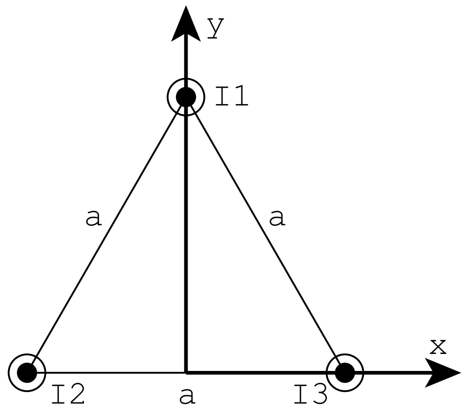
期末考试试卷

一、【18 分】一个理想螺线管 A，管长为 l，半径为 R_1，绕有线圈 n_1 匝，载有电流 I_1，其中铁芯的相对磁导率为 μ_r。

1. 计算螺线管 A 的自感系数。
2. 计算螺线管 A 的磁能密度。
3. 假设螺线管 A 连接一个电阻 R 放电（电流由 I_1 衰减到 0），求能流密度与放电时的输出功率。
4. 假设螺线管 A 外套有共轴螺线管 B，半径为 R_2 $(R_2 > R_1)$，B 绕有线圈 n_2 匝，A, B 分别载有电流 I_1, I_2，两个螺线管完全耦合，并且磁通互相增强。计算两个螺线管储存的总磁能。

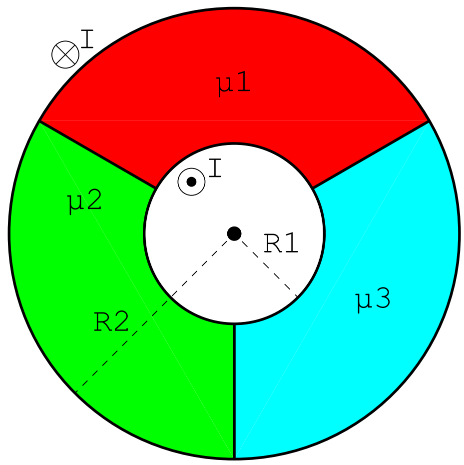
二、【10 分】如图所示，三根无限长导线平行排布，设导线的半径为 R，每两根导线的距离都是 a $(R \ll a)$。三根导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$，求

1. I_1 处的磁感应强度 $\mathbf{B}$。
2. I_1 上单位长度导线长时间平均受力 $\langle \mathbf{F} \rangle$。

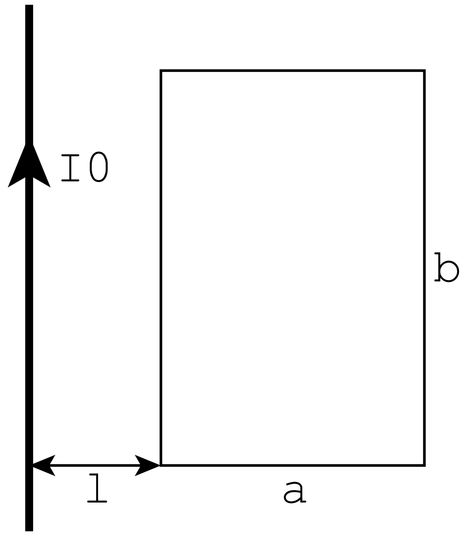


三、【10 分】如图所示，两个同轴圆柱面通有相反电流 I，内外半径分别为 R_1, R_2，两柱面之间充满绝对磁导率为 μ_1, μ_2, μ_3 的三种磁介质，且三种介质各占 1/3 空间。求

1. 空间磁感应强度，磁场强度分布。
2. 介质 1 内部及其界面上的磁化电流密度。



四、【15 分】一根直导线通有稳恒电流 I_0，旁边有一个长方形的导线框架，边长分别为 a, b，质量为 m，总电阻为 R，初始静止在距离直导线为 l 处，如图所示。若直导线上由于开关断开使其电流 I_0 变为 0，求此时线圈的运动速度（不考虑重力）。

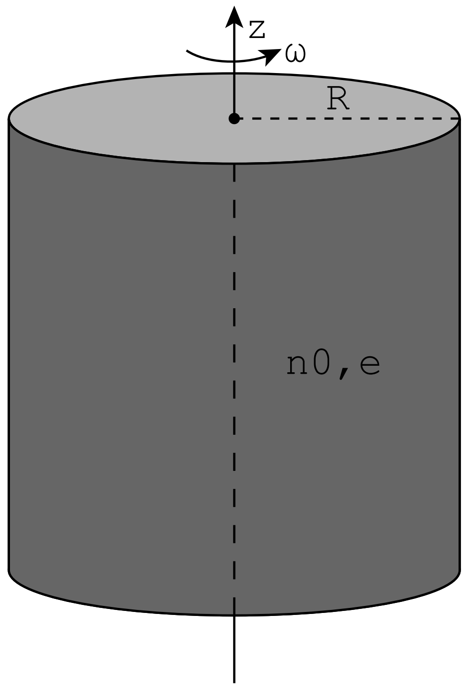


五、【15 分】

1. 计算一个磁化强度为 $\mathbf{M}$ 的均匀磁化球球内任意一点的磁感应强度（因为一个均匀磁化球的磁化电流在球内各处的磁感应强度处处相等，因此只需计算其在球心处所产生的磁感应强度）。
2. 一个相对磁导率为 μ_r 的顺磁性介质球，半径为 R，放置在均匀外磁场 $\mathbf{B}_0$ 中，外磁场方向沿 z 轴，磁介质球被均匀磁化，求该磁介质球的磁化强度 $\mathbf{M}$。

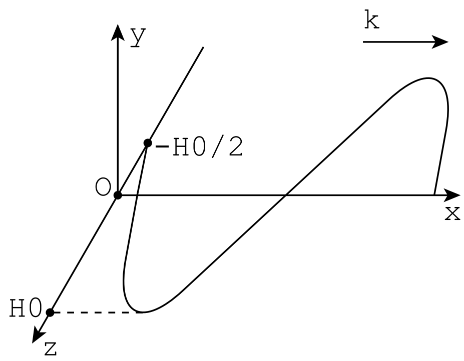
六、【20 分】考虑一个无限长的圆柱形离子云（等离子体），半径为 R，离子数密度均匀且大小为 n_0，每个离子的电荷量为 $+e$，质量为 m。离子云由真空包围，离子云绕中心轴（z 轴）以匀角速度 ω 转动，假设转动是非相对论的。求

1. 半径为 r $(r < R)$ 的电场强度和磁感应强度。
2. 半径为 r $(r < R)$ 的一个离子受到的总作用力，并求电场力和磁场力的比值。



七、【12 分】

1. 写出麦克斯韦方程组的积分形式。
2. 真空中沿 x 轴正向传播的平面电磁波，磁场分量平行于 z 轴，其波动表达式为 $H = H_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)$，其中频率为 ω，波数为 k，幅值为 H_0，初相位为 ϕ_0，在 $t = 0$ 时波形如图，求电场振幅 E_0，并尝试在图中定性画出电场 $t = 0$ 时的波形。
3. 求 t_1 时间内该电磁波辐射到垂直于 x 轴的平面上单位面积的平均能量。



答案

一、

1. 一匝圆环产生的磁感应强度为

$$B_0=\frac{\mu_r\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\left(2\pi R_1\right)}{R_1^2}=\frac{\mu_r\mu_0 I_1}{2R_1},$$

因此，铁芯内部的磁感应强度为

$$B=n_1B_0=\frac{\mu_r\mu_0 n_1 I_1}{2R_1}.$$

磁通量为

$$\Phi=n_1B\left(\pi R_1^2\right)=\frac{\pi\mu_r\mu_0 n_1^2 R_1 I_1}{2},$$

自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{I_1}=\frac{\pi\mu_r\mu_0 n_1^2 R_1}{2}.$$

2. 磁能密度为

$$u_m=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}=\frac{\mu_r\mu_0 n_1^2 I_1^2}{8R_1^2}.$$

3. RL 电路满足常微分方程

$$0=RI+L\frac{dI}{dt},$$

因此

$$\frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt,$$

根据初始条件 $I\Big|_{t=0}=I_1$ 可得

$$I=I_1e^{-Rt/L}.$$

根据第 1 题，铁芯内部的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_r\mu_0 n_1 I_1 e^{-Rt/L}}{2R_1},$$

根据法拉第电磁感应定律可得，距离铁芯中轴线 r 处的电场强度为

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_r \mu_0 n_1 I_1 e^{-Rt/L} R}{4\pi r R_1 L}.$$

因此，能流密度为

$$S = EH = \frac{EB}{\mu_r \mu_0} = \frac{\mu_r \mu_0 n_1^2 I_1^2 e^{-2Rt/L} R}{8\pi r R_1^2 L}.$$

输出功率为

$$\text{Power} = \int_0^{R_1} S(2\pi r) dr = \frac{\mu_r \mu_0 n_1^2 I_1^2 e^{-2Rt/L} R}{4 R_1 L}.$$

4. 总磁能为

$$\text{Energy} = \frac{1}{2} L I_1^2 + \frac{1}{2} L' I_2^2 + \sqrt{LL'} I_1 I_2 = \frac{1}{4}\pi \mu_r \mu_0 \left(n_1 \sqrt{R_1} I_1 + n_2 \sqrt{R_2} I_2\right)^2.$$

二、

1. 磁感应强度大小为

$$B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a},$$

方向向左，因此磁感应强度为

$$\mathbf{B} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a}\mathbf{i} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi a}\mathbf{i}.$$

2. 单位长度导线受力为

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0^2 \sin^2 \omega t}{2\pi a}\mathbf{j} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0^2 (1 - \cos 2\omega t)}{4\pi a}\mathbf{j},$$

因此

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_0^2}{4\pi a}\mathbf{j}.$$

三、

1. 磁感应强度与磁场强度关系为

$$B_i = \mu_i H_1, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

选取半径为 r 的环路，因为环路在边界的切向量与边界垂直，所以根据边界条件，

$$B_1 = B_2 = B_3\,.$$

因为 H_1, H_2, H_3 在平行于边界的分量为 0，所以也满足边界条件。

根据 $\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ 可得

$$\frac{2}{3}\pi r H_1 + \frac{2}{3}\pi r H_2 + \frac{2}{3}\pi r H_3 = I,$$

因此

$$B_1 = B_2 = B_3 = \frac{3I}{2\pi r\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}\right)},$$

$$H_1 = \frac{3I}{2\pi r\mu_1\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}\right)},$$

$$H_2 = \frac{3I}{2\pi r\mu_2\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}\right)},$$

$$H_3 = \frac{3I}{2\pi r\mu_3\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}\right)}\,.$$

2. 因为 $\operatorname{curl}\left(\frac{1}{r}\hat{\theta}\right)=0$ ，所以介质内部没有磁化电流。

因为磁化强度与左表面、右表面均是垂直的「磁化强度 $\mathbf{M}$ 是磁场强度 $\mathbf{H}$ 、磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的线性组合」，所以介质左表面、右表面没有磁化电流。

对于介质上表面、下表面，情况就不同了。上表面外部磁化强度为零，因为外部没有磁介质，所以磁化电流密度为

$$0-\left(\lim_{r\nearrow R_2}\frac{B_1}{\mu_0}-H_1\right)=-\frac{3I}{2\pi R_2\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)}\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_1}\right).$$

负号表示方向纸面向内。

下表面外部磁化强度同样为零，因为外部没有磁介质，所以磁化电流密度为

$$\left(\lim_{r\searrow R_2}\frac{B_1}{\mu_0}-H_1\right)-0=\frac{3I}{2\pi R_1\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)}\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_1}\right).$$

正号表示方向纸面向外。

四、

当直导线电流为 I 时，导线框架的磁通量为

$$\Phi=\int_l^{l+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}b\,dr=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\log\frac{l+a}{l}.$$

导线框架的感应电流为

$$i=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 b}{2\pi R}\frac{dI}{dt}\log\frac{l+a}{l}.$$

导线框架受到的作用力为

$$F=-\frac{\mu_0 I}{2\pi l}ib+\frac{\mu_0 I}{2\pi(l+a)}ib=\frac{\mu_0^2 ab^2}{4\pi^2 l(l+a)R}\frac{IdI}{dt}\log\frac{l+a}{l}.$$

因此，当 I 从 I_0 变为 0 后，导线框架的运动速度为

$$v=\int_0^\infty\frac{F}{m}dt=\frac{\mu_0^2 ab^2}{4\pi^2 l(l+a)Rm}\log\frac{l+a}{l}\int_{I_0}^0 IdI=-\frac{\mu_0^2 ab^2 I_0^2}{8\pi^2 l(l+a)Rm}\log\frac{l+a}{l}.$$

五、

1. 根据题目提示，球内部的磁感应强度是均匀的。假设球内部的磁感应强度与磁场强度为 $\mathbf{B}_1$ 。关于球外部的磁感应强度计算，可以将球视为位于球心的磁矩。这个磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M},$$

因此，在球外部，靠近球面的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{R^5}\right) = \frac{\mu_0}{3}\left(-\mathbf{M} + 3(\mathbf{M}\cdot\hat{r})\hat{r}\right).$$

根据边界条件

$$\mathbf{B}_1\cdot\hat{r} = \mathbf{B}_2\cdot\hat{r},$$

可得

$$\mathbf{B}_1\cdot\hat{r} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}\cdot\hat{r},$$

根据 $\hat{r}$ 的任意性可得

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}.$$

2. 根据第 1 题，球内部的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}.$$

在球外部，靠近球面的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_0 + \frac{\mu_0}{3}\left(-\mathbf{M} + 3(\mathbf{M}\cdot\hat{r})\hat{r}\right).$$

容易验证，在垂直于球面方向的分量，二者磁感应强度是相等的。在球面切平面的投影分量，二者磁场强度分别为

$$\mathbf{H}_1^\top = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\left(\mathbf{B}_1 - (\mathbf{B}_1\cdot\hat{r})\hat{r}\right) = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\left(\mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} - \left(\left(\mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}\right)\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right),$$
$$\mathbf{H}_2^\top = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_2 - (\mathbf{B}_2\cdot\hat{r})\hat{r}\right) = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mu_0\mathbf{M} - \left(\left(\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mu_0\mathbf{M}\right)\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right).$$

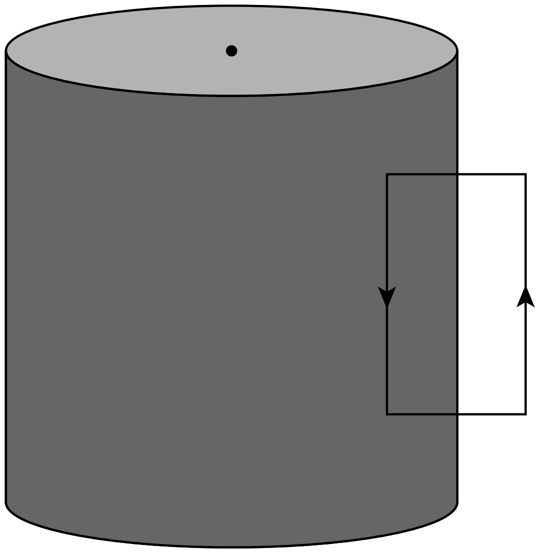
根据边界条件 $\mathbf{H}_1^\top = \mathbf{H}_2^\top$ 可得

$$\mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} = \mu_r\left(\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mu_0\mathbf{M}\right),$$

因此

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{2+\mu_r}\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}.$$

六、



1. 选取半径为 r' 、高度为 h 的闭合圆柱面「图中未画出」，根据高斯定理可得

$$E(2\pi r'h) = \frac{\pi(r')^2 h n_0 e}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{r' n_0 e}{2\epsilon_0}.$$

选取内侧距离中轴线为 r'' ，长度为 l 的环路，如图所示。因为 r 处的电流密度为

$$J = n_0 e\omega r,$$

所以根据环路定理可得

$$Bl = \mu_0\int_{r''}^{R} Jl\,dr = \frac{1}{2}\mu_0 n_0 e\omega l\left(R^2 - (r'')^2\right),$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 n_0 e\omega\left(R^2 - (r'')^2\right).$$

2. 电场力为

$$F_e = eE = \frac{r n_0 e^2}{2\epsilon_0}.$$

磁场力为

$$F_m = e\omega r B = \frac{1}{2}\mu_0 n_0 e^2\omega^2 r\left(R^2 - r^2\right).$$

总作用力为 $F_e + F_m$ 。

这两者的比值为

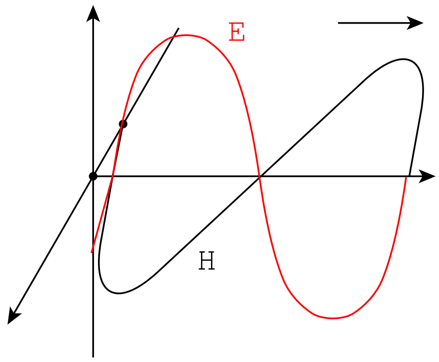
$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{c^2}{\omega^2\left(R^2 - r^2\right)}.$$

因此，电场力是远大于磁场力的。

七、

1. 这用得着写吗

2. 波形如图所示。



磁感应强度的振幅为

$$B_0 = \mu_0 H_0,$$

因此，电场强度的振幅为

$$E_0 = cB_0 = c\mu_0 H_0.$$

3. 根据图片，当 $x = 0, t = 0$ 时， $H = -H_0/2$ 。因此

$$\cos\phi_0 = -\frac{1}{2},$$

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

并且

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0,\ t=0} = -kH_0\sin\phi_0 > 0,$$

这表明

$$\sin\phi_0 < 0,$$

因此

$$\phi_0 = \frac{4\pi}{3}.$$

能流密度为

$$
\begin{aligned}
S = EH = E_0 H_0 \cos^2\left(kx - \omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \\
= c\mu_0 H_0^2 \cos^2\left(kx - \omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \\
= \frac{1}{2}c\mu_0 H_0^2 + \frac{1}{2}c\mu_0 H_0^2 \cos\left(2kx - 2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}
$$

因此，在 $(0, t_1)$ 辐射的单位面积平均能量为

$$
\frac{\text{the average of energy}}{\text{area}} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} S dt = \frac{1}{2}c\mu_0 H_0^2 - \frac{1}{2}c\mu_0 H_0^2 \frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} \sin\left(2kx - \omega t_1 + \frac{\pi}{6}\right).
$$