第4次作业.

24.

有实根：$x^2 \geq 4$

$$P(x^2 \geq 4) = P(-5 < x \leq -2) + P(2 \leq x < 5)$$

$$= \frac{-2+5}{10} + \frac{5-2}{10}$$

$$= \frac{3}{5}$$

36. 离散：

(1)

x	-1	0	1	2
$-2x+1$	3	1	-1	-3
	0.2	0.3	0.1	0.4

(2)

x	-1	0	1	2
$\lvert x\rvert$	1	0	1	2
	0.2	0.3	0.1	0.4

Y	0	1	2
	0.3	0.3	0.4

(3)

Y	4	1	0
	0.2	0.7	0.1

3).

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 = a + b\cdot\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 = a - b\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

(2) 最好直接用分布函数求： $P(Y\le y) = P(3-X^{\frac{1}{3}} \le y) = P(X^{\frac{1}{3}} \ge 3-y)$

$= P(X \ge (3-y)^3)$

$= 1 - F((3-y)^3)$

再对 y 求导.

推论 2.1　密度函数变换公式

若 $g(x)$ 是严格单调的且反函数可导时, 则随机变量 Y 仍为连续型随机变量, 且有概率密度函数 $f_1(y)$

$$f_1(y) = \begin{cases} f(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{2.26}$$

其中 $h(y)$ 为 $g(x)$ 的反函数, $\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}, \beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$.

$g(x) = 3 - x^{\frac{1}{3}}$ 求 $h(y)$ 即可

(3)

$P(\frac{1}{X} \le y)$ 对 y 的大小进行讨论

① $y \le 0$ (仍用cdf求)

$P(\frac{1}{X} \le y) = P(\frac{1}{X} \le y \mid X \le 0)\cdot P(X\le 0) + \underbrace{P(\frac{1}{X} \le y \mid X>0)}_{0}\cdot P(X>0)$

$= P(\frac{1}{X} \le y \mid X\le 0)\cdot P(X\le 0)$

$= P(1 \ge X\cdot y \mid X \le 0)\cdot P(X\le 0)$

$= P(\frac{1}{y} \le X \le 0)$

$= F(0) - F(\frac{1}{y})$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{y}$ $\left(\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \frac{\pi}{2},\ y > 0\right)$

$= -\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{y}) = \frac{1}{\pi}\arctan(-\frac{1}{y})$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(-y)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(y)$

② $y>0$

$$P(\frac{1}{X}\le y) = P(\frac{1}{X}\le y,\ X\le 0) + P(\frac{1}{X}\le y,\ X>0)$$
$$= P(X\le \frac{1}{y},\ X\le 0) + P(X\ge \frac{1}{y},\ X>0)$$
$$= P(X\le 0) + P(X\ge \frac{1}{y})$$
$$= \frac{1}{2} + 1 - F(\frac{1}{y})$$
$$= \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan(y)$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y$$

or 分段使用:

推论 2.1 密度函数变换公式

若 $g(x)$ 是严格单调的且反函数可导时, 则随机变量 Y 仍为连续型随机变量, 且有概率密度函数 $f_1(y)$

$$f_1(y)=\begin{cases} f(h(y))|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (2.26)$$

其中 $h(y)$ 为 $g(x)$ 的反函数, $\alpha=\min\{g(-\infty),g(\infty)\}, \beta=\max\{g(-\infty),g(\infty)\}$.

$\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不单调.

40. $X\sim U(0,1)$

(1) 单调 on $\mathbb{R} \supseteq [0,1]$

(2) $\frac{1}{X}$ 单调 on $[0,1]$

(3) $-\frac{1}{\lambda}\ln X$ 单调 on $\mathbb{R}\supseteq[0,1]$

推论 2.1 密度函数变换公式

若 $g(x)$ 是严格单调的且反函数可导时, 则随机变量 Y 仍为连续型随机变量, 且有概率密度函数 $f_1(y)$

$$f_1(y)=\begin{cases} f(h(y))|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (2.26)$$

其中 $h(y)$ 为 $g(x)$ 的反函数, $\alpha=\min\{g(-\infty),g(\infty)\}, \beta=\max\{g(-\infty),g(\infty)\}$.

累计分布函数求防止条件不满足

$P(Y\le y)$ 再对 y 求导.

(1) $P(Y_1 \le y) = P(e^X \le y) \overset{单调}{=} P(X \le \log(y)) = F(\log(y))$

$= \log(y)$

$p(y) = \frac{1}{y} I(1, e)$

(2) $P(Y_2 \le y) = P(X^{-1} \le y) \overset{单调}{=} P(X \ge \frac{1}{y}) = 1 - F(\frac{1}{y})$

$p(y) = \frac{1}{y^2} I(1, +\infty)$

(3) $P(Y_3 \le y) = P(-\frac{1}{\lambda}\ln X \le y) = P(\ln X \ge -\lambda y)$

$\overset{单调}{=} P(X \ge e^{-\lambda y}) = 1 - F(e^{-\lambda y})$

$p(y) = \lambda e^{-\lambda y} I(0, +\infty)$

46.

$X \sim \exp(\lambda)$ $\quad x \geq 0$ $\quad$ F 为指数分布分布函数

$P(Y \leq y)$ 对 y 范围进行讨论.

① $y \leq 0$

$$P(Y \leq y) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{P(X \leq y, x \geq 1)}} + P(-x^2 \leq y, x < 1)$$

$$= P(-x^2 \leq y, x < 1)$$

$$= P(x < 1, x \geq \sqrt{-y})$$

$\downarrow$ 若 $y > -1$ $\quad$ 若 $y \leq -1$ 则 $= 0$

$$= P(\sqrt{-y} \leq X < 1)$$

$$= F(1) - F(\sqrt{-y})$$

求导 $p(y) = (-F(\sqrt{-y}))'$

② $y > 0$

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y, x \geq 1) + P(-x^2 \leq y, x < 1)$$

$$= P(X \leq y, x \geq 1) + P(X < 1)$$

若 $y \leq 1$ $= P(X < 1) = F(1)$

若 $y > 1$ $= P(1 \leq X \leq y) + P(X < 1) = F(1) + F(y) - F(1)$

$$= F(y)$$

$p(y) = (F(y))'$

$$p(y)=\begin{cases}(-F(\sqrt{y}))' & -1<y\le 0\\ 0 & \text{其它}\\ (F(y))' & y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y>1\\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{y}}\cdot e^{-\lambda\sqrt{y}} & -1<y\le 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$