

2022 年 1 月

注意事项:

- (1) 答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
- (2) 本试卷共 8 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。
- (3) 除特殊说明, 计算过程和结果不进行近似。

1、(9 分) 使用 Doolittle 分解算法分解如下矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

即求解单位下三角矩阵 L 和上三角形矩阵 U , 使得 $A = LU$ 。

答:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{23}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{132}{23} \end{pmatrix}$$

2、(9 分) 设 $f(x) = cx^n + x (c \neq 0)$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n (n > 2)$ 为一组相异节点, 试证明:

$$(1) \sum_{k=0}^n \frac{x_k^n}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = 1;$$

$$(2) f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = c \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

答:

略。

3、(10 分) 按下列数据, 用最小二乘法做出形如 $f(x) = ae^{b\sqrt{x}}$ 的拟合函数。(注意: 计算过程保留 4 位小数)

i	1	2	3	4
x_i	1	4	9	25
y_i	2.00	4.00	6.00	8.00

答:

$$y(x) = 1.7939e^{0.3285\sqrt{x}}.$$

4、(12 分) 考虑如下矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 写出使用规范运算的反幂法计算 A 的特征值时的迭代格式;(2) 取初始值 $X^{(0)} = (1, 1)^T$, 计算矩阵 A 按模最小的特征值及其对应的特征向量。(注意: 迭代收敛要求精确到小数点后 2 位, 总迭代次数不超过 8 次。)

答:

(1) 略;

(2) 按模最小的特征值 $\lambda = 1.70$, 相应特征向量为 $X = (1.00, -0.30)^T$ 。5、(15 分) 考虑线性方程组 $AX = B$, 其中,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 分别写出相应的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵;

(2) 求 Jacobi 迭代收敛时, 实数 a 的所有取值范围;

(3) 求 Gauss-Seidel 迭代收敛时, 实数 a 的所有取值范围。

答:

Jacobi 迭代的迭代矩阵为: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 收敛要求 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$;

Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵为: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix}$, 收敛要求 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 。

6、(15 分) 设有 $[-1, 2]$ 上的数值积分公式

$$\int_{-1}^2 f(x) dx \approx S(f(x)) = Af(-1) + Bf(2) + Cf(1) + Df'(1)$$

(1) 试确定常数 A, B, C, D , 使其达到最高阶代数精度; 此时的代数精度是多少?

(2) 假设 $f(x)$ 充分可微, 试求此数值积分公式的积分误差。

答:

(1) $A = \frac{9}{16}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{27}{16}, D = -\frac{9}{8}$, 具有 3 阶精度;

(2) 误差为 $-\frac{21}{160}f^{(4)}(\eta)$, $-1 \leq \eta \leq 2$ 。

7、(15 分) 对于常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

其中 $f(x, y)$ 足够光滑。若取 $h = \frac{b-a}{m}$, $x_n = a + nh, n = 0, 1, \dots, m$, m 为正整数。试证明对任意参数 $t \in (0, 1)$, 如下形式的龙格-库塔格式是二阶的, 并求其局部截断误差的表达式。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

答:

略。

8、(15 分) 记 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $F(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))^T$, 考虑非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(X) = x_1^2 + e^{x_2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}x_3\right) = 0 \\ f_2(X) = x_1^3 + x_2^3 - x_3 + 3 = 0 \\ f_3(X) = 4x_1 + x_2^2 - \ln(x_3 + 2) = 0 \end{cases}$$

(1) 写出求解非线性方程组 $F(X) = 0$ 的 Newton 迭代格式;

(2) 取初始向量 $X^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, 求出 $F(X)$ 在 $X^{(0)}$ 处的 Jacobi 矩阵, 并计算 $X^{(1)}$, 即经过一次 Newton 迭代后的 X 。(注意: 计算过程保留 4 位小数)

答:

(1) $X^{(k+1)} = X^{(k)} - J^{-1}(X^{(k)})F(X^{(k)});$

$$(2) \ J(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 & e^{x_2} & \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x_3\right) \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & -1 \\ 4 & 2x_2 & -\frac{1}{x_3+2} \end{pmatrix}, \ J(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2.0000 & 2.7183 & 1.5708 \\ 3.0000 & 3.0000 & -1.0000 \\ 4.0000 & 2.0000 & -0.3333 \end{pmatrix}, \ X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4171 \\ 0.1806 \\ 0.7931 \end{pmatrix}.$$

本解答由 PB19020649 李治平提供。

5