

2023 秋 离散数学 期末考试

1.

已知: 对完全图 K_{18} 的所有边进行红蓝染色, 则或者存在一个红色 K_5 , 或者同时存在一个红色 K_4 和蓝色 K_3 .

证明: 对完全图 K_{35} 的所有边进行红蓝染色, 则一定存在一个红色 K_5 或者蓝色 K_4 .

2.

请证明以下命题:

- (a) 图同构等价于关联矩阵置换相抵;
- (b) 关联矩阵置换相抵于分块对角等价于图不连通;
- (c) 证明关联矩阵的秩小于等于顶点数减去连通分支的个数.

3.

请证明以下命题:

- (a) 简单连通图有一个圈等价于 $|V| = |E|$;
- (b) 若 $|V| - |E| = k$, 图中存在两个顶点之间有 $k + 1$ 条路径.

4.

证明: 连通简单平面图有一个顶点度数小于等于 5.

5.

请给出以下组合问题的方案数:

- (a) n 对夫妻排成一行, 求每对夫妻不相邻的排法;
- (b) n 对夫妻排成一行, 求每对夫妻不相邻, 且同性不相邻的排法.

6.

对正方形用 n 种颜色染色:

- (a) 用了至多三种颜色的染色数;
- (b) 排除旋转、对称下重复的染色方案求方案数;
- (c) 排除中心对称和绕对角线翻转下重复的方案, 求方案数;
- (d) 在 (c) 的基础上求至多用了三种颜色的染色数.

7.

S 为 n 元集合, f, g 是定义在 S 的子集上的整值函数. 已知对于 S 的偶数元子集, 有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} g(Y)$$

对 S 的奇数元子集, 有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} -g(Y)$$

问题: 对于 S 的奇数元子集 X , 计算

$$\sum_{Y \subseteq X} f(Y)$$