

第四次书面作业参考答案

1 课本习题

1.1 习题 6

6. 注意一下不同积分公式不同节点前的系数即可。

复化梯形: $\int_{0.6}^{1.8} f(x) \approx T(f) = 5.5000$

复化 Simpson: $\int_{0.6}^{1.8} f(x) \approx S(f) = 5.4667$

8. 先算用复化梯形公式算 $R_{k,1}, k = 1, 2, 3, \dots$, 再根据 $R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, k = 2, 3, \dots$ 外推, 结果如下

n	$T(f)$	$S(f)$	$C(f)$	$R(f)$
1	0.75000			
2	0.70833	0.69444		
4	0.69702	0.69325	0.69317	
8	0.69412	0.69315	0.69315	0.69315

$$I(f) \approx 0.69135$$

9. $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = hk \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} f(x_i, y_j), h = \frac{1}{m}, k = \frac{1}{n}$, 注意一下不同积分节点前的系数 c_{ij} 即可, 关键不要忘了前面的 hk .

(1) 0.25 (第四版) / 0 (第三版); (2) 0.3413.

(第三版第一问积分区间为 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 第四版第一问积分区间为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 答案不同, 这次都算对)

10. 代数精度为 3 即为两点 Gauss 积分公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx G_2(f) = \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}\right) \right)$$

(1)2.0000;(2)-96.8889

11.(1)

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x; T_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}; T_3(x) = \frac{-3x + 5x^3}{2}$$

(2)

$$T_2(x) = 0 \Rightarrow x_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_1^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1^{(2)}}{x_2^{(2)} - x_1^{(2)}} dx = 1, a_2^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{x - x_2^{(2)}}{x_1^{(2)} - x_2^{(2)}} dx = 1$$

$$G_2(f) = \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2}\right) \right)$$

1.2 习题 3

2. 答案不唯一, 关键看迭代格式 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 在 3 处的导数 $\phi'(3)$ 是否大于 1, 但需要注意的是, 书上的定理 3.1 仅是充分条件而非必要条件, 也就是说即使 $\phi' > 1$, 也仅能说明 “不保证收敛”。

3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.7000000 \\ 0.8000000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7500000 \\ 0.8000000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7500000 \\ 0.7750000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7500000 \\ 0.7625000 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0.7500000 \\ 0.7562500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7531250 \\ 0.7562500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7546875 \\ 0.7562500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.7546875 \\ 0.7554687 \end{pmatrix} \\ x^* &= \frac{0.7546875 + 0.7554687}{2} = 0.7550781 \end{aligned}$$

2 补充题

证明: $C_{2n}(f) = \frac{16}{15}S_{2n}(f) - \frac{1}{15}S_n(f)$ (老师 PPT 上的 n 与课本上的 n 指代略有不同, 注意其对应关系即可)

Pf: 对比一下对应节点系数即可, 如下图所示:

