是满足正定性, 对称性, 线性性的二元函数.

Prop. 设 $a, b \in R^3$,$a \perp b$ 当且仅当 $a \cdot b = 0$.

Prop. 设 $a, b \in R^3$, 则 a, b 共线当且仅当存在 $\lambda, \mu \in R$, 使得 $\lambda a + \mu b = 0$

Prop. 设 $a, b, c \in R^3$, 则 a, b 共线当且仅当存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$, 使得 $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$

Def. 向量的叉乘 (向量积)
设 $a, b \in R^3$,$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ 定义两个向量的叉乘 (向量积) 如下:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

需要注意的是, 定义中的行列式与课程中定义的行列式不同, 这里只是借用行列式的形式方便记忆.

Prop. 设 $a, b \in R^3$, 则 $(a \times b) \perp a, (a \times b) \perp b$.

例题 设 $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, 试求出 e_2, e_3, 使得 $e_1 \perp e_2, e_1 \perp e_3, e_2 \perp e_3$(本题答案不唯一)

首先可以观察得到 $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e_2 \perp e_1$, 再用叉乘得到 $e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$
Rmk. 本题来源于第五章习题第 36 题.

1.2 多项式基础

Def. 数域
设 $F \subseteq C$, 在 F 上定义两种不同的运算, 加法与乘法, 他们满足如下性质:
(1)$\forall a, b \in F, a + b = b + a$
(2)$\forall a, b, c \in F, (a + b) + c = a + (b + c)$
(3)$\exists 0 \in F$, 对 $\forall a \in F$, 有 $0 + a = a + 0 = a$
(4)$\forall a \in F$,$\exists b \in F$, 使得 $a + b = b + a = 0$
(5)$\forall a, b \in F$,$a \cdot b = b \cdot a$
(6)$\forall a, b, c \in F, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(7)$\exists e \in F$, 使得对 $\forall a \in F$, 有 $e \cdot a = a \cdot e = a$
(8)$\forall a \in F$,$\exists b \in F$, 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$
(9)$\forall a, b, c \in F$,$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
则 F 称为一个数域
Rmk. 数域是在本课程中经常被提及的一个概念, 可以说是最底层的一个概念, 但是我们不用对这个概念深究太多, 在本课程中, 不加特别说明的时候, 可以认为 $F = C$, 在本课程的后两章中 $F = R$.

Def. 设 F 是数域,x 是未定元,$a_0, a_1, \cdots, a_n \in F, a_n \neq 0$,$n$ 是非负整数, 则

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为数域 F 上的一元多项式, 其中 $a_i x^i$ 称为多项式 $f(x)$ 的 i 次项, 数 a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数,$i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 特别的,a_0 称为 $f(x)$ 的常数项,$a_n x^n$ 称为 $f(x)$ 的首项,a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数. 非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数, 记作 $degf(x)$.F 上所有多项式全体构成的集合记作 $F[x]$.

Thm. 多项式的带余除法
设多项式 $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0$, 则存在唯一一对多项式 $q(x), r(x) \in F[x], deg(r(x)) < deg(g(x))$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

例题. 记 $f(x) = -6x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1, g(x) = -x + 1$, 求 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 的带余除法

$$f(x) = g(x)(6x^4 + x^3 - 3x^2 + 2) - 1$$

Rmk. 本题来自于课本第四章习题 14

Def. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, 若存在 $h(x) \in F[x]$, 使得 $f(x)h(x) = g(x)$, 则称 $f(x)$ 整除 $g(x)$, 记作 $f(x)|g(x)$.
Rmk. 多项式的整除关系其实是多项式的带余除法的一个特例.$g(x)|f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$, 此处 $r(x)$ 的定义与多项式带余除法定义中相同.

Def. 设 $f(x) \in F[x]$, 若存在 $x_0 \in F$, 使得 $f(x_0) = 0$, 则称 x_0 是多项式 $f(x)$ 的一个根

Prop. 设 $a \in F, f(x) \in F[x]$, 则 a 是 $f(x)$ 的一个根当且仅当 $(x - a)|f(x)$.
Rmk. 用多项式的带余除法可以算出 $g(x)$, 使得 $(x - a)g(x) = f(x)$, 这是解方程时一个常用的方法.

Thm. 代数学基本定理
设 $f(x) \in C[x], deg(f(x)) > 0$, 则存在 $a \in C$, 使得 $f(a) = 0$.

Thm. *Eisenstein* 判别法
设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个次数大于 0 的整系数多项式, 若 $f(c) = 0$,$c \in Q$, 则 $c \in \{\frac{p}{q}|p, q \in Z, p$ 是 a_0 的因数,q 是 a_n 的因数 $\}$
Rmk. 这里给出的并不是原版的 *Eisenstein* 判别法, 只是一个猜根的办法, 但是有的地方会把这种方法叫做 *Eisenstein* 判别法, 这里就偷个懒. 在实际运算时, 可以不用同时考虑 a_0, a_n 的因数, 可以考虑 a_0 的因数与 a_n 的正因

数

例题. 解方程 $3x^3+x^2+x-2=0$

记 $f(x)=3x^3+x^2+x-2, a_0=-2$, 因数有 $\pm1,\pm2$,$a_n=3$, 正因数有 $1,3$, 所以该方程的有理根只能是 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$, 经过尝试可以得到 $f(\frac{2}{3})=0$, 因此 $(x-\frac{2}{3})|f(x)$, 进而 $(3x-2)|f(x)$, 利用带余除法对 $f(x)$ 进行分解得到

$$f(x)=(3x-2)(x^2+x+1)$$

余下的二次方程可以利用求根公式求解. 因此本题方程的所有根为

$$x_1=\frac{2}{3}, x_2=cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}, x_3=cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}$$

Rmk. 在本学期的后半学期, 会学到矩阵的特征值与特征向量, 在那里, 我们需要大量的求解多项式方程.

1.3 行列式基础

首先介绍一下行列式的不同的定义方式.

1.3.1 通过递归给出

行列式的递归定义也是我们课本当中使用的定义, 一阶行列式是数, 二阶行列式的定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

可以用递归的方式将上述定义推广到 n 阶行列式, 其中 n 是正整数.

定义方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的**行列式**通常记为

$$det(A) \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n = 1$ 时,$det(A)$ 定义为 a_{11}. 当 $n \geqslant 2$ 时, $det(A)$ 递归地定义为

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i}M_{1i}$$

这里

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

1.3.2 通过排列给出

通过排列给出的行列式定义需要先引入逆序数的概念.

定义 1 到 n 的一个**排列**是指将 1 到 n 按一定的顺序排成的数组 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 例如 (5,4,3,2,1) 就是 1 到 5 的一个排列.

定义如果在 1 到 n 的一个排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 中, 存在 p, q 满足 $p < q$ 且 $i_p > i_q$，则称 (i_p, i_q) 是一对**逆序**.

定义一个排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 中出现的逆序的个数称为他的**逆序数**, 记作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

有了以上概念之后, 我们就可以给出行列式的排列定义.

定义方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的**行列式** $det(A)$ 定义如下:

$$det(A) = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}$$

这个求和式也被称为行列式的完全展开式. 在计算对角阵, 或者很多元素为 0 的矩阵的行列式时, 行列式的排列定义会成为一个很便捷的工具. 在后面学习特征值与特征向量时, 用行列式的排列定义也可以更好地理解特征值的一些性质.

1.3.3 通过公理给出

通过公理给出的行列式定义比较复杂, 并不在这门课的要求内, 所以这部分理解不了是完全没有关系的. 但是这个定义有助于理解行列式的“本

质” 以及一些最重要的也是最常用的性质. 同时. 这也是相对来讲更 “数学” 的定义.

定义在 n 维线性空间 F^n 上,n 元函数 f 称为数域 F 上的 n 阶行列式, 若 f 满足以下公理:

(1)f 是 F^n 上的一个 n 重线性函数, 即对每个 i, $1 \leqslant i \leqslant n$, 均有

$$f(\xi_1, \cdots, \xi_{i-1}, \lambda\eta + \mu\zeta, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_n) =$$
$$\lambda f(\xi_1, \cdots, \xi_{i-1}, \eta, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_n) + \mu f(\xi_1, \cdots, \xi_{i-1}, \zeta, \xi_{i+1}, \cdots, \xi_n)$$

(2)f 是 F^n 上的一个反对称函数, 即对任意的 $i, j, i \neq j$, 都有

$$f(\cdots, \xi_i, \cdots, \xi_j, \cdots) = -f(\cdots, \xi_j, \cdots, \xi_i, \cdots)$$

(3)f 是 F^n 上的一个规范函数. 即, 对 F^n 上的标准正交基 $(e_1, \cdots, e_n)$, 有

$$f(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

在上述三条公理中, 第一条线性公理和第二条反对称公理都是十分重要且本质的, 也是以后会经常用到的.

1.4 行列式计算例题

1.4.1 按定义计算简单行列式

对于一些比较简单 (五阶及以下) 或者含有许多 0 的行列式，可以考虑直接利用行列式的定义进行计算. 在计算行列式的时候, 我们也常常会先利用行列式的性质先对行列式进行化简. 下面给出一些常用的性质.

性质 1: 行列互换, 行列式不变. 即 $det(A) = det(A^T)$

性质 2: 用一个数乘以行列式的一行 (或一列) 相当于用这个数乘以行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4: 如果行列式中有两行 (或两列) 相同, 那么行列式为 0.

性质 5: 如果行列式中有两行 (或两列) 成比例, 那么行列式为 0.

性质 6: 把一行 (列) 的倍数加到另一行 (列), 行列式不变.

性质 7: 对换行列式中两行 (列) 的位置, 行列式反号.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

法 1 利用行列式的完全展开式 (由排列给出的定义) 可以很快的算出来。

$$D = (-1)^{\tau(43215)} 1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}9{\cdot}10 = (-1)^{(3+2+1)}1350 = 1350$$

法 2 利用行列式的递归定义。

$$D = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{(1+3)}3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \\ 13 & 12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{(1+2)}3{\cdot}5\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 13 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 15{\cdot}90$$

$$= 1350$$

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

答案是:-372

例 3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

答案是:-28

例 4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解答: 答案是:0, 过程如下:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$
\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
=0
$$

其中,(1), (2) 代表的操作如下:

(1): 第四列减第三列, 第三列减第二列, 第二列减第一列.

(2): 第四列减第三列, 第三列减第二列.

1.4.2 递推

对于一些长得很有规律性的行列式，递推的方法往往事半功倍。我们可以将 n 阶的行列式通过递推定义与行列式的线性性展开成 $n-1$ 阶行列式，从而达到递推的效果。再结合数列的相关技巧，就可以得到行列式的值。

这也几乎是本课程考试必考的内容。

例 4 计算 $n(>1)$ 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}
$$

记原行列式为 D_n，按照第 n 行展开得到

$$
D_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2n}\cdot 2\cdot D_{n-1}
$$

$$
=-2^{n-2}+2D_{n-1}
$$

记 $T_n=2^{-n}D_n$，则递推式转化为

$$
T_n=T_{n-1}-\tfrac{1}{4}
$$

容易知道，

$$T_2 = -\tfrac{1}{4}$$

因此，

$$T_n = -\tfrac{n-1}{4}$$

所以，

$$D_n = -(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

PS: 如果你的**数学直觉足够好**, 你可以尝试把 $D_1, D_2, D_3, \cdots$ 都写出来, 直接观察得到 D_n 的通项公式, 然后利用数学归纳法进行证明. 在考试中, 这也是一个非常好的解答.

例 5 计算 Vandermonde 行列式 $\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (x_2 - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

(1): 从第 $n+1$ 行开始, 每一行减去前一行的 x_1 倍.
(2): 将行列式按照第一列展开.

另解:
不妨将 x_n 看做未定元 x, 考虑如下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

将行列式按照最后一列展开, 不难发现这是一个关于 x 的 $n-1$ 次多项式, 记作 $f(x)$. 同时, 又可以注意到 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots f(x_{n-1}) = 0$, 所以有

$$(x - x_i)|f(x), i = 1, 2, \cdots, n-1$$

从而可以推出

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})|f(x)$$

又因为这里 $f(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式, 所以

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$$

其中 C 为常数. 将原行列式按照第 n 列展开可以得到

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

再按照上面的方法递推下去即可.

2 矩阵基础

2.1 更多行列式的例子

本部分也是前两周作业题的延展.

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,$M_{ij}$ 为余子式, 则 $M_{31} - M_{32} + M_{33} =$

解答:

这里用到的是行列式的按行展开, 注意到题目要求的就是下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

通过按照第三行展开的方式就可以验证上面的行列式确实等于要求的东西. 因此我们只需要计算出这个行列式的值就可以了, 答案是 36.

Rmk. 如果将题目改成求 $2M_{31} + 3M_{32} - M_{33} + M_{34}$ 呢?

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - 2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - 3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - n \end{vmatrix}$.

解答:

本题因为有很多相同的元素, 所以可以考虑用加边的方法. 记原行列式为 D, 则

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1-\Sigma_{i=1}^n\frac{x_i}{i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^n\cdot n!\cdot(1-\Sigma_{i=1}^n\frac{x_i}{i})$$

3. 设 A 是 n 阶反对称方阵,n 为偶数,D 代表 n 阶全 1 方阵, 证明对任意的 λ,$det(A+\lambda D)=det(A)$.

解答:

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是反对称方阵. 记

$$\Delta(\lambda)=det(\lambda I+A)$$

则我们可以对 $\Delta(\lambda)$ 使用加边法如下:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & a_{12}+\lambda & \cdots & a_{1n}+\lambda\\ -a_{12}+\lambda & \lambda & \cdots & a_{2n}+\lambda\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{1n}+\lambda & -a_{2n}+\lambda & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & \lambda & a_{12}+\lambda & \cdots & a_{1n}+\lambda \\ 0 & -a_{12}+\lambda & \lambda & \cdots & a_{2n}+\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{1n}+\lambda & -a_{2n}+\lambda & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

注意到, 最后一步中加号前的行列式按照第一列展开就得到了 $|A|$, 而加号后的行列式又可以写成

$$\lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

这是一个奇数阶的反对称方阵行列式的 λ 倍, 从而等于 0, 因此我们就得到了要证明的结论.

4. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in R^{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $|A| \neq 0$.

Rmk. 满足本题性质的 A 被称作主对角占优矩阵

解答:

假设 $|A|=0$, 则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, 记 $|w_i|=max_{j=1}^{n}|w_j|$, 考察第 i 个方程

$$a_{i1}w_1+\cdots+a_{in}w_n=0$$

注意到 $w_i\neq 0$, 则

$$-a_{ii}=a_{i1}\frac{w_1}{w_i}+\cdots+a_{i,i-1}\frac{w_i-1}{w_i}+a_{i,i+1}\frac{w_i+1}{w_i}+\cdots+a_{i,n}\frac{w_n}{w_i}$$

等式两边同时取绝对值, 由绝对值的三角不等式可得

$$|a_{ii}|\leqslant\Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}||c_i|\leqslant\Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|$$

这与 A 的严格主对角占优性质矛盾. 因此 $|A|\neq 0$.

2.2 矩阵的基本概念与性质

2.2.1 矩阵的运算

矩阵的运算主要有加法、乘法、数乘、转置、迹.

Prop2.1 矩阵的加法满足结合律、交换律.

定义 2.1 设

$$A=(a_{ik})_{s\times n},B=(b_{kj})_{n\times m},$$

那么矩阵

$$C=(c_{ij})_{s\times m}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

称为 A 与 B 的乘积, 记为

$$C=AB.$$

Rmk. 在矩阵乘积的定义中, 我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相同.

Rmk. 矩阵的乘法一般不满足交换律, 只满足结合律.

例 2.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

计算 $C = AB$

答案是 $B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}$

Rmk. 在引入了矩阵的乘法之后, 我们就可以用一个更简单的方式来写出一个线性方程组.

设 $A{\in}F^{m\times n},x{\in}F^{n\times 1},b{\in}F^{n\times 1}$. 则 $Ax = b$ 代表着一个线性方程组.

定义 2.3 主对角线上的元素全是 1, 其余元素全是 0 的 $n{\times}n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵**, 记为 I_n(有些地方也记成 E_n), 或者在不至于引起混淆时可以简单地记为 I. 显然有

$$A_{s\times n}I_n = A_{s\times n}, I_sA_{s\times n} = A_{s\times n}.$$

定义 2.5 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A 的**转置**就是指矩阵

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

显然,$m \times n$ 矩阵的转置是 $n \times m$ 矩阵.

Prop2.2 矩阵的转置有如下规律:

$$(A^T)^T = A,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(kA)^T = kA^T.$$

定义 2.5 方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的**迹 (trace)** 定义如下:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Rmk. 我们只对方阵定义迹.

Rmk. 在本课程中, 我们很少会用到矩阵的迹, 如果用到了, 那么那个证明方法一定很帅气, 或者说很巧妙.

Prop2.3 矩阵的迹有如下规律:

$$tr(A^T) = tr(A)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

2.3 一些例子

1. 计算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$$

解答:
答案是 $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求 AB^T, BA^T

解答:
答案如下:

$$AB^T = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 \\ -10 & -11 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA^T = \begin{pmatrix} 14 & -10 & 0 \\ 7 & -11 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rmk. 这里要求的两个矩阵实际上互为转置.

3. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

解答:
首先可以计算得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下面归纳证明

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

首先,$n=1,2$ 时, 结论成立, 下面假设 $n-1$ 时结论成立, 证明 n 时的情况.

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

4. 计算

$$\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}^n$$

解答:

老师课上讲过了, 所以习题课上不讲.

和上一道题一样, 这题仍然采用的是数学归纳法的思想. 先观察 $n=2$ 的情况.

$$\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}cos2\theta&-sin2\theta\\sin2\theta&cos2\theta\end{pmatrix}$$

下面归纳证明:

$$\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}cosn\theta&-sinn\theta\\sinn\theta&cosn\theta\end{pmatrix}$$

首先,$n=1,2$ 时, 结论成立, 下面假设 $n-1$ 时结论成立, 证明 n 时的情况.

$$\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}cos(n-1)\theta&-sin(n-1)\theta\\sin(n-1)\theta&cos(n-1)\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}cosn\theta&-sinn\theta\\sinn\theta&cosn\theta\end{pmatrix}$$

5. 计算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n$$

解答:

我们可以发现, 这题和第 4 题非常的相似. 所以我们希望能够把这题化归为第 4 题的情况. 这里可以做以下的分解:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 那么原来的方阵幂就很好算了.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = (\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix})^n$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} cosn\theta & -sinn\theta \\ sinn\theta & cosn\theta \end{pmatrix}$$

6. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^k$$

解答:

注意到这里有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以原来的矩阵幂可以写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

把中间的向量两两配对, 注意到中间的向量相乘得到的是数.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = -1$$

那么利用这个就可以得到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & -2\\4 & 4 & -4\end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}(\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix})^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & -2\\4 & 4 & -4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

7. 计算

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}^k$$

解答:

这题和第 6 题其实很像, 这里只需要注意到

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

剩下的处理方式都与第 6 题是一样的.

8. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$, 当 $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 证明: 与 A 可交换的矩阵只能是对角阵.

证明:

首先, 由乘法的定义, 我们立即可以知道, 与 A 可交换的只能是 n 阶方阵. 设

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

与 A 可交换.

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

由 $AB = BA$, 我们得到

$$a_ib_{ij} = a_jb_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$$

又由 $a_i \neq a_j$, 当 $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$ 可以知道 $b_{ij} = 0$. 即,B 是对角阵.

9. 若 n 阶方阵 A 与任意 n 阶方阵可交换, 那么 A 是数量矩阵. 即,$\exists a, s.t. A = aI$

证明:
考虑基本矩阵 E_{ij}, 它的第 i 行, 第 j 列元素为 1, 其它元素为 0. 分别计算 $AE_{ij}, E_{ij}A$, 由他们相等可以得到 $a_{ii} = a_{jj}, a_{ij} = 0, \forall i, j \neq 0$

Rmk. 将本题中的 "任意 n 阶方阵" 改成 "任意 n 阶可逆方阵", 结论仍正确, 证明方式也很类似, 可以考虑 $I + E_{ij}$.

10. 证明: 如果 A 是实对称阵, 且 $A^2 = \mathbf{0}$, 那么 $A = \mathbf{0}$.

证明: 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有

$$A^2 = AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n a_{1i}a_{2j} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}a_{nj} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}a_{1j} & \sum_{i=1}^n a_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{2i}a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}a_{1j} & \sum_{i=1}^n a_{ni}a_{2j} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \end{pmatrix}$$

考察对角元即可得到 $a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, 即 $A = \mathbf{0}$

13. 设 A, B 都是 $n \times n$ 对称矩阵, 证明: AB 也是对称矩阵 $\iff A, B$ 可交换.

证明:($\Rightarrow$)

$$(AB)^T = AB \Rightarrow B^T A^T = AB$$

又有,A, B 是对称阵, 即 $A^T = A, B^T = B$, 所以

$$BA = AB$$

即 A, B 可交换.

$(\Leftarrow)$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

3 矩阵的初等变换与逆

3.1 矩阵的初等变换

三种基本的矩阵初等变换:(下面举得例子都是行变换的例子, 列变换是类似的, 这里就不具体地写出来了)

1. 交换矩阵的两行或两列

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

2. 用一个非零的数 λ 乘以某一行或某一列

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$$

3. 用一个数乘以某一行加到另一行去.

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & a_{i2} + \lambda a_{k2} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

初等变换对应着几类重要的特殊矩阵, 称为基本矩阵. 这个太难打了, 这里就不打了. 需要注意的是, 左乘基本矩阵是对矩阵进行行变换, 右乘基本矩阵是对矩阵进行列变换.

定理: 任意的 $A \in F^{m\times n}$, 都可以通过有限次初等行变换和初等列变换化为

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中 r 是一个仅与 A 相关的整数, 称为矩阵 A 的秩.

推论: 任意的 $A \in F^{m\times n}$, 存在 $P \in F^{m\times m}$ 与 $Q \in F^{n\times n}$, 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q$

推论: 如果 A 是可逆方阵, 则 A 可以表示为若干个初等方阵的乘积.

Rmk. 通过这个推论, 我们可以知道, 对矩阵做初等行变换等价于对矩阵左乘一个可逆方阵; 对矩阵做初等列变换等价于对矩阵右乘一个可逆方阵.

推论: 初等变换不改变矩阵的秩.

定义: 矩阵的相抵设 $A, B \in F^{m\times n}$. 如果 A 可以通过一系列初等行变换和初等列变换变成 B, 就称 A 与 B 相抵.

定理:A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow$ 存在可逆方阵 P, Q, 使得 $B = PAQ$.

3.2 初等变换与矩阵的逆的例题

1. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆

解答: 先回顾一下求矩阵逆的一般方法. 对于一般的矩阵 A, 我们可以对 A 与单位阵做同样的行变换, 当把 A 变换为单位阵时, 单位阵就变换成了 A^{-1}.

Rmk. 如果这里对 A 与单位阵做同样的列变换, 也能求得 A^{-1}. 但是千万不能既做行变换又做列变换.

具体过程这里就不写了, 在习题课上会写, 答案是 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆

答案是 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

3. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 的逆

答案是: $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

4. 设

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

已知 A^{-1}, C^{-1} 存在, 求 X^{-1}.

先用初等变换把 X 变成对角阵:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix} = I$$

Rmk. 本题中 I 的记号比较混乱, 因为题目并没有指定 A, C 的阶数, 所以不好记.

5. 设方阵 A 满足 $I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=\mathbf{0}$. 证明 $I-A$ 可逆, 并求 $(I-A)^{-1}$.

由多项式的长除法可以知道:

$$I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=(I-A)(6A^4+A^3-3A^2+2I)-I$$

结合题目中 $I-2A-3A^2+4A^3+5A^4-6A^5=\mathbf{0}$ 可得

$$I=(I-A)(6A^4+A^3-3A^2+2I)$$

所以 $(I-A)^{-1}=6A^4+A^3-3A^2+2I$

6. 设 $A^3=2I, B=A^2-2A+2I$, 求 B^{-1}

Rmk. 有两个比较常见的因式分解:
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
n 为奇数时,$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$

解答:
$B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A^2+A-2I)=A(A+2I)(A-I)$
因此只需分别求出 $A, A+2I, A-I$ 的逆即可.
(1) 由 $A^3=2I$ 知 $A^{-}1=\frac{1}{2}A^2$
(2)$A^3-I=I$, 则 $(A-I)(A^2+A+I)=I$, 所以 $(A-I)^{-1}=A^2+A+I$
(3)$A^3+8I=10I$, 则 $(A+2I)(A^2-2A+4I)=10I$, 则 $(A+2I)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)$
因此, 有

$$B^{-1}=\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{2}(A^2+A+I)(A^2-2A+4I)A^2$$

$$=\tfrac{1}{20}(A^6-A^5+3A^4+2A^3+4A^2)$$

再利用 $A^3=2I$ 对这个式子进行化简.

$$=\tfrac{1}{10}(A^2+3A+4I)$$

* 想挑战一下自己吗? 来试试下面这题吧
矩阵 A 满足 $A^n=\mathbf{0}$. 求下列矩阵的逆

$$\begin{aligned} B &= I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} \\ C &= I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{n-1}A^{n-1} \\ D &= I + A + \tfrac{A^2}{2!} + \cdots + \tfrac{A^{n-1}}{(n-1)!} \\ E &= I - A + \tfrac{A^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{A^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

提示: 把他们看成关于 A 的多项式, 或者说把 A 看成 x, 然后考虑他们是哪些函数的 $taylor$ 展开式.

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

首先, 依次从第一行开始, 依次减去后一行. 然后再重复一遍这个过程

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & 1 & & & & \\ & 1 & 2 & \cdots & n-1 & & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 2 & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & & & \\ & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & & & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们就得到了 A^{-1}

在讲解下面这题之前, 先给出两个命题.

Prop5.1

对于 2 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A 可逆 $\iff ad-bc\neq 0$

并且此时 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Rmk.$ad-bc$ 就是 A 的行列式, 并且后面会给出一般矩阵 A 的逆.

Prop5.2

对于准对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$, A 可逆 $\iff$ A_i 可逆,$\forall i=1,2,\cdots,n$. 且此时 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^{-1} \end{pmatrix}$

*8. 设

$$S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A,D 是方阵, 且 A 可逆, 求 S 可逆的条件, 并在此条件满足时求 S^{-1}.

解答:

尝试使用初等变换将 S 先变成简单的准对角阵.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

注意, 这里的

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix},\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

都是可逆矩阵, 可以类比普通的二阶矩阵 (**Prop5.1**) 给出它们的逆如下:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

所以

$$S \text{ 可逆} \iff \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \text{ 可逆} \iff D-CA^{-1}B \text{ 可逆}.$$

其中最后一个等价利用到了 **Prop5.2**. 下面给出 S^{-1}.

$$S = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

Rmk. 不要尝试记住最后 S^{-1} 的具体形式, 重要的是对分块矩阵做初等变换的方法与思想.

*9. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$. 求证: 如果 $I_{(m)} - AB$ 可逆, 则 $I_{(n)} - BA$ 可逆. 并求出 $(I_{(n)} - BA)^{-1}$

证明: 本题的基本思路还是构造一个恰当的分块矩阵, 这个矩阵要含有 $I_{(m)} - AB$, 再通过初等变换将这个分块矩阵变成一个含有 $I_{(n)} - BA$ 的分块矩阵.

$$\text{令 } S = \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ 0 & I_{(m)} - AB \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ 0 & I_{(m)} - AB \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ A & I_{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ A & I_{(m)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{(n)} & -B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ A & I_{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ -A & I_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(n)} - BA & 0 \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix}$$

注意到等式左边的每个矩阵都是可逆的, 我们可以仿照 14 题给出每个矩阵的逆, 这里就不一一写了.

对等号两边同时取逆, 可得

$$\begin{pmatrix} (I_{(n)} - BA)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ A & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & -B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ 0 & (I_{(m)} - AB)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & 0 \\ -A & I_{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n)} & B \\ 0 & I_{(m)} \end{pmatrix}$$

计算可得

$$(I_{(n)} - BA)^{-1} = I_{(n)} + B(I_{(m)} - AB)^{-1}A$$

*10. 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2 = A$. 求证: 存在 n 阶可逆方阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{其中 } r = rank(A)$$

存在可逆方阵 P_1, Q_1, 使得

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1$$

代入 $A^2 = A$, 得到

$$P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1 P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1 P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

令 $T = Q_1 P_1 = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$, 其中 T_1 是 r 阶方阵, 得

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{即} \begin{pmatrix} T_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1 = I_{(r)}$$

$$\Rightarrow Q_1P_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$\Rightarrow A = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

下面就是把 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

令 $P = P_1 \begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Rmk. 本题的一个直接的推论是, 在本题的条件下, 有 $tr(A) = rank(A)$

*11. 设 $A \in F^{m\times n}$, 称矩阵 $X \in F^{n\times m}$ 为矩阵 A 的广义逆, 如果 $AXA = A, XAX = X$.

1. 若 $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, 其中 P, Q 分别为 m, n 阶可逆方阵, 试求 A 的广义逆.

2. 证明: 对矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 其每一个广义逆都可以表示为 $X = \tilde{Q}^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{P}^{-1}$, 这里 $\tilde{Q}, \tilde{P}$ 是满足 $A = \tilde{P} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{Q}$ 的可逆方阵.

Rmk. 本题是 2022 年秋线性代数 B2 课程期中考试的最后一题. 但是以大家目前掌握的知识是完全足够的.

解答:1. 设 $X = Q^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ 是 A 的一个广义逆.

$$\begin{aligned} AXA &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \\ &= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \\ &= P\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \end{aligned}$$

又有 $AXA = A$, 所以

$$P\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1 = I_r$$

$$\begin{aligned} XAX &= Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

又有 $XAX = X$, 所以

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_3X_2 = X_4$$

上述分析说明满足题意的 X 一定具有 $Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ 的形式. 经验证可知 (实际上没人会去验证, 但所有人都会说上这么一句话), 任意的

$X_2 \in F^{r\times(n-r)}, X_2 \in F^{(n-r)\times r}, X = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ 都满足要求, 所以就是所求.

2. 有了第一问的基础, 第二问就比较简单了.

$$X = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

记

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix} Q, \tilde{P} = P\begin{pmatrix} I_r & -X_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$X = \tilde{Q}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$ 自然成立, 下面验证 $A = \tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{Q}$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{Q} &= P\begin{pmatrix} I_r & -X_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix} Q \\
&= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix} Q \\
&= P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \\
&= A
\end{aligned}$$

4 矩阵的秩与秩不等式

4.1 那么, 秩有几种定义呢?

下面给出的矩阵的秩的三种定义都是大家应当掌握的. 前两种大家现在就应该掌握, 第三种现在看不懂暂时没关系, 在学过线性空间之后就应当掌握了.

4.1.1 通过相抵标准型定义秩

首先, 让我们回顾一下矩阵的相抵标准型.

定理 2.1 矩阵的相抵标准型

对于 $\forall A \in F^{m\times n}$,$\exists$ 可逆矩阵 $P \in F^{m\times m}, Q \in F^{n\times n}$ 与 $r \in N^*$ 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$, 这被称为矩阵的相抵标准型.

定义 2.1 矩阵的秩

在定理 2.1 中, 整数 r 被称为矩阵的秩. 记作 $rank(A) = r$

4.1.2 通过子式定义秩

定义 2.2 子式

对于矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 任取它的 k 行与 k 列, 按原顺序排列得到的行列式被称为 A 的一个 k 阶子式.

例给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, 取出它的第 $4,5$ 行与 $2,4$ 列按原来的顺序排列成行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}$ 就是 A 的一个 2 阶子式.

定义 2.3 矩阵的秩

设矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 若 A 有一个非零的 r 阶子式, 且 A 的所有的 $(r+1)$ 阶子式为 0, 那么就称 r 为矩阵 A 的秩. 记作 $rank(A) = r$.

4.1.3 通过极大线性无关组定义秩

首先, 在学习矩阵的时候我们应当意识到, 矩阵不仅仅可以被看做一些元素的有规律的排布, 他也可以被看做是一些列向量的排列.

定义 2.4 列 (行) 向量

形如 $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$ 被称作列向量.

形如 $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in F^n$ 被称作行向量.

Rmk. 在本课程中, 不做特殊说明的情况下, 一般提到的向量就是列向量.

定义 2.5 线性相关与线性无关

对于向量组 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n | a_i \in F^n, \forall i\}$, 如果存在**不全为零**的常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_i \in F, \forall i$ 使得 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$, 则称向量组 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n | a_i \in F^n, \forall i\}$ 线性相关. 否则称该向量组线性无关.

定义 2.6 极大线性无关组

对于向量组 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n | a_i \in F^n, \forall i\}$, 如果存在它的一个部分组 $\tilde{S} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r} | a_{i_k} \in F^n, \forall i\}$ 满足:

1. 部分组 $\tilde{S} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r} | a_{i_k} \in F^n, \forall i\}$ 线性无关
2. 对任意的 $\alpha \in S$ 且 $\alpha \notin \tilde{S}$, $\{\alpha, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r} | a_{i_k} \in F^n, \forall i\}$ 线性相关

则称这个部分组 $\tilde{S}$ 是 S 的一个极大无关组.

Rmk. 对于任意有限的向量组 S,S 的极大无关组一定存在, 且 S 的极大无关组的元素个数是确定的, 不随极大无关组的选取变化.

定义 2.7 矩阵的秩

对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$ 其中,$a_i \in F^m$ 是列向量, 称 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 A 的列向量组. 取 S 的一个极大无关组 $\tilde{S}, |\tilde{S}| = r$, 则称 r 是矩阵 A 的秩, 记作 $rank(A) = r$.

4.2 矩阵的秩不等式

对于本课程来说, 矩阵的秩不等式是一个考察重点. 下面会介绍一些常见的秩不等式. 在证明时使用的方法比结论更重要. 主要利用的方法是分块矩阵的初等变换, 我会尽量避免使用秩的子式定义和极大线性无关组定义, 虽然这会让证明看上去显得很繁琐, 但是这对训练分块矩阵的使用有极大的好处. 在本部分使用的分块矩阵中, 每一块之间的行列数是融洽的.

定理 4.1 $rank(AB) \leqslant min\{rank(A), rank(B)\}$

证明: 设 $rank(A) = r_1, rank(B) = r_2$, 这里考虑 $r_1 < r_2$ 的情形, 其他情形的证明过程是类似的. 原命题转化为 $rank(AB) \leqslant r_1$. 利用矩阵的相抵标准型, 这里可以设

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1$$

$$B = P_2 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$$

直接计算

$$AB = P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 P_2 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$$

我们知道, 初等变换是不会改变矩阵的秩的. 所以这里只需要考虑

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 P_2 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里记

$$Q_1 P_2 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

那么,

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1P_2 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2-r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于最终结果的非零行只有 r_1 行, 所以它的秩也一定不大于 r_1, 也就是我们证明了原结论.

Rmk. 如果你愿意去学习一下求行列式时可以使用的 $Binet - Cauchy$ 公式, 那么这个结论的证明会变得相当简单. 这也是绝大多数高等代数书上采用的方法.

Prop

$$rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$$

证明:

设

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1$$

$$B = P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$$

则

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是得到了结论.

定理 4.2

(1)$rank \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \geqslant max\{rank(A), rank(B)\}$

(2)$rank \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leqslant rank(A) + rank(B)$

证明:

(1) 只需要证明 $rank \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \geqslant rank(A)$. 令

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$P \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PAQ & PB \end{pmatrix}$$

将 PB 分块为 $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$, 继续进行初等变换

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I_r & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \\ \to &\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而 $rank \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = rank(I_r) + rank(R_2) \geqslant r = rank(A)$ 于是原结论成立.

(2) 注意到

$$rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$$

进行初等变换就可以得到

$$rank(A)+rank(B)=rank\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

结合 (1) 就可以得到

$$rank\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\leqslant rank(A)+rank(B)$$

定理 4.3 设 $A\in F^{s\times n},B\in F^{l\times m},C\in F^{s\times m}$, $D=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$, 则 $rank(D)\geqslant rank(A)+rank(B)$

Rmk. 本定理看起来非常简单, 事实上这是一个比较常用也比较实用的一个小结论. 在定理 4.2 的证明中其实已经通过初等变换的方式证明了本定理, 下面将采用秩的子式定义来证明.

证明: 设 $rank(A)=r_1,rank(B)=r_2$, 则 A,B 分别存在一个 r_1,r_2 阶满秩的子矩阵 (对应子式) A_1,B_1, 从而 D 存在一个 r_1+r_2 阶子式 $\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ 0 & B_1\end{vmatrix}$. 由定理 4.3 知

$$\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ 0 & B_1\end{vmatrix}=|A_1||B_1|\neq 0$$

即，D 有一个非零的 r_1+r_2 阶子式. 所以 $rank(D)\geqslant r_1+r_2=rank(A)+rank(B)$

定理 4.4 Sylvester 秩不等式设 $A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times s}$, 则 $rank(AB)\geqslant rank(A)+rank(B)-n$

Rmk. 在秩这边的证明过程中, 我们很讨厌负数, 所以这里需要把 $-n$ 移到左边去变成正数. 定理这样写只是给出了一个方便应用的样子.

证明: 原不等式等价于 $rank(AB)+n\geqslant rank(A)+rank(B)$
我们的思路仍然是做初等变换, 但是这里需要构造出恰当的分块矩阵. 这里选取的分块矩阵是 $\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$, 因为他的秩恰好就是不等式的左侧.

$$\begin{pmatrix}I & A\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB & A\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

结合定理 4.5 可知 $rank(AB) + n \geqslant rank(A) + rank(-B) = rank(A) + rank(B)$

Rmk. 注意这边 AB 和 BA 是不同的, 所以在选取左乘右乘的初等矩阵时需要格外小心. 因为助教一开始写证明的时候就写错了, 敲 latex 的时候才发现不对劲 ()

4.5 frobenius 秩不等式设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times s}, C \in F^{s\times t}$, 则:

$$rank(ABC) \geqslant rank(AB) + rank(BC) - rank(B).$$

这个定理的证明和定理 4.5 几乎一样, 只需要把定理 4.5 证明中选取的矩阵 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ 替换成 $\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 即可.

4.3 一些例子

1. 求矩阵的秩

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

答案是 3

2. 设 $rank(A) = 1$, 则 A 可以写成某个非零列向量 β 与非零行向量 α 的乘积, 即 $A = \beta\alpha$

证明:
由 $rank(A) = 1$ 得 A 至少有一个元素不为 0, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则 $\exists \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$a_{ij} = \lambda_i a_{1j}$$

所以可以令

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

3. 设 $A \in F^{n\times n}, rank(A) = r$, 则存在 $B \in F^{n\times n}$ 满足条件 $rank(B) = n - r$ 且 $AB = BA = 0$.

解答:

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

令

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

4. 设方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,$c = tr(A)$. 已知 $rank(A) = 1$.

(1) 证明:$A^2 = cA$.

(2) 计算 $det(I_n + A)$.

(1) 由 $rank(A) = 1$ 知,A 中至少有一行不全为 0. 设第 i 行不全为 0, 记 $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$. 则存在一系列常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得 $r_j = \lambda_j r_i$, 其中 $\lambda_i = 1$. 于是我们可以对 A 做如下分解:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} r_i$$

其中

$$r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

那么 $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$. 注意到中间两个向量相乘就是一个数, 且恰好就是 $tr(A)$. 所以原命题得证.

(2) 先证明一个引理:$det(I_n - AB) = det(I_m - BA)$, 其中 $A \in R^{n\times m}, B \in R^{m\times n}$.

考虑如下矩阵, 并做初等变换:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ B & I_m \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} \end{aligned}$$

两边同时取行列式即得原结论. 将这个引理应用到本题, 结合 (1) 中得到的分解, 就可以知道

$$det(I_n + A) = det(I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}) =$$

$$1 + \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 1 + c$$

5. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I$, 求证 $rank(A-I)+rank(A+I)=n$

证明:

$$rank(A-I)+rank(A+I)=rank\begin{pmatrix}A-I & 0\\ 0 & A+I\end{pmatrix}$$

进行初等变换就可以得到

$$\begin{aligned}rank(A-I)+rank(A+I)&=rank\begin{pmatrix}A-I & I\\ 0 & A+I\end{pmatrix}\\&=rank\begin{pmatrix}0 & I\\ -(A+I)(A-I) & A+I\end{pmatrix}\\&=rank\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\&=n\end{aligned}$$

6. 设 A^* 是 A 的伴随方阵, 证明:
(1)$rank(A)=n\Leftrightarrow rank(A^*)=n$
(2)$rank(A)=n-1\Leftrightarrow rank(A^*)=1$
(3)$rank(A)<n-1\Leftrightarrow rank(A^*)=0$

证明:
(1) 由 $rank(A)=n$ 知 $det(A)\neq 0$, 再结合

$$AA^*=det(A)I$$

可知 $det(A^*)\neq 0$, 于是 $rank(A^*)=n$.
(3)$rank(A)<n-1$ 意味着 A 的所有 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $A^*=0$, 进而 $rank(A^*)=0$
(2) 首先, 由 $rank(A)=n-1$ 知 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式非零, 所以 $rank(A^*)\geqslant 1$. 所以只需要证明 $rank(A^*)\leqslant 1$ 即可. 结合 $Sylvester$ 可以得到

$$rank(A)+rank(A^*)\leqslant n-rank(det(A)I)=n$$

所以 $rank(A^*)\leqslant 1$. 所以就得到了 $rank(A^*)=1$.

7. 设 A,B 是同阶方阵, 求证:$rank(AB-I)\leqslant rank(A-I)+rank(B-I)$

证明:

$$rank(A-I)+rank(B-I)=rank\begin{pmatrix}A-I & 0\\ 0 & B-I\end{pmatrix}$$

进行初等变换就可以得到

$$\begin{aligned}rank(A-I)+rank(B-I)&=rank\begin{pmatrix}A-I & AB-A\\ 0 & B-I\end{pmatrix}\\&=rank\begin{pmatrix}AB-I & AB-A\\ 0 & B-I\end{pmatrix}\\&\geqslant rank(AB-I)\end{aligned}$$

8. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$, 求证:$\exists P$ 可逆, 使得 $A=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 从而有 $rank(A)=tr(A)$

证明:

存在可逆方阵 P_1,Q_1, 使得

$$A=P_1\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1$$

代入 $A^2=A$, 得到

$$P_1\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1P_1\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1P_1\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

令 $T=Q_1P_1=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}$, 其中 T_1 是 r 阶方阵, 得

$$\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\text{ 即 }\begin{pmatrix}T_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{(r)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_1=I_{(r)}$$

$$\Rightarrow Q_1P_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$\Rightarrow A = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

下面就是把 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_{(r)} & T_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

令 $P = P_1 \begin{pmatrix} I & -T_2 \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

9.

(1) 设矩阵 A, B, C 依次是 $m \times n, n \times s, s \times t$ 阶矩阵, 证明下列关于矩阵的秩不等式

$$r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC) - r(B)$$

(2) 设 A 是 n 阶方阵, 证明:

$$r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$$

(1) 考虑分块初等变换如下:

$$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$$

由此可得

$$r(ABC)+r(B)=r\begin{pmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{pmatrix}\geqslant r(AB)+r(BC)$$

(2)

首先, 如果 A 可逆, 则 $rank(A)=n$, 且 $rank(A^k)=n,\forall k$, 因此我们只需要考虑 A 不可逆的情况. 其次, 如果 $A^n=0$, 那么 (2) 中结论也是自然成立的, 所以在下面的考虑中,$A^n\neq 0$.

下面来证明如果存在一个 k, 使得 $r(A^k)=r(A^{k+1})$, 那么 $r(A^{k+1})=r(A^{k+2})$, 从而

$$r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots$$

首先,

$$r(A^{k+2})=r(A^{k+1}\cdot A)\leqslant r(A^{k+1})$$

另一方面, 由 (1) 可知

$$r(A^{k+2})=r(A\cdot A^k\cdot A)\geqslant r(A\cdot A^k)+r(A^k\cdot A)-r(A^k)=r(A^{k+1})$$

综上得到 $r(A^{k+1})=r(A^{k+2})$, 下面我们要证明的就是存在一个 $k\leqslant n$, 使得 $r(A^k)=r(A^{k+1})$. 我们假设这样的 k 不存在, 则有下列不等式关系

$$r(A^n)\leqslant r(A^{n-1})-1\leqslant r(A^{n-2})-2\leqslant\cdots\leqslant r(A)-(n-1)\leqslant 0$$

这与我们的假设 $A^n\neq 0$ 矛盾, 所以说上述 k 存在, 从而原结论成立.

5 线性空间

5.1 基本的定义与结论

我们先从最基本的数组空间出发, 数组空间中的向量就是高中学习到的那种向量了, 只不过维数变成 n 维了.

定义 设 F 是数域, 定义了线性运算的 n 维数组向量全体成为 n 维数组空间, 记作 F^n.

定义 给定向量 $a_1,\cdots,a_m \in F^n$, 与一组数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m \in F$, 称

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$$

是 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性组合,$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 称为组合系数. 如果 a 可以写成 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性组合, 则称 a 可以用 $a_1,\cdots,a_m$ 线性表示.

定义 设 $V \subseteq F^n$ 是非空的向量集合, 他满足

$$\forall a_1,\cdots,a_m \in V, \forall \lambda_1,\cdots,\lambda_m \in F, \Sigma_{i=1}^m \lambda_i a_i \in V$$

则称 V 是 F^n 的子空间.

命题 设 $V \subseteq F^n$ 是非空的向量集合, 他满足
(1) 若 $a, b \in V$, 则有 $a + b \in V$.
(2) 若 $a \in V, \lambda \in F$, 则 $\lambda a \in V$.
则 V 是 F^n 的子空间

定义 给定向量 $a_1,\cdots,a_m \in F^n$, 若存在非零的组合系数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m \in F$, 使得 $\Sigma_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0$, 则称 $a_1,\cdots,a_m \in F^n$ 线性相关, 否则称他们线性无关.

定义 给定向量 $a_1,\cdots,a_m \in F^n$, 若 $a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$ 线性无关, 且任意加一个其他的向量 $a_{i_{r+1}}$ 后, $a_{i_1},\cdots,a_{i_r},a_{i_{r+1}}$ 线性相关, 则称 $a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$ 是 $a_1,\cdots,a_m$ 的一个极大无关组. 极大无关组中的向量个数成为这个向量组的秩.

当然, 我们的线性空间不仅仅是数组空间, 可以把这个概念变得更加宽泛. 我们之前就说过, 体现 “线性” 的运算实际上就是加法运算与数乘运算, 所以说 “线性空间” 实际上就是定义了加法与数乘的集合.

定义 设 V 是一个非空集合,F 是数域. 在 V 上定义两种运算
1. 加法: 对 V 中的任意两个元素 α, β 组成的有序对 (α, β), 存在 V 中的唯一一个元素 γ 与之对应, 记为 $\alpha + \beta = \gamma$
2. 数乘: 对任意常数 $\lambda \in F$ 与向量 $\alpha \in V$, 存在 V 中唯一的一个元素 γ 与之对应, 记作 $\lambda\alpha = \gamma$.
且加法与数乘满足下列运算规律
(A1)$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \forall\alpha, \beta \in V$
(A2)$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \forall\alpha, \beta\gamma \in V$
(A3) 存在 $\theta \in V$, 使得 $\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha, \forall\alpha \in V$. 这里的 θ 称为零元素, 简记为 0.
(A4) 对任意的 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0.\beta$ 称为 α 的负元素, 简记为 $-\alpha$, 并定义 $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$
(D1)$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta, \forall\lambda \in F, \alpha, \beta \in V$
(D2)$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha, \forall\lambda, \mu \in F, \forall\alpha \in V$
(M1)$\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha, \forall\lambda, \mu \in F, \forall\alpha \in V$
(M2)$1 \cdot \alpha = \alpha, \forall\alpha \in V$
定义了上述加法与数乘运算的集合 V 称为 F 上的线性空间, 线性空间 V 中的元素称为**向量**.

Rmk. 从此开始,“向量” 一词不再仅仅指代高中学习的那种数组向量, 而是指数组空间中的元素. 例如, 一个常见的线性空间定义如下:

$$R_n[x] = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a_i \in R, i = 0, 1, \cdots, n\}$$

其中加法与数乘就是一般定义的多项式加法与多项式乘法, 那么 $R_n[x]$ 就成为一个线性空间,x 就是这个空间中的一个向量.

类似于数组空间, 我们可以一样定义子空间, 向量组的秩与极大无关组, 这里就不再赘述. 看回到前两行举的那个例子,$R_n[x]$, 我们可以很好的将 $R_n[x]$ 中的元素表示出来, 实际上是把它写成了某些元素的线性组合, 在 $R_n[x]$ 中所有元素都可以写成 $\{1, x, \cdots, x^n\}$ 的线性组合. 这种特殊的向量组我们称为基, 下面给出基的严格定义

定义 给定线性空间 V, 以及 V 中的一个向量组 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 定义 $W = \{\Sigma_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i | \lambda_i \in F\}$ 为向量组 S 张成的子空间, 记作 $Span\{S\}$

定义 给定线性空间 V, 如果存在 V 中的一个向量组 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$,$S$ 线性无关, 且 $Span\{S\}=V$, 则称 S 是 V 中的一组基,$|S|=n$ 称为 V 的维数, 记作 $dim(V)$.

Rmk. 上面的定义其实并不太严谨, 因为一个线性空间的基并不一定是有限的, 例如全体多项式组成的线性空间, 这个空间是无法找出一个有限数量的基的. 但是由于本课程只考虑有限维空间 (也就是基向量组中的向量个数有限), 所以用上面这个定义也无伤大雅.

Rmk. 一个值得思考的问题是, 上面关于 V 的维数的定义实际上取决于取出的基向量组, 那么如果我取出另一个基向量组, 按照上面这种方法定义的 V 的维数会不会有变化? 这也是在数学中经常被讨论的 "良定性" 的问题. 答案是,V 的任意一个基向量组包含的向量个数都是相同的, 所以说上面定义的维数也是良定的.

Rmk. 对于任意线性空间 V, 它的基向量组一定存在.

5.2 一些例子

1.$\alpha_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6 & -2\end{pmatrix}^T,\alpha_4=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$, 求 $rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

解答

对于数组向量而言, 一个向量组的秩就等于将这些向量排成的矩阵的秩. 以本题为例

$$rank\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & 6 & 1\\ -1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

那么利用初等变换就能够得到这个矩阵的秩是 2, 从而原向量组的秩也是 2.

Rmk. 如果不是数组向量, 那么可以选取线性空间的一组基, 把向量组转化成它们的坐标, 这样就转化成数组向量了.

2.$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & c \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \end{pmatrix}$, 线性无关, 写出 a, b, c 满足的条件.

解答:

该向量组线性无关等价于 $rank(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 从而等价于

$$rank \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} = 3$$

也就等价于

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \neq 0$$

也就是 $abc \neq 0$.

3. 设 $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 13 & 32 & 52 \end{pmatrix}$ 在 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ 下的坐标是

解答:

设坐标为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \\ 52 \end{pmatrix}$$

接下来可以选择求解线性方程组, 也可以直接求矩阵逆. 这里直接求矩阵逆.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{7}{2} & -1 \\ 5 & -\frac{9}{2} & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 32 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ -14 \end{pmatrix}$$

4. 记 $P_2[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 2 次的多项式的集合, 按多项式的加法和数乘运算构成实数域上线性空间, 求 $P_2[x]$ 的一组基函数

$\{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2\}$ 的过渡矩阵.

解答:

我们先看 $\{1, x, x^2\}$ 到 $\{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\}$ 的过渡矩阵, 这个是可以观察出来的

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)^2 & 2x(1-x) & x^2 \end{pmatrix}$$

因此对这个过渡矩阵求逆就能得到

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)^2 & 2x(1-x) & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以题目要求的过渡矩阵就是 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.$n \geqslant 2$, 向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} - \alpha_n, 2(\alpha_n - \alpha_1)$ 一定线性相关.

解答

注意到

$$2((\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)) + 2(\alpha_n - \alpha_1) = 0$$

即可.

6. 判断下述命题是否为真命题:

设 $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} & \vec{a_4} \end{pmatrix}$ 是 6×4 的矩阵,$\vec{a_i}$ 是列向量, 如果 $x_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}^T, x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $\vec{a_4}$ 不能由 $\vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性表示.

解答:

错误的.

下面来构造反例. 因为 x_1, x_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以说 $rank(A) = 2$.

我们想构造的反例是 $\vec{a_2},\vec{a_3}$ 线性无关, 这样的话 $\vec{a_4}$ 就一定可以被 $\vec{a_2},\vec{a_3}$ 线性表示. 那么根据条件进行计算就可以得到方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - \frac{6}{5}x_2 - x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{8}{5}x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

以 x_1, x_2 为基础解系. 所以这里取

$$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{6}{5} & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{8}{5} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a_1} = \vec{a_4} = \vec{a_2}$ 即可.

7. 记 $P_{2n-1}[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 $2n-1$ 次的多项式的集合, 按多项式的加法和数乘运算构成实数域上线性空间. 给定 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 可以证明存在 $f_k(x), g_k(x) \in P_{2n-1}[x]$ 满足:
$f_k(x_i) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$, $\frac{df_x}{dx}(x_i) = 0, g_k(x_i) = 0, \frac{dg_x}{dx}(x_i) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$ 其中 $i = 1, \cdots, n$.
1. 证明:$S = \{f_1(x), \cdots, f_n(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)\}$ 线性无关, 从而构成 $P_{2n-1}[x]$ 上的一组基.
2. 求多项式 $q(x) = x^n + 23$ 在基 S 下的坐标.
3. 当 $n = 2$ 时, 计算三次多项式 $\{f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)\}$.

解答:
1. 假设存在 $\lambda_i, \mu_i \in R, i = 1, \cdots, n$ 使得

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) + \Sigma_{j=1}^{n} \mu_j g_j(x) = 0$$

取值 $x = x_k$, 得到

$$\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_k) + \Sigma_{j=1}^{n} \mu_j g_j(x_k) = 0$$

结合 $f_i(x_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$, $g_i(x_k) = 0$ 可知

$$\lambda_k = 0, k = 1, \cdots, n$$

对 $\Sigma_{i=1}^n\lambda_i f_i(x)+\Sigma_{j=1}^n\mu_j g_j(x)=0$ 求导后再重复取值操作就可以得到

$$\mu_k=0,k=1,\cdots,n$$

所以 S 线性无关.

2. 思路与上一题是类似的, 也是进行取值. 首先设 $q(x)=\Sigma_{i=1}^n\lambda_i f_i(x)+\Sigma_{j=1}^n\mu_j g_j(x)$, 取值 $x=x_k$ 可以得到

$$x_k^n+23=\lambda_k,k=1,\cdots,n$$

求导后再重复取值操作, 得到

$$nx_k^{n-1}=\mu_k,k=1,\cdots,n$$

这样就得到了 $q(x)$ 的坐标.

3. 先考虑 $f_k(x)$. 注意到 $\frac{df_i(x)}{dx}$ 是二次多项式, 而他们在 x_1,x_2 处取值都为 0, 说明 $(x-x_1)(x-x_2)|\frac{df_i(x)}{dx},i=1,2$. 所以这里可以设

$$\frac{df_i(x)}{dx}=a_i(x-x_1)(x-x_2)$$

积分可得

$$f_i(x)=\frac{a_i}{3}x^3-\frac{a_i(x_1+x_2)}{2}x^2+a_ix_1x_2x+c_i$$

其中 c_i 是常数. 结合 $f_k(x_i)=\begin{cases}1,k=i\\0,k\neq i\end{cases}$ 可知

$$f_1(x_1)=\frac{a_1}{3}x_1^3-\frac{a_1(x_1+x_2)}{2}x_1^2+a_1x_1^2x_2+c_1=1$$

$$f_1(x_2)=\frac{a_1}{3}x_2^3-\frac{a_1(x_1+x_2)}{2}x_2^2+a_1x_1x_2^2+c_1=0$$

联立上面两个方程组可以解得

$$\begin{cases}a_1=\frac{6}{(x_2-x_1)^3}\\c_1=\frac{x_2^2(-x_2+3x_1)}{(x_1-x_2)^3}\end{cases}$$

类似, 还可以得到

$$\begin{cases}a_2=\frac{6}{(x_1-x_2)^3}\\c_2=\frac{x_1^2(-x_1+3x_2)}{(x_2-x_1)^3}\end{cases}$$

至此, 我们就已经得到了 $f_i(x)$, 下面来考虑 $g_i(x)$. 由于 $g_k(x_i)=0$, 所以我们可以得到 $(x-x_1)(x-x_2)|g_i(x),i=1,2$, 所以可以设

$$g_i(x) = a_i(x - x_1)(x - x_2)(x - t_i)$$

求导得到

$$\frac{dg_i(x)}{dx} = a_i((x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - t_i) + (x - x_1)(x - t_i))$$

结合 $\frac{dg_x}{dx}(x_i) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$ 可得

$$a_1(x_1 - x_2)(x_1 - t_1) = 1$$

$$a_1(x_2 - x_1)(x_2 - t_1) = 0$$

解这个线性方程组得到

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \\ t_1 = x_2 \end{cases}$$

类似的, 可以得到

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \\ t_2 = x_1 \end{cases}$$

8. 判断下列命题是否正确:
向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是向量组中的任意一个向量 α_i 都可以由剩余的 $n - 1$ 个向量线性表示.

解答: 错误的. 考虑线性空间 R, 数域也是 R, 取向量组 $S = \{1, 0\}$, 显然这个向量组线性相关, 但是 1 无法用 0 线性表示.

11. 将三维空间中的直角坐标系绕单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 逆时针旋转 θ 角, 求新坐标与原坐标之间的关系.

解答:
记原坐标系为 O_1, 以这个单位向量为新的 z 轴, 重新建立坐标系 O_2, 首先选取一个与 e 垂直的单位向量, 并做如下记号:

$$\tilde{e_1} = e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^T$$

$$\tilde{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$$

利用叉乘运算, 我们就可以得到一个与 $\tilde{e_1}, \tilde{e_2}$ 均正交的单位向量 $\tilde{e_3}$.

$$\tilde{e_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}^T$$

设任意一个向量在单位坐标系 O_1 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 在新坐标系 O_2 下的坐标为 $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$, 则有如下关系式成立

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

而经过旋转之后在 O_2 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

所以最终得到旋转后在 O_1 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+2cos\theta}{3} & \frac{1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta}{3} & \frac{1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta}{3} \\ \frac{1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta}{3} & \frac{1+2cos\theta}{3} & \frac{1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta}{3} \\ \frac{1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta}{3} & \frac{1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta}{3} & \frac{1+2cos\theta}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6 线性代数 B1 期中复习及知识点整理

6.1 考试中可以使用的定理及命题

老师上课讲过的定理、书本上的定理 (包括命题、推论等) 一定是可以直接用的. 一般来说, 例题的结论是不能直接使用的.

定理: 对线性方程组进行初等变换, 方程组的解不改变. 类似的, 对线性方程组的增广系数矩阵做初等变换, 对应的线性方程组的解不变.

定理: (P74) 矩阵的加法与数乘具有如下性质:
(1) 加法交换律
(2) 加法结合律
(3) 零矩阵存在
(4) 负矩阵存在
(5) 数乘左分配律
(6) 数乘右分配律
(7) 数乘结合律
(8) 数乘单位元存在

定理: (P77) 矩阵的乘法具有如下性质:
(1) 乘法结合律
(2) 乘法单位元存在 (即单位阵 I_n)
(3) 左分配律
(4) 右分配律
(5) 关于数乘结合

定理: (P79) 对任意的 n 阶可逆方阵 A, B, 都有
(1)$(A^{-1})^{-1} = A$.
(2)$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.
(3)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

定理: (P81) 矩阵的转置运算具有如下性质:
(1)$(A+B)^T = A^T + B^T$.
(2)$(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

$(3)(AB)^T = B^T A^T$.
$(4)(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

定理: (P81) 矩阵的迹有如下性质:
$(1)tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.
$(2)tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
$(3)tr(A^T) = tr(A), tr(\bar{A}) = \bar{tr}(A)$.
$(4)tr(AB) = tr(BA)$.

定理: (P84) 矩阵的分块运算具有如下性质:
(1) 设 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{r\times s}$, 则 $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r\times s}$.
(2) 设 $A = (A_{ij})_{r\times s}$, 则 $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r\times s}$.
(3) 设 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{s\times t}$, 则 $AB = (C_{ij})_{r\times t}$, 其中 $C_{ij} = \Sigma_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$.
(4) 设 $A = (A_{ij})_{r\times s}$, 则 $A^T = (A_{ji}^T)_{s\times r}$.
(5) 设 $A = (A_{ij})_{r\times s}$, 且每个 A_{ii} 是方阵, 则 $tr(A) = \Sigma_{i=1}^{r} tr(A_{ii})$.
(6) 当 $A_1, \cdots, A_r$ 都可逆时,$(diag(A_1, \cdots, A_r))^{-1} = diag(A_1^{-1}, \cdots, A_r^{-1})$.

定理: (P87) 设 A 为 n 阶方阵，则

$$det(A) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \Sigma_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki}M_{ki}, \forall k$$

类似的, 行列式也可以按照列展开.

定理: (P89) 行列式具有如下性质:

性质 1: 行列互换, 行列式不变. 即 $det(A) = det(A^T)$

性质 2: 用一个数乘以行列式的一行 (或一列) 相当于用这个数乘以行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4: 如果行列式中有两行 (或两列) 相同, 那么行列式为 0.

性质 5: 如果行列式中有两行 (或两列) 成比例, 那么行列式为 0.

性质 6: 把一行 (列) 的倍数加到另一行 (列), 行列式不变.

性质 7: 对换行列式中两行 (列) 的位置, 行列式反号.

定理: (P93) 设 A 为 n 阶方阵，则

$$det(A) = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}$$

.

定理: (P95) 设 A, B 是 n 阶方阵, 则

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

.

定理: (P96) 设 $A = (A_{ij})$ 为 n 阶方阵, 引入

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

. 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 称 A^* 为 A 的伴随方阵. 则

$$A^*A = AA^* = det(A)I$$

.

定理: (P97) 方阵 A 可逆的充要条件为 $det(A) \neq 0$, 且当 A 可逆时,

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} A^*$$

.

定理: (P101) 当系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式不等于零时, 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有唯一解

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\tfrac{\Delta_1}{\Delta}, \tfrac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \tfrac{\Delta_n}{\Delta})$$

其中 $\Delta = det(A)$,Δ_i 是将 A 的第 i 列换成 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 后所得到的方阵的行列式,$i = 1, 2, \cdots, n$.

定理: (P103) 对矩阵做初等行变换相当于在矩阵的左边乘上一个相应的初等方阵; 对矩阵做初等列变换, 相当于在矩阵的右边乘上一个相应的初等方阵.

定理: (P104) 对任意的矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 存在一系列 m 阶初等方阵 $P_1, \cdots, P_s$ 与 n 阶初等方阵 $Q_1, \cdots, Q_t$, 使得

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r = rank(A) \geqslant 0$.

定理: (P105) 对任意的矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 存在 m 阶可逆方阵 P 与 n 阶可逆方阵 Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $r = rank(A) \geqslant 0$.

定理: (P105) 方阵 A 可逆的充要条件是 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积.

定理: (P109) 设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则 A 与 B 相抵的充要条件是 $rank(A) = rank(B)$.

定理: (P109) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,P, Q 分别是 m, n 阶可逆方阵, 则 $rank(PAQ) = rank(A)$.

命题: (P110)$rank(A^T) = rank(A)$.

命题: (P110) $rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$.

引理: (P110) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,P, Q 分别是 m, n 阶初等方阵. 若 A 的所有 k 阶子式都为零, 则 PA 与 AQ 的所有 k 阶子式也为零.

定理: (P110) 矩阵的非零子式的最大阶数等于矩阵 A 的秩.

定理: (P119) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in F^n$ 是一组给定的 n 维数组向量. 则集合

$$< a_1, a_2, \cdots, a_m >= \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m | \lambda_i \in F, i = 1, 2, \cdots\}$$

是 F^n 的子空间, 称为由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 生成的子空间.

定理: (P121) 给定向量组 $a_1, \cdots, a_m \in F^n, m \geqslant 2$. 则 $a_1, \cdots, a_m$ 线性相关当且仅当 $\exists i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 满足

$$< a_1, \cdots, a_m >=< a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m > .$$

.

定理: (P122) 给定向量组 $a_1, \cdots, a_m \in F^n, m \geqslant 2$. 则 $a_1, \cdots, a_m$ 线性相关当且仅当存在不全为零的常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 使得

$$\Sigma_{i=1}^{m}\lambda_i a_i = 0$$

.

定理: (P122) 给定向量组 $S_1 = \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}$ 是向量组 $S = \{a_1, \cdots, a_m\}$ 的一个子集. 如果 S_1 线性相关, 则 S 也线性相关; 如果 S 线性无关, 则 S_1 也线性无关.

定理: (P122) 设 $a_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in}) \in F^n, i = 1, 2, \cdots, m$. 用 A 表示以 $a_1, \cdots, a_m$ 为行构成的 $m \times n$ 阶矩阵. 则 $a_1, \cdots, a_m$ 线性相关当且仅当关于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的齐次线性方程组

$$A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

有非零解.

推论: (P123) 设 $a_1, \cdots, a_m \in F^n$ 是一组数组向量. 则
(1) 若 $m > n$, 则 $a_1, \cdots, a_m$ 必然线性相关.
(2) 若 $m = n$, 则 $a_1, \cdots, a_m$ 线性相关当且仅当 $det(A) = 0$.

定理: (P124) 设 $a_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ir}) \in F^r, i = 1, 2, \cdots, m$. 它们的加长向量组为 $b_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ir}, \cdots, a_{in}) \in F^n (n > r), i = 1, 2, \cdots, m$. 则有
(1) 若 $a_1, \cdots, a_m$ 线性无关, 则 $b_1, \cdots, b_m$ 也线性无关.
(2) 若 $b_1, \cdots, b_m$ 线性相关, 则 $a_1, \cdots, a_m$ 也线性相关.

定理: (P124) 设 $a_1, \cdots, a_m \in F^n$ 为一组列向量,$A = (a_1, \cdots, a_m)$ 是以 $a_1, \cdots, a_m$ 为列构成的 $n \times m$ 阶矩阵.A 经过一系列的初等行变换为矩阵 $B = (b_1, \cdots, b_m)$. 则
(1)$a_1, \cdots, a_m$ 线性相关 (无关) 当且仅当 $b_1, \cdots, b_m$ 线性相关 (无关).
(2)$a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ 为 $a_1, \cdots, a_m$ 的极大无关组当且仅当 $b_{i_1}, \cdots, b_{i_r}$ 为 $b_1, \cdots, b_m$ 的极大无关组.

定理: (P127) 向量组 $a_1, \cdots, a_m$ 与 $b_1, \cdots, b_l$ 等价当且仅当

$$< a_1, \cdots, a_m > = < b_a, \cdots, b_l >$$

定理: (P127) 一个向量组与它任何一个极大无关组等价.

推论: (P127) 向量组的任何两个极大无关组彼此等价.

定理: (P127) 设 $a_1, \cdots, a_m \in F^n$. 则 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $a_1, \cdots, a_m$ 的一个极大无关组, 当且仅当 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ 线性无关且

$$< a_{i_1}, \cdots, a_{i_r} > = < a_1, \cdots, a_m >$$

.

定理: (P128) 若两个分别线性无关的向量组 $\{a_1, \cdots, a_r\}, \{b_1, \cdots, c_s\}$ 等价, 则 $r = s$.

推论: (P128) 若 $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ 与 $a_{j_1}, \cdots, a_{j_s}$ 是 $a_1, \cdots, a_m$ 的两个极大无关组, 则 $r = s$.

定理: (P129) 设向量 $a_1, \cdots, a_r \in F^n$, 向量 $b_1, \cdots, b_s \in F^n$, 则有
(1)$a_1, \cdots, a_r$ 线性无关当且仅当 $rank(a_1, \cdots, a_r) = r$.
(2)$a_1, \cdots, a_r$ 线性相关当且仅当 $rank(a_1, \cdots, a_r) < r$.
(3) 若 $\{b_1, \cdots, b_s\}$ 可以用 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 线性表示, 则 $rank(b_1, \cdots, b_s) \leqslant rank(a_1, \cdots, a_r)$.
(4) 若 $\{b_1, \cdots, b_s\}$ 与 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 等价, 则 $rank(b_1, \cdots, b_s) = rank(a_1, \cdots, a_r)$.
(5) 向量 b 可以被 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 线性表示当且仅当 $rank(a_1, \cdot, a_r) = rank(a_1, \cdots, a_r, b)$.

定理: (P130) 矩阵的行秩等于它的列秩等于矩阵的秩.

推论: (P131) 下列说法等价.
(1)n 阶方阵 A 可逆.
(2)$rank(A) = n$.
(3)A 的行向量组线性无关.
(4)A 的列向量组线性无关.

推论: (P131) 设 $rank(A)=r$, 则 A 的不等于零的 r 阶子式所在行 (列) 构成了 A 的行 (列) 向量的极大无关组.

定理: (P131) 设非空集 V 是 F^n 的子空间, 则存在线性无关的向量组 $a_1,\cdots,a_r$, 使得

$$V=<a_1,\cdots,a_r>$$

.

定理: (P135) 在 n 维数组空间 F^n 中, 下列结论成立:
(1) 设 $V\subseteq F^n$ 是 r 维子空间, 则 V 中任意 $r+1$ 个向量线性相关.
(2) 设 V 为 r 维子空间, 则 V 中任意 r 个线性无关向量为 V 的一组基.
(3) 设 U,V 是 F^n 的子空间, 且 $U\subseteq V$, 则 $dim(U)\leqslant dim(V)$.
(4) 设 U,V 是 F^n 的子空间, 且 $U\subseteq V$, 若 $dim(U)=dim(V)$, 则 $U=V$.

定理: (P135) 设 $V\subseteq F^n$ 是 r 维子空间,$a_1,\cdots,a_s\in V$ 是 $s(s<r)$ 个线性无关的向量. 则存在 V 中的向量 $a_{s+1},\cdots,a_r$, 使得 $a_1,\cdots,a_r$ 构成 V 的一组基. 称 $a_1,\cdots,a_r$ 为线性无关组 $a_1,\cdots,a_s$ 的一组基扩充基.

定理: (P136) 设 $A\in F^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,$b\in F^m$ 是 m 维列向量. 则线性方程组

$$Ax=b$$

有解的充要条件是 $rank(A)=rank(A,b)$. 线性方程组有唯一解的充要条件是 $rank(A)=rank(A,b)=n$.

推论: (P137) 齐次线性方程组

$$Ax=0$$

一定有解. 它有非零解的充要条件是 $rank(A)<n$. 特别地, 若 A 为 n 阶方阵, 则齐次线性方程组有非零解当且仅当 $det(A)=0$.

定理: (P137) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 V 是 F^n 的子空间, 并且 $dim(V)=n-rank(A)$.

定理: (P139) 设 $V = \{x \in F^n | Ax = 0\}$,$W = \{x \in F^n | Ax = b\}$. 则 $W = \gamma_0 + V = \{\gamma_0 + \alpha | \alpha \in V\}$, 其中 γ_0 是 $Ax = b$ 的一个特解.

6.2 我认为可以直接用的结论

下面这些结论请看情况使用. 如果题目就是让你证明这个结论, 那肯定是不能用的. 如果你使用这个结论之后两行就结束了, 那建议不用或者证明后使用. 这些限制仅限于解答题, 填空题你想用什么结论就用什么结论, 没人在乎. 所以还是建议尽可能地记住一些结论. 在这里列出来的都是我推荐掌握证明方法的结论.

命题: 设准上三角阵 $A = (A_{ij})_{k\times k}$ 的每个对角块 A_{ii} 都是方阵, 则有

$$det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix} = det(A_{11})det(A_{22})\cdots det(A_{kk}).$$

命题: 设 A, B 是 n 阶方阵,$\lambda \in F$, 以下结论成立:
$(AB)^* = B^*A^*$.

命题:

$$rank \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant rank(A) + rank(B)$$

.

命题:

$$rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$$

.

命题: 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times p}$, 则 $rank(AB) \leqslant min(rank(A), rank(B))$.

命题: $Vandermonde$ 行列式

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

命题: 设 A,B 是 n 阶方阵,$\lambda\in F$, 以下结论成立:
(1)$(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*$.
(2)$det(A^*)=(det(A))^{n-1}$.

命题: 设 $A\in F^{m\times n}$,$B\in F^{n\times m}$, $\lambda\in F$, 则有

$$\lambda^n det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m det(\lambda I_n-BA)$$

命题: $Frobenius$ 秩不等式:
设 $A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times s},C\in F^{s\times t}$, 则

$$rank(ABC)+rank(B)\geqslant rank(AB)+rank(BC)$$

.

命题: $Sylvester$ 秩不等式:
设 $A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times s}$, 则

$$rank(AB)+n\geqslant rank(A)+rank(B)$$

.

命题: $rank(A^TA)=rank(A)$

6.3 回顾一下过去半个学期我们都学了哪些内容

6.3.1 Part 1: 线性方程组

本部分的要求如下:
(1) 会解低阶的线性方程组
(2) 对于低阶的含参线性方程组, 根据参数取值讨论方程组解的情况.
(3) 了解一般线性方程组解的结构 (结合线性空间理论).
(4)$Cramer$ 法则 (一般不会用于计算).

6.3.2 Part 2: 矩阵初步与相抵标准型

本部分的要求如下:
(1) 了解矩阵的定义及基本运算, 包括加法, 数乘, 矩阵乘法, 转置, 共轭.

(2) 知道矩阵逆的求法, 能够求出低阶矩阵的逆.
(3) 了解矩阵的一些基本量, 包括迹, 行列式, 秩.
(4) 了解矩阵的分块运算 (我认为这个非常重要).
(5) 会计算低阶矩阵的行列式 (必考).
(6) 会计算低阶矩阵的秩 (必考).
(7) 了解矩阵的相抵标准型.

6.3.3 Part 3: 线性空间理论

本部分的要求如下:
(1) 了解线性空间的定义, 了解子空间的定义.
(2) 了解向量组的线性相关与线性无关.
(3) 计算有限向量组的秩与极大无关组.
(4) 了解线性空间的基与维数, 能够计算线性空间的基与维数.
(5) 了解一般线性方程组解的结构.
(6) 学会将一般线性空间中的向量转化为坐标进行处理.

6.4 例题

下面这些例题可能显得有些混乱, 他们并不是完全按照知识点先后顺序来排列的.

6.4.1 线性方程组的例题

1. 判断命题正确性: 若线性方程组有唯一解, 则可以用 $cramer$ 法则求解.

错误的. 考虑如下方程组: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ 这个方程组显然有唯一解, 但是由于它的系数矩阵不是方阵, 所以这里不能使用 $cramer$ 法则求解.

2. 判断:$A \in R^{3\times 5}, rank(A)=3$, 则 $\exists b \in R^3$, 使得 $Ax=b$ 只有唯一解.

错误的. 考虑 $A=\begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则无论 b 取什么值, 这里的 x_4, x_5 都是自由变量, 从而不可能有唯一解.

3. 已知:$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+ax_2-x_3-x_4=-5 \\ bx_1-x_3-2x_4=-3 \\ x_3-2x_4=1-c \end{cases}$.

先解出第一个方程组. 得到 $x_1=x_4-2, x_2=x_4-4, x_3=2x_4-5$. 因为两个方程组同解, 所以上面得到的解也是第二个方程组的解. 代入得到:
$\begin{cases} x_4-2+ax_4-4a-2x_4+5-x_4=-5 \\ bx_4-2b-2x_4+5-2x_4=-3 \\ 2x_4-5-2x_4=1-c \end{cases}$ 得到 $a=2, b=4, c=6$.

6.4.2 矩阵的例题

1. 设 $A, B \in R^{3\times 3}$, 若 $|A|=2, |B|=3$, 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵

记这个分块矩阵为 S, 由 $SS^*=det(S)I_4$ 可以知道,$S^*=det(S)S^{-1}$. 求 S^{-1} 是一个比较简单的事, 建议记住.$S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.$det(S)=(-1)^3 det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=6$. 所以就得到了 $S^*=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

2.$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求第四行各元素的代数余子式的和.

根据行列式的递推定义, 这里四行元素代数余子式的和实际上就等于下面的行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\2 & 2 & 2 & 2\\0 & -7 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

计算即可得到答案是 0(二行四行线性相关).
更改: 将本题更改为求 $3A_{41}-6A_{42}+3A_{43}-4A_{44}$.
只需要计算行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\2 & 2 & 2 & 2\\0 & -7 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & -4\end{vmatrix}$$

即可. 不要真的算改编后的这题, 因为我没凑数字, 算起来可能很痛苦. 答案是 98.

3. 判断:$A\in R^{m\times n}, B\in R^{n\times m}$, 则 $det(AB)=det(BA)$.
错误的. 考虑 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. 则有 $det(AB)=1, det(BA)=0$.

4. 判断:A,B 是同阶实方阵, 则 $rank(AB)=rank(BA)$.
我个人认为这题比上一题要困难不少. 我在构造这题的反例时的思路是这样的: 我们还是不希望这个矩阵太复杂, 所以从二阶方阵入手. 首先, 这里 A,B 中有可逆方阵的时候, 原结论一定成立, 因为左乘或右乘可逆阵不改变矩阵的秩. 其次,A,B 中有零矩阵的时候结论显然成立. 所以在构造反例时, 我们必须让 A,B 都是秩为 1 的矩阵. 而我们知道秩为 1 的矩阵一定可以分解成列向量与行向量的乘积, 所以可以从构造向量的角度入手. 再考虑一下 AB,BA 秩的情况. 两个不可逆方阵一定不可能乘出一个可逆方阵, 所以他们的秩只可能是 0 或 1. 所以我们希望 $rank(AB)=0, rank(BA)=1$. 设 $A=x\cdot y^T, B=u\cdot v^T$. 那么我们就可以让 $y^T\cdot u=0$, 选定 y,u 后再构造其余的两个向量让 $BA\neq 0$. 这里我选取的是 $y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $x=v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 此时 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$,$BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & -2\end{pmatrix}$.

5.$A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$. 证明: $rank(I_m-AB)+n=rank(I_n-BA)+$

m.
考虑如下矩阵, 对其做初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

所以原命题得证.

$$6.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{求 } A^{10}.$$

可以发现, 这里 A 的行向量是线性相关的, 秩为 1, 所以我们一定可以把他分解为两个向量的乘积.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

这样的话, 原问题就转化成了一个我们熟悉的问题了.

$$A^{10} = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix})^{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})^9 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

.

7. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix}$, 求 $det(A), A^{-1}$.

矩阵太复杂了, 这里不写了. 简单介绍一些步骤. 从第二行开始, 依次用上一行减去当前行. 直至达到最后一行. 再从第一行开始, 用最后一行加上第一行的一半. 至此, 我们能够得到 $det(A)=2^{n-1}$. 再将前 $n-1$ 行除以 2. 就得到了 A^{-1}. 对角线上是 $\frac{1}{2}$, 上半三角的副对角线上是 $-\frac{1}{2}$,n 行 1 列的元素是 $\frac{1}{2}$.

8. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$c=tr(A)$. 已知 $rank(A)=1$.
(1) 证明:$A^2=cA$.
(2) 计算 $det(I_n+A)$.
(1) 由 $rank(A)=1$ 知,A 中至少有一行不全为 0. 设第 i 行不全为 0, 记 $A=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}$. 则存在一系列常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 使得 $r_j=\lambda_j r_i$, 其中 $\lambda_i=1$.
于是我们可以对 A 做如下分解:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} r_i$$

其中

$$r_i=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}.$$

那么 $A^2=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$. 注意到中间两个向量相乘就是一个数, 且恰好就是 $tr(A)$. 所以原命题得证.
(2) 先证明一个引理:$det(I_n-AB)=det(I_m-BA)$, 其中 $A\in R^{n\times m}, B\in$

$R^{m\times n}$.
考虑如下矩阵, 并做初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_n - AB & 0 \\ B & I_m \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得原结论. 将这个引理应用到本题, 结合 (1) 中得到的分解, 就可以知道

$$det(I_n + A) = det(I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}) =$$

$$1 + \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 1 + c$$

6.4.3 线性空间的例题

本部分例题可能偏基础一点. 顺带着复习一下线性空间的基本知识.
1.$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, 求 $rank(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.
对于数组向量来说, 他们的秩就是用他们组成的矩阵的秩. 所以我们只需要求下面的矩阵的秩.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

对它做初等变换

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以这个矩阵的秩为 2, 从而原向量组的秩就是 2.

2.$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & c \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \end{pmatrix}$, 线性无关, 写出 a, b, c 满足的条件.

三个向量线性无关等价于线性方程组

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$$

只有零解. 因为这是一个齐次方程组, 所以方程组只有零解等价于系数矩阵的秩不少于变量个数, 在这里也就是系数矩阵的秩为 3, 也就是系数矩阵可逆, 也就是系数矩阵的行列式不等于 0. 所以只需要算一下系数矩阵的行列式即可.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= 2abc$$

也就是说, 只要 $abc \neq 0$, 这三个向量就不是线性相关的.

3. 设 $R^{2\times 2}$ 是实数域上所有 2×2 阶矩阵组成的集合, 按照矩阵的加法与数乘构成线性空间.
(1) 证明:$S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ 构成了 $R^{2\times 2}$ 上的一组基.
(2) 求基 S 到自然基 $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ 的过渡矩阵 T.
(3) 求 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

(1)$R^{2\times 2}$ 是一个四维空间, 所以这里只需要说明 $rank(S) = 4$ 就可以说明 S 是 $R^{2\times 2}$ 上的一组基. 也就是说, 我们只需要证明 S 中的四个矩阵是线性无关的. 我们假设 $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使得 $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. 按照分量分别等于 0, 我们可以得到四个线性方程

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
PS: 这里没人真的会去解这个方程组的, 所以你需要做的就是把方程列对, 然后写上这么一句话就行.
(2) 设 $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. 我们要求的过渡矩阵 T 满足

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)T = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})$$

那么当然有对应的

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})T^{-1}$$

所以我们可以先求出 (E_{ij}) 到 S 的过渡矩阵, 然后再求逆即可得到这里的 T.
注意到以下等式

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = -E_{11}+E_{12}-E_{21}+E_{22}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -E_{11}+E_{12}+E_{21}-E_{22}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -E_{11}-E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

所以 (E_{ij}) 到 S 的过渡矩阵 $T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 求逆即可得到

$$T=\begin{pmatrix}\frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14\\ -\frac14 & \frac14 & -\frac14 & \frac14\\ -\frac14 & \frac14 & \frac14 & -\frac14\\ -\frac14 & -\frac14 & \frac14 & \frac14\end{pmatrix}$$

(3) 首先, 这个矩阵在自然基下的坐标显然是

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

结合在第 2 问求到的过渡矩阵, 有如下等式:

$$(E_{11},E_{12},E_{13},E_{14})\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{pmatrix}\frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14\\ -\frac14 & \frac14 & -\frac14 & \frac14\\ -\frac14 & \frac14 & \frac14 & -\frac14\\ -\frac14 & -\frac14 & \frac14 & \frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

所以原矩阵在 S 下的坐标就是

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求 $rank(A^TA)$.

这题看起来是一个矩阵相关的题目. 这里把他放到线性空间这部分是因为用线性空间相关的理论, 我们能给出一个更加简便的方法, 也给出了一个结论.

法一: 直接爆算, 我觉得很烦, 好处是不用动脑子

法二:$Claim: \ rank(A^TA) = rank(A)$.

下面来证明这个结论. 由解空间维数与相应矩阵秩的关系, 我们只需要证明 $A^TAx = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解.

设 $A^TAx = 0$ 的解空间为 V_1,$Ax = 0$ 的解空间为 V_2. 首先, 对 $\forall x_0, s.t. Ax_0 = 0$, 一定有 $A^TAx_0 = A^T0 = 0$. 所以 $V_2 \subseteq V_1$.

其次, 对 $\forall x_0, s.t. A^TAx_0 = 0$, 左乘 x_0^T 得到

$$x_0^TA^TAx_0 = 0$$

注意到, 这是向量 Ax_0 与自身的点乘, 它一定是大于等于 0 的, 并且 $x_0^TA^TAx_0 = 0$ 当且仅当 $Ax_0 = 0$. 所以 $V_1 \subseteq V_2$.

结合上述, 得到了 $V_1 = V_2$. 所以

$$rank(A^TA) = n - dim(V_1) = n - dim(V_2) = rank(A)$$

对本题来说,$rank(A) = 2$, 所以 $rank(A^TA) = 2$.

Rmk. 可能看到这题的解答的时候会觉得非常的不自然, 这是正常的, 因为这里的想法来源于后面的内容, 矩阵的相合与二次型. 但是我个人认为这是一个值得记住的结论.

7 线性变换的特征值与特征向量

7.1 基本的定义与结论

在之前我们学习了线性空间, 它在线性代数中的地位相当于数学分析中的集合 (当然它本身就是集合), 那么我们自然要定义 "函数", 并且这个函数要体现我们线性代数最基本的性质, 也就是线性性.

Def. 给定线性空间 V_1, V_2, 以及一个映射

$$\mathscr{A}: V_1 \to V_2$$

如果这个性质满足如下条件:

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V_1$$

$$\mathscr{A}(\lambda\alpha) = \lambda f(\alpha)$$

那么就称 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V_1 到 V_2 的一个线性映射. 特别的, 如果 $V_1 = V_2 = V$, 那么就称 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换.

Rmk. 本课程讨论的重点是线性变换, 而不是线性映射

Rmk. 线性映射与线性变换一般用花体字母表示, 下面是一个花体字母表

$\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{F}\mathscr{G}\mathscr{H}\mathscr{I}\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{L}\mathscr{M}\mathscr{N}\mathscr{I}\mathscr{O}\mathscr{P}\mathscr{Q}\mathscr{R}\mathscr{S}\mathscr{T}\mathscr{U}\mathscr{V}\mathscr{W}\mathscr{X}\mathscr{Y}\mathscr{Z}$

有了线性变换之后, 我们当然希望能够将一个线性变换表示出来, 那自然就能够想到利用线性空间的一组基, 因为基能够表示出线性空间中的所有元素.

Def. 给定线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 以及 V 上的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 注意到 $\mathscr{A}(\alpha_i)$ 可以表示成 α_j 的线性组合, 记作

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \Sigma_{j=1}^n a_{ji}\alpha_j$$

定义 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则有下列等式成立

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A}(\alpha_1) & \mathscr{A}(\alpha_2) & \cdots & \mathscr{A}(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} A$$

其中矩阵 A 就称作线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵.

上述定义有一个问题, 就是矩阵 A 的定义是取决于基的选取, 所以我们想要知道如果我们换一组基, 得到的矩阵会有什么差别.A,$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 的定义同上, 我们再取 V 的另外一组基 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$, 设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵为 T, 即

$$\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} T$$

那么我们来考察一下 $\mathscr{A}$ 在 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 下的矩阵.

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} = \mathscr{A}(\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} T)$$

根据 $\mathscr{A}$ 的线性性, 可以得到 (建议通过展开自行验证一下下面的等式)

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} &= (\mathscr{A}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix})T \\ &= \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} AT \\ &= \begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} T^{-1}AT\end{aligned}$$

这样我们就得到了线性变换在不同的基下的矩阵之间的关系, 这种关系被称为相似

Def. 对于 n 阶方阵 A, B, 如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$A = PBP^{-1}$$

那么就称 A 与 B 相似.

既然线性变换在不同的基下的矩阵是不一样的, 那么我们想要知道的就是能不能通过选取特殊的基, 得到一个尽可能简单的矩阵. 在我们的印象当中, 最简单的当然就是对角矩阵 (0 矩阵和数量矩阵 aI 太平凡, 并不具备研究的价值). 当然, 一般而言, 不能通过选取特殊基的方式将一个线性变换的矩阵变成对角阵. 换言之, 并不是所有的矩阵都相似于对角矩阵 (称为相似对角化), 但是本课程的关注点仅限于能相似到对角阵的情况, 更一般的情况是 $Jordan$ 标准型, 感兴趣的可以选修线性代数 $B2$. 我们可以先看一下如果一个矩阵可以相似到对角阵, 那么会发生什么.

假设 $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ 将矩阵 A 相似到对角矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 那么

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\Rightarrow AP = P\Lambda$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\Lambda$$

$$\Rightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1, \cdots, n$$

这意味着 A 乘到 α_i 上面, 不会改变方向, 这当然是一个很好的性质, 因为对于向量而言, 真正重要的就是它的方向. 因此就衍生出了下面的定义

Def. 对于 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 如果存在 $\alpha \in V, \alpha \neq 0$ 与 $\lambda \in F$, 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值,α 是特征值 λ 对应的特征向量.

当然也可以对矩阵进行对应的定义.

Def. 对于 n 阶方阵 $A \in F^{n\times n}$, 如果存在 $\alpha \in R^n, \alpha \neq 0$ 与 $\lambda \in F$, 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称 λ 是 A 的一个特征值,α 是特征值 λ 对应的特征向量.

根据上面的分析, 我们就能够得到矩阵 A 可以相似对角化的一个等价条件

Thm. 对于矩阵 $A \in F^{n\times n}$, 如果它有 n 个线性无关的特征向量, 那么 A 可以相似对角化.

Rmk. 具体来说, 如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,$A\alpha_i = \lambda\alpha_i$, 那么取 $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, 就有

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

那么该如何计算出矩阵 A 的特征值与特征向量呢? 假设

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

那么我做一个移项, 上面的方程就可以变成一个关于 α 的齐次线性方程组

$$(A - \lambda I)\alpha = 0$$

那么我们要的特征向量就是上述方程的非零解, 而上述方程有非零解的等价条件是 $det(A - \lambda I) = 0$, 所以我们计算特征值特征向量的方法就是:
i. 计算 $det(A - \lambda I)$, 并解多项式方程 $det(A - \lambda I) = 0$, 就能够得到 A 的所有特征值
ii. 对于上面方程的解 λ_i, 解线性方程组 $(A - \lambda_i I)x = 0$, 得到 λ_i 对应的特征向量 α(解空间有可能不是一维的, 这里只是示意).

上面的计算方法中有一些比较重要的东西, 下面补充一些定义.

Def. 对于方阵 A, 关于 λ 的多项式 $det(A - \lambda I)$ 称为 A 的特征多项式, 记作 $p_A(\lambda)$. 在复数域上, 特征多项式可以做如下分解

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$,$n_i$ 称为特征值 λ_i 的代数重数.

Def. 对于方阵 A,λ_i 是 A 的一个特征值, 线性方程组 $(A - \lambda_i I)x = 0$ 的解空间 V_i 称为特征值 λ_i 对应的特征子空间,$dim(V_i) = m_i$ 称为特征值 λ_i 的几何重数.

Prop. 对于方阵 A,λ_i 是 A 的特征值,n_i, m_i 是它的代数重数与几何重数, 则有

$$m_i \leqslant n_i$$

Prop. 对于方阵 A,λ_i 是 A 的特征值,n_i, m_i 是它的代数重数与几何重数, 那么 A 可以相似对角化等价于

$$m_i = n_i, i = 1, \cdots, s$$

7.2 一些例子

1. 设 x_1, x_2, x_3 是矩阵 A 的不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 对应的特征向量, 证明 $x_1 + x_2 + x_3$ 不是 A 的特征向量.

假设 $x_1 + x_2 + x_3$ 是 A 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 则有

$$A(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3)$$

另一方面, 因为 x_1, x_2, x_3 本身也是特征向量, 则有

$$A(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

所以结合上面两个式子可以得到

$$(\lambda - \lambda_1)x_1 + (\lambda - \lambda_2)x_2 + (\lambda - \lambda_3)x_3 = 0$$

这与 "不同特征值对应的特征向量线性无关" 矛盾.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^k

很自然的, 我们将 A 分块处理, 令 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$, 所以只需要分别处理 B^k 与 C^k 即可.

$det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25$ 所以 B 的特征值是 5 和-5, 解方程得到它们对应的特征向量是

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

令 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $B = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$

所以 $B^k = P\begin{pmatrix}5^k & 0\\ 0 & (-5)^k\end{pmatrix}P^{-1} = 5^{k-1}\begin{pmatrix}4+(-1)^k & 2-2(-1)^k\\ 2+2(-1)^k & 1+4(-1)^k\end{pmatrix}$

对于 C, 可以发现 $C = 2I + D$, 其中 $D = \begin{pmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 满足条件 $D^2 = 0$. 所以由二项式展开就可以得到

$$C^k = (2I+D)^k = 2^k I + C_k^1 2^{k-1} D = \begin{pmatrix}2^k & 4k2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

所以 $A^k = \begin{pmatrix}4\cdot 5^{k-1} - (-5)^{k-1} & 2\cdot 5^{k-1} + 2\cdot(-5)^{k-1} & 0 & 0\\ 2\cdot 5^{k-1} - 2\cdot(-5)^{k-1} & \cdot 5^{k-1} - 4\cdot(-5)^{k-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}$

3. 设 A, B 是 n 阶方阵,B 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - B|$. 证明:$f(A)$ 可逆的充要条件是 B 的任一特征值都不是 A 的特征值.

必要性: 设 B 的特征值是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 则 B 的特征多项式是

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

因为 $f(A)$ 可逆, 所以 $|f(A)| \neq 0$, 即

$$|(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)| = |(A-\lambda_1 I)|\cdots|(A-\lambda_n I)| \neq 0$$

这等价于 $|A - \lambda_i I| \neq 0, \forall i$, 所以 λ_i 不是 A 的特征值,$\forall i$.

充分性同上.

4. 设方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 $tr(A) = rank(A)$.

假设 λ 是 A 的一个特征值,x 是对应的特征向量, 则 $Ax = \lambda x$, 另一方面,$A^2x = A\cdot Ax = A\lambda x = \lambda^2 x$, 由 $A = A^2$ 可知 $\lambda = \lambda^2$, 所以 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$. 设特征值 1 的代数重数为 r, 则 0 的代数重数为 $n - r$.

下面说明 A 可对角化, 则需要证明方程 $Ax = 0$ 与 $(A-I)x = 0$ 的解空间的基可以张成全空间. 所以我们需要考察 $n - rank(A) + n - rank(A-I) = 2n - (rank(A) + rank(A-I))$. 因此只需要证明 $rank(A) + rank(A-I) = n$. 首先,$rank(A) + rank(A-I) \geqslant rank(A - (A-I)) = n$. 另一方面, 由 $sylvester$ 不等式可以得到 $rank(A) + rank(A-I) \leqslant n - rank(A(A-I)) = n$. 所以 $rank(A) + rank(A-I) = n$ 成立. 所以 A 可对角化. 所以 $rank(A)$ 就是特征值 1 的个数,$tr(A)$ 就是特征值的和, 也是特征值 1 的个数. 所以他们相等.

法二: 用相抵标准型. 参考第六周习题课讲义第 11 题.

5. 设 V 是 n 维线性空间, 证明: 由 V 的全体线性变换构成的线性空间是 n 维的.

先证明这个线性空间至少是 n^2 维的. 取出 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 定义如下线性变换 $\mathscr{E}_{ij}$, 它满足 $\mathscr{E}_{ij}(e_i) = e_j, \mathscr{E}_{ij}(e_k) = 0, k \neq i$. 容易验证这些线性变换是线性无关的. 所以这个线性空间至少是 n^2 维的.

再证明上面取出的线性变换可以组合出所有线性变换. 对任意的线性变换 $\mathscr{A}$, 设 $\mathscr{A}(e_i) = \Sigma_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e_j$, 则 $\mathscr{A} = \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathscr{E}_{ij}$.

6. 设方阵 A, B 可对角化, 且 $AB = BA$, 证明存在一个可逆方阵 P, 使 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 都是对角阵.

由于 A 可对角化, 所以存在可逆方阵 P_1, 使 $P_1^{-1}AP_1 = A_1 = diag(\lambda_1 I_{(n_1)}, \cdots, \lambda_t I_{(n_t)})$, 其中 $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$..

记 $B_1 = P_1^{-1}BP_1$, 则有

$$A_1B_1 = P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 = B_1A_1$$

将 B_1 分块为 $\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tt} \end{pmatrix}$, 由 $A_1B_1 = B_1A_1$ 可得

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_t B_{t1} & \cdots & \lambda_t B_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_t B_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 B_{t1} & \cdots & \lambda_t B_{tt} \end{pmatrix}$$

因为 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以可以得到 $B_{ij} = 0, i \neq j$.

所以 $B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_{tt} \end{pmatrix}$. 因为 B 可对角化, 所以 B_1 可对角化, 下面证明 B_{ii} 可对角化.

考虑 B_1 的任意一个特征值 λ, 他关于 B_1 的代数重数为 l, 几何重数为 m, 关于 B_{ii} 的代数重数为 l_i, 几何重数为 m_i.(注意, 这里 l_i, m_i 可能等于 0, 这代表 λ 不是 B_{ii} 的特征值.)

则有 $l = \Sigma_{i=1}^{t}l_i \geqslant \Sigma_{i=1}^{t}m_i = m$, 而由 B_1 可对角化知道 $l = m$, 这迫使 $\Sigma_{i=1}^{t}l_i = \Sigma_{i=1}^{t}m_i$, 而由几何重数与代数重数的关系得到 $l_i \leqslant m_i$, 所以就有 $l_i = m_i$, 所以 B_{ii} 可对角化. 设 $B_{ii} = R_i\Lambda_i R_i^{-1}$, 其中 Λ_i 是对角阵, 取 $R = diag(R_1, \cdots, R_t)$

则取 $P = P_1 R$ 满足条件.

7. 求 $Fibonacci$ 数列的通项公式.

记 $Fibonacci$ 数列的每一项是 F_n, 递推关系为

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

多次递推可以得到

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以问题就转化成了求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2}$. 先求 A 的特征值

$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$. 所以 A 的特征值是 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

对应的特征向量是 $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $A = P \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$.

所以 $A^{n-2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \\ * & * \end{pmatrix}$.

$*$ 对后面的计算并不重要, 所以就省去了.

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \\ * \end{pmatrix}$$

所以 $F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$.

Question: 更一般的结论呢?

8. 设方阵 A 与 B 相似, 证明:

(1) 对每个正整数 k,A^k 与 B^k 相似.

(2) 对每个多项式 $f, f(A)$ 与 $f(B)$ 相似.

(1) 设 $A = PBP^{-1}$, 则

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}$$

(2) 由 (1) 立得

9.

(1) 设 λ 是 A 的一个特征值, 对应的特征向量是 x, 则对任意的整数 k,λ^k 是 A^k 的一个特征值,x 是对应的特征向量.

(2) 设 λ 是 A 的一个特征值, 则对任意的多项式 $f(x)$,$f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

(1) 由题设, 有 $A^kx = A^{k-1}\lambda x = \cdots = \lambda^k x$, 得证.

(2) 由 (1) 即得.

Rmk. 这题的严谨证法要用到数学归纳法, 这里只是把大概的脉络写了出来.

10. 设 n 阶方阵 A 的元素均为 1.

(1) 求 A 的特征值和特征向量.

(2)A 可否对角化? 若可以, 求矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(3) 若 $f(x)$ 是 m 次多项式, 且常数项为 0, 证明存在 k, 使得 $f(A) = kA$.

(1) 首先可以发现 0 是 A 的一个特征值. 且考察方程 $Ax = 0$ 可以发现特征值 0 的几何重数是 $n-1$, 所以他的代数重数至少是 $n-1$, 因此 A 至多有一个除 0 之外的特征值. 再考察 $tr(A) = n$, 由 $tr(A) = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i$ 可知除 0 之外的特征值是 n.

考察方程 $Ax = 0$ 得到 0 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

考察方程 $(A - nI)x = 0$ 得到 n 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 根据上一题,A 可对角化, 把求出的特征向量排列成矩阵就是 P.

(3)

$$f(A) = f(P\Lambda P^{-1}) = Pf(\Lambda)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(n) \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{f(n)}{n}A$$

11. 设 $A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_n & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值和特征向量.

首先, 我们记 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 它有性质 $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A = \Sigma_{i=0}^{n} c_i J^i$.

因此, 我们只需要考察方阵 J 的特征值和特征向量即可.

$$|\lambda I_n - J| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

按照第一列展开得到

$$|\lambda I_n - J| = \lambda|diag(\lambda, \cdots, \lambda)| + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = \lambda^n - 1$$

所以得到 J 有 n 个互不相同的特征值

$$\omega_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

解方程得到 ω_k 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以得到 A 的特征值是 $f(\omega_k), 0 \leqslant k \leqslant$, 特征向量就是 J 的特征向量.

8 欧几里得空间

8.1 子空间的交与和

Thm. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 那么他们的交 $V_1 \bigcap V_2$ 也是 V 的子空间.

Proof. 首先, 注意到 0 一定在 $V_1 \bigcap V_2$ 中, 所以 $V_1 \bigcap V_2$ 非空, 下面验证它关于加法, 数乘封闭.
对 $\forall \alpha, \beta \in V_1 \bigcap V_2$, 有 $\alpha, \beta \in V_1, \alpha, \beta \in V_2$, 由 V_1, V_2 是子空间得到 $\alpha + \beta \in V_1, \alpha, \beta \in V_2$, 所以 $\alpha + \beta \in V_1 \bigcap V_2$. 所以 $V_1 \bigcap V_2$ 关于加法封闭. 关于乘法封闭可类似验证.
证毕.

Rmk. 根据这个定理显然有, 有限个子空间的交仍然是子空间.

Def. 子空间的和
设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 定义 $V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta | \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$.

Rmk. 子空间的和可以看做是平移, 这点会在之后的第一个例子中有所体现

Thm. 对于子空间 V_1, V_2 他们的和 $V_1 + V_2$ 仍然是子空间.

Proof. 显然 $V_1 + V_2$ 非空, 下面验证它关于加法, 数乘封闭.

对于 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$, 一定存在 $\alpha_1, \beta_1 \in V_1$,$\alpha_2, \beta_2 \in V_2$, 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

所以

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)$$

由 V_1, V_2 是子空间知 $\alpha_1 + \beta_1 \in V_1$,$\alpha_2 + \beta_2 \in V_2$. 从而 $\alpha + \beta \in V_1 + V_2$.

类似可验证 $V_1 + V_2$ 关于数乘封闭.
证毕.

Rmk. 我们也可以对有限个子空间定义它们的和, 根据这个定理也可以显然的推出有限个子空间的和仍是子空间.

例 1. 在三维空间 R^3 中, 用 V_1 表示过原点的一条直线,V_2 表示过原点且与 V_1 代表的直线垂直的平面, 那么 $V_1\bigcap V_2=\{0\}$, $V_1+V_2=R^3$, 这里可以看做是 V_2 代表的平面中的每个元素平移了 V_1 代表的直线上的元素.

Thm. 维数公式

如果 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么

$$dim(V_1)+dim(V_2)=dim(V_1+V_2)+dim(V_1\bigcap V_2)$$

Proof. 设 $dim(V_1)=n_1$,$dim(V_2)=n_2$, $dim(V_1\bigcap V_2)=m$. 注意, 这里 m 可能等于 0, 但是对接下来的证明过程没什么影响. 取出 $V_1\bigcap V_2$ 的一组基

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$$

当 $m=0$ 时, 这个基是空集. 将它扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$$

当然也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$$

下面证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$ 是 V_1+V_2 的一组基.

先证明它是线性无关的.

假设存在一系列常数使得下列等式成立:

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$$

移项后得到

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}$$

注意到等式的左边属于 V_1, 等式的右边属于 V_2. 所以上面等式两边的向量一定都属于 $V_1\bigcap V_2$, 从而可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. 设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

$$-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$$

移项后得到

$$(k_1-\lambda_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-\lambda_m)\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=0$$

$$q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$$

根据 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m},\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是一组基得到

$$q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$$

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$$

再由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m}$ 是一组基得到

$$k_1=\cdots=k_m=0$$

$$p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

所以这个向量组线性无关.

下面再来证明 V_1+V_2 中的所有元素都可以被这组向量线性表示.

对 $\forall x\in V_1+V_2$,$\exists y\in V_1$,$z\in V_2$, 使得

$$x=y+z$$

而由 $y\in V_1$ 知存在一系列常数使得

$$y=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$$

由 $z\in V_2$ 知存在一系列常数使得

$$z=s_1\alpha_1+\cdots+s_m\alpha_m+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_1-m}\gamma_{n_1-m}$$

所以

$$x=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+s_1\alpha_1+\cdots+s_m\alpha_m+\\q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_1-m}\gamma_{n_1-m}$$

即,x 可以被选取的向量组表示出来.

综上, 我们选取的是 V_1+V_2 的一组基. 于是有

$$dim(V_1+V_2)=m+n_1-m+n_2-m=dim(V_1)+dim(V_2)-dim(V_1\bigcap V_2)$$

即维数公式成立.

证毕.

Cor. 如果 n 维线性空间 V 的子空间 V_1, V_2 的维数之和大于 n, 那么 V_1, V_2 一定含有非零的公共向量.

Thm. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 W, 使得 $V = U + W$.

证明只需要取出 U 的一组基, 将其扩充成 V 的一组基, 取添加的那些向量张成的空间为 W 即可.

8.2 子空间的直和

Def. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 如果 $V_1 + V_2$ 中的每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

是**唯一的**, 那么两个子空间的和就称为直和, 记作 $V_1 \bigoplus V_2$.

Rmk. 事实上在上一部分举得例子中两个子空间就是直和.

Thm.$V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是等式

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

只有在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 时成立. 即 0 的分解是唯一的.

Proof. 必要性由定义显然. 下面证明充分性.

设 $\alpha \in V_1 + V_2$, 有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$$

则

$$\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = 0$$

由 0 的分解唯一性可以得到

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0$$

也就是 $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$.
证毕.

Cor.$V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是

$$V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$$

proof. 先证明充分性. 由上一个定理, 只需要证明 0 的分解唯一.

假设

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

移项后得到

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

注意到左右分别属于 V_1, V_2, 由条件, 他们只能等于 0.

下面证明必要性.

任取向量 $\alpha \in V_1 \bigcap V_2$,0 有如下分解

$$0 = \alpha + (-\alpha)$$

由直和的分解唯一性得到 $\alpha = 0$. 于是 $V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$
证毕.

Thm. 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 令 $W = V_1 + V_2$, 则

$$W = V_1 \bigoplus V_2$$

的充分必要条件是

$$dim(W) = dim(V_1) + dim(V_2)$$

这条定理可以由上一个定理与维数公式直接得到.

Thm. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 那么一定存在一个子空间 W, 使得 $V = U \bigoplus W$.

设 $\tilde{U}_1 = \{\alpha | \alpha \in V, \alpha \notin U\}$, 任取向量 $\beta_1 \in \tilde{U}$, 再令 $\tilde{U}_2 = \{\alpha | \alpha \in V, \alpha \notin Span\{V, \beta_1\}\}$, 重复上述操作, 直到 $\tilde{U}_k = \emptyset$. 取 $W = Span\{\beta_1, \cdots, \beta_{k-1}\}$ 即可.

Rmk. 类似上面的方式, 我们还可以定义多个子空间的直和, 得到类似的结论.

8.3 正交补空间

我们先来回顾一下欧几里得空间的重要定义. 首当其冲的就是内积, 内积实际上可以看做是一个以向量为变量的二元函数, 当然还要满足一系列性质.

Def. 内积

设 V 是一个实线性空间,$<\cdot,\cdot>$ 是定义在 $V\times V$ 上的一个二元函数 (即它的两个变量都是 V 中的元素), 若它满足以下三条性质:

(1) 对称性:

$$<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$$

(2) 线性性:

$$\begin{gathered}<\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2>=\lambda_1\mu_1<\alpha_1,\beta_1>+\lambda_1\mu_2<\alpha_1,\beta_2>\\+\lambda_2\mu_1<\alpha_2,\beta_1>+\lambda_2\mu_2<\alpha_2,\beta_2>\end{gathered}$$

(3) 正定性:

$$<\alpha,\alpha>\geqslant 0$$

其中等号成立当且仅当 $\alpha=0$.

则称 $<\cdot,\cdot>$ 是 V 上的一个内积.

Rmk. 事实上第二条性质还可以减弱为对第一个变量有线性性, 结合第一条对称性也可以推出对第二个变量有线性性.

Rmk. 有内积的线性空间 V 与内积 $(V,<\cdot,\cdot>)$ 被称作欧几里得空间 (内积空间)

Rmk. 一般的叫法只是内积空间, 只有当 V 是有限维空间时才会将其称作欧几里得空间, 但是由于本门课程只关心有限维线性空间, 所以不需要做区分.

Def.$Gram$ 方阵

设线性空间 V, 内积为 $<\cdot,\cdot>$,V 的一组基为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, 则称 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix}<\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_1,\alpha_n>\\ <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_2,\alpha_n>\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ <\alpha_n,\alpha_1> & <\alpha_n,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_n,\alpha_n>\end{pmatrix}$$

是这组基的 $Gram$ 方阵.

Prop. 假设向量 u, v 在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的坐标分别为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 这组基的 $Gram$ 方阵为 G, 则他们的内积为

$$< u, v >= x^T G y$$

Rmk. 由这个命题及内积的正定性可以发现, 对于 $Gram$ 方阵 G, 对任意的 $x \in F^n$, 一定有

$$x^T G x \geqslant 0$$

其中等号成立当且仅当 $x = 0$. 拥有这样性质的对称方阵被称为正定方阵, 这也是我们后面课程中的一个重要内容. 事实上, 任给一个正定阵, 都可以用来定义内积.

下面来介绍正交补空间的概念. 下面的讨论都是基于欧几里得空间, 默认内积为 $< \cdot, \cdot >$

Def. 向量的正交

对于 V 中的两个向量 α, β, 如果 $< \alpha, \beta >= 0$, 则称 α, β 正交, 记作 $\alpha \perp \beta$.

Def. 子空间的正交

设 V_1, V_2 是欧式空间 V 中两个子空间, 如果对于任意的 $\alpha \in V_1$,$\beta \in V_2$, 都有

$$< \alpha, \beta >= 0$$

则称 V_1, V_2 正交. 记作 $V_1 \perp V_2$.

Thm. 如果子空间 V_1, V_2 正交, 则他们的和是直和.

Proof. 设 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

下面证明 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. 用 α_1 与等式两边同时做内积得到

$$< \alpha_1, \alpha_1 >= 0$$

所以 $\alpha_1 = 0$. 类似得到 $\alpha_2 = 0$. 所以 $V_1 + V_2$ 是直和.
证毕.

Def. 子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个正交补, 如果 $V_1 \perp V_2$ 且 $V_1 + V_2 = V$.

Thm.n 维欧式空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补.

Proof. 我们先来证明存在性. 在 V_1 中取出一组正交基,$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$, 将其扩充成 V 的一组正交基

$$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m, \cdots, \epsilon_n$$

则 $Span\{\epsilon_{m+1}, \cdots, \epsilon_n\}$ 是 V_1 的正交补.

下面来证明唯一性. 假设 V_2, V_3 都是 V_1 的正交补. 则有

$$V = V_1 \bigoplus V_2$$

$$V = V_1 \bigoplus V_3$$

下面来证明 $V_2 = V_1$.

取出 $\alpha \in V_2$, 由 $V = V_1 \bigoplus V_3$, 可以将他表示为

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3$$

其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_3 \in V_3$, 由于 $\alpha \perp \alpha_1$, 所以等号两边同时对 α_1 做内积得到

$$< \alpha, \alpha_1 >=< \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 >=< \alpha_1, \alpha_1 > + < \alpha_3, \alpha_1 >=< \alpha_1, \alpha_1 >= 0$$

从而有 $\alpha_1 = 0$, 则 $\alpha_2 = \alpha_3$, 所以 $V_2 \subset V_3$. 同理可以得到 $V_3 \subset V_2$, 所以 $V_2 = V_3$, 唯一性得证.
证毕.

Rmk. 事实上 V_1 的正交补空间就是所有与 V_1 正交的向量.

8.4 习题

1. 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T = -A$, 证明 A 的特征值只能是 0 或者纯虚数.

设 λ 是 A 的特征值,x 是对应的特征向量, 则

$$Ax = \lambda x$$

两边同时左乘 $\bar{x}^T$ 得到

$$\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$$

两边同时取共轭转置, 注意到 A 是实方阵, 它的共轭就是本身, 所以取共轭转置相当于取转置, 也就是 $-A$.

$$-\bar{x}^T Ax = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$$

把上面两个式子相加得到

$$0 = (\lambda + \bar{\lambda}) \bar{x}^T x$$

由于 x 是特征向量, 所以 $x \neq 0$, 所以 $\bar{x}^T x \neq 0$, 所以 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 所以 λ 是 0 或纯虚数

2. 若 α 是一个单位向量, 证明 $Q = I - 2\alpha\alpha^T$ 是一个正交矩阵, 从而它保持向量的长度不变, 即 $|A\beta| = |\beta|$.

$$A^T A = (I_n - 2\alpha\alpha^T)^T (I_n - 2\alpha\alpha^T)$$

$$= (I_n - 2\alpha\alpha^T)(I_n - 2\alpha\alpha^T)$$

$$= I_n - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T$$

$$= I_n - 4\alpha\alpha^T + 4\alpha\alpha^T$$

$$= I_n$$

从而有

$$|A\beta|^2 = < A\beta, A\beta >= (A\beta)^T (A\beta) = \beta^T (A^T A)\beta = \beta^T \beta = |\beta|^2$$

Rmk. 这个矩阵对应的变换被称作 $Householder$ 变换, 它在矩阵相关的数值计算中有非常大的作用.

3. 在 $R^2[x]$ 中定义内积为

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

用 $\{1, x, x^2\}$, 通过 $schmidt$ 正交化得到一组标准正交基

$$\alpha_1 = 1$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_2 = x - < x, \beta_1 > \beta_1 = x$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\alpha_3 = x^2 - < x^2, \beta_2 > \beta_2 - < x^2, \beta_1 > \beta_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$$

4. 设 V 中的一组标准正交基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则对任意的 $\alpha \in V$, 可以表示成 $\alpha = \Sigma_{i=1}^n < e_i, \alpha > e_i$.

因为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是一组基, 所以 α 可以被这组基线性表示, 假设 $\alpha = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i e_i$, 与 e_j 做内积得到

$$< \alpha, e_j > = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i < e_i, e_j >$$

由 $\{e_i\}$ 是标准正交基得到

$$< e_i, e_j > = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

从而 $< \alpha, e_j > = \lambda_j$. 所以原命题成立.

5. 设 V 中的一组标准正交基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$,$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 是 V 中任意的 k 个向量, 证明:$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 两两正交的充要条件是

$$\Sigma_{l=1}^n < \alpha_i, e_l >< \alpha_j, e_l > = 0, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant k$$

由上一题的结论, 这里的 α_i 可以被写成

$$\alpha_i = \Sigma_{j=1}^n < \alpha_i, e_j > e_j$$

所以

$$< \alpha_i, \alpha_j > = < \Sigma_{p=1}^n < \alpha_i, e_k > e_k, \Sigma_{q=1}^n < \alpha_j, e_l > e_l >$$

$$= \Sigma_{p=1}^n \Sigma_{q=1}^n < \alpha_i, e_k >< \alpha_i, e_l >< e_k, e_l >$$

结合 $\{e_i\}$ 是标准正交基得到

$$< e_p, e_q > = \begin{cases} 1, p = q \\ 0, p \neq q \end{cases}$$

于是

$$<\alpha_i,\alpha_j>=\Sigma_{p=1}^n<\alpha_i,e_p><\alpha_j,e_p>$$

即命题成立.

6. 用向量的内积证明平面外一点到平面的线段长以垂线段最短, 并推广到 n 维欧式空间.

(1) 取平面上任意一点为原点 O, 将空间 V 每一点 P 用向量 $\vec{OP}$ 表示. 则平面是一个 2 维子空间 W. 设 A 是空间中给定的任意一点,B 是平面内任意一点, 分别对应于向量 $\alpha=\vec{OA}$,$\beta=\vec{OB}$. 则 $|AB|=|\alpha-\beta|$. 求证: 当 $\alpha-\beta\in W^{\perp}$ 时 $|\alpha-\beta|$ 取最小值.

(2) 设 V 是欧几里得空间,W 是 V 的一个子空间,α 是 V 中任意给定的向量, 求证: 当 $\alpha-\beta\in W^{\perp}$ 时 $|\alpha-\beta|$ 取最小值 (β 是变向量)

(3) 设 V 是欧几里得空间,$\alpha\in V$,W 是由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in V$ 生成的子空间, 当 $x_1,\cdots,x_k\in R$ 满足什么条件时,$|\alpha-(x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k)|$ 取最小值.

(1) 由 $V=W\bigoplus W^{\perp}$ 知存在 $\beta_0\in W$, 使得 $\alpha-\beta_0\in W^{\perp}$, 对任意的 $\beta\in W$, 计算 $\alpha-\beta$ 的模长

$$<\alpha-\beta,\alpha-\beta>=<\alpha-\beta_0+\beta_0-\beta,\alpha-\beta_0+\beta_0-\beta>$$

$$=<\alpha-\beta_0,\alpha-\beta_0>+2<\alpha-\beta_0,\beta_0-\beta>+<\beta-\beta_0,\beta-\beta_0>$$

注意到 $\alpha-\beta_0\in W^{\perp}$, 而 $\beta_0-\beta\in W$, 所以 $<\alpha-\beta_0,\beta_0-\beta>=0$. 所以

$$<\alpha-\beta,\alpha-\beta>=<\alpha-\beta_0,\alpha-\beta_0>+<\beta-\beta_0,\beta-\beta_0>$$

$$\geqslant<\alpha-\beta_0,\alpha-\beta_0>$$

等号成立当且仅当 $\beta-\beta_0=0$, 即当 $\alpha-\beta\in W^{\perp}$ 时,$|\alpha-\beta|$ 取最小值.

(2) 同 (1)

(3) 由上面的推理知 $|\alpha-(x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k)|$ 取最小值的充要条件是 $\alpha-(x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k)\in W^T$, 也就是 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$ 是如下方程组的解

$$\begin{cases}<\alpha_1,\alpha_1>x_1+\cdots+<\alpha_1,\alpha_k>x_k=<\alpha_1,\alpha>\\<\alpha_2,\alpha_1>x_1+\cdots+<\alpha_2,\alpha_k>x_k=<\alpha_2,\alpha>\\\vdots\\<\alpha_k,\alpha_1>x_1+\cdots+<\alpha_k,\alpha_k>x_k=<\alpha_k,\alpha>\end{cases}$$

8.5 拓展阅读

这部分内容在习题课上不会讲, 感兴趣的同学自行阅读.

上面最后一题第 (3) 问的结论可以用来解决实系数非齐次线性方程组的最优解的问题. 对于一般的系数矩阵 A 和常向量 b, 方程 $Ax = b$ 不一定有有解. 我们将矩阵 A 写成列向量分块的形式

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

则方程 $Ax = b$ 可对应的写成

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$$

从几何的角度来看, 这个方程组有解当且仅当 b 属于 $a_1, \cdots, a_n$ 所生成的子空间 W, 但是当 $b \notin W$ 时, 我们仍可以在 W 中求出 β_0, 使得它与 b 的距离最近, 求解方程

$$Ax = \beta_0$$

就可以作为方程 $Ax = b$ 的最优解, 记这个方程的最优解是 x_0, 下面来求出这个 x_0 应该满足什么条件. 按照上面最后一题第 (3) 问的结论,$\beta_0 = Ax_0$ 应当满足 $Ax_0 - \beta \in W^{\perp}$, 也就是 $< a_i, Ax_0 - b >= a_i^T(Ax_0 - b) = 0$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立, 即

$$\begin{cases} a_1^T(Ax_0 - b) = 0 \\ \vdots \\ a_n^T(Ax_0 - b) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (Ax_0 - b) = 0$$

即 $A^T A x_0 = A^T b$.

经过上面的分析我们得到, 求解方程 $Ax = b$ 的最优解, 只需要求解方程 $A^T A x_0 = A^T b$ 即可. 这个最优解被称为方程组的最小二乘解.

9 矩阵的奇异值分解与应用

先回顾一下矩阵的特征值.

定义 如果存在 $\lambda \in F$ 及非零列向量 $x \in F^n$, 使得

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 是方阵 A 的一个**特征值**, 而称 x 是属于特征值 λ 的一个**特征向量**.

在计算的时候, 我们只需要计算行列式 $det(\lambda I - A)$, 他的根就是方阵 A 的特征值.

可以看到, 特征值的定义需要矩阵 A 是方阵. 但是在实际应用过程中, 我们遇到的往往不是方阵, 所以我们希望能够把特征值的概念拓展到一般的矩阵上. 所以我们希望能用一个一般的矩阵 $A \in F^{m\times n}$ 得到一个方阵. 这件事其实不难做, 注意到 A^TA 是一个方阵, 更特别的, 他是一个对称方阵, 即 $(A^TA)^T = A^TA$. 对于对称方阵, 我们有如下的性质.

Prop. 实对称矩阵的特征值是实数.

Prop. 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量彼此正交.

Prop. 实对称矩阵可以相似对角化.

Prop. 实对称矩阵可以正交相似对角化.

对于这里的 A^TA, 可以注意到它是一个半正定矩阵, 即对 $\forall x \in R^n$, 有 $x^TA^TAx \geqslant 0$. 所以他的特征值一定非负. 下面给出矩阵的奇异值分解.

Thm. 对于矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在正交矩阵 $U \in F^{m\times m}, V \in F^{n\times n}$ 与 $\Sigma = \begin{pmatrix} D_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$, 其中 $D_{r\times r} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$ 是矩阵 A^TA 的 r 个非零特征值, 使得

$$A = U\Sigma V = U \begin{pmatrix} D_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

这里 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}$ 称为 A 的奇异值.

证明与进一步的了解可以参考知乎文章 https://zhuanlan.zhihu.com/p/399547902

奇异值分解可以说是整个线性代数中最最最具有实用性的一个定理. 无论是哪一个方向, 哪一个专业大概率都会用到这个定理. 像我了解的计算机的每一个方向都能用到奇异值分解. 下面以我了解的图像处理方向来解释一下这个定理的作用.

在实际图像处理中, 一个图像一般被存储为一个 $R^{m\times n\times 3}$ 的矩阵. 最后的 3 维是用于存储矩阵的颜色, 被称为 RGB 通道, 有的时候还会有更多的通道, 比如透明度等等, 这里暂时不关注. 在处理的时候, 我们可以分别处理三个颜色, 每个颜色对应的就是一个 $R^{m\times n}$ 的矩阵 A. 根据奇异值分解, 这里的矩阵可以被分解为 $A = U\Sigma V$ 的形式, 其中 Σ 的对角元是 A 的奇异值. 事实上 A 的奇异值中大的那些奇异值对 A 的影响更大, 所以在处理的过程中, 我们可以保留 A 的那些大的奇异值, 与对应的 U, V 的行列. 下面展示一下具体效果.

图 1: 本次展示用的原图

这是一个 300×300 的图像, 下面取出这个图片的前几个奇异值形成新的图像.

图 2: 取出第一大的奇异值的效果

此时的图片还是一片混沌, 这是自然的, 只有一个奇异值肯定不能期待太好的效果.

图 3: 取出前 5 个奇异值的效果

可以看到, 这里的图像已经初具雏形了.

图 4: 取出前 10 个奇异值的效果

这张图片中已经包含了原图片中的绝大部分主要部分, 头发, 脸, 背带裤, 篮球都已经都有了, 只是还有些模糊. 下面最后展示一下取出前 30 个奇异值的效果, 这正好是所有奇异值个数的 $\frac{1}{10}$.

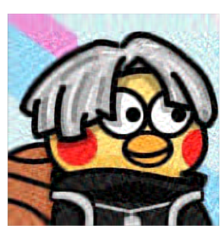

图 5: 取出前 30 个奇异值的效果

可以看到, 此时的图像已经和原图片几乎没差别了, 只剩下少部分噪点, 在实际应用过程中, 这张图片已经能用了. 但是我们使用的存储空间实际上比原图片少了很多, 只用了原图的 $\frac{1}{10}$ 的存储空间, 因为我们只需要存储非零的部分.

想象一下在玩游戏的时候, 我们其实只关注近处的景色, 所以对于远处的景象, 我们就可以采取这样的处理方式, 这样能减少不少的存储空间, 同时极大的提高了处理效率.

10 实二次型

10.1 定义与定理的回顾

定义 给定 n 阶实对称方阵 A,$Q(x) = x^T Ax$ 称为一个实二次型,A 称为这个二次型对应的矩阵.

定义 对于 $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times n}$, 如果存在一个可逆的实方阵 P, 使得

$$B = P^T AP$$

那么称 A 与 B 相合. **Rmk.** 我们只考虑实对称矩阵的相合

定理 给定一个实二次型 $Q(x) = x^T Ax$, 其中 A 对称阵, 存在正交变换 $x = Py$ 将 $Q(x)$ 变成二次型

$$\tilde{Q}(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

这里 λ_i 是矩阵 A 的特征值

定义 上面定理中的 $\tilde{Q}$ 称为二次型 Q 的标准型

定理 给定一个实对称方阵 $A \in R^{n\times n}$, 存在正交矩阵 P 将 A 相合到对角阵

$$A = P\Lambda P^T$$

其中 Λ 的对角元是 A 的特征值.

定理 对于 $A \in R^{n\times n}$,A 是对称阵, 存在可逆方阵 P, 使得

$$P^T AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 给定一个实二次型 $Q(x) = x^T Ax$,A 是对称阵, 存在可逆变换 $x = Py$ 将 $Q(x)$ 变成二次型

$$\tilde{Q}(x) = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - y_n^2$$

定义 上一个定理中的 $\tilde{Q}$ 称为 Q 的规范型

定义 设 $A \in R^{n\times n}$,$A^T = A$, 如果对于任意的 x,$x \neq 0$, 均有 $x^T Ax > 0$, 则称 A 正定. 如果将上述不等式改为 $x^T Ax \geqslant 0$, 则称 A 半正定

定理设 $A \in R^{n\times n}$,$A^T = A$, 则下列说法等价

(1)A 正定

(2)A 特征值全正
(3) 存在正定阵 B, 使得 $A = B^2$
(4) 存在可逆阵 P, 使得 $A = P^T P$
(5)A 的顺序主子式全正.

Rmk. 上述第 (4) 条等价于 A 实相合于单位阵. 所以在考虑正定阵时可以先考虑这个正定阵是单位阵, 然后再相合到 A.

定理设 $A \in R^{n\times n}$,$A^T = A$, 则下列说法等价
(1)A 半正定
(2)A 特征值非负
(3) 存在半正定阵 B, 使得 $A = B^2$
(4) 存在方阵 P, 使得 $A = P^T P$
(5)A 的所有 k 阶主子式非负

10.2 例题

1. 秩等于 r 的实对称矩阵可以表达成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

设 A 是 n 阶实对称阵, 且 $rank(A) = r$. 那么我们可以将 A 正交相似到对角阵. 即存在 Pn 阶正交阵, 使得

$$A = P\Lambda P^T$$

则 $rank(\Lambda) = rank(A) = r$. 所以 Λ 有且仅有 r 个非零对角元. 所以取出 Λ_i 是 Λ 的第 i 个对角元, 其他位置全为 0 的矩阵, 则

$$A = P(\Sigma_{i=1}^r \Lambda_i)P^T = \Sigma_{i=1}^r (P\Lambda_i P^T)$$

2. 设 A 是 n 阶实对称阵, 且 $det(A) < 0$, 证明: 存在 n 维向量 $x \neq 0$, 使得 $x^T Ax < 0$.

将 A 相合到规范型, 即存在可逆矩阵 P, 使得

$$A = P^T \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

由于 $det(A) < 0$, 所以有 $s \neq 0$.

取 x 使得 $Px=y$, 其中 y 是前 r 个分量为 0, 第 $r+1$ 个分量为 1 的向量. 则 $x^TAx=-1<0$.

3. 证明: 若 A 是 n 阶实对称矩阵, 则当实数 t 充分大时,$tI+A$ 正定.

考虑 A 的正交相似标准型

$$A=P\Lambda P^T$$

其中 P 正交阵 Λ 是以 A 的特征值为对角元的对角阵. 则

$$tI+A=tI+P\Lambda P^T=P(tI+\Lambda)P^T$$

因此取 $t>max_{i=1}^n|\lambda_i|$,$tI+A$ 的特征值全正, 从而正定.

4. 求正交变换将二次型

$$Q(x)=x_1^2+7x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+8x_2x_3-16x_1x_3$$

化为标准型

二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-8\\4&7&4\\-8&4&1\end{pmatrix}$$

计算得矩阵 A 的特征值为 $-9,9,9$, 对应的特征向量分别为

$$x_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

正交化得到

$$e_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{15}}{15}\\\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

令 $P=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}$, 则

$$A = P \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^T$$

于是取变换 $y = P^T x$, 则原二次型化为

$$-9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2$$

5. 设实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T, \beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$ 非零, 而且 $A = \alpha\beta^T$ 是对称阵

(1) 证明 α, β 是 A 的特征向量.

(2) 证明 $A + I$ 是正定阵当且仅当 α 与 β 的内积大于 -1.

(1)

$$A\alpha = \alpha\beta^T\alpha = (\beta^T\alpha)\alpha$$

因为 A 是对称阵, 所以有

$$A\beta = A^T\beta = \beta\alpha^T\beta = (\alpha^T\beta)\beta$$

则 α, β 是 A 的特征向量.

(2) 首先,$rank(A) = 1$, 则 0 是 A 的特征值, 且几何重数为 $n-1$, 从而代数重数至少为 $n-1$, 则 A 至多有 1 个非零的特征值. 在 (1) 中我们已经证明了 $\alpha^T\beta$ 是 A 的一个特征值, 所以 A 没有其它的特征值了. 从而 $A+I$ 的特征值是 $1, \alpha^T\beta + 1$, 对应的代数重数为 $n-1, 1$.$A + I$ 是正定阵当且仅当它的所有特征值全正, 等价于 $\alpha^T\beta + 1 > 0$. 也就是 α 与 β 的内积大于 -1.

6. 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型:

$$x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$$

左侧配方得到

$$(2x_1 + x_2)^2 - (\sqrt{3}x_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2 + (t + \tfrac{1}{3})x_3^2 + x_3 - 10 = 0$$

下面对 t 的取值进行讨论.

case 1:$t > -\frac{1}{3}$.

此时左侧可以继续配方得到

$$(2x_1+x_2)^2-(\sqrt{3}x_1-\tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2+(\sqrt{t+\tfrac{1}{3}}x_3+\tfrac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{3}}})^2=10+\tfrac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$$

则进行对应换元后可以得到这个二次型的规范型为

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1$$

对应着的二次曲面为单叶双曲面.
case 2:$t=-\frac{1}{3}$.
此时原等式化为

$$(2x_1+x_2)^2-(\sqrt{3}x_1-\tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2+x_3-10=0$$

进行对应换元后, 这个等式就可以化为

$$\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=\tilde{z}$$

对应的曲面是双曲抛物面.
case 3:$t<-\frac{1}{3}$.
则可以继续配方得到

$$(2x_1+x_2)^2-(\sqrt{3}x_1-\tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2-(\sqrt{-t-\tfrac{1}{3}}x_3-\tfrac{1}{2\sqrt{-t-\frac{1}{3}}})^2=10+\tfrac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$$

此时我们还需要继续分类
case 3.1:$t<-\frac{1}{3}$ 且 $10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}>0$.
此时进行相应换元后, 原等式等价于

$$\tilde{x}^2-\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1$$

这对应着双叶双曲面, 此时的 t 的取值范围是 $t<-\frac{43}{120}$.
case 3.2:$t=-\frac{43}{120}$.
则进行相应换元之后原等式等价于

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\tilde{z}^2$$

这对应这个圆锥.
case 3.3:$-\frac{43}{120}<t<-\frac{1}{3}$.
进行对应换元后原等式等价于

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1$$

这对应着单叶双曲面.

11 期末复习

先放个花体字母表, 不会写花体可以参考一下, 但考试不会因为你花体写错了就扣分的

$\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{F}\mathscr{G}\mathscr{H}\mathscr{I}\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{L}\mathscr{M}\mathscr{N}\mathscr{O}\mathscr{P}\mathscr{Q}\mathscr{R}\mathscr{S}\mathscr{T}\mathscr{U}\mathscr{V}\mathscr{W}\mathscr{X}\mathscr{Y}\mathscr{Z}$

11.1 后半学期内容纲要

本部分的内容中加 * 表示该内容不是必要掌握的内容, 但是由于该内容很有用或者有助于必要内容的理解, 所以推荐掌握.

11.1.1 Part 1: 线性变换, 特征值与特征向量

本部分的要求如下:

(1) 会计算线性变换在一组给定基下的矩阵

(2) 会计算矩阵、线性变换的特征值与特征向量

(3) 了解矩阵相似对角化的充要条件

(4)* 了解特征值的几何重数与代数重数

11.1.2 Part 2: 欧几里得空间

本部分的要求如下:

(1) 知道内积的定义、性质、计算方法

(2) 在给定内积的情况下, 会计算 *schmidt* 正交化过程 (一般不会太烦)

(3) 了解 (反) 对称矩阵的特征值、特征向量的性质

(4) 了解实对称矩阵的 (正交) 相似对角化

11.1.3 Part 3: 二次型

本部分的要求如下:

(1) 能写出给定二次型的矩阵表示

(2) 根据实对称矩阵的 (正交) 相似对角化给出二次型的标准型

(3) 了解矩阵的实相合标准型 (如不加说明, 考试时提到实二次型的相合一般默认是实相合)

(4) 了解 (半) 正定矩阵的相关性质
(5) 了解二次曲线及曲面的分类 (考试必背)

11.2 考试中可以使用的定理及命题

本部分抄录了书上的定理, 有些我认为一点用都没有的定理没有抄下来.

定理 设 V 是数域 F 上的线性空间,$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中线性相关的向量, 则 $\mathscr{A}(\alpha_1), \cdots, \mathscr{A}(\alpha_m)$ 线性相关

定理 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的两组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵分别是 A, B. 若基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 到 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 的过渡矩阵为 T, 即 $\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix} T$, 则

$$B = T^{-1}AT$$

定理 相似的矩阵有相同的特征多项式, 从而他们有相同的特征值.

命题 设 A 是 C 上的 n 阶方阵,$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值, 则
(1)$tr(A) = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i$
(2)$det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

推论 n 阶方阵 A 可逆当且仅当他的 n 个特征值都不是 0.

定理 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, 则属于 A 的不同特征值的特征向量线性无关.

定理 数域 F 上的方阵 A 相似于对角阵的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 如果 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 可以相似对角化.

定理 设 A 是 C 上的 n 阶方阵,λ_i 是 A 的特征值,m_i 是 λ_i 的几何重数,n_i 是 λ_i 的代数重数, 则 $m_i \leqslant n_i$

定理 复方阵 A 可对角化等价于 A 的每个特征值的几何重数等于代数重数.

定理 任何一个 n 阶复方阵 A 都可以相似于一个上三角矩阵, 该上三角矩阵的对角元就是 A 的特征值.

定理 设 V 是欧几里得空间,$<\cdot,\cdot>$ 是 V 上的内积, 则对 V 中任意两个向量 a,b, 都有

$$|<a,b>| \leqslant \sqrt{<a,a><b,b>}$$

命题 欧几里得空间中的正交向量组线性无关.

定理 从 n 维欧几里得空间 V 的任意一组基出发, 可以构造一组标准正交基.

Rmk. 相较于这个定理而言, 这个定理给出的构造方法更加重要.

定理 设 V 是一个 n 维的欧几里得空间,$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 则 $\mathscr{A}$ 是正交变换当且仅当下列两个条件之一成立

(1)$\mathscr{A}$ 保持任意向量的模长不变.

(2)$\mathscr{A}$ 将标准正交基变换为标准正交基.

定理 欧几里得空间中的线性变换 $\mathscr{A}$ 是正交变换当且仅当 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

命题 设 $\mathscr{A}$ 是欧几里得空间 V 上的正交变换, 则

(1)$\mathscr{A}$ 的特征值的模长为 1. 特别地,$\mathscr{A}$ 的实特征值只能是 1 或 -1.

(2) 如果 V 的维数是奇数且 $\mathscr{A}$ 是第一类正交变换, 则 $\mathscr{A}$ 一定存在值为 1 的特征值.

定理 设 $\mathscr{A}$ 是欧几里得空间上的线性变换, 则 $\mathscr{A}$ 是对称变换当且仅当 $\mathscr{A}$ 在任意一组标准正交基下的矩阵是实对称方阵.

定理 设 $\mathscr{A}$ 是欧几里得空间 V 上的对称变换, 则 $\mathscr{A}$ 的不同特征值对应的特征向量正交.

推论 实对称阵 A 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

命题 实对称阵的特征值是实数.

定理 对于任意一个 n 阶实对称矩阵 A, 存在一个 n 阶正交阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 是对角阵.

定理 给定一个实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

则存在正交变换 $x=Py$ 将 Q 化为二次型

$$\tilde{Q}(y_1,\cdots,y_n)=y^TJy=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

这里 $J=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\lambda_i$ 是 A 的特征值. 称 $\tilde{Q}$ 是 Q 的标准型.

定理 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0\\ 0 & -I_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

定理 n 元实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

正定的充要条件是 Q 的正惯性指数为 n. 也就是 A 相合于单位阵.

定理 设 A 是 n 阶实对称方阵.
(1) 若 P 是 n 阶实可逆方阵,$B=P^TAP$, 则 $B>0$ 当且仅当 $A>0$.
(2)$A>0$ 当且仅当 $A=P^TP$, 其中 P 是 n 阶实可逆方阵.
(3) 若 $A>0$, 则 $det(A)>0$.

定理 一个实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

正定的充要条件是,A 的各阶顺序主子式均大于零.

11.3 我认为可以直接使用的结论

下面这些命题或许会在考试中用到, 建议掌握证明

命题 若 A 与 B 相似, 则对任意的正整数 k,A^k 与 B^k 相似, 进而对任意的多项式 f,$f(A)$ 与 $f(B)$ 相似.

命题 若 λ 是 A 的特征值, 则对任意的正整数 k,λ^k 是 A^k 的特征值.

命题 A, B 是同阶方阵, 则 AB 与 BA 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

命题 $A \in C^{m\times n}$, $B \in C^{n\times m}$, 则 AB 与 BA 的非零特征值相同.

命题 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 正定的充要条件是 A 的特征值全大于零.

11.4 例题

11.4.1 线性变换

1. 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times m}$, 则 AB 与 BA 的非零特征值相同.

首先回顾一下我们在学习行列式时的一个结论及证明:
设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是 $n \times m$ 矩阵,$\lambda \in C$, 则有

$$\lambda^n det(\lambda I - AB) = \lambda^m det(\lambda I - BA)$$

证明如下:
$\lambda = 0$ 时原等式显然成立, 下面考虑 $\lambda \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda A \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ \frac{1}{\lambda} B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda A \\ O & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$$

等式两边同时取行列式, 可以得到

$$\lambda^n det(\lambda I - AB) = \lambda^m det(\lambda I - BA)$$

注意到这个结论中的两个行列式恰好是 AB 与 BA 的行列式, 所以假设 AB 有非零的特征值 λ_0, 则由

$$\lambda_0^n det(\lambda_0 I - AB) = \lambda_0^m det(\lambda_0 I - BA)$$

可得 λ_0 也是 BA 的特征值. 因而 AB 与 BA 的非零特征值相同.

Rmk. 特别地, 如果这里 A, B 都是方阵, 则 AB 与 BA 有相同的特征值.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 由 3 个线性无关的特征向量,$\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

因为 A 由 3 个线性无关的特征向量, 所以 A 可对角化, 从而 A 的每个特征值的代数重数等于几何重数, 则特征值 $\lambda = 2$ 的几何重数是 2, 因此 $rank(2I - A) = 1$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

进而得到 $x = 2, y = -2$. 且特征值 2 对应的特征向量是

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

结合 $tr(A) = \Sigma_{i=1}^3 \lambda_i$ 可得第三个特征值是 6, 解得对应的特征向量是

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

将三个特征向量排列即可得到矩阵 P.

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 求 $a + b$.

由两个矩阵相似可得两个矩阵的特征值相同, 而 -2 显然是 A 的特征值, 从而 -2 是 B 的特征值, 因此 $b=-2$. 由两矩阵相似还可以得到 $tr(A)=tr(B)$, 即 $a-1=b+1$. 所以 $a=0$. 因此 $a+b=-2$.

4. 证明:n 阶全 1 方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\n-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ 相似.

只需要证明两个矩阵都可以相似到同一个对角阵即可. 首先考察 B. 显然 B 有特征值 n, 代数重数为 1, 特征值 0, 代数重数为 $n-1$. 而方程组 $Bx=0$ 有 $n-1$ 个线性无关解 $e_2,\cdots,e_n$, 所以特征值 0 的几何重数是 $n-1$. 因此 B 可对角化.

下面考察 A, 根据上面, 我们可以猜测 A 的特征值也是 n,0, 下面来证明这件事, 并计算出特征值对应的重数.

首先考察方程 $Ax=0$, 这个方程组的一组基解是

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\-1\\1\end{pmatrix}$$

所以 0 是 A 的特征值, 且它的几何重数是 $n-1$, 从而它的代数重数一定大于等于 $n-1$.

考察方程 $(nI-A)x=0$, 注意到

$$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$$

是方程组的一个解, 从而 n 是 A 的一个特征值, 且几何重数至少为 1, 从而 n 的代数重数至少为 1. 又因为 A 的特征值的代数重数之和为 n, 所以 n 的代数重数被迫只能是 1,0 的代数重数被迫只能是 $n-1$. 从而 A 可对角化.

综上可得 A 与 B 都可以相似到对角阵

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

从而他们相似.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_n & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值和特征向量.

首先, 我们记 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 它有性质 $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A = \Sigma_{i=0}^{n} c_i J^i$.

因此, 我们只需要考察方阵 J 的特征值和特征向量即可.

$$|\lambda I_n - J| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

按照第一列展开得到

$$|\lambda I_n - J| = \lambda |diag(\lambda, \cdots, \lambda)| + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = \lambda^n - 1$$

所以得到 J 有 n 个互不相同的特征值

$$\omega_k = cos\tfrac{2k\pi}{n} + isin\tfrac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

解方程得到 ω_k 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以得到 A 的特征值是 $f(\omega_k), 0 \leqslant k \leqslant$, 特征向量就是 J 的特征向量.

11.4.2 欧几里得空间

1.$A \in R^{m\times n}$,$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, $rank(A) = m$, 其中 a_i 是 n 维行向量.$\xi_1, \cdots, \xi_s$ 是方程组 $Ax = 0$ 解空间的一组标准正交基, 证明: $\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T, \xi_1, \cdots, \xi_s$ 线性无关.

假设这组向量线性相关, 则存在一系列系数使得

$$k_1\alpha_1^T + \cdots + k_m\alpha_m^T + l_1\xi_1 + \cdots + l_s\xi_s = 0$$

在等式两边同时对 ξ_j 做内积得到

$$k_1 < \alpha_1^T, \xi_j > + \cdots + k_m < \alpha_m^T, \xi_j > + l_1 < \xi_1, \xi_j > + \cdots + l_s < \xi_s, \xi_j >= 0$$

首先, 因为 ξ_j 是方程组 $Ax = 0$ 的解, 所以我们可以得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \xi_j = \begin{pmatrix} \alpha_1\xi_j \\ \alpha_2\xi_j \\ \cdots \\ \alpha_m\xi_j \end{pmatrix} = 0$$

从而 $< \alpha_i^T, \xi_j >= \alpha_i\xi_j = 0$.

另一方面,ξ_i 是一组标准正交基, 所以对任意的 $i \neq j$,$< \xi_i, \xi_j >= 0$. 因此我们就得到了

$$l_j < \xi_j, \xi_j >= 0$$

从而 $l_j = 0$. 所以原等式就化成了

$$k_1\alpha_1^T + \cdots + k_m\alpha_m^T = 0$$

而由 $rank(A) = m$ 知 α_i^T 线性无关, 从而 $k_i = 0, \forall i$.

综上, 给定向量组线性无关.

2. 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 求 a_{11}.

假设 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a$, 下面对 a 的正负性进行讨论.

(1) 若 $a = 0$, 则由 $A^* = A^T$ 可得

$$a_{11} = A_{11}, a_{12} = A_{12}, a_{13} = A_{13}$$

从而 $A_{11}=A_{12}=A_{13}=0$. 而若 $i>1$, 则 A_{ij} 的第一行全零, 从而 $A_{ij}=0$. 则 A 的所有二阶代数余子式全为 0, 从而 $rank(A)<2$. 若 $rank(A)=1$, 则有 $rank(A^*)=0$, 这与 $A^T=A^*$ 矛盾, 因此 $rank(A)=0$, 所以 $a_{11}=0$ 满足条件

(2) 若 $a>0$, 则类似 (1) 可以得到

$$A_{11}=A_{12}=A_{13}=a>0$$

所以 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3a^2>0$. 由 $A^T=A^*$ 可知

$$|A|=|A^*|=|A|^2$$

所以 $|A|=1$, 则 $3a^2=1$, 结合 $a>0$ 可知 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 若 $a<0$, 同 (2) 一样分析可得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 设 V 是 n 维欧几里得空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$, 对于 s 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times s}$, 其中 $a_{ij}=<\alpha_i,\alpha_j>$, 证明: 矩阵 A 的秩等于向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

假设向量组的秩为 r, 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是极大无关组. 则对任意的 $j>r$, 存在一系列系数使得

$$\alpha_j=\Sigma_{i=1}^r l_{ji}\alpha_i$$

考察 A 的行向量组为 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 则由 A 的定义可知

$$\beta_j=\Sigma_{i=1}^r l_{ji}\beta_i$$

所以 A 的行向量组的秩至多为 r. 即 $rank(A)\leqslant r$.

再考虑 A 的左上角的 r 阶子式, 注意到它是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的 *Gram* 方阵, 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关可知他们的 *Gram* 方阵可逆, 从而 A 有 r 阶非零子式, 所以 $rank(A)\geqslant r$.

综上,$rank(A)=r$.

4. 在 R^3 中给定向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1&1\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$.

(1) 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 经过 *schmidt* 正交化为一组标准正交基 e_1,e_2,e_3.

(2) 令 A 是以 e_1,e_2,e_3 为行构成的三阶方阵, 定义 R^3 上的线性变换

$$\mathscr{A}x:=Ax,x\in R^3$$

证明:$\mathscr{A}$ 是绕某一轴线的旋转变换.

(1)

第一问没什么好说的, 直接计算即可. 答案是

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(2)

借这题讲一下正交矩阵的实相似, 以及旋转矩阵. 先不加证明地给出如下结论

定理. 对于实正交阵 $A \in R^{n\times n}$,A 可以相似对角化. 更一般地, 对于方阵 $A \in R^{n\times n}$, 如果 $AA^T = A^TA$, 那么 A 可以相似对角化.

定理. 对于实正交阵 $A \in R^{n\times n}$, 存在可逆实矩阵 $P \in R^{n\times n}$, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} R_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R_k & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

其中

$$R_i = \begin{pmatrix} cos\theta_i & sin\theta_i \\ -sin\theta_i & cos\theta_i \end{pmatrix}$$

要验证一个矩阵是否为旋转矩阵只需要验证两件事:

i: 这个矩阵是否为正交阵

ii: 这个矩阵的行列式是否为 1

换言之, 旋转矩阵就是行列式为 1 的正交矩阵. 特别的, 对于三阶矩阵而言,

旋转轴就是特征值 1 对应的特征向量 (三阶旋转矩阵一定有特征值 1, 更一般的, 奇数阶旋转矩阵一定有特征值 1), 除 1 之外, 三阶旋转矩阵还有另外两个共轭特征值, 它们可以写作 $cos\theta \pm sin\theta i$, 这里的 θ 就是旋转角

对于 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 只需要计算 $det(A)$ 即可得到 A 是一个旋转矩阵.

如果要确定旋转轴的话, 那么只需要计算特征值 1 对应的特征向量即可.

11.4.3 实二次型

1. 设实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T, \beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$ 非零, 而且 $A = \alpha\beta^T$ 是对称阵

(1) 证明 α, β 是 A 的特征向量.

(2) 证明 $A + I$ 是正定阵当且仅当 α 与 β 的内积大于 -1.

(1) 由 A 对称知道 $\alpha\beta^T = (\alpha\beta^T)^T = \beta\alpha^T$. 设 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = \lambda$, 则

$$A\alpha = \alpha\beta^T\alpha = \lambda\alpha$$

$$A\beta = \beta\alpha^T\beta = \lambda\beta$$

则 α, β 都是 A 的特征向量.

(2) 首先, 考察 $I+A$ 的特征多项式为 $det(\lambda I - I - A) = det((\lambda-1)I - A)$, 所以 $I + A$ 的特征值恰好是 A 的特征值加一. 要证明 $I + A$ 正定, 就是要证明 $I + A$ 的特征值全正, 等价于是要证明 A 的特征值全部大于 -1. 利用线性变换部分的第一道例题中已经证明的结论就可以得到 $A = \alpha\beta^T$ 与 $\beta^T\alpha$ 的非零特征值相同. 注意到 $\beta^T\alpha$ 是一个数, 他的特征值只能是他本身, 所以 A 的特征值全大于 -1 就等价于 $\beta^T\alpha > -1$, 即 α 与 β 的内积大于 -1.

2. 设 A 是 n 阶实对称阵, 证明:

(1) 若存在可逆矩阵 B, 使得 $A = B^TB$, 则 A 的主对角线上的元素全部大于 0.

(2) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 A 的 n 个正交单位特征向量, 对应的特征值是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

(3) 当 $n=3$ 时, 已知 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

, 求 A.

(1) 先证明 A 正定. 对于任意的 $x\in R^n, x\neq 0$ 由 B 可逆知, 存在 $y\in R^n, y\neq 0$, 使得 $x=B^{-1}y$. 则

$$x^TB^TBx=(Bx)^T(Bx)=y^Ty>0$$

从而 $A>0$. 考察 $x=e_i$, 由 $x^TAx>0$ 即可得到 $a_{ii}>0$.

(2) 令 $P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$, 则 P 正交, 且

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}P^T$$

其中 λ_i 是 A 的特征值. 取 A_i 是第 (i,i) 个元素为 λ_i, 其余位置全为 0 的矩阵, 则

$$A=\Sigma_{i=1}^nPA_iP^T$$

经过计算可得 $PA_iP^T=\lambda_i\alpha_i\alpha_i^T$. 则原命题得证.

(3) 令 $P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$, 则

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&-5\\-2&10&-2\\-5&-2&13\end{pmatrix}$$

3. 证明: 若 A 是 n 阶实对称矩阵, 则当实数 t 充分大时,$tI+A$ 正定.

考虑 A 的正交相似标准型

$$A=P\Lambda P^T$$

其中 P 正交阵 Λ 是以 A 的特征值为对角元的对角阵. 则

$$tI+A=tI+P\Lambda P^T=P(tI+\Lambda)P^T$$

因此取 $t > max_{i=1}^{n}|\lambda_i|$,$tI + A$ 的特征值全正, 从而正定.

4. 设 A 是 n 阶正定阵, 证明 $det(I + A) > 1$

因为 A 是正定矩阵, 所以可以将 A 正交相似到对角阵 Λ 且 Λ 的对角元全是正数. 设 $I + A$ 的特征值为 μ_i,A 的特征值是 λ_i. 则由 $det(\lambda I - A) = det((\lambda + 1)I - (I + A))$ 知 $\mu_i = \lambda_i + 1$. 又因为 A 正定, 所以 $\lambda_i > 0$, 从而 $\mu_i > 1$. 所以 $det(I + A) = \Pi_{i=1}^{n}\mu_i > 1$.

5. 设 A, B 是正定阵, 且 $AB = BA$, 证明:AB 是正定阵.

首先证明 AB 是对称阵.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

下面再证明正定性, 即证明 AB 的特征值全大于 0. 设 λ 是 AB 的任意一个特征值,x 是对应的特征向量, 即

$$ABx = \lambda x$$

于是有

$$Bx = \lambda A^{-1}x$$

两边同时左乘 x^T 得到

$$x^T Bx = \lambda x^T A^{-1}x$$

因为 $A > 0$, 所以 $A^{-1} > 0$, 从而得到 $\lambda = \frac{x^T Bx}{x^T A^{-1}x} > 0$.

6. 设 A 的对角元全正, 且 A 是严格主对角占优的对称矩阵, 即对任意的 i, 有

$$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

则 $A > 0$

先来证明 A 可逆. 假设 $|A| = 0$, 则方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$,

记 $|w_i| = max_{j=1}^{n}|w_j|$, 考察第 i 个方程

$$a_{i1}w_1 + \cdots + a_{in}w_n = 0$$

注意到 $w_i \neq 0$, 则

$$-a_{ii} = a_{i1}\frac{w_1}{w_i} + \cdots + a_{i,i-1}\frac{w_i-1}{w_i} + a_{i,i+1}\frac{w_i+1}{w_i} + \cdots + a_{i,n}\frac{w_n}{w_i}$$

等式两边同时取绝对值, 由绝对值的三角不等式可得

$$|a_{ii}| \leqslant \Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}||c_i| \leqslant \Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|$$

这与 A 的严格主对角占优性质矛盾. 因此 $|A| \neq 0$. 下面考虑 A 的特征值. 对 A 的特征多项式 $det(\lambda I - A)$, 当 $\lambda \leqslant 0$ 时

$$det(\lambda I - A) = (-1)^n det(-\lambda I + A)$$

其中 $-\lambda \geqslant 0$, 从而 $-\lambda I + A$ 是严格主对角占优矩阵. 由上面的结论可知,$-\lambda I + A$ 可逆, 从而 $det(\lambda I - A) = (-1)^n det(-\lambda I + A) \neq 0$. 于是 A 的特征值不可能小于等于 0, 而对称阵的特征值一定是实数, 所以 A 的特征值全正. 所以 A 正定.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x| < 3$ 时,$|A| < 10^5$.

注意到 A 是一个对称阵, 所以 A 的特征值都是实数. 对于这题的结论, 我们可以联想到均值不等式

$$\sqrt[5]{\Pi_{i=1}^{5}\lambda_i} \leqslant \frac{\Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i}{5}$$

假如能够使用均值不等式 (条件是 $\lambda_i \geqslant 0$), 那么结合

$$|A| = \Pi_{i=1}^{5}\lambda_i$$

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i$$

就可以得到结论 (后面会说明等号不成立). 那么问题就是均值不等式的使用条件是否成立. 注意到, 在题目条件下,A 一定是一个严格主对角占优矩阵(定义参考本部分第六题), 从而根据第 6 题的结论可以得到 A 正定从而 A 的特征值全部大于 0.

综上, 我们能够得到的结论是当 $|x| < 3$ 时,$|A| \leqslant 10^5$, 那么我们还需要说明等号为什么不成立. 事实上, 假设等号成立, 那么就有 A 的特征值全部是 10. 因为 A 是一个实对称阵, 所以 A 可以相似对角化, 那么 A 可以相似对角化到数量矩阵 $10I$, 但是 $10I$ 只与自身相似, 矛盾. 所以说这里的等号无法取到.