第6次作业

第四章 3.4, 10. 12. 13

3. 3. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 求 $E(X)$.

设 $Y \sim N(0,1)$ $\quad \phi(x)=(\Phi(x))'$

$$E(X)=\int x f(x)\,dx=\int x\left(0.5\phi(x)+0.5\phi\left(\frac{x-4}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=0.5\underbrace{\int x\phi(x)\,dx}_{E(Y)}+0.5\underbrace{\int \phi\left(\frac{x-4}{2}\right)\cdot\frac{x-4}{2}\,dx}_{E(Y)}$$

$$+\int \phi\left(\frac{x-4}{2}\right)\cdot 2\,dx/2$$

$$=2\int \phi\left(\frac{x-4}{2}\right)d\frac{x-4}{2}=2$$

or.

$$E(X)=\int x\,dF(x)=\int x\,d\left(0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)\right)$$

$$=0.5\underbrace{\int x\,d\Phi(x)}+0.5\int x\,d\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

$$=0.5E(Y)+0.5\int 2\cdot\underbrace{\frac{x-4}{2}\,d\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)}_{E(Y)}$$

$$+0.5\int 4\,d\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

$$=1.5E(Y)+2\underbrace{\int 1\,d\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)}_{=1\ (分布函数积分)}$$

$$=2$$

4.

4. 设 X 为一个连续型随机变量, 试对下列各种情形, 分别求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

(1) 若 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},\quad x>0,$$

其中 $\sigma>0$ 为常数, 则称 X 服从瑞利 (Rayleigh) 分布;

(2) 若 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\quad 0<x<1,$$

其中 $\alpha,\beta>0$ 为常数, $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数, 则称 X 服从 β 分布;

(3) 若 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right\},\quad x>0,$$

其中 $k,\lambda>0$ 为常数, 则称 X 服从韦布尔分布.

$$\begin{cases}\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\\ \mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\end{cases}$$

解: $E(X)=\int u f(u)\,du.$

(1):

$$E(X)=\int x f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$

换元:

令 $t=\frac{x^2}{2\sigma^2}$ $\quad x=\sqrt{2\sigma^2 t}\quad (x>0)$

$$=\int_0^{+\infty}2t\exp\{-t\}\,d\sqrt{2}\sigma t^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\sigma\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\exp\{-t\}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\sigma\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2}\sigma\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

(2)

$$E(X)=\int x f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha+1, \beta)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

(3)

$$E(X) = \int x f(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{x^k}{\lambda^{k-1}} \exp\{-(\frac{x}{\lambda})^k\} dx$$

换元 $t = (\frac{x}{\lambda})^k$ $\quad x^k = \lambda^k t \quad x = \lambda t^{\frac{1}{k}}$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} k \cdot t \exp\{-t\} d\lambda t^{\frac{1}{k}}$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{k}} \exp\{-t\} dt$$

$$= \lambda \Gamma(\frac{1}{k}+1)$$

10.

10. 设随机变量 X 的概率质量函数为 $P(X=k)=C/k!, k=0,1,2,\cdots$, 求 $E(X^2)$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)=1$$

$$\Rightarrow C\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)}_{e}=1 \quad \Rightarrow C=\frac{1}{e}$$

$$\therefore P(X=k)=\frac{e^{-1}}{k!}$$

$$\therefore X \sim Poi(1)$$

$$E(X)=Var(X)=1$$

$$\Rightarrow E(X^2)=E^2(X)+Var(X)=2$$

12.

12. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布.

(1) 对任意常数 $c>0$, 证明 cX 服从参数为 λ/c 的指数分布;

(2) 对任意正整数 $n\geqslant 1$, 计算 $E(X^n)$.

$X \sim Exp(\lambda)$

(1)

$Y = cX \quad (c>0)$

$$P(Y\le y) = P(cX\le y) = P(X\le y/c) = 1-e^{-\frac{\lambda y}{c}}$$
$$= 1-e^{-(\frac{\lambda}{c})y}$$

$\therefore \quad cX \sim Exp(\frac{\lambda}{c})$

(2)

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n\cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

换元 $t=\lambda x.\quad x = t/\lambda$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda^{-n} t^n \cdot \lambda \cdot e^{-t}\, d\, t/\lambda$$

$$= \lambda^{-n}\int_0^{+\infty} t^n\cdot e^{-t}\,dt$$

$$= \lambda^{-n}\cdot \Gamma(n+1) = \lambda^{-n}\cdot n!$$

13.

13. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = 2(x-1), 1 < x < 2$, 试求随机变量 $Y = \mathrm{e}^X$ 和 $Z = 1/X$ 的数学期望.

$$E(Y) = E(e^x) = \int_1^2 e^x \cdot 2(x-1)\,dx$$

$$= \int_1^2 2e^x \cdot x\,dx - \int_1^2 2e^x\,dx$$

$$= 2\int_1^2 x\,de^x - \int_1^2 2e^x\,dx$$

$$= 2xe^x\Big|_1^2 - 4\int_1^2 e^x\,dx = 2e$$

$$E(Z) = E(1/x) = \int_1^2 \frac{1}{x}2(x-1)\,dx$$

$$= \int_1^2 2\,dx - \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx$$

$$= 2 - 2\ln 2$$