第九次书面作业参考答案

1 补充教材

3. 验证距离函数的三条性质：正定性，对称性，三角不等式即可，(a) 是距离函数，(b),(c) 不是距离函数，因为它们不满足三角不等式

4.
f_n 一致收敛到 g：$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}_+, n > N$ 时，$\forall x \in [a,b], |f_n(x) - g(x)| < \epsilon$.
f_n 按一致范数收敛到 g：$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}_+, n > N$ 时，$\|f_n(x) - g(x)\|_\infty = \underset{x \in [a,b]}{max} |f_n(x) - g(x)| < \epsilon$.
两者等价性明显。

5. 验证内积的三个性质：对称性，线性性，正定性即可。

6.(1) 不是，因为不满足正定性，$(f,f) = 0 \to f = C$（C 是常数）
(2) 是，$(f,f) = 0 \to f = 0$

7. 三次多项式空间的一组基是 $\{1, x, x^2, x^3\}$，Gram-Schmidt 正交化后为 $\{1, x - \frac{3}{5}, x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}, x^3 - \frac{21}{13}x^2 + \frac{105}{143}x - \frac{35}{429}\}$

8. 即是证明:$P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$，又由最佳逼近元的充分必要条件（定理 9.9）可知：$(\alpha x + \beta y - \alpha P(x) - \beta P(y), m) = \alpha(x - P(x), m) + \beta(y - P(y), m) = 0, \forall m \in V$，故有 $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$

15. 由题可知，应选择的内积为 $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$，一次多项式空间的

一组基为 $\{1,x\}$，由此可列法方程组：

$$\begin{pmatrix}\int_0^1 1dx & \int_0^1 xdx\\ \int_0^1 xdx & \int_0^1 x^2dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^1 e^x\\ \int_0^1 xe^x\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e-10\\ 18-6e\end{pmatrix}$$

$\int_0^1|e^x-(4e-10)-(18-6e)x|^2dx=\frac{1}{2}(-57+40e-7e^2)\approx 0.0039$

16. 本题同样可以使用类似上题的方法,用三次多项式空间的一组基 $\{1,x,x^2,x^3\}$,列出法方程组，但应该注意的是，此种情况下需要解的方程组 $Ax=b$ 是病态的，因此 A,b 均需要一定的精度（至少要小数点后 7 位），因此可以使用第七题算出的正交基 $\{1,x-\frac{3}{5},x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21},x^3-\frac{21}{13}x^2+\frac{105}{143}x-\frac{35}{429}\}$（记为 $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4\}$），则三次最佳平方逼近多项式可表示为 $\sum_{i=1}^4 c_i\phi_i, c_i=\frac{(f,\phi_i)}{(\phi_i,\phi_i)}$，最终结果为 $0.9990+0.0142x-0.5564x^2+0.0831x^3$.

17. 分析：定理 9.15 告诉我们 g_l^* 有 l 个互异的实根，且全部位于 $[a,b]$ 内，又考虑到要证明的“零点交错”，自然要考虑证明 g_{l+1}^* 在 $(x_i^l,x_{i+1}^l)(i=1,\cdots,l-1),(a,x_1^l),(x_l^l,b)$ 这 $l+1$ 个区间上均有根（Rolle 定理），进一步带入（9.13）的递推关系式分析后可以发现我们需要证明 $b_k>0$。

不妨设 $g_{-1}^*=0$

Lemma1: 定理 9.15

Lemma2:$a<a_k<b, 0<b_k<max\{a^2,b^2\}$（不会都用，但既然 hint 中有就先证一下）

Pf:(1). $a_k=\frac{<xg_{k-1}^*,g_{k-1}^*>}{<g_{k-1}^*,g_{k-1}^*>}=\frac{\int_a^b x\rho(x)g_{k-1}^{*2}(x)dx}{\int_a^b \rho(x)g_{k-1}^{*2}(x)dx}\in[a,b]$（积分中值定理）

(2).$b_k=\frac{<xg_{k-1}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}=\frac{<g_{k-1}^*,xg_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}=\frac{<g_{k-1}^*,g_{k-1}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}>0 \quad (k\geq 2)$

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{<x[(x-a_{k-1})g_{k-2}^*-b_{k-1}g_{n-3}^*],g_{n-2}^*>}{<g_{n-2}^*,g_{n-2}^*>}\\&=\frac{<x^2g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}-\frac{a_{k-1}<xg_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}-\frac{b_{k-1}<xg_{k-3}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}\\&=\frac{<x^2g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}-a_{k-1}^2-b_{k-1}\\&\leq\frac{<x^2g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}{<g_{k-2}^*,g_{k-2}^*>}\leq max\{a^2,b^2\}(\text{积分中值定理})(k\geq 2)\end{aligned}$$

回到原题，用归纳法证明 g_l^* 与 g_{l+1}^* 零点交错（对 l 归纳），$l=0$ 时平凡证明 (归纳法的关键是看能不能递推下去，因此对于本题从 0 开始即可，$l=1$ 的情况是包含在下面的证明中的)，假设 $l=k-1(k\geq 1)$ 时结论成立，$l=k$ 时，分三部分来证明：

(1) $(x_i^k, x_{i+1}^k)(i=1,\cdots,k-1)$ 上：

$$g_{k+1}^*(x_i^k) * g_{k+1}^*(x_{i+1}^k) = b_k^2 * g_{k-1}^*(x_i^k) * g_{k-1}^*(x_{i+1}^k) < 0$$

由 Rolle 定理；有根。

(2) (a, x_k^1) 上：

$$sgn(g_{k+1}^*(a)) * sgn(g_{k+1}^*(x_k^1)) = sgn(g_{k+1}^*(-\infty)) * sgn(-b_k g_{k-1}^*(-\infty)) = (-1)^{[(k+1)+(1+k-1)]} < 0$$

由 Rolle 定理；有根。

(3) (x_k^k, b) 上：

$$sgn(g_{k+1}^*(b)) * sgn(g_{k+1}^*(x_k^k)) = sgn(g_{k+1}^*(+\infty)) * sgn(-b_k g_{k-1}^*(+\infty)) = -1 < 0$$

由 Rolle 定理；有根。

综上所述并结合 Lemma1 可知：g_k^* 与 g_{k+1}^* 零点交错。 $\square$