

不知道哪一年的秋季学期《数理逻辑与图论》期末试卷

(来自网安大礼包)

不愿(敢)透露姓名的同学

2023-12-19

1. (每题3分,共12分) 选择题(多选题)

(a) 设 p, q, r 为命题, x, y 的论域均为整数集合, $F(\cdot), G(\cdot)$ 为谓词函数, 以下命题为矛盾式的是

- (A) $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
- (B) $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$
- (C) $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$
- (D) $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x) \leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge G(x))$

(b) 设 A, B 是任意集合, 则以下选项错误的是

- (A) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- (B) $(A - B) \cup B = A$
- (C) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$
- (D) 若 $A \subseteq B$, 则 $(A \cap B) \cup A = A$

(c) 设 R, S 是非空集合 A 上的非空二元关系, 则以下说法正确的是

- (A) $r(R \cup S) = r(R) \cup r(S)$
- (B) $s(R \cup S) = s(R) \cup s(S)$
- (C) $t(R \cup S) = t(R) \cup t(S)$
- (D) $r(R \cap S) = r(R) \cap r(S)$

(d) 以下图中, 不具有哈密顿回路的是

- (A) 图 1
- (B) 图 2
- (C) 图 3
- (D) 图 4

注: ms 的照片里也没拍到图

2. (每题3分,共15分) 填空题

(a) 将复合命题 $(p \wedge \neg q) \vee r$ 转化成仅使用逻辑运算符 $\{\neg, \wedge\}$ 的等价命题为: _____

(b) 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R 是 A 上的偏序关系

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}$$

则 $B = \{a, c, d\}$ 的上界是 _____, 最小上界是 _____

(c) 从去掉大小王的 52 张扑克牌中选 5 张牌, 使得其中有红桃 A, 其他 4 张牌是顺子的方法数共有 _____ 种 (扑克牌按照 A, 2, ..., 10, J, Q, K, A 的顺序, 即 A, 2, 3, 4 和 J, Q, K, A 都是顺子)

(d) 设 R 是集合 A 上的关系, $A = \{a, b, c\}$, R 的关系矩阵为

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则传递闭包 $t(R)$ 的关系矩阵 $M(t(R)) = \underline{\hspace{2cm}}$

(e) 设 T 为二叉正则树, 有 t 片树叶 ($t \geq 1$), 则 T 有 _____ 条边

3. (每题 3 分, 共 15 分) 判断题 (若判断为对, 简要说明或证明; 若判断为错, 简要说明或举出反例)

(a) 对任意命题函数 $P(x), G(x)$, 假设论域给定, 则

$(\exists x P(x) \rightarrow \forall x G(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \rightarrow G(x)))$ 为永真式

(b) 设 f 是集合 S 到集合 T 的函数, A 和 B 是 S 的子集, 则 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) 对任意集合 A, B , 均有 $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

(d) 设简单图 G 有 n 个顶点, 且每个顶点的度数都不小于 $\frac{n}{2}$, 则 G 是连通的

4. (6 分)

某公司的出差派遣方案如下: 计划派小李或小张去上海出差: 若派小李去, 则小赵要加班; 若派小张去, 则小王也要去; 已知小赵未加班, 请用数理逻辑对该问题建模并用已建立的逻辑等价关系来推导该公司是如何派遣的

5. (8 分)

设 A, B 两个集合, 已知 $A \cap B \neq \emptyset$, 且 $\pi_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ 为 A 的一个划分, 设在 $A_i \cap B (i = 1, \dots, n)$ 中有 m 个是非空的 ($m \geq 1$), 令 $B_{i_k} = A_{i_k} \cap B \neq \emptyset, k = 1, \dots, m$, 证明: $\pi_2 = \{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$ 为 $A \cap B$ 的一个划分

6. (6 分)

设 R 是集合 A 上的二元等价关系, 集合 A 上的关系 S 满足条件: $\forall a, b \in A, (a, b) \in S$ 当且仅当 $\exists c ((a, c) \in R \wedge (c, b) \in R)$ 。证明: S 是 A 上的等价关系

7. (9 分)

设以凸 n 边形的顶点为顶点, 以内部对角线为边的三角形有 A_n 个 ($n \geq 6$), 请给出 A_n 的递推关系

8. (9 分)

设连通简单图 G 包含 n 个顶点且不是完全图 ($n \geq 3$), 证明: 存在顶点 $u, v, w \in V(G)$, 使得 $\{u, v\}, \{v, w\} \in E(G)$, 而 $\{u, w\} \notin E(G)$

9. (8 分)

请画出包含 7 个顶点的所以不同构的树

10. (12 分)

设连通简单图 G 的最短简单回路长度为 4, 每个顶点的度数均为 k , 证明:

(a) G 中至少有 $2k$ 个顶点

(b) 当 G 中正好有 $2k$ 个顶点时, 在同构意义下 G 是唯一的