多变量微积分期末复习

段雅丽

中国科学技术大学数学科学学院

ylduan01@ustc.edu.cn

主要内容

- 第二型曲线与曲面积分
- 场论初步
- 无穷级数
- 含参变量积分
- 傅里叶分析

Green公式

- 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心, R为半径的圆周$(R>1)$, 取逆时针方向.
- 计算曲线积分$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$ 取逆时针方向.
- 设L为圆周曲线 $x^2+y^2=1$, 按逆时针方向, 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$.

答案

π; -2π; $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Green公式

- 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以点$O_1(1,0)$为中心, R为半径的圆周$(R>1)$, 取逆时针方向.
- 计算曲线积分$I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为圆周曲线$x^2+y^2=R^2(R>0)$ 取逆时针方向.
- 设L为圆周曲线 $x^2+y^2=1$, 按逆时针方向, 计算曲线积分$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$.

答案

π; -2π; $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Green公式

- 设函数$f(x,y)$是整个平面上具有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任意x,y,t，有$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$成立.
  (1) 证明$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$.
  (2) 设D是由圆周L：$x^2+y^2=4$所围成的区域，证明
  $$\int\limits_L f(x,y)\mathrm{d}l=\iint\limits_D(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
- 已知$f(x)$是正值连续函数，曲线L：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，证明$\oint_L -\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x+xf(y)\mathrm{d}y\geqslant 2\pi$.

Green公式

- 设$f(x,y)$, $g(x,y)$在单位圆盘$U=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$上有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$，证明:在单位圆盘上存在一点$(\xi,\eta)$，使得$f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.
- 设$\overline{D}$是简单光滑闭曲线围成的平面闭区域，$u(x,y)\in C^{(2)}(\overline{D})$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，
(1) 试证: $\displaystyle\oint_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s=0$，其中$\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$为$\overline{D}$内沿简单光滑闭曲线$L$上单位外法线方向上的方向导数;
(2) 若当$(x,y)\in\partial D$时，$u(x,y)=A$(常数)，证明: $u(x,y)\equiv A$，$(x,y)\in D$.

Green公式

- 设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上，有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=0$，其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量，证明在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.
- 设$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$，$D:\ x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求积分$\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$，其中$\mathbf{n}$为单位外法向.

答案

$\pi(1-e^{-1})$.

Green公式

- 设$\mathbf{V}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在开区域$D$内处处连续可微，在$D$内任一圆周$L$上，有$\oint_L \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=0$，其中$\mathbf{n}$是圆周外法线单位向量，证明在$D$内恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$.
- 设$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$，$D:\ x^2+y^2\le 1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}$，求积分$\oint_{\partial D}\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}s$，其中$\mathbf{n}$为单位外法向.

答案

$\pi(1-e^{-1})$.

Stokes公式

- $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$ 其中L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 和平面$x+y+z=0$的交线，L的方向与z 轴正向成右手系.
- 计算曲线积分$\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z 轴正向来看，C沿逆时针方向.

答案

$-2\sqrt{3}\pi a^2$;　　-24.

Stokes公式

- $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$ 其中L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 和平面$x+y+z=0$的交线，L的方向与z 轴正向成右手系.
- 计算曲线积分$\int_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线 C是平面 $x+y+z=2$与柱面 $|x|+|y|=1$的交线，从z 轴正向来看，C沿逆时针方向.

答案

$-2\sqrt{3}\pi a^2$;　　-24.

Gauss公式

- $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$, 法线方向朝上.(答案: $\frac{5}{3}\pi$)
- $\iint\limits_{S^+} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant 1)$的下侧. (答案: $\frac{21}{10}\pi$)
- 计算 $\iint\limits_{S}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为有向曲面$z=x^2+y^2$ $(0\leq z\leq 1)$, 其法向与z轴夹角为锐角.(答案: $-\frac{\pi}{2}$)
- S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的下侧, 求 $$\iint\limits_{S}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$.(答案: $-\frac{116}{5}\pi$)

Gauss公式

- 计算 $\displaystyle\iint\limits_{S^+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, S^+ 为光滑闭曲面的外侧, 且原点不在曲面S^+上.(答案: 4π)
- 设向量场$\vec{v}(x,y,z) = (yz, zx, 2)$, 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma^+} \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$, Σ^+ 为上半球面$x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$的上侧, $\vec{n}$是其上的朝上的单位法向.(答案: 2π)
- $\displaystyle\iint\limits_{S^+} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S^+$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geqslant 0, R > 0)$的上侧.
(答案: $2\pi R^3 + \pi R^2$)

Gauss公式

- $\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$的外侧.

  (答案：1(提示:本题难点在三重积分变量代换))

曲线积分与路径无关

- 证明曲线积分$\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$与路径无关; 并求
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z.$$
- 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数, 在任意不绕原点且不过原点的简单光滑闭曲线L上, 曲线积分$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$.
(1) 求函数$\varphi(x)$. (2) 设C是绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求$\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

曲线积分与路径无关

- 设函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，对任一围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线C^+，曲线积分$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$的值相同.

  (1) 设L^+是一条不围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，证明:

$$\int_{L^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0;$$

  (2) 求函数$\varphi(x)$;

  (3) C^+是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线，求$\displaystyle\int_{C^+}\frac{y\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

势函数

- 设$f(x)$, $g(y)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数, $f(0)=g(0)=1$, 且第二型曲线积分 $\int_{L_{AB}} yf(x)dx+(f(x)+zg(y))dy+g(y)dz$与路径无关, 求向量场$(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$的势函数.
- 设$f(z)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数, $f(0)=0$, 且向量场$\overrightarrow{v}=(2xz,2yf(z),x^2+2y^2z-1)$是整个空间区域上的保守场, 求$\overrightarrow{v}$的势函数.
- 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数, $f(0)=1$, 且向量场$\overrightarrow{F}=(yf(x),f(x)+ze^y,e^y)$是整个空间区域上的保守场, 求向量场$\overrightarrow{F}$的势函数.

势函数

- $\overrightarrow{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2})$, $(y>0,z>0)$是否是有势场？若是，请说明理由，并求它的一个势函数；若不是有势场，请证明.
- 证明向量场 $\overrightarrow{F}=yz(2x+y+z)\overrightarrow{i}+zx(x+2y+z)\overrightarrow{j}+xy(x+y+2z)\overrightarrow{k}$是有势场，并求其势函数.

数项级数敛散判别

- 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

  已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n$ 发散.

- 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前n项和为S_n，证明:

  1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.　2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

数项级数敛散判别

- 设数列$\{a_n\}$为单调增有上界的正数数列，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.
- 设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项满足：对所有的正整数n 有 $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}$，证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.
- 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$ $(p>0)$的收敛性和绝对收敛性.

  (答案：$p>1$绝对收敛;$\frac{1}{2}<p\leq 1$条件收敛;$0<p\leq\frac{1}{2}$发散.)

数项级数敛散判别

- 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^p}$ 当$p>1$时绝对收敛；当$0<p\leqslant 1$时条件收敛；当$p\leqslant 0$时发散.
- 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[e-(1+\dfrac{1}{n})^n]^p$ 的收敛性，其中p为参数.
- 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 是发散的正项级数，$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，$\lim\dfrac{a_n}{S_n}=0$，证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为1.
- 判断无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$的敛散性.

和函数、级数求和

- 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $S(x)$.
- 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n^2-n)}{2^n}$ 的和.
- 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 的和.

答案

$(-1,1) \quad S(x) = \begin{cases} 3, & x=0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1 \end{cases};$

$\frac{8}{125}$; $\quad \frac{\pi}{2} - \ln 2.$

和函数、级数求和

- 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $S(x)$.
- 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n)}{2^n}$ 的和.
- 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 的和.

答案

$(-1,1)$ $\quad S(x)=\begin{cases} 3, & x=0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1 \end{cases}$;

$\frac{8}{125}$; $\qquad \frac{\pi}{2}-\ln 2$.

和函数、级数求和

- 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(-\infty < x < +\infty)$ 的系数满足 $a_0 = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} + a_n]x^n = e^x$, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.
- 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域与和函数.
- 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{2n}$ 在 $|x| < 1$ 内的和函数.

答案

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $-\ln(1-2x)(1+x)$; $\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$.

和函数、级数求和

- 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(-\infty < x < +\infty)$ 的系数满足 $a_0 = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} + a_n]x^n = e^x$, 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.
- 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域与和函数.
- 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}$ 在 $|x| < 1$ 内的和函数.

答案

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $-\ln(1-2x)(1+x)$; $\frac{x^2}{(1-x^2)^2}$.

无穷级数

和函数、级数求和

- 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n$ 的收敛区间与和函数$S(x)$.
- 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n-1}$ 的收敛域与和函数.
- 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!2^n} x^n$ 的收敛域与和函数$S(x)$, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$ 的和.

答案

$(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $S(x) = -\ln(1-3x)(1-5x)$; $(0, +\infty)$, $\frac{\ln x}{2}$;
$(-\infty, +\infty)$, $S(x) = (\frac{x}{2} + 1)e^{\frac{x}{2}}$ $3e^2$.

和函数、级数求和

- 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$ 的收敛区间与和函数$S(x)$.
- 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$ 的收敛域与和函数.
- 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!2^n}x^n$ 的收敛域与和函数$S(x)$, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$ 的和.

答案

$(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$, $\quad S(x)=-\ln(1-3x)(1-5x)$; $\quad (0,+\infty)$, $\quad \frac{\ln x}{2}$;
$(-\infty,+\infty)$, $\quad S(x)=(\frac{x}{2}+1)e^{\frac{x}{2}}$ $\quad 3e^2$.

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$展成x的幂级数，并求$f^{(5)}(0)$的值.
- 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$展成$x$的幂级数，并求$f^{(7)}(0)$，$f^{(8)}(0)$的值.

答案

$$f(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)x^n,(|x|<1),\qquad -\frac{315}{64};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ (|x|\le 1),$$

$$f^{(7)}(0)=6!,\quad f^{(8)}(0)=0.$$

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$展成x的幂级数，并求$f^{(5)}(0)$的值.
- 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$展成$x$的幂级数，并求$f^{(7)}(0)$，$f^{(8)}(0)$的值.

答案

$$f(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)x^n,(|x|<1),\quad -\frac{315}{64};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ (|x|\le 1),$$

$$f^{(7)}(0)=6!,\ f^{(8)}(0)=0.$$

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x(\frac{\sin t}{t})^2dt, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$在$x=0$处展开幂级数，并求出其收敛半径和收敛域.
- 将函数$f(x)=\ln(x^2+3x+2)$展成x的幂级数，并求收敛半径.
- 将函数$y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$展成$x-1$的幂级数，并指出收敛域.

答案

$R=+\infty,\quad(-\infty,+\infty);$

$$f(x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(2^n+1)x^n,\ (|x|<1),\ R=1$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(x-1)^n,\ (0<x<2)$$

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x(\frac{\sin t}{t})^2dt, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$在$x=0$处展开幂级数，并求出其收敛半径和收敛域.
- 将函数$f(x)=\ln(x^2+3x+2)$展成x的幂级数，并求收敛半径.
- 将函数$y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$展成$x-1$的幂级数，并指出收敛域.

答案

$R=+\infty,\quad(-\infty,+\infty);$

$$f(x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(2^n+1)x^n,\ (|x|<1),\ R=1$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})(x-1)^n,\ (0<x<2)$$

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$x=0$处展开幂级数，并指出收敛半径.
- 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展成$x$的幂级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},(|x|<1);$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1},\ (|x|\le\frac{1}{2}),\ \frac{\pi}{4}.$$

幂级数展开

- 将函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在$x=0$处展开幂级数，并指出收敛半径.
- 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展成$x$的幂级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},(|x|<1);$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1},\ (|x|\le\frac{1}{2}),\ \frac{\pi}{4}.$$

含参变量积分

- 计算$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x.$
- 利用$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$
- 利用Euler积分计算$\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$, 其中$\alpha>0.$
- 设$G(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$,$F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$ 求$G'(\alpha)$, $F'(\alpha)$.

答案

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$; $G'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2),$

$$F'(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha.$$

含参变量积分

- 计算 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$.
- 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.
- 利用Euler积分计算 $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$, 其中 $\alpha>0$.
- 设 $G(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$, $F(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 求 $G'(\alpha)$, $F'(\alpha)$.

答案

$\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$; $G'(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$,

$$F'(\alpha)=\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha.$$

含参变量积分

- 计算$F(u)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x))\,dx, \quad (u>0)$.
- 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$ ，其中$\alpha>0$.
- $I(\alpha)=\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{x^2+xu}\,dx$, 求$I'(0)$.
- 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数,
  $F(\alpha)=\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$, 求$F'(\alpha)$.

答案

$\pi\ln\frac{u+1}{2}$; $\quad \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; $\quad \frac{e-3}{2}$;

$F'(\alpha)=\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\,dx-$
$\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)$.

含参变量积分

- 计算$F(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2 x+u^2\cos^2 x)\,dx,\quad (u>0)$.
- 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx$ ，其中$\alpha>0$.
- $I(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{x^2+xu}\,dx$，求$I'(0)$.
- 设$f(u,v)$在整个平面上有连续的偏导数，
  $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}f(x+\alpha,x-\alpha)\,dx$，求$F'(\alpha)$.

答案

$\pi\ln\frac{u+1}{2}$;　　$\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$;　　$\frac{e-3}{2}$;

$F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}(f_1'(x+\alpha,x-\alpha)-f_2'(x+\alpha,x-\alpha))\,dx-$
$\sin\alpha f(\cos\alpha+\alpha,\cos\alpha-\alpha)-\cos\alpha f(\sin\alpha+\alpha,\sin\alpha-\alpha)$.

- 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^5}\, dx$.
- 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{1+x^2} dx$, 其中$\alpha > 0$.

答案

$\frac{\pi}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 4!}$; $\quad \pi \ln(1+\alpha)$.

- 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(9+x^2)^5}\,dx$.
- 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$, 其中 $\alpha > 0$.

答案

$\frac{\pi}{2^5\cdot3^3\cdot4!}$;　　$\pi\ln(1+\alpha)$.

傅里叶级数及数项级数和

- 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且
$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$
求$f(x)$ 的Fourier 级数，并利用所得结果计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

答案

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx,\qquad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^3}{32},\frac{\pi^4}{96},\frac{\pi^4}{90}.$$

傅里叶级数及数项级数和

- 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且
$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$
求$f(x)$ 的Fourier 级数，并利用所得结果计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

答案

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx,\qquad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^3}{32},\frac{\pi^4}{96},\frac{\pi^4}{90}.$$

傅里叶级数及数项级数和

- 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$ 展开以2π 为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.
- 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$ 展开成余弦级数(讨论收敛性).

答案

$$1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx, \quad \frac{\pi^2}{12}, \frac{\pi^4}{90};$$

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = x^2, \ x\in[0,\pi]$$

傅里叶级数及数项级数和

- 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=1-x^2$展开以2π为周期的余弦级数(须讨论其收敛性), 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.
- 将$[0,\pi]$上的函数$f(x)=x^2$展开成余弦级数(讨论收敛性).

答案

$$1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad \frac{\pi^2}{12},\frac{\pi^4}{90};$$

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\ x\in[0,\pi]$$

傅里叶级数及数项级数和

- 设$f(x)$ 是以2 为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为
$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\le 2,\\ 3-x, & 2<x\le 3.\end{cases}$$
1) 试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图，并将$f(x)$展开为Fourier 级数；
2) 试画出$f(x)$Fourier 级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图；
3) 求数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right), \quad \frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^2}{6}.$$

傅里叶分析

傅里叶级数及数项级数和

- 设$f(x)$ 是以2 为周期的周期函数，其在区间$[1,3]$上的取值为
$$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x\le 2,\\ 3-x, & 2<x\le 3.\end{cases}$$
1) 试画出$f(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图，并将$f(x)$展开为Fourier 级数;
2) 试画出$f(x)$Fourier 级数的和函数$S(x)$在区间$[-3,3]$ 上的草图;
3) 求数项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

答案

$$\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right),\quad \frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6}.$$

傅里叶级数及数项级数和

- 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$展开成2π 为周期的余弦级数，并求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.
- 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le|x|<\pi.\end{cases}$
  试将$f(x)$ 展开以2π 为周期的Fourier 级数，并求级数
  $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 及$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2};\qquad \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)x.$$

傅里叶级数及数项级数和

- 将函数$f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$展开成2π 为周期的余弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.
- 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le|x|<\pi.\end{cases}$
  试将$f(x)$ 展开以2π 为周期的Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

答案

$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\quad \frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(2n+1)x$.

傅里叶级数

- 设$f(x)$ 是以2π 为周期的函数且满足α $(0 < \alpha < 1)$ 阶Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}.$$

记a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是$f(x)$ 的Fourier 系数. 求证:

$$|a_n| \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}, \quad |b_n| \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

傅里叶变换

- 求函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0, & others\end{cases}$ 的Fourier 变换.
- 求函数$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\geq 0\\ e^{2x}, & x<0\end{cases}$ 的Fourier 变换.

答案

$\dfrac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}$; $\quad F(\lambda)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos\lambda x\mathrm{d}x=\dfrac{4}{4+\lambda^2}.$

傅里叶变换

- 求函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & others \end{cases}$ 的Fourier 变换.
- 求函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0 \\ e^{2x}, & x < 0 \end{cases}$ 的Fourier 变换.

答案

$\frac{2\sin\lambda\pi}{\lambda}$; $F(\lambda) = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos\lambda x \mathrm{d}x = \frac{4}{4+\lambda^2}$.