第11章复习提纲

一、曲线曲面参数表示:

曲线: $L: \boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\ t\in[\alpha,\beta]$.

单位切向量 $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$

弧长元: $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$,

曲面: $S: \boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\ (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$.

单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}'_u(u,v)\times\boldsymbol{r}'_v(u,v)}{|\boldsymbol{r}'_u(u,v)\times\boldsymbol{r}'_v(u,v)|}$

面积元: $\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}'_u(u,v)\times\boldsymbol{r}'_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

特别 由显函数表示曲线或曲面可看成是特殊的参数表示:

$y=f(x),x\in[a,b]\Longrightarrow\boldsymbol{r}(x)=x\boldsymbol{i}+f(x)\boldsymbol{j},\ x\in[a,b],\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

$z=f(x,y),\ (x,y)\in D\Longrightarrow\boldsymbol{r}(x,y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+f(x,y)\boldsymbol{k},\ (x,y)\in D$.

$\boldsymbol{r}'_x\times\boldsymbol{r}'_y=(-f'_x,-f'_y,1),\ \mathrm{d}S=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

二、曲线曲面积分的计算

数量场曲线积分:

$$\int_L\phi(x,y,z)\ \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\phi(x(t),y(t),z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

当 $\phi=1$, 就得到曲线的长度: $\sigma(L)=\int_\alpha^\beta|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$.

数量场曲面积分:

$$\iint_S\phi(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_D\phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

当 $\phi=1$, 就得到曲面的面积: $\sigma(S)=\iint_D|\boldsymbol{r}'_u(u,v)\times\boldsymbol{r}'_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

向量场曲线积分:($\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$)

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s&=\int_{L_{AB}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}t\\&=\int_{L_{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

向量场曲面积分:($\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$)

$$\begin{aligned}\iint_S(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S&=\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_D\begin{vmatrix}P&Q&R\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\&=\iint_D\left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

三、Green、Gauss 和 Stokes 公式

Green **公式**. **条件**: $L=\partial D$ 平面封闭曲线, 方向逆时针,P,O在D上连续可微.

$$\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

Gauss **公式**.**条件**: $S=\partial V$封闭曲面, 方向外侧.P,Q,R在V上连续可微.

$$\oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

$$\oiint_S\boldsymbol{v}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_S\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V=\iiint_V\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V.$$

Stokes **公式**.**条件**: $L=\partial S$空间封闭曲线, L 方向与 S 方向成右手系.P,Q,R在S上连续可微.

$$\begin{aligned}\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\&=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\oint_L\boldsymbol{v}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

注意 1、当曲线曲面用参数表示后, 积分就化为定积分或重积分,因此可利用积分和重积分性质(如积分区域分段(片)、积分中值定理等)进行计算或证明.

2、灵活发挥概念和性质在证明和计算中作用! 并充分考虑积分区域或被积数量场(向量场)对称性!

3、对不封闭的曲线(面),通过增加简单线(面)使之成为封闭曲线(面),再利用Gauss-Stokes公式.

四、保守场

保守场: $\boldsymbol{v}$ 的曲线积分与路径无关,只与起点和终点有关(或环量为零).

有势场: 存在 ϕ 使得 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$, ϕ 称为**势函数**

无旋场:: $\boldsymbol{v}$ 满足 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$

结论: **保守场** $\Longleftrightarrow$ **有势场** $\Longleftrightarrow$ **无源场**. (第二个等价需增加定义域是曲面单连通.)

推论: 1、保守场的势函数可通过选择特殊路径积分或解下列方程得到:

$$P=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ Q=\frac{\partial\phi}{\partial y},\ R=\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

2、保守场的曲线积分等于势函数ϕ 在终点和起点值的差(类似Newton-Leibniz公式)

$$\int_{L_{AB}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B\mathrm{d}\phi=\phi(B)-\phi(A).$$

六、无源场

无源场: $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$

向量势: 存在向量场 $\boldsymbol{\alpha}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 使得 $\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\boldsymbol{\alpha}=\nabla\times\boldsymbol{\alpha}$.

向量势在相差梯度场意义下唯一. 求解向量势等价于求解一阶微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}&=P(x,y,z),\\ \frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}&=Q(x,y,z),\\ \frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}&=R(x,y,z),\end{aligned}$$

七、例题

1. 求$I=\displaystyle\int_\Gamma\frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,\Gamma:x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{(bt)^2}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\frac{b^2}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}t^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{8b^2}{3a^2}\sqrt{a^2+b^2}\pi^3\end{aligned}$$

2. 求$I=\displaystyle\int_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S,S:x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$, 即上半球.

解 上半球可表示为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2=a^2\}$.因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,(x,y)\in D$$

由对称性可知$\int_S x\,\mathrm{d}S=\int_S y\,\mathrm{d}S=0$, 因此

$$I=\int_S z\,\mathrm{d}S=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a\int_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a^3$$

3. 设 a,b,c 不全为零,L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $ax+by+cz=0$ 的交线,方向与向量 $\boldsymbol{n_0}=(a,b,c)$ 形成右手系.计算

$$\oint (bz+c)\,\mathrm{d}x+(cx+a)\,\mathrm{d}y+(ay+b)\,\mathrm{d}z$$

解: 因平面过原点，所以与设球面交线 L 是大圆,记大圆盘为 D, L 是其边界.D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{n_0}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 根据 Stokes 公式,有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iint_D \begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ bz+c&cx+a&ay+b\end{vmatrix}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\\ &=\iint_D \boldsymbol{n_0}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\pi R^2\end{aligned}$$

4. 求 $I=\iint_S (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $a,b,c>0$, $S:x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 上半球的上侧.

解: 在曲面 S 加上圆盘 $D^-:x^2+y^2\leqslant 1, z=0$, 方向朝下.根据Gauss 公式

$$\iint_{S+D^-}(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

在D_+上, 利用对称性

$$\begin{aligned}&\iint_{D^+}=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{y^2+x^2\leqslant 1}(ay^2+bx^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,\\ &\Longrightarrow I=\iint_{D^+}=\frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{a+b}{4}\pi.\end{aligned}$$

5. 计算$I=\oint_L \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s$.其中$L=\partial D$是简单光滑闭曲线, $\boldsymbol{r}=(x,y), r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}, \boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$是 L上单位外法向量.

解 L的切向量可由外法向量$\boldsymbol{n}$逆时针旋转90°得到

$$\boldsymbol{\tau}=(\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}),\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}))=(-\sin\alpha,\cos\alpha),$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$得 $\mathrm{d}x=-\sin\alpha\,\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}y=\cos\alpha\,\mathrm{d}s$.而$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{1}{r}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)$, 所以

$$I=\oint_L \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\oint_L \frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{r^2}\,\mathrm{d}s=\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{r^2}.$$

1. 当$(0,0)\notin D$时, $P(x,y)=\dfrac{-y}{r^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{r^2}$ 在D 中连续可微, 不难验证

$$Q'_x-P'_y=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=0,$$

$$\Longrightarrow I=\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{r^2}=0.$$

2. 当$(0,0)\in D$的内部时, 以充分小ε为半径作圆L_ε,记以L和L_ε为边界的区域为$\widetilde{D}$. 则P,Q在$\widetilde{D}$上连续可微, L_ε上单位法向量指向原点$\boldsymbol{n}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\Longrightarrow\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=-1$,所以

$$\begin{aligned}I&=\oint_L\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s+\oint_{L_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s-\oint_{L_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s\\&=\iint_{\widetilde{D}}\left[\left(\frac{x}{r^2}\right)'_x+\left(\frac{y}{r^2}\right)'_y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\oint_{L_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

上式右端第一项积分为零,所以

$$I=-\oint_{L_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s=\oint_{L_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}s=2\pi.$$

6. 设 $C:\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ 是长度为 l 的简单闭曲线, $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\nabla F\neq 0$. $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为 C 围成的区域, 计算

$$\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 等值线 C 的法向量是 $\nabla F(x,y)$, $(x,y)\in C$. 根据 D 的定义, 对 $(x_0,y_0)\in C$ 以及任意方向 $\boldsymbol{e}$,

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-F(x_0,y_0)}{t}=\nabla F(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}$$

若 $\boldsymbol{e}$ 指向 D 的内部, 则 $(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\in D$, $(t>0)$, 所以 $F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)>0$, $F(x_0,y_0)=0$, 即

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-F(x_0,y_0)}{t}=\nabla F(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}\geqslant0,$$

法向量与 $\boldsymbol{e}$ 夹锐角, 也就是说 $\nabla F(x_0,y_0)$ 是等值线 C 的**内法向量**. 因此,

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_x\boldsymbol{i}+F'_y\boldsymbol{j})$$

是 C 的单位内法向量. 将其顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得 C 的单位切向量:

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_y\boldsymbol{i}-F'_x\boldsymbol{j}),$$

方向指向逆时针方向.因此对 $\boldsymbol{\tau}$ 在 C 上作曲线积分, 一方面

$$\oint_C \boldsymbol{\tau}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}s = l,$$

另一方面, 利用Green 公式得

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{\tau}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_D \left(-\frac{\partial(F'_x/|\nabla F|)}{\partial x} - \frac{(\partial F'_y/|\nabla F|)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= -\iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\Longrightarrow \iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -l\end{aligned}$$

7. 设 $f(x)$ 有连续的导数,$f(0)=0$, 若$\int_C (\mathrm{e}^x+2f(x))\,y\,\mathrm{d}x + f(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关,求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (\mathrm{e}^x+2f(x))\,y\,\mathrm{d}x + f(x)\,\mathrm{d}y$$

解: 由积分与路径无关的条件推出$f(x)$满足的方程并求解

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \Longrightarrow f'(x) - (\mathrm{e}^x + 2f(x)) = 0 \Longrightarrow f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(-\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x}\right) y\,\mathrm{d}x + \left(-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,0)} + \int_{(1,0)}^{(1,1)}\\ &= 0 + \int_0^1 (-\mathrm{e}+\mathrm{e})\,\mathrm{d}y = 0\end{aligned}$$

8. 求 $\boldsymbol{v} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\boldsymbol{j} - \frac{xy}{z^2}\boldsymbol{k}$的势函数.

解 向量场$\boldsymbol{v}$的定义域$V = \{(x,y,z)|y\neq 0, z\neq 0\}$不是连通区域.在$y>0, z>0$上,

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{(0,1,1)}^{(x,y,z)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{(0,1,1)}^{(x,1,1)} (1-1+1)\,\mathrm{d}x + \int_{(x,1,1)}^{(x,y,1)} \left(x + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \int_{(x,y,1)}^{(x,y,z)} -\frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^x \mathrm{d}x + \int_1^y \left(x + \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \int_1^z \frac{xy}{z^2}\,\mathrm{d}z = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}.\end{aligned}$$

不难验证$\varphi(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$也是整个$V$上势函数.也可以通过解下列方程

$$\varphi'_x = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z},\ \ \varphi'_y = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2},\ \ \varphi'_z = -\frac{xy}{z^2}.$$

由第一个方程解得$\varphi(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + f(y,z)$,代入其他两个方程得$f(y,z) =$常数.

9. 设$f(x,y,z)$连续, $B_r(P_0):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$, 证明

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S = f(P_0).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint\limits_{B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S.$$

证明 令 $x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ y=y_0+\sin\theta\sin\varphi,\ z=z_0+\cos\theta,$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S &= \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= r^2\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)\end{aligned}$$

注意二重积分中被积函数是参变量r的连续函数, 因此极限和积分可交换

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S \\ &\quad= \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &\quad= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0,y_0,z_0)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = f(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

对于第二个等式, 有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}V &= \int_0^r \mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+\rho\sin\theta\cos\varphi, y_0+\rho\sin\theta\sin\varphi, z_0+\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^r \mathrm{d}\rho\left(\oiint\limits_{\partial B_\rho(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iiint\limits_{B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S.$$

第12章复习提纲

一、$f(x)$的Fourier级数收敛性（Dirichlet定理）

理论上Dirichlet 定理针对周期函数,实际上只需考虑定义在有限区间（例如 $[-\pi,\pi]$）上的函数. 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积、逐段可微

$$f(x)\longrightarrow\{a_n,b_n\}\longrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x)\ (x\in[-\pi,\pi])$$

其中$S(x)$称为$f(x)$的Fourier级数的和函数.

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{是}f(x)\text{的间断点}\\ f(x) & x\text{是}f(x)\text{的连续点}\ .\\ \dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} & x=\pm\pi\end{cases}$$

注意: $f(x)$与其Fourier级数的和函数$S(x)$差别. 只有再加$f(x)$连续的条件,$f(x)$的Fourier级数一致收敛于$f(x)$,也就是$S(x)=f(x)$.

二、$f(x)$的正弦级数（展开）和余弦级数（展开）

1. 设$f(x)$ 在$[0,\pi]$上有定义.对$f(x)$作奇延拓

$$f_o(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x\leqslant\pi;\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

再计算$f_o(x)$的Fourier级数,其中Fourier系数和Fourier级数为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_o(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_o(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{是}f(x)\text{的间断点}\\ f(x) & x\text{是}f(x)\text{的连续点}\\ 0 & x=0,\pi\end{cases}\ (x\in[0,\pi])$$

2. 设$f(x)$ 在$[0,\pi]$上有定义.对$f(x)$作偶延拓

$$f_e(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ f(-x), & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

再计算$f_e(x)$的Fourier级数,其中Fourier系数和Fourier级数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_o(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_o(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{是}f(x)\text{的间断点}\\ f(x) & x\text{是}f(x)\text{的连续点}\end{cases}\quad(x\in[0,\pi])$$

三、一般区间$[-l,l]$（特别注意$[-1,1]$）上的Fourier展开

设$f(x)$在$[-l,l]$上可积且绝对可积、逐段可微.通过变换 $x=\frac{l}{\pi}t$, 得到定义在$[-\pi,\pi]$上的 $g(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, 计算$g(t)$的Fourier级数再由$f(x)=g(\frac{\pi}{l}x)$得到$f(x)$的Fourier级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\begin{cases}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x\text{是}f(x)\text{的间断点}\\ f(x) & x\text{是}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{f(-l)+f(l)}{2} & x=\pm l\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,\cdots),$$

四、Parseval 等式以及 Fourier 级数的逐项积分

1. $L^2[-\pi,\pi]$（可积平方可积）中的内积和三角函数系在$L^2[-\pi,\pi]$中的正交性.

2.平方平均收敛和 Parseval等式.

设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$,则$f(x)$ 的Fourier级数前n项部分和S_n平方平均收敛于$f(x)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(S_n(x)-f(x))^2\,\mathrm{d}x=0,$$

上式等价于下列Parseval等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

并对Fourier系数推出下列结论

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0;\end{cases}$$

3. Fourier**级数逐项可积性**. 设$f \in L^2[-\pi, \pi]$, 对任意的$[a, b] \subset [-\pi, \pi]$,有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

五、例子

1.求 $f(x) = \mathrm{e}^{ux}$ 在 $[-1, 1]$ 的Fourier 展开,并计算$S(1)$的值.

解: $a_0 = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{u}\sinh u;$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux} \cos n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{u}{n\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux} \sin n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{u}{n\pi} b_n \\ &= \frac{2u}{(n\pi)^2}(-1)^n \sinh u - \frac{u^2}{(n\pi)^2} a_n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{(-1)^n 2u \sinh u}{u^2 + (n\pi)^2},\ b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi \sinh u}{u^2 + (n\pi)^2}$$

因为 $f(x)$ 连续, 端点 $f(\pm 1) = \mathrm{e}^{\pm u}$, 因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{u}\sinh u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2u \sinh u}{u^2 + (n\pi)^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi \sinh u}{u^2 + (n\pi)^2} \sin n\pi x \\ &= S(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{ux}, & |x| < 1, \\ \cosh u, & x = \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

由此得到在 $x = 1$ 处, $S(1) = \frac{1}{u} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 + (n\pi)^2} = \frac{\cosh u}{\sinh u} \neq f(1) = \mathrm{e}^1.$

2.求$f(x) = 1 (0 < x \leqslant \pi)$ 的正弦级数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 的和.

解: 作奇延拓$f_o(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

$$\Longrightarrow a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi},$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = S(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, x = \pm\pi \end{cases}$$

由Parseval 等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2, \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

再对展开式在 $[0,x]$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 上积分

$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\,\mathrm{d}t,\Longrightarrow x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi x}{4}$$

3. 设 $f(x)=(a\cos 2x+b\sin 2x)^2$, $a,b\in\mathbb{R}$, $x\in[-\pi,\pi]$, 求 $f(x)$ 的Fourier 级数,并计算 $\int_{-\pi}^{\pi}(a\cos 2x+b\sin 2x)^4\,\mathrm{d}x$

解 此题中$f(x)$本身就是三角多项式.展开后直接得到Fourier级数:

$$\begin{aligned}f(x)&=a^2\cos^2 2x+b^2\sin^2 2x+2ab\cos 2x\sin 2x\\&=a^2\frac{1+\cos 4x}{2}+b^2\frac{1-\cos 4x}{2}+ab\sin 4x\\&=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}\cos 4x+ab\sin 4x.\end{aligned}$$

因此其Fourier系数只有 $a_0=a^2+b^2$, $a_4=\dfrac{a^2-b^2}{2}$, $b_4=ab$,其他系数均为零$a_n=b_n=0$ $(n\neq 4)$. 由Parseval等式得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(a\cos 2x+b\sin 2x)^4\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{2}+\frac{(a^2-b^2)^2}{4}+a^2b^2\right)=\frac{3\pi}{4}(a^2+b^2)^2.$$

4. 设 f 可积且绝对可积函数. 证明: 若 f 在 $(0,2\pi)$ 上递减, 则 $b_n\geqslant 0$.

证明

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi}f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^{\pi}f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\right]\sin x\,\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

5.设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 在 $x=0$ 处可导. 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明 对在 $[-\pi,0]$ 上积分部分作变换 $x=-t$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}(1-\cos nx)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} & x\neq 0,\\ 2f'(0) & x=0.\end{cases}$$

在 $[0,\pi]$ 连续, 因此可积且平方可积, 由Bessel 的推论得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

所以原式成立.

第13章复习提纲

一、两种广义积分的收敛性:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x;\quad \text{(无限区间上积分)}$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x.\quad \text{(瑕积分)}$$

1、广义积分的计算与通常积分无异,可以采用换元,分部,原函数等方法.

2、通过换元, 两种广义积分、常义积分之间可以互换,只是要对齐积分限. 例如

$$x = \arctan t : t\in(0,+\infty) \longrightarrow x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \ x=\frac{1}{u} : u\in(0,1)\longrightarrow x\in(1,+\infty)$$

3、如果积分区间既是无穷的, 又有瑕点, 要分开独立讨论收敛性.

二、判别法(当广义积分积不出来, 可以用判别法判别收敛性).

1. Cauchy **收敛准则**.

2. **绝对收敛和条件收敛**.

3. **正项函数积分的比较判别法(通常采用极限形式)**.

主要看当 $x\to\infty$ (或 $x\to a^+$)时无穷小的阶. 常用标准是

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^p}\Longrightarrow\begin{cases}\text{当}p>1 & \text{无穷区间积分收敛,瑕积分发散}\\ \text{当}p=1 & \text{两者都发散}\\ \text{当}p<1 & \text{无穷区间积分发散,瑕积分收敛}\end{cases}$$

4. Dirichlet**和**Abel**一般判别法(关键是如何把被积函数分解成两个部分)**.

5. **积分第二中值公式(连同积分中值公式)常用来证明一些结果**.

三、含参变量积分:

$$\text{第一种情形}\quad \varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{第二种情形}\quad \varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{第三种情形}\quad \varphi(u)=\int_a^{\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

1.**主要目的**: 主要对上述三种情形讨论对参变量的解析性,即连续性(极限和积分交换)、可积性(积分的交换)、可微性(求导和积分的交换)所满足的条件. 第三种情形中若 a 是瑕点, 则断开积分区间分别独立处理.

2. **第二种情形中对参变量求导**, **实际上是复合函数求导**:

$$\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u).$$

3. **第三种情形是含参变量广义积分**,**其解析性质的关键是一致收敛**! ，其中“收敛”是对积分变量而言,“一致”是对参变量 u 在某个范围内而言.

在证明含参变量广义积分连续性和可微性时特别注意灵活使用“内闭一致收敛”.

4. **一致收敛的定义（含**Cauchy **收敛准则）**

与定义等价的表述方式：

对$u\in[\alpha,\beta]$一致收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{A\to\infty}\beta(A)=\lim\limits_{A\to\infty}\sup\limits_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|=0.$

5. Weierstrass **判别法**. 简单实用!

6. Dirichlet **和** Abel **两个一般判别法**.

四、通过对参变量的求导、积分以及利用连续性等计算积分.

1. **将积分中某个常数视为参变量**.

2. **在积分中增加一个含参变量的因子**.

3. **将积分的一部分变成另一个变量的积分**.

五、Euler**积分**.

1. Γ**函数和**B**函数的性质以及特殊点的值**.

2. **利用**Euler**积分计算积分**. 即通过换元或分部积分, 将积分化为Γ函数或B函数.

六、例子

1. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

解： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$, 所以$x=0$ 不是瑕点. 直接用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x-\sin x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}\\&=-\frac{1}{2}\frac{x-\sin x}{x^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1-\cos x}{x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. 设$p>0$,证明广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\,\mathrm{d}x$ 在$0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散, 在 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant1$ 时条件收敛,在$p>1$时绝对收敛.

证明： 当$p>1$时: $\left|\dfrac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^p-1}\sim\dfrac{1}{x^p}\ (x\to+\infty)$, 所以绝对收敛.

对$0<p\leqslant 1$, 在

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$$

中$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$条件收敛.而积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x$ 分两种情况:

当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时

$$\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+1)}=\frac{1}{2}\frac{1-\cos 2x}{x^p(x^p+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^p(x^p+1)}-\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}\right)$$

其中$\frac{1}{x^p(x^p+1)}\sim\frac{1}{x^{2p}}$ $(x\to+\infty)$, 所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p(x^p+1)}$发散.而

$$\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}=\frac{\cos 2x}{x^p}-\frac{\cos 2x}{x^p+1}$$

分别由Dirichlet判别法得$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)}$收敛, 所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x$ 发散, 推出原积分发散.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时

$$\left|\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\right|\leqslant\frac{1}{x^p(x^p-1)}\sim\frac{1}{x^{2p}}\ (x\to+\infty)$$

所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}\,\mathrm{d}x$绝对收敛,但此时$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$条件收敛, 所以原积分条件收敛.

3. 证明 $\varphi(u)=\int_0^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛,但是在$(0,+\infty)$ 上连续.

证明: 显然 $\int_A^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-uA}\Longrightarrow\sup\limits_{u>0}\int_A^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x=1\nrightarrow 0$ 所以在$(0,+\infty)$ 不一致收敛.但是**内闭一致收敛**, 即 $\forall u_0>0$, 取 $\delta>0$ 满足 $u_0>\delta>0$ 在 $[\delta,\infty)$ 上

$$\sup_{u>\delta}\int_A^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0,(A\to\infty)$$

所以积分在 $[\delta,\infty)$ 上一致收敛,因此在 $u_0\in[\delta,\infty)$ 连续,由 u_0 的任意性,得到积分在$u\in(0,+\infty)$ 连续.

4. 设$f(x,y)$有连续偏导数,求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$

解: 这是一个$\frac{0}{0}$型极限, 关键是求$\varphi(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$ 对x的导数.令

$$G(t,x)=\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\,\mathrm{d}s,\Longrightarrow\varphi(x)=\int_0^x G(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

$$\Longrightarrow \varphi'(x)=\int_0^x \frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}t+G(x,x)=2x\int_0^x f(t,x^2)\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned} I&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int\limits_0^x f(t,x^2)\,\mathrm{d}t}{3x^2}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2\int\limits_0^x f(t,x^2)\,\mathrm{d}t}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int\limits_0^x 2xf_2'(t,x^2)\,\mathrm{d}t+f(x,x^2)}{3}=\frac{2}{3}f(0,0)\end{aligned}$$

5. 证明$F(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$收敛,并对参变量$t\in(0,+\infty)$ 可导

证明: 把积分写成 $F(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\frac{\ln(1+tx)}{x}\,\mathrm{d}x$

因为$\left|\displaystyle\int_a^A \sin x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$有界,$\dfrac{x}{1+x^2}$单调减$\to 0(x\to+\infty)$, 由Dirichlet判别法可知 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

又因为对$t>0,\dfrac{\ln(1+tx)}{x}$关于x单调减趋于零, 所以由Abel判别法原积分收敛.

设 $f(x,t)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}\ln(1+tx),\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x\sin x}{(1+x^2)(1+tx)}$, $(x\geqslant 0,t>0)$. 在积分

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(1+x^2)(1+tx)}\,\mathrm{d}x$$

中,$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}$收敛, $\dfrac{1}{1+tx}$关于x 单调减,对$t>0$ 一致有界, 所以对$t>0$一致收敛. 根据Dirichulet 判别法, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ 对 $t>0$ 一致收敛, 因此 $F(t)$ 在 $t>0$ 可导.

6 设 $|\alpha|\neq 1$, 证明积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛,并求其值.

解: 显然0不是瑕点.将积分区间分段,对$a>0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x+\int_a^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$$

右端第一个积分可积, 第二个是广义积分, 在$[a,+\infty)$ $1/x$ 单调减趋于零,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^A \sin x\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_a^A \frac{\cos(1+\alpha)x-\cos(1-\alpha)x}{2}\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\left(\frac{1}{|1+\alpha|}+\frac{1}{|1-\alpha|}\right)\end{aligned}$$

有界,所以收敛! 为了求积分,增加因子

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x$$

而 $|\sin x\cos\alpha x \mathrm{e}^{-\beta x}| \leqslant \mathrm{e}^{-\beta x}$, 得被积函数求导后一致收敛，于是

$$\begin{aligned}I'(\alpha) &= \int_0^\infty \sin x\cos\alpha x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\sin(x+\alpha x)+\sin(x-\alpha x))\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2}\right)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I(\alpha) = \frac{1}{4}\ln[(1+\alpha)^2+\beta^2] - \frac{1}{4}\ln[(1-\alpha)^2+\beta^2]$$

这里用到了积分 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2}$, $(a<0)$. 因为积分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x$$

对于 $\beta\in[0,+\infty)$ 一致收敛所以连续，因此令 $\beta=0$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|$$

7. 设 $f(x):(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 上单调减有界的连续函数.求

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \quad (0<a<b).$$

解：该题没有假设函数可导, 因此无法将 $f(ax)-f(bx)$ 表示为

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x} = \int_a^b f'(ux)\,\mathrm{d}u$$

具体做法如下：设 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$.

对任意小的 $\varepsilon>0$ 和任意大的 $A>0$, 在$[\varepsilon,A]$ 上 $f(ax), f(bx)$ 单调减有界, 因此可积，$\dfrac{1}{x}$ 可积，所以 $\dfrac{f(ax)}{x}$, $\dfrac{f(bx)}{x}$ 可积.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(b\varepsilon)\ln\dfrac{b}{a} \leqslant \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant f(a\varepsilon)\ln\dfrac{b}{a}\\ f(bA)\ln\dfrac{b}{a} \leqslant \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant f(aA)\ln\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

令 $\varepsilon\to0^+$, $A\to+\infty$, 得积分收敛且

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (\alpha-\beta)(\ln b-\ln a).$$

8. 求 $\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,\mathrm{d}x$

解: 利用 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, $0 < x < 1$, 取对数并积分得

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

左边第二个积分换元, 得左边$= 2\displaystyle\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,\mathrm{d}x$, 而

$$\int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{1/2}^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \cos \pi x\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x + \int_0^{1/2} \ln \cos \pi x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \ln \sin \pi x \cos \pi x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln 2 + \int_0^{1/2} \ln \sin 2\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x = -\ln 2, \quad \int_0^1 \ln \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

9. 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}$.

解: 令 $u = x^8, x = u^{1/8}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{8}u^{1/8-1}\,\mathrm{d}u$. 继而再令 $u = \dfrac{1}{t} - 1 = \dfrac{1-t}{t}$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2} &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/8-1}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 t^{1-1/8}(1-t)^{1/8-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{15/8-1}(1-t)^{1/8-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{8}, \frac{15}{8}\right) = \frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+1\right) = \frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \\
&= \frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{7}{32}\frac{\pi}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$