中国科学技术大学数学科学学院
2021—2022学年第二学期考试试卷
■A 卷　　　□B 卷

课程名称　数理方程(B)　　　课程编号　001549

姓名 ________　　　学号________　　　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一(20分=5+5+10)

(1) 设$u=u(x,y),-\infty<x,y<+\infty$，求$u_{xx}=0$ 的通解。

(2) 设$u=u(x,y),-\infty<x,y<+\infty$，求解：

$$\begin{cases} u_{xy}=1, & -\infty<x,y<+\infty \\ u\mid_{x=0}=y,\quad u\mid_{y=0}=x. \end{cases}$$

(3) 设$u=u(t,x),t>0,-\infty<x<+\infty$，求

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}-\sin t, & -\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(0,x)=\sin x,\quad u_t(0,x)=\sin x. \end{cases}$$

二(20分=10+10)

(1) 求以下固有值问题的固有值和固有函数。

$$\begin{cases} [e^{2x}X']'+\lambda e^{2x}X=0, \quad (0<x<1) \\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$$

(2) 设$u=u(t,x),t>0,-\infty<x<+\infty$，求解以下定解问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+2u_x,\ (0<x<1,t>0) \\ u(t,0)=u(t,1)=0, \\ u(0,x)=\delta(x-\frac{1}{2}). \end{cases}$$

三(15分) 求解以下定解问题，其中(r,θ,φ)为球坐标

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0,\ (1<r<2) \\ u\mid_{r=1}=u\mid_{r=2}=3\cos^2\theta. \end{cases}$$

四(15分)设$u=u(t,x,y)$，求解

$$\begin{cases} u_t=2u_{xx}+u_{yy}+u,\ (t>0,-\infty<x,y<+\infty) \\ u\mid_{t=0}=e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

五(15分)设$u=u(t,x,y)$，求解

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy},\ (t>0,x^2+y^2<9) \\ u(t,x,y)|_{x^2+y^2=9}=0 \\ u(0,x,y)=0,u_t(0,x,y)=\delta(\sqrt{x^2+y^2}-2) \end{cases}$$

六(共15分=8+7)已知区域$V=\{(x,y,z)\mid\ x>y+1,-\infty<z<+\infty\}$

1)求出V内泊松方程第一边值问题的格林函数。

2)设$u=u(x,y,z)$，求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+4u_{zz}=0,\ (x>y+1,-\infty<z<+\infty) \\ u\mid_{x=y+1}=\varphi(y,z). \end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2)若ω是$J_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu 1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若ω是$J_\nu'(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu 2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3)勒让德多项式:$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,...,$

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$,递推公式: $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2})$

5) 基本解：$\Delta_2 u=\delta(x,y),U=\frac{\ln r}{2\pi}$；$\Delta_3 u=\delta(x,y,z),U=-\frac{1}{4\pi r}$。由区域D内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是:

$$u(M)=-\int_l\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dl+\iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$

由空间V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求得Poisson 方程第一边值问题解$u(M)$ 的公式是:

$$u(M)=-\iint_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dS+\iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$