题 答 要 不 内 线 封 密

中国科学技术大学数学科学学院

2017 ～ 2018学年 第 2 学期期末考试试卷

■A卷　　□B卷

课程名称 计算方法(B)　　课程编号 001511

考试时间 2018年6月25日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 所有解答写在试卷上；计算结果保留4位小数。

一、 (30分)填空

(1) (3分) 设$f(x)=8x^4-9x+1$，则差商$f[2,4,8,16,32]=$________。

(2) (3分) 含有10个积分节点的数值积分公式至多可以到________阶代数精度。

(3) (6分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$，则$\|A\|_1=$________，$\|A\|_\infty=$________

(4) (6分) 两个几乎相等的数在计算机中相减，会导致计算结果________________。

设$|x|>>1$，则计算$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$时，需要把它改写为________________________，

(5) (6分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，用Jacobi方法求它的所有特征值时，第1步用的Givens旋转矩阵为$G(p,q,\theta)$， 则$p=$________，$q=$________

(6) (6分) 解非线性方程$2x=\sin(x)+\cos(x)$的Newton迭代格式为

____

二、（10分）用Doolittle分解求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 = 0.5 \\ 6x_1 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

提示：$A = LU$，其中U为上三角阵，L为单位下三角阵，称为A的Doolittle分解。

三、（12分）按下列数据，用最小二乘法做出$f(x) = \frac{1}{a+bx^2}$形式的拟合函数。

x_i	-1	0	1	2	2.5
y_i	0.2	0.5	0.4	0.8	1.0

四、（12分）给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1）分别写出Jacoib迭代格式和Gauss-Seidel迭代格式；

2）分析Gauss-Seidel迭代格式的收敛性

五、（12分）构造一个3次多项式$H(x)$，使得

$$H(a)=0,\quad H''(a)=b,\quad H(b)=0,\quad H''(b)=a$$

其中$a\neq b$。

密 封 线 内 不 要 答 题

六、（12分）给定常微分方程$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0, \end{cases}$，取正整数$m$，记$h = \frac{b-a}{m}$，$x_n = a + nh, n = 0, 1, 2, \cdots, m$。构造如下的线性多步格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]$$

1. 试导出格式的局部截断误差。
2. 试构造不低于2阶的一种可用于起步计算的格式。

七、（12分）设$f(x) \in C^4[a,b]$，记

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, \qquad E(a,b,f) = Af(x_0) + Bf(x_1)$$

1. 当$a=-1$，$b=1$时，求参数A，B，x_0，x_1，使求积公式$E(-1,1,f) \approx I(f)$的代数精度为3，并推导出误差表达式；
2. 给出$a<b$时，具有3阶代数精度的求积公式$E(a,b,f)$和它的误差表达式；
3. 取正整数n，记$h=\frac{b-a}{n}$，$x_i = a+ih$，$i=0,1,\cdots,n$， 求积公式$E(f)$对应的复化求积公式$E_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} E(x_k, x_{k+1}, f)$。 求极限$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{I(f)-E_n(f)}{h^4}$

答案

1. 8（3分）

2. 19(3分)

3. 11（3分），9（3分）

4. 的相对误差变很大（或者，有效位数极度减少）（3分）

$$\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}\quad (3分)$$

5. 3（3分），1（3分）或者 1 ，3

6. $x_{k+1}=x_k-\dfrac{2x_k-\sin x_k-\cos x_k}{2-\cos x_k+\sin x_k}$ （6分）

2.

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1.5 & 0.5\\ 6 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}(6分)$$

$Ly=b,$

$Ux=y$

$$x=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0.5\end{pmatrix}(2分)$$

3. 做预处理，拟合$\frac{1}{y}=a+bx^2$。（2分）

$$\begin{pmatrix}5 & 12.25\\ 12.25 & 57.0625\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.75\\ 18.75\end{pmatrix}(6分)$$

可得

$$\begin{cases}a=3.25912662\\ b=-0.37107209\end{cases}\quad(2分)$$

4. 1)．（6分）

2). Gauss-Seidel迭代矩阵G的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2\lambda & 5\lambda & 3 \\ -2\lambda & -2\lambda & 3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(4分)

则有

$$15\lambda^3 - 12\lambda = 0$$

可得，$\rho(G) = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$，即收敛。(2分)

5. $H(a) = 0$, $H(b) = 0$，则可以设

$$H(x) = (x-a)(x-b)(c_1(x-a) + c_2(b-x))$$

令$H(x) = (x-a)f(x)$，则

$$f(x) = (x-b)(c_1(x-a) + c_2(b-x))$$

由$H''(x) = 2f'(x) + (x-a)f''(x)$，及$H''(a) = b$，可得

$$H''(a) = 2f'(a) = b$$

$$2(c_1(b-a) + (a-b)(c_1 - c_2)) = b$$

类似，令$H(x) = (x-b)g(x)$，由$H''(x) = 2g'(x) + (x-b)g''(x)$，及$H''(b) = a$，可得

$$H''(b) = 2g'(b) = a$$

$$2(c_1(b-a) + (b-a)(c_1 - c_2)) = a$$

联立，有

$$\begin{cases} 2c_2 - c_1 = \frac{b}{2(b-a)} \\ 2c_1 - c_2 = \frac{a}{2(b-a)} \end{cases} \quad (8分)$$

可以求得

$$\begin{cases} c_1 = \frac{2a+b}{6(b-a)} \\ c_2 = \frac{a+2b}{6(b-a)} \end{cases}$$

即有

$$H(x) = (x-a)(x-b)\frac{(a-b)x-2a^2+2b^2}{6(b-a)} = \frac{1}{6}(x-a)(x-b)(2(a+b)-x)$$

或者，

记$f(x) = H''(x)$为一次多项式，则有

$$f(x) = b\frac{x-b}{a-b} + a\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{a-b}(b(x-b)+a(a-x))$$

则

$$\begin{aligned} H(x) &= \int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1(x-a) + c_2(b-x) \\ &= \frac{1}{a-b}\left(b\frac{(x-b)^3}{6} + a\frac{(x-a)^3}{6}\right) + c_1(x-a) + c_2(b-x) \end{aligned}$$

由$H(a) = 0$，

$$c_2 = \frac{b}{6}(a-b)$$

由$H(b) = 0$，

$$c_1 = \frac{a}{6}(a-b)$$

(8分)

则

$$H(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{a-b}(b(x-b)^3 + a(a-x)^3) + \frac{a-b}{6}(a(x-a)+b(b-x))\text{(4分)}$$

6. 1). 使用数值积分的误差，或做Taylor展开。（8分）

局部截断误差为以节点x_n，x_{n-1}，x_{n-2}为积分点，$[x_n, x_{n+1}]$为积分区间的数值积分公式

的误差，

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\frac{y^{(4)}(\xi)}{3!}dx \\
&= \frac{y^{(4)}(\xi)}{3!}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})dx \\
&= \frac{y^{(4)}(\xi)}{3!}\int_0^1 t(t+1)(t+2)h^4dt \\
&= \frac{y^{(4)}(\xi)}{3!}h^4\frac{9}{4} = \frac{3}{8}y^{(4)}(\xi)h^4
\end{aligned}
$$

使用Taylor展开。

由局部截断误差的定义及微分方程，有

$$y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{12}(23y'(x_n) - 16y'(x_{n-1}) + 5y'(x_{n-2}))$$

在点x_n处做Taylor展开，

$$
\begin{aligned}
y'(x_{n-1}) &= y'(x_n) + y''(x_n)(-h) + \frac{1}{2!}y'''(x_n)(-h)^2 + \frac{1}{3!}y^{(4)}(x_n)(-h)^3 + O(h^4) \\
y'(x_{n-2}) &= y'(x_n) + y''(x_n)(-2h) + \frac{1}{2!}y'''(x_n)(-2h)^2 + \frac{1}{3!}y^{(4)}(x_n)(-2h)^3 + O(h^4)
\end{aligned}
$$

比较后，可得

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+1}) - y_{n+1} =& h^4y^{(4)}(x_n)(\frac{1}{4!} + \frac{16}{12}\frac{1}{3!} - \frac{5}{12}\frac{1}{3!}2^3) + O(h^5) \\
=& \frac{-5}{24}y^{(4)}(x_n)h^4 + O(h^5)
\end{aligned}
$$

在x_{n-1}处做Taylor展开，有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{3}{8}y^{(4)}(x_{n-1})h^4 + O(h^5)$$

2). 改进的Euler格式，或梯形格式（4分）

7. 1）取$f(x)$为1，x, x^2，x^3列方程有

$$
\begin{cases}
A + B = 2 \\
Ax_0 + Bx_1 = 0 \\
Ax_0^2 + Bx_1^2 = \frac{2}{3} \\
Ax_0^3 + Bx_1^3 = 0
\end{cases}
\quad (2分)
$$

可解得

$$A=B=1,x_0=-x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(2分)$$

误差为

$$\begin{aligned}E=&\int_{-1}^{1}\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2dx\\=&\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2dx\,(2分)\\=&\frac{f^{(4)}(\xi)}{135}\end{aligned}$$

2) 这是Gauss求积公式

$$A=B=\frac{b-a}{2},\quad x_0=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}},x_1=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}(2分)$$

误差

$$\begin{aligned}I(f)-E(f)=&\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{a}^{b}(x-x_0)^2(x-x_1)^2dx\\=&\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{b-a}{2})^5\int_{-1}^{1}(t-\frac{1}{\sqrt{3}})^2(t+\frac{1}{\sqrt{3}})^2dt(2分)\\=&\frac{f^{(4)}(\xi)}{135}(\frac{b-a}{2})^5,\xi\in(a,b)\end{aligned}$$

3)

$$I(f)-E_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{135}(\frac{h}{2})^5f^{(4)}(\xi_k),\xi_k\in(x_k,x_{k+1})$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{I(f)-E_n(f)}{h^4}=&\frac{1}{135\times2^5}\lim_{h\to0}\sum_{k=0}^{n-1}hf^{(4)}(\xi_k)\\=&\frac{1}{135\times2^5}\int_a^b f^{(4)}(x)dx\\=&\frac{1}{4320}(f'''(b)-f'''(a))\end{aligned}$$

(2分)