$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明：f 是$[-1,1]$上的奇函数.

3. 设 $x(t)$在$[0,a]$上连续，并且满足

$$|x(t)| \leqslant M + k\int_0^t |x(\tau)|\mathrm{d}\tau,$$

这里 M 与 k 为正常数.求证：

$$|x(t)| \leqslant M\mathrm{e}^{kt} \quad (0 \leqslant t \leqslant a).$$

6.6 Lebesgue 定理

在 6.5 节中，我们证明了有限闭区间上的连续函数是可积的(定理 6.5.5)，还指出了在有限区间上有界且只有有限多个不连续点的函数也是可积的.此外，单调函数也是可积的，虽然单调函数可能有无限个间断点，但是它的间断点的集合是至多可数的.这些事实提醒我们，可积性与函数的不连续点的“多寡”可能有着密切的关系.事实确实如此.为了精确地刻画“点的多寡”，我们必需引入下面的定义.

定义 6.6.1 设 A 为实数的集合.如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在至多可数个开区间$\{I_n : n \in \mathbf{N}^*\}$组成 A 的一个开覆盖，并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant \varepsilon$($|I_n|$表示开区间 I_n 的长度)，那么称 A 为**零测度集**，简称**零测集**.

显然空集是零测集.

例 1 证明：如果 A 是至多可数集，那么 A 一定是零测集.

证明 不妨设 A 为可数集，记为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$，作区间 $I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)(n = 1, 2, \cdots)$.显然，$A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.这时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

因此 A 是零测集. □

例 2 证明：任何长度不为 0 的区间都不是零测集.

证明　不妨设所考虑的区间为开区间(a,b)，其中$a<b$. 设开区间列$\{I_n:n\in\mathbf{N}^*\}$覆盖了(a,b). 很明显，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\geqslant b-a>0,$$

式中"$\geqslant$"的右边$b-a$是一个确定的正数. □

零测集有如下的简单性质：

(1) 至多可数个零测集的并集是零测集.

证明　设有可数个零测集

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots.$$

对任给的$\varepsilon>0$和$n\in\mathbf{N}^*$，由于A_n是零测集，故存在开区间族$\{I_{ni}:n,i\in\mathbf{N}^*\}$，使得$A_n\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{ni}$，并且$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}$. 这时开区间族$\{I_{ni}:n,i\in\mathbf{N}^*\}$含可数个成员，且具有性质

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{ni}\right).$$

此外，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_{ni}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

这就证明了$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$为零测集. □

(2) 设A为零测集. 若$B\subset A$，那么B也是零测集.

有了零测集的概念，就可以叙述本节的主要结果. 用$D(f)$记f在$[a,b]$上不连续点的全体，即

$$D(f)=\{x\in[a,b]:f\text{ 在 }x\text{ 处不连续}\}.$$

我们有：

定理 6.6.1(Lebesgue)　设函数f在有限区间$[a,b]$上有界，那么f在$[a,b]$上 Riemann 可积的充分必要条件是，$D(f)$是一个零测集.

为了证明这个定理，我们要引进函数在一点处振幅的概念. 大家知道，$[a,b]$上的有界函数f在区间$[a,b]$上振幅的定义为

$$\omega=M-m,$$

其中M和m分别是f在$[a,b]$上的上、下确界. 下面的引理给出了ω的另一种表示.

引理 6.6.1　设ω是有界函数f在$[a,b]$上的振幅，那么

$$\omega=\sup\{|f(y_1)-f(y_2)|:y_1,y_2\in[a,b]\}.\tag{1}$$

证明 用 M 和 m 分别记 f 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，那么按定义，$\omega = M - m$. 由于对任意的 $y_1, y_2 \in [a,b]$，有

$$m \leqslant f(y_1) \leqslant M, \quad m \leqslant f(y_2) \leqslant M,$$

所以

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant M - m = \omega. \tag{2}$$

由于 $M = \sup\{f(y): y \in [a,b]\}$，$m = \inf\{f(y): y \in [a,b]\}$，所以，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $y_1, y_2 \in [a,b]$，使得

$$f(y_1) > M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(y_2) < m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可得

$$|f(y_1) - f(y_2)| \geqslant f(y_1) - f(y_2) > M - m - \varepsilon. \tag{3}$$

综合式(2)和(3)即得式(1). □

用 $B_r(x)$ 记开区间 $(x - r, x + r)$，用 $\omega_f(x,r)$ 记 f 在 $B_r(x)$ 上的振幅. 显然 $\omega_f(x,r)$ 非负，且当 r 减小时递减，因此 $\lim\limits_{r \to 0^+} \omega_f(x,r)$ 存在，记

$$\omega_f(x) = \lim_{r \to 0^+} \omega_f(x,r),$$

称 $\omega_f(x)$ 为 f 在 x 处的振幅.

我们有：

引理 6.6.2 函数 f 在点 $x \in I$ 处连续的充分必要条件是 $\omega_f(x) = 0$.

证明 必要性. 设 f 在点 x 处连续. 对任给的 $\varepsilon > 0$，当 $r > 0$ 充分小时，可使得当 $y \in B_r(x)$ 时，有

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $y_1, y_2 \in B_r(x)$ 时，

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &\leqslant |f(y_1) - f(x)| + |f(x) - f(y_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可得 $\omega_f(x,r) \leqslant \varepsilon$. 令 $r \to 0^+$，得出 $0 \leqslant \omega_f(x) \leqslant \varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数，可见 $\omega_f(x) = 0$.

充分性. 设 $\omega_f(x) = 0$. 由定义知，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$，使得 $\omega_f(x,r) < \varepsilon$. 因此，对任何 $y \in B_r(x)$，必有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega_f(x,r) < \varepsilon.$$

这表明函数 f 在点 x 处连续. □

对 $\delta > 0$，记

$$D_\delta = \{x \in [a,b]: \omega_f(x) \geqslant \delta\}.$$

我们有：

引理 6.6.3 $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$.

证明 由引理 6.6.2，知 $D_{1/n}$ 中的点都是 f 的不连续点，因而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n} \subset D(f). \tag{4}$$

反之，任取 $x \in D(f)$. 因 f 在 x 处不连续，仍由引理 6.6.2，知 $\omega_f(x) > 0$. 现取 m 充分大，使得 $\omega_f(x) \geqslant 1/m$，即 $x \in D_{1/m}$，因而

$$D(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}. \tag{5}$$

由式(4)和(5)即得本引理. □

引理 6.6.4 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. 如果存在一列区间 (α_j, β_j) $(j = 1,2,\cdots)$，使得 $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$，记 $K = [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j, \beta_j)$，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，一定存在 $\delta > 0$，当 $x \in K$，$y \in [a,b]$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

证明 用反证法. 如果结论不成立，则必存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 $s_n \in K$，$t_n \in [a,b]$，使得当 $|s_n - t_n| < 1/n$ 时，有

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{6}$$

因为 $\{s_n\} \subset K \subset [a,b]$，故必有 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{k_n}\}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} s_{k_n} = s^*.$$

显然，$s^* \in K$. 易知

$$\begin{aligned} |t_{k_n} - s^*| &\leqslant |t_{k_n} - s_{k_n}| + |s_{k_n} - s^*| \\ &< \frac{1}{k_n} + |s_{k_n} - s^*| < \frac{1}{n} + |s_{k_n} - s^*|, \end{aligned}$$

由此即知 $t_{k_n} \to s^*$ $(n \to \infty)$. 由式(6)，得

$$|f(s_{k_n}) - f(t_{k_n})| \geqslant \varepsilon_0. \tag{7}$$

由于 $s^* \in K$，故 f 在 s^* 处连续. 在式(7)的左边令 $n \to \infty$，即得

$$\varepsilon_0 \leqslant |f(s^*) - f(s^*)| = 0.$$

这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾. □

有了这些准备知识，现在可以给出：

定理 6.6.1 的证明 必要性. 只要证明对任意的 $\delta > 0$，D_δ 是零测集，从而 $D_1, D_{1/2}, \cdots$ 都是零测集. 由引理 6.6.3 即知 $D(f)$ 是零测集. 因为 f 可积，由定理 6.5.3，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的一个分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i < \frac{\delta\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

设 $x \in D_\delta$. 如果 x 不是 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 中的任一个，则存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得 $x \in (x_{i-1}, x_i)$. 因而存在充分小的 $r > 0$，使得 $(x - r, x + r) \subset (x_{i-1}, x_i)$. 于是 f 在 (x_{i-1}, x_i) 上的振幅

$$\omega_i \geqslant \omega_f(x, r) \geqslant \omega_f(x) \geqslant \delta. \tag{9}$$

如果用 $\sum'$ 和 $\bigcup'$ 分别表示对满足 $D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \varnothing$ 的 i 的求和与求并，那么从式(8) 和(9)，可得

$$\frac{\delta\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum{}' \omega_i \Delta x_i \geqslant \delta \sum{}' \Delta x_i.$$

由此得

$$\sum{}' \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

于是

$$D_\delta \subset \left(\bigcup{}' (x_{i-1}, x_i)\right) \cup \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}.$$

自然更有

$$D_\delta \subset \left(\bigcup{}' (x_{i-1}, x_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \left(x_j - \frac{\varepsilon}{4(m+1)}, x_j + \frac{\varepsilon}{4(m+1)}\right)\right).$$

而且由式(10)，得

$$\sum{}' \Delta x_i + (m+1) \frac{2\varepsilon}{4(m+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了 D_δ 是零测集.

充分性. 设 $D(f)$ 是一个零测集，并且对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一列开区间 (α_i, β_i) $(i = 1, 2, \cdots)$，使得

$$D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i), \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

这里 ω 是 f 在 $[a, b]$ 上的振幅. 令

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i).$$

根据引理 6.6.4，对上述的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in K$，$y \in [a, b]$ 且 $|x - y| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. 现取分割 $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得

$\|\pi\|<\delta$.记

$$\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\Delta x_i = \sum\nolimits_1 \omega_i\Delta x_i + \sum\nolimits_2 \omega_i\Delta x_i, \tag{11}$$

这里$\sum_1$表示对满足$K\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing$的$i$的求和，$\sum_2$表示对满足$K\cap(x_{i-1},x_i)=\varnothing$的$i$的求和.对$\sum_1$中的项,因为$K\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing$,任取$y_i\in K\cap(x_{i-1},x_i)$,由引理6.6.4,得

$$\begin{aligned}\omega_i &= \sup\{|f(z_1)-f(z_2)|:z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]\}\\ &\leqslant \sup\{|f(z_1)-f(y_i)|+|f(z_2)-f(y_i)|:\\ &\qquad z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i],y_i\in K\cap(x_{i-1},x_i)\}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum\nolimits_1 \omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

再看$\sum_2$.这时$\omega_i\leqslant\omega$,所以

$$\sum\nolimits_2 \omega_i\Delta x_i \leqslant \omega\sum\nolimits_2 \Delta x_i. \tag{13}$$

对$\sum_2$中的项,$K\cap(x_{i-1},x_i)=\varnothing$,故当$x\in(x_{i-1},x_i)$时,$x\notin K$,因而$x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$,即$(x_{i-1},x_i)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$.因而

$$\sum\nolimits_2 \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega},$$

代入式(9),即得

$$\sum\nolimits_2 \omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

把式(12)和(14)代入式(11),即得$\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.由定理6.5.3知$f$在$[a,b]$上可积. □

推论6.6.1 若f在$[a,b]$上有界,且在$[a,b]$上只有至多可数个间断点,那么f在$[a,b]$上Riemann可积.

这是因为此时$D(f)$是零测集.

推论6.6.2 如果f在$[a,b]$上可积,那么$|f|$也在$[a,b]$上可积.

由于$D(|f|)\subset D(f)$,可知$|f|$在$[a,b]$上Riemann可积.

注意，由$|f|$的可积性一般不能导出 f 的可积性. 例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\end{cases}$$

则 f 在$[0,1]$上不可积，但$|f|=1$是可积的.

推论 6.6.3 设 f 与 g 在$[a,b]$上可积，那么 fg 在$[a,b]$上也可积.

这是因为 $D(fg)\subset D(f)\cup D(g)$.

推论 6.6.4 如果 f 在$[a,b]$上可积，$1/f$ 在$[a,b]$上有定义且有界，那么 $1/f$ 在$[a,b]$上可积.

这是因为 $D(f)=D(1/f)$.

推论 6.6.5 如果 f 在$[a,b]$上可积，那么对任何$[c,d]\subset[a,b]$，f 在$[c,d]$上也可积.

这是因为 $D(f;[c,d])\subset D(f;[a,b])$.

推论 6.6.6 如果 $c\in(a,b)$，那么当 f 在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积时，f 在$[a,b]$上也可积.

这是因为 $D(f;[a,c])\cup D(f;[c,b])=D(f;[a,b])$.

推论 6.6.7 设 f 在$[a,b]$上可积. 如果 g 在$[a,b]$上除去有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 外和 f 相等，那么 g 也在$[a,b]$上可积，而且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{15}$$

证明 记 $h(x)=f(x)-g(x)$，那么 h 除去有限个点$x_1,x_2,\cdots,x_n$外都等于0，因而 h 在$[a,b]$上除去 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 外都连续，从而可积，所以 g 可积. 易知 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$，所以式(15)成立. □

例 3 证明：Riemann 函数 $R(x)$(见 2.4 节中的例 8)是任意有限区间$[a,b]$上的可积函数.

证明 这是因为 Riemann 函数 $R(x)$在$[a,b]$中的无理点上都连续，在有理点不连续，其不连续点的全体是一零测集，因而 $R(x)$可积. □

如何计算$\int_a^b R(x)\mathrm{d}x$?首先想到的是它的原函数是什么. 设 F 是 R 的一个原函数，即

$$F'(x)=R(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

根据 Darboux 定理，$R(x)$在$[a,b]$上应具有介值性，但从 $R(x)$的定义容易看出，它不具有介值性，因而 $R(x)$没有原函数. 但它的积分值可以从积分的定义直接算出：

$$\int_a^b R(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i)\Delta x_i = 0,$$

这里 ξ_i 是 (x_{i-1}, x_i) 中的任一个无理数.

上面的例子说明,可积函数未必具有原函数. 那么具有原函数的函数是否一定可积呢? 答案是不一定. 例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

那么

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

如果记 $f(x) = F'(x)$,那么 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有原函数 F,但 f 在 $(0,1)$ 上不可积,因为它在 $[0,1]$ 上无界.

从积分的定义来看,Riemann 积分主要是为连续函数而设计的. 积分和的极限的存在性和数值不应受值点在分割的同一子区间变化的影响,这实际上是对被积函数的连续性提出了很高的要求. 本节的理论更是把这种说法精确化了. Lebesgue 定理把 Riemann 可积的充分必要条件用连续点的"多寡"来刻画,得出了完满的结论. 若定义在 $[a, b]$ 上的函数 f 至多在一个零测集上不连续,则称 f 在 $[a, b]$ 上**几乎处处连续**. 因此,Lebesgue 定理也可以说成:区间 $[a, b]$ 上的有界函数 f 为 Riemann可积的充分必要条件是,f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续.

Lebesgue 放松了对函数连续性的要求,从而推广了 Riemann 积分,他所定义的积分被后人称为 Lebesgue 积分. 要详细地讨论 Lebesgue 积分,光有零测集是不够的,还需要把"测度"推广到相当广泛的集合(称为可测集合)上去. 深入地讨论这些问题,已超出了"数学分析"的范围,它们是"实变函数论"中的经典内容.

练 习 题 6.6

1. 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积. 求证:
$$\max(f(x), g(x)), \quad \min(f(x), g(x))$$
在 $[a, b]$ 上可积.
2. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续,φ 在 $[c, d]$ 上可积,且 $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$. 证明: $f\circ\varphi$ 在 $[c, d]$ 上可积.
3. 举例说明:若把第 2 题中"f 在 $[a, b]$ 上连续"的条件减弱为"f 在 $[a, b]$ 上可积",结论不

再成立.

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 如果对每个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$，必存在 $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$，使得 $f(x_1)f(x_2)\leqslant 0$，问 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 应取何值?

问 题 6.6

1. 对 $\alpha\in(0,1]$，定义

$$f_\alpha(x)=\left[\frac{\alpha}{x}\right]-\alpha\left[\frac{1}{x}\right].$$

证明:

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\mathrm{d}x=\alpha\ln\alpha.$$

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上非负且可积. 求证: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 成立的充分必要条件是，f 在连续点处必取零值.

6.7 反 常 积 分

在以上定义的积分中，积分区间是一个有限的闭区间，而且可积函数必定是有界的. 但是，对许多来自数学本身以及其他学科的问题，这两条限制显得过于苛刻. 因此，有必要推广已有的积分的概念. 如果说把我们已经详细讨论过的Riemann积分称作“通常意义下的积分”，那么推广了的积分就统称为“反常积分”或“广义积分”.

反常积分可以分为两大类，第一类是指积分区间无界，简称为“无穷积分”，我们首先讨论这一类积分.

设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任何 $b>a$，f 在 $[a,b]$ 上可积. 这时带变动上限 b 的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就定义了 $[a,+\infty)$ 上的一个函数. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$