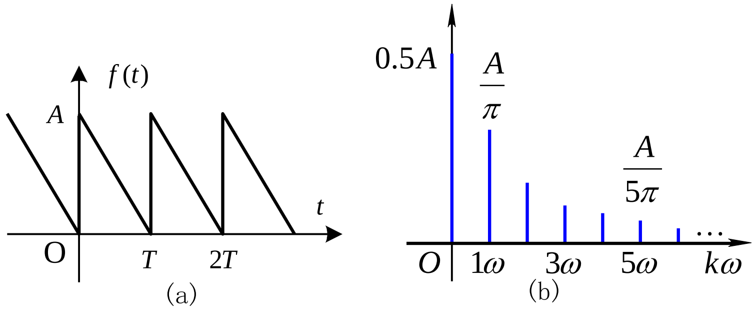
第 6 章 非正弦周期电流电路习题解答

6.1 求图示倒锯齿波的傅里叶级数展开式，并画出频谱图。



图题 6.1

解： $f(t)=A(1-t/T) \quad 0<t<T$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T A(1-t/T)\mathrm{d}t=\frac{A}{T}[t-\frac{t^2}{2T}]\Big|_0^T=0.5A$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T A(1-t/T)\cos(k\omega t)\mathrm{d}t=[\frac{2A(1-t/T)}{Tk\omega}\times\sin(k\omega t)]\Big|_0^T+\frac{2A}{k\omega T^2}\int_0^T\sin(k\omega t)\mathrm{d}t=0$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T A(1-t/T)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=[\frac{-2A(1-t/T)}{Tk\omega}\times\cos(k\omega t)]\Big|_0^T-\frac{2A}{k\omega T^2}\int_0^T\cos(k\omega t)\mathrm{d}t=\frac{2A}{kT\omega}=\frac{A}{k\pi}$$

所以 $f(t)=0.5A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{k\pi}\sin k\omega t$ 　频谱图如图(b)所示。

6.2 图示电路中，电流 $i=2\sqrt{2}\cos(500t+60^\circ)$ A，$C_1=10^{-4}$ F，电压源 $u_S=5+20\sqrt{2}\cos(500t+60^\circ)+8\cos(1000t+75^\circ)$ V。试求 R, L, C_2。

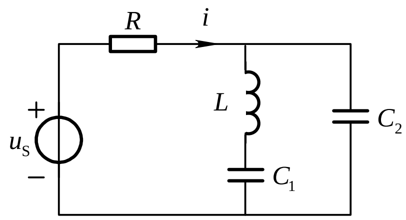


图 题 6.2

解：由于电流中只含基波分量且与电源基波分量具有相同的初相位，则可知右侧部分对基波分量相当于短路，对二次谐波分量相当于开路。

基波作用时电路中相当于只有电阻作用，可得

$$R=\frac{U_{(1)}}{I}=10\Omega$$

LC 部分的总阻抗为 $$Z=\frac{(\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1})(\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2})}{\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}}$$

由右侧部分对基波分量相当于短路可得

此时等效阻抗的分子为零或分母无穷大，由阻抗表达式可知阻抗分子为零可行，可得

$$\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}=0$$

带入已知条件得 $L=\frac{1}{\omega^2 C_1}=0.04\mathrm{H}$

由右侧部分对二次谐波分量相当于开路可得

此时等效阻抗的分母为零或分子无穷大，由阻抗表达式可知阻抗分母为零可行，可得

$$\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}2\omega C_1}+\frac{1}{\mathrm{j}2\omega C_2}=0$$

带入已知条件得 $C_2=\frac{1}{30000}\mathrm{F}\approx 33\mu\mathrm{F}$

6.3 图示电路 N 为无独立源网络，$u=[100\cos(t-45^\circ)+50\cos 2t+25\cos(3t+45^\circ)]\mathrm{V}$，$i=(80\cos t+20\cos 2t+10\cos 3t)\mathrm{mA}$。(1) 求电压 u 和电流 i 的有效值；(2) 求网络 N 吸收的平均功率；(3)求三种频率下网络 N 的等效阻抗。

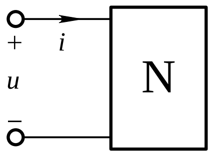


图 题6.3

解: (1) 电压有效值：$U=\sqrt{(\frac{100}{\sqrt{2}})^2+(\frac{50}{\sqrt{2}})^2+(\frac{25}{\sqrt{2}})^2}=81.01\mathrm{V}$

电流有效值 $I=\sqrt{(\frac{80}{\sqrt{2}})^2+(\frac{20}{\sqrt{2}})^2+(\frac{10}{\sqrt{2}})^2}=58.74\text{mA}$

(2)　平均功率 $P=\frac{100\times 80}{2}\cos(-45°)+\frac{50\times 20}{2}\cos 0°+\frac{25\times 10}{2}\cos 45°=3.42\text{kW}$

(3)　$Z_{(1)}=\frac{100\angle-45°\text{V}}{80\angle 0°\text{mA}}=1.25\angle-45°\text{k}\Omega$　　$Z_{(2)}=\frac{50\angle 0°\text{V}}{20\angle 0°\text{mA}}=2.5\text{k}\Omega$

$Z_{(3)}=\frac{25\angle 45°\text{V}}{10\angle 0°\text{mA}}=2.5\angle 45°\text{k}\Omega$

注释：非正弦周期量分解成傅里叶级数后，某端口的平均功率等于直流分量和不同频率交流分量单独作用产生的平均功率之和。

6.4 线圈接在非正弦周期电源上，其源电压为 $u=[10\sqrt{2}\cos\omega_1 t+2\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t+30^{\circ})]\text{V}$。设 $\omega_1 L=1\Omega$，求线圈电流的瞬时表达式及其有效值，并比较电压和电流所含三次谐波百分数。

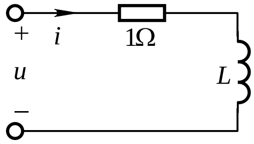


图 题6.4

解: 基波电压单独作用时　$\dot{U}_{(1)}=10\angle 0°\text{V}$，

阻抗　$Z_{(1)}=1\Omega+\text{j}\omega L=(1+\text{j})\Omega$

基波电流相量为：$\dot{I}_{(1)}=\frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}}=\frac{10\text{V}}{(1+\text{j})\Omega}=5\sqrt{2}\angle-45°\text{A}$

瞬时值为：　$i_{(1)}(t)=10\cos(\omega t-45°)\text{A}$

三次谐波单独作用时，$\dot{U}_{(3)}=2\angle 30°\text{V}$，$Z_{(3)}=1\Omega+\text{j}3\omega L=(1+\text{j}3)\Omega$

$$\dot{I}_{(3)}=\frac{\dot{U}_{(3)}}{Z_{(3)}}=\frac{2\angle 30°\text{V}}{(1+\text{j}3)\Omega}=0.632\angle-41.6°\text{A}$$

瞬时值为：$i_{(3)}(t)=0.632\sqrt{2}\cos(3\omega t-41.6°)\text{A}$

由叠加定理得电流瞬时值：$i=i_{(1)}+i_{(3)}=[10\cos(\omega t-45°)+0.632\sqrt{2}\cos(3\omega t-41.6°)]\text{A}$

电流有效值　$I=\sqrt{I_{(1)}^2+I_{(3)}^3}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+0.632^2}=7.1\text{A}$

电压有效值　$U=\sqrt{U_{(1)}^2+U_{(3)}^2}=\sqrt{10^2+2^2}=10.2\text{V}$

电压u中所含三次谐波百分数为　$\dfrac{U_{(3)}}{U}\times100\%=\dfrac{2}{10.2}\times100\%=19.61\%$

电流i中所含三次谐波百分数为$\dfrac{I_{(3)}}{I}\times100\%=\dfrac{0.632}{7.1}\times100\%=8.9\%$

6.5 图示电路中，已知$u_S=(1+\sqrt{2}\cos\omega_1 t+0.2\sqrt{2}\cos 2\omega_1 t)\text{V}$，$\omega_1 L=1/(\omega_1 C)=1\Omega$，$R=1\Omega$。求电压$u$及其电源提供的平均功率。

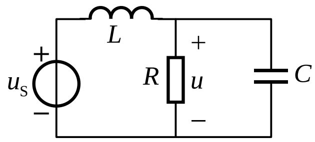


图 题6.5

解：直流$U_{S(0)}=1\text{V}$单独作用时，电感短路，电容开路，故电压u的直流分量为：

$U_{(0)}=1\text{V}$

基波$\dot{U}_{S(1)}=1\angle0°\text{V}$单独作用时，由分压公式得：

$$\dot{U}_{(1)}=\frac{R/(1+\text{j}\omega CR)}{\text{j}\omega L+R/(1+\text{j}\omega CR)}\times\dot{U}_{S(1)}=-\text{jV}$$

瞬时值　$$u_{(1)}=\sqrt{2}\cos(\omega t-90°)\text{V}$$

二次谐波$\dot{U}_{S(2)}=\dfrac{1}{5}\angle0°\text{V}$单独作用时，由分压公式得：

$$\dot{U}_{(2)}=\frac{R/(1+\text{j}2\omega CR)}{\text{j}2\omega L+R/(1+\text{j}2\omega CR)}\times\dot{U}_{S(2)}=0.055\angle146.3°\text{V}$$

瞬时值　$$u_{(2)}=0.055\sqrt{2}\cos(\omega t-146.3°)\text{V}$$

由叠加定理得：$u=U_{(0)}+u_{(1)}+u_{(2)}=1+\sqrt{2}\cos(\omega t-90°)+0.055\sqrt{2}\cos(2\omega t-146.3°)\text{ V}$

电源提供的平均功率等于电阻R吸收的平均功率，故

$$P=\frac{U^2}{R}=\frac{U_{(0)}^2+U_{(1)}^2+U_{(2)}^2}{R}=2.003\text{W}$$

6.6 已知图中$u_S = 4\cos\omega_1 t$ V，$i_S = 4\cos 2\omega_1 t$ A，$\omega_1 = 100\text{rad/s}$。求电流$i$和电压源发出的功率。

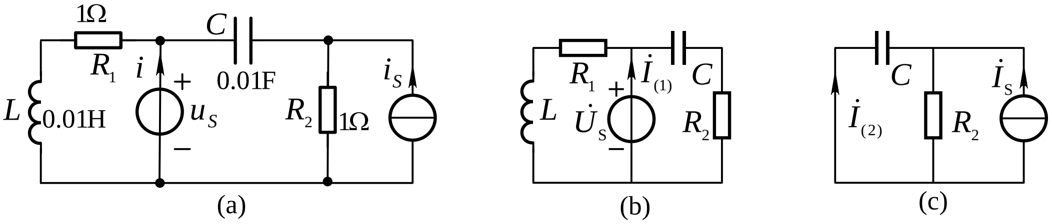


图 题6.6

解：这是两个不同频率的电源同时作用的情况，须用叠加定理计算。

当电压源 $u_S=4\cos(\omega t)$ V 单独作用时，电路如图(b)所示。$\dot{U}_S = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\angle 0°\text{V}$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_S}{(R_1 + j\omega L)//[R_2 + 1/(j\omega C)]} = \frac{4/\sqrt{2}}{\dfrac{(1+j)(1-j)}{(1+j)+(1-j)}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\angle 0°\text{A}$$

瞬时值　　　$i_{(1)}(t) = 4\cos(\omega t)$ A

当电流源 $i_S=4\cos(2\omega t)$ A 单独作用时，电路如图(c)所示。$\dot{I}_S = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\angle 0°\text{A}$

$$\dot{I}_{(2)} = -\frac{R_2}{R_2 + 1/(j2\omega C)} \times \dot{I}_S = -\frac{1}{1-0.5j} \times \frac{4}{\sqrt{2}}\text{A} = \frac{3.57}{\sqrt{2}}\angle 206.56°\ \text{A}$$

瞬时值$i_{(2)}(t) = 3.57\cos(2\omega t + 206.56°)$A

故　$i = i_{(1)} + i_{(2)} = [4\cos(\omega t) + 3.57\cos(2\omega t + 206.56°)]$ A

电流源所产生的电流和电压源的电压不能形成平均功率，故电压源发出功率为：

$$P_u = U_S I_{(1)} \cos 0° = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} = 8\ \text{W}$$

6.7 已知图示电路中$R_1 = 1\Omega$，$R_2 = 3\Omega$，$L = 2\text{H}$，$I_S = 4\text{A}$，$u_S = 4\sqrt{2}\cos 2t$ V 求电流 i 的有效值。

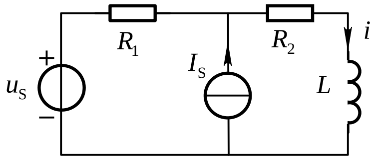


图　题6.7

解：直流电流源单独作用时，电感处于短路。由分流公式得电流 i 的直流分量为：

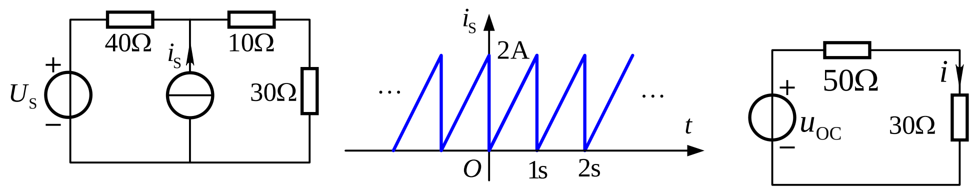
$$I_{(0)}=\frac{R_1}{R_1+R_2}\times I_S=\frac{1}{1+3}\times 4\text{A}=1\text{A}$$

正弦电压源$\dot{U}_S=4\angle 0°\text{V}$单独作用时，由欧姆定律得：

$$\dot{I}_{(1)}=\frac{\dot{U}_S}{R_1+R_2+\text{j}\omega L}=\frac{4}{1+3+\text{j}4}=0.5\sqrt{2}\angle -45°\text{A}$$

$$\text{电流}i\text{的有效值}\ I=\sqrt{I_{(0)}^2+I_{(1)}^2}=\sqrt{1+(0.5\sqrt{2})^2}=1.225\text{A}$$

6.8 图示电路，直流电压源$U_S=160\text{V}$，非正弦周期电流源波形如图(b)所示。求30Ω电阻消耗的平均功率。



(a)　(b)　(c)

图　题6.8

解：图(a)电路中不含电感和电容，不存在与频率有关的阻抗，因此，不必将非正弦周期电流展开为傅立叶级数形式。在第一个周期内，电流源可表示为

$$i_S=2t\quad(0<t<1\text{s})$$

将图(a)电路化为戴维南等效电路，如图(c)所示。图中

$$u_{OC}=40\Omega i_S+U_S,\qquad i=\frac{u_{OC}}{50+30}=t+2\quad(0<t<1\text{s})$$

30Ω电阻消耗的平均功率为　$P=\frac{1}{T}=\int_0^T i^2(t)R\text{d}t=\int_0^1 30\times(2+t)^2\text{d}t=190\text{W}$

6.9　　图示电路，电压 $u_S(t)=3+5\sqrt{2}\cos t+5\sqrt{2}\cos 2t(\mathrm{V})$，求电阻消耗的功率 P。

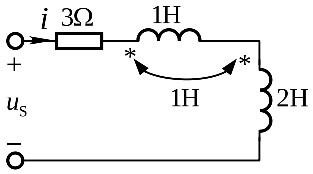


图 题 6.9

解：直流 $U_{S(0)}=3\mathrm{V}$ 单独作用时，耦合电感短路，故电流 i 的直流分量为： $I_{(0)}=1\mathrm{A}$
另外，耦合电感顺接时等效电感为

$$L_{eq}=L_1+L_2+2M=5\mathrm{H}$$

基波 $\dot{U}_{S(1)}=5\angle 0°\mathrm{V}$ 单独作用时，得

$$Z_{(1)}=R+\mathrm{j}\omega L_{eq}=(3+\mathrm{j}5)=\sqrt{34}\angle 59°\Omega$$

所以 $I_{(1)}=\dfrac{U_{(1)}}{|Z_{(1)}|}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\mathrm{A}$

二次谐波 $\dot{U}_{S(2)}=5\angle 0°\mathrm{V}$ 单独作用时，得

$$Z_{(2)}=R+\mathrm{j}2\omega L_{eq}=(3+\mathrm{j}10)=\sqrt{109}\angle 73.3°\Omega$$

所以 $I_{(2)}=\dfrac{U_{(2)}}{|Z_{(2)}|}=\dfrac{5}{\sqrt{109}}\mathrm{A}$

电阻吸收的平均功率为 $P=RI_{(0)}^2+RI_{(1)}^2+RI_{(2)}^2=5.894\mathrm{W}$

6.10 已知图示电路中输入电压 $u_1=(20\cos\omega_1 t+10\cos 3\omega_1 t)\mathrm{V}$，当负载为下列两种情况时分别计算输出电压 u_2：(1)负载为电阻 $R=10\Omega$；(2)负载为电感，且 $\omega_1 L=2\Omega$。

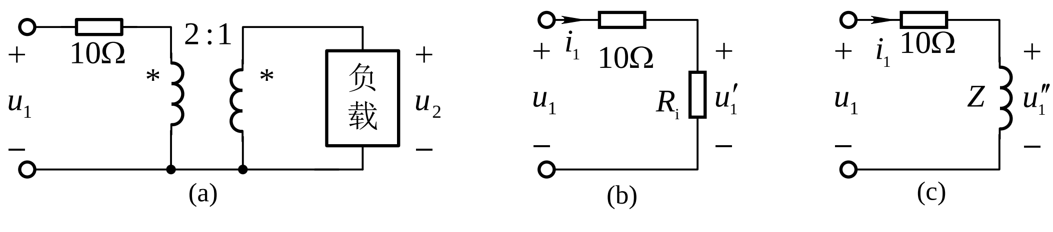


图 题6.10

解：（1）等效电路见图 (b)，其中 $R_i=n^2R=40\Omega$，整个电路为电阻性电路。

$$u_2 = \frac{1}{n} \times u_1' = \frac{1}{2} \times \frac{40}{10+40} \times u_1 = [8\cos(\omega t) + 4\cos(3\omega t)]\text{V}$$

（2）等效电路见图 (c)，

其中对基波 $Z_{(1)} = n^2 \times \text{j}\omega L = \text{j}8\Omega$，对三次谐波 $Z_{(3)} = n^2 \times \text{j}3\omega L = \text{j}24\Omega$

当基波单独作用时，由理想变压器特性方程和分压公式得：

$$\dot{U}_{2(1)} = \frac{1}{n} \times \dot{U}''_{1(1)} = \frac{1}{n} \times \frac{Z_{(1)}}{10 + Z_{(1)}} \times \frac{20}{\sqrt{2}}\text{V} = \frac{6.247}{\sqrt{2}}\angle 51.34°\text{V}$$

$$u_{2(1)}(t) = 6.247\cos(\omega t + 51.34°)\text{V}$$

三次谐波单独作用时，由理想变压器特性方程和分压公式得：

$$\dot{U}_{2(3)} = \frac{1}{n} \times \dot{U}''_{1(3)} = \frac{1}{n} \times \frac{Z_{(3)}}{10 + Z_{(3)}} \times \frac{10}{\sqrt{2}}\text{V} = \frac{4.615}{\sqrt{2}}\angle 22.6°\text{V}$$

$$u_{2(3)}(t) = 4.615\cos(3\omega t + 22.6°)\text{V}$$

由叠加定理得 $u_2 = u_{2(1)} + u_{2(3)} = [6.247\cos(\omega t + 51.34°) + 4.615\cos(3\omega t + 22.6°)\ ]\text{V}$