

第八次书面作业参考答案

1 习题 7

5. y 在 $2.2 \sim 2.6$ 的值为 $\{1, 1.3565, 1.6614, 1.9391\}$ (公式书上有, 考试用到的话应该会给出)

6. $p = 1, q = 2$ 的隐式格式: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n-1}, y_{n-1})]$, 注意这是四阶隐式格式, 截断误差为 $\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(\zeta)$, 关于用该格式计算, 可以采用以下几种方式:

1. 用单步法 (比如三或四阶 Runge-Kutta 格式) 进行起步计算与预估, 用隐式多步法校正 (注意需要在 $y = 3.4$ 与 $y = 3.6$ 都进行校正); 2. 用单步法进行起步计算, 用显式多步法 (比如 $p = 1, q = 2$ 的三阶显式格式) 进行预估, 用隐式多步法进行校正 (需要在 $y = 3.6$ 处校正), 下面给出各方法下 y 在 $3.2 \sim 3.6$ 的值:

(1). 三阶 Runge-Kutta+ 隐式多步法: $\{1.8519, 3.5887, 7.2252\}$

(2). 四阶 Runge-Kutta+ 隐式多步法: $\{1.8581, 3.5999, 7.2569\}$

(3). 三阶 Runge-Kutta+ $p = 1, q = 2$ 显式多步法 + 隐式多步法: $\{1.8519, 3.5664, 7.1414\}$

(4). 四阶 Runge-Kutta+ $p = 1, q = 2$ 显式多步法 + 隐式多步法: $\{1.8581, 3.5928, 7.1837\}$

8. 两边在同一点 (例如 x_n) Taylor 展开, 比较一下系数即可。

9. 用四阶 Runge-Kutta 格式, 三年后数量为 $u = 0.2238, v = 0.0988$

10. 同样用泰勒展开, 让左右系数相等, 可得 $\alpha = 9, \beta = 6$, 局部截断误差为 $\frac{1}{10}h^5 y^{(5)}(\zeta)$, 四阶精度。

2 补充教材

1. 验证正定性, 齐次性, 三角不等式即可 (注意正定性包含 $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$), 另一小问注意到 $\max_x |fg| \leq \max_x |f| * \max_x |g|$

2. 不是, 因为三角不等式不成立 (可以举例说明, 比如取两个坐标轴方向的单位向量代入试一下, 也可以由 (反向) Minkowski inequality (闵可夫斯基不等式) 知道 $0 < p < 1$ 时, 有 $\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$)