10.14

第三章课后习题：15、26、30、32、41、42

15. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, $X \sim N\left(0,\sigma_1^2\right)$, $Y \sim N\left(0,\sigma_2^2\right)$, 其中 $\sigma_1,\sigma_2>0$ 为常数. 引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & X \leqslant Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

求 Z 的分布律.

解：

$$\begin{aligned}
&(X,Y)\sim N\left(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0\right),\ X-Y\sim N\left(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right),\\
\therefore\ &P(Z=1)=P(X\le Y)=P(X-Y\le 0)=\frac{1}{2};\\
&P(Z=0)=P(X>Y)=P(X-Y>0)=\frac{1}{2}.\\
&\text{故 } Z\sim B\left(1,\frac{1}{2}\right),\quad \text{即 } Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

26. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的分布为 $P(X=i)=\frac{1}{3},\ i=-1,0,1$; Y 的密度函数为 $f_Y(y)=I_y[0,1]$. 记 $Z=X+Y$.

(1) 求 $P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}|X=0\right)$；

(2) 求 Z 的密度函数.

解：(1) 由 X 与 Y 相互独立可知：

$$P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|\ X=0\right)=P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|\ X=0\right)=P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_Y(y)=\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $-1\le z\le 0$ 时，

$$F(z)=P(Z\leqslant z)=P(x=-1)P(Y\leqslant z+1\mid X=-1)=\frac{1}{3}\cdot(z+1);$$

当 $0 \le z \le 1$ 时，

$$\begin{aligned} F(z) = P(Z \leqslant z) = F(0) + P(0 \le Z \le z) \\ &= \frac{1}{3} + P(0 \le X+Y \le z \mid X=0)P(X=0) \\ &= \frac{1}{3} + z \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(z+1); \end{aligned}$$

当 $1 \le z \le 2$ 时，

$$\begin{aligned} F(z) = P(Z \leqslant z) = F(1) + P(1 \leqslant Z \leqslant z) \\ &= \frac{2}{3} + P(1 \leqslant X+Y \leqslant z \mid X=1)P(X=1) \\ &= \frac{2}{3} + (z-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(z+1); \end{aligned}$$

所以 $F(z) = \frac{1}{3}(z+1) \cdot \mathrm{I}\{-1 \le z \le 2\} + 0 \cdot \mathrm{I}\{z < -1\} + 1 \cdot \mathrm{I}\{z > 2\}$，进而可得

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, -1 \le z \le 2 \\ 0, \text{else} \end{cases}$$

30. 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布, Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的联合密度函数;

(2) 求二次方程 $a^2 + 2Xa + Y = 0$ 有实根的概率.

解：(1)

$$\begin{aligned} &\because X.Y \text{ 独立} \\ &\therefore f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = I_{(0,1)}(x) \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} I_{(0,+\infty)}(y) \\ &\text{即 } f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) $\Delta=4X^2-4Y$， $P(\text{方程有实根})=P(\Delta\geqslant 0)=P\left(X^2-Y\geqslant 0\right)$，所以

$$
\begin{aligned}
P(\text{方程有实根}) &= \iint_{x^2\geqslant y}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}I_{(0,1)}(x)I_{(0,+\infty)}(y)dxdy \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{x_1^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy\right)dx \\
&= \int_0^1 -e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^{x^2}dx \\
&= \int_0^1 1-e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= 1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= 1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0)) = 0.1445
\end{aligned}
$$

32、设随机变量 X,Y 的分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

和

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且 $P(XY=0)=1$.

解：

$$P(Y=-1)=P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1),\quad \therefore \frac{1}{4}=P(X=0,Y=-1)+0.$$

$$P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=-1),\quad \therefore \frac{1}{4}=P(X=0,Y=1)+0.$$

$$P(X=1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1),\quad \therefore \frac{1}{2}=0+P(X=1,Y=0)+0.$$

$$P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0),\quad \therefore \frac{1}{2}=P(X=0,Y=0)+\frac{1}{2}.$$

所以可得 (X,Y) 的联合分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0

41. 设(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{[1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}]y}{1+y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求X,Y的边缘分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$;

(2) 求(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$以及边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$;

(3) 验证X,Y是否相互独立.

解：(1)

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to\infty} \frac{1-(x+1)e^{-x}}{\frac{1}{y}+1} = 1-(x+1)e^{-x}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{1+y} - (x+1)e^{-x}\frac{y}{1+y} = \frac{y}{1+y}$$

(2)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{1+y}\left(e^{-y} - (x+1)\right)e^{-x}) = \frac{y}{1+y} \times e^{-x} = (1-\frac{1}{1+y}) \times e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = xe^{-x}\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}}{(1+y)^2}, & x>0, y>0 \\ 0, & e1se \end{cases}.$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-x} = x\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{I}\{x>0\}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{(1+y)^2}\cdot \mathrm{I}\{y>0\}.$$

(3) $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X,Y 相互独立.

42. 设随机向量 (X,Y,Z) 的联合密度函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (8\pi^3)^{-1}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\leqslant x,y,z\leqslant 2\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明：X,Y,Z 两两独立但不相互独立.

解：

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z)dz = \frac{2\pi-0}{8\pi^3} = \frac{1}{4\pi^2},$$

同理 $f(y,z) = f(x,z) = \dfrac{1}{4\pi};$

$$f_x(x) = \int_0^{2\pi} f(x,y)dy = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi},\ \text{同理 } f_Y(y) = f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}.$$

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad f(x,z) = f_X(x)\cdot f_Z(z) \quad f(y,z) = f_Y(y)\cdot f_Z(z).$$

故 X,Y,Z 两两独立.

但 $f(x,y,z) \neq f_X(x)\cdot f_X(y)\cdot f_Z(z)$

故 X、Y、Z 不相互独立。