第 9 章综合习题

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

证明 (必要性) 设有一元可微函数 $F(s)$ 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n). \tag{1}$$

记 $s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_iF'(s),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

故

$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_ia_jF'(s) = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

(充分性) 设有

$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j},\ i,j = 1,2,\cdots,n.$$

记

$$F(s) = f\left(\frac{s}{a_1},0,\cdots,0\right),$$

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n).$$

则有

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{a_1x+1+\cdots+a_nx_n}{a_1},0,\cdots,0\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{a_1x+1+\cdots+a_nx_n}{a_1},0,\cdots,0\right)\frac{a_i}{a_1},$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{a_1x+1+\cdots+a_nx_n}{a_1},0,\cdots,0\right)a_1$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 2,3,\cdots,n.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

因而, $\frac{\partial(g-f)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 这说明 $g-f$ 是常数. 注意到 $g(0,0,\cdots,0)=f(0,0,\cdots,0)$. 可知 $f=g$.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

3. 若函数 $u = f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z)\ (t > 0)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是:

$$xf'_x(x,y,z) + yf'_y(x,y,z) + zf'_z(x,y,z) = kf(x,y,z). \tag{1}$$

证明 (必要性) 由

$$f(tx_1,ty_1,tz_1) = t^k f(x_1,y_1,z_1),$$

对此式关于变量 t 求导, 得

$$x_1f'_x(tx_1,ty_1,tz_1) + y_1f'_y(tx_1,ty_1,tz_1) + z_1f'_z(tx_1,ty_1,tz_1) = kt^{k-1}f(x_1,y_1,z_1).$$

两边乘以 t, 可得

$$tx_1f'_x(tx_1,ty_1,tz_1) + ty_1f'_y(tx_1,ty_1,tz_1) + tz_1f'_z(tx_1,ty_1,tz_1) = kf(tx_1,ty_1,tz_1).$$

记 $(tx_1,ty_1,tz_1) = (x,y,z)$, 上式就是

$$xf'_x(x,y,z) + yf'_y(x,y,z) + zf'_z(x,y,z) = kf(x,y,z).$$

(充分性) 当 (1) 成立时, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f(tx,ty,tz)}{t^k}\right)=0.$$

因此

$$f(tx,ty,tz)=Ct^k,$$

其中 C 是与 t 无关的量. 取 $t=1$, 得 $C=f(x,y,z)$. 故,

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z).$$

5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续二阶偏导数, 且对任意实数 x,y,z 满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 和

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right). \tag{1}$$

试求 $f(x,y)$.

证明 记 $P=(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3})$. 固定 z 对 (1) 两边求混合偏导数,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P)+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P).$$

在此式中取 $z=-x-y$, 因而 $P=(0,0)$. 故,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=A \text{ 是常数.}$$

由此知存在一元函数 g,h 使得

$$f(x,y)=Axy+g(x)+h(y).$$

由于 $f(x,y)=f(y,x)$. 可知 $g(x)=h(x)$. 因而

$$f(x,y)=Axy+g(x)+g(y). \tag{2}$$

于是

$$f(x,x) = Ax^2 + 2g(x). \tag{3}$$

在 (1) 中令 $z=0$, 得

$$f(x,y) + f(x,0) + f(y,0) = 3f\left(\frac{x+y}{3}, \frac{x+y}{3}\right). \tag{4}$$

由 (2) 得

$$f(x,0) = g(x) + g(0). \tag{5}$$

结合 (2),(4),(5) 可得

$$Axy + 2g(x) + 2g(y) + 2g(0) = \frac{A}{3}(x+y)^2 + 6g\left(\frac{x+y}{3}\right). \tag{6}$$

对此式关于变量 x 求二阶导数, 得

$$2g''(x) = \frac{2A}{3} + \frac{2}{3}g''\left(\frac{x+y}{3}\right).$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

再取 $y = 2x$, 得

$$g''(x) = \frac{A}{2}.$$

于是

$$g(x) = \frac{A}{4}x^2 + C_1 x + C_2,$$

这里 C_1, C_2 是常数. 将上式代入 (2), 可得

$$f(x, y) = a(x^2 + 4xy + y^2) + b(x + y) + c,$$

这里 $a = \frac{A}{4}$, $b = C_1$, $c = 2C_2$ 都是常数.

6. 证明不等式 $\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant \mathrm{e}^{x+y-2}\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

证明 令 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 则 f 连续可导, 在第一象限非负, 且

$$\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

于是 $f(x,y)$ 在第一象限可取到最大值. 若最大值在第一象限内部取到, 则最大值点是驻点. 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - x^2 - y^2)e^{-x-y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - x^2 - y^2)e^{-x-y},$$

令此二式为零, 可得第一象限内部的唯一驻点 $(1,1)$. 在 x 轴上, 有 $f(x,0) = x^2e^{-x}$, 它在 $x=2$ 取最大值. 在 y 轴上, 有 $f(0,y) = y^2e^{-y}$, 它在 $y=2$ 取最大值. 由于 $f(1,1) = 2e^{-2}$, $f(2,0) = f(0,2) = 4e^{-2}$. 这说明, $f(x,y)$ 在第一象限的最大值为 $4e^{-2}$. 故,

$$(x^2+y^2)e^{-x-y} \leqslant 4e^{-2}.$$

即,

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant e^{x+y-2}.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

7. 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u=f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明 u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

证明 对任意固定的 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在闭单位球 $B=\overline{B(M_0,1)}$ 上连续, 故存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right|\leqslant C, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right|\leqslant C,\ P\in B.$$

当 $(x,y,z)\in B$, 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta,\eta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y,z)-f(x_0,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y,z)(x-x_0),$$

$$f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\eta(y-y_0),z)(y-y_0).$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)|=|f(x,y,z)-f(x_0,y,z)+\\ f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)+f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\ \leqslant C|x-x_0|+C|y-y_0|+|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|.\end{aligned}$$

再根据 f 关于 z 的连续性, 可得 f 在 M_0 连续.

8. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, $f\in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,\ ((x,y)\in D),$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

证明 因为 D 是包含原点的凸区域, 对于 $(x,y)\in D$ 及 $t\in[0,1]$, 有 $(tx,ty)\in D$. 令 $\varphi(t)=f(tx,ty)$. 则 φ 在 $[0,1]$ 可导, 且

$$\varphi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=0.$$

这说明 φ 是常数. 故, $\varphi(1)=\varphi(0)$. 即, $f(x,y)=f(0,0)$.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

9. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1, g_2 使得

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

证明 令

$$g_1(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y), & x = 0 \end{cases}$$

$$g_2(x,y) = \begin{cases} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}, & y \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), & y = 0 \end{cases}$$

由 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 可知 g_1, g_2 都是连续函数. 显然有

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

注 此题的条件可减弱为: $f \in C(\mathbb{R}^2)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $f(0,0)=0$. 证明如下:

由 f 在 $(0,0)$ 可微及 $f(0,0)=0$, 知

$$f(x,y)=ax+by+R(x,y),$$

其中 $a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $b=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, 且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(x,y)}{\rho}=0,\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

取

$$g_1(x,y)=\begin{cases} a+\frac{xR(x,y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

$$g_2(x,y)=\begin{cases} b+\frac{yR(x,y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ b, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

由

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{xR(x,y)}{x^2+y^2}=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{yR(x,y)}{x^2+y^2}=0,$$

可知 g_1, g_2 是 $\mathbb{R}^2$ 上连续函数, 且

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

10. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域 U 上有定义, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 求证: 如果 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0,y_0) 处连续, 那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

证明 不妨设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 令

$$g(y)=\begin{cases}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), & y=y_0.\end{cases}$$

当 $y\neq y_0$ 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(x_0,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y)(x-x_0).$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

于是

$$\begin{aligned}
&f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\theta(x-x_0),y)(x-x_0)+g(y)(y-y_0)\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&\quad+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)\\
&\quad+\left[g(y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0).
\end{aligned}$$

当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时, 上式右端的中括号都趋于零, 故,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 这说明 f 在 (x_0,y_0) 可微.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

11. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

证明 若 $u(x,y)=f(x)g(y)$, 则易知 (1) 成立.

若 (1) 成立, 令 $\Phi=\frac{1}{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$. 当 $u(x,y)\neq 0$, 时,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{u^2}\cdot\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0.$$

因而 Φ 与 x 无关, 它仅是 y 的函数. 令

$$g(y)=e^{\int_0^y\Phi(t)\,dt},\ f=\frac{u}{g(y)}.$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot g(y) - u\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2(y)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot g(y) - ug(y)\Phi(y)}{g^2(y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - u\Phi(y)}{g(y)} = 0,$$

这说明 f 仅是 x 的函数. 于是

$$u(x, y) = f(x)g(y).$$

13. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$. 如果 $f(x,0,0)>0$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 成立, 求证: 对任意的 $(x,y,z)\in\mathbb{R}$, 也有 $f(x,y,z)>0$.

证明 根据三元函数中值定理, 存在连接 (x,y,z) 和 $(x+y+z,0,0)$ 的线段上一点 P, 使得

$$f(x,y,z)-f(x+y+z,0,0)=(-y-z)\frac{\partial f}{\partial x}(P)+y\frac{\partial f}{\partial y}(P)+z\frac{\partial f}{\partial z}(P).$$

由于三个偏导数相等, 可知 $f(x,y,z)=f(x+y+z,0,0)>0$.

14. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

证明 首先, f 在 D 上的最大值是存在的. 若最值点在内部, 则它是驻点. 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 可得 f 的驻点为 $(0,\pm 1)$, $(\frac{1}{2},0)$. 因为 $f(0,1)=f(0,-1)=0$, $f(\sqrt{2},0)>0$, $f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}<0$, 所以 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 不是 f 在 D 上的最值点.

在圆周 $x^2+y^2=2$ 上,

$$f(x,y)=h(x)=-x^3+x^2+x.$$

它有驻点 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$. 因为 $h(1)=1$, $h(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{27}$. 又 $h(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $h(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$. 所以 f 在 $(-\sqrt{2},0)$ 取最大值 $2+\sqrt{2}$, 在 $(\frac{1}{2},0)$ 取最小值 $-\frac{1}{4}$.