

2023 秋 离散数学 期中考试

1.

对任意整数 n , 求 $\gcd(21n + 4, 14n + 3)$ 的值并证明.

2.

若 n 为正整数, p 为素数, 证明 p 不整除 n 等价于 $\phi(np) = (p-1)\phi(n)$, 其中 $\phi(n)$ 为欧拉函数.

3.

设 G 是一个 n 阶群, 证明:

(a) 若对于任意 d 整除 n , G 中至多只有一个 d 阶子群, 则 G 为循环群;

(b) 若 G 为循环群, 则对于任意 d 整除 n , G 中恰有 $\phi(d)$ 个元素的阶为 d .

4.

证明: 含么交换有限环的素理想必为极大理想.

5.

从 $1, 3, \dots, 297, 299$ 共 150 个奇数中任选 n 个数, 使得其中一定存在两个数满足其中一个整除另一个, 求 n 的最小值并证明.

6.

考虑方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$, 其中 m, n 均为偶数且 $m > n$.

(a) 求该方程非负整数解的个数;

(b) 求该方程满足 $x_1 = x_2, x_3 = x_4, \dots, x_{n-1} = x_n$ 的非负整数解的个数;

(c) 求该方程满足 x_1, x_3, \dots, x_{n-1} 为非负奇数, x_2, x_4, \dots, x_n 为非负偶数的解的个数.

7.

(a) 使用二项式系数证明

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

(b) 使用二项式系数证明

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{n-k-1+i}{i} = \binom{n+1}{k+1}$$

8.

平面上一只蚂蚁从原点出发, 它每次向上、向下或向右走距离 1, 经过 m 步后到达点 (k, k) .

(a) 证明 m 是偶数;

(b) 求一共有多少种走法;

(c) 上述走法中不跨越直线 $y = x$ 的走法有多少种.