

粘滞系数

学号: PB22511902 姓名: 王冬雪

测量记录

表1 球的参数						
大球直径d(mm)	3.483	3.480	3.477	3.472	3.476	3.472
中球直径d(mm)	2.979	2.968	2.983	2.970	2.969	2.972
小球直径d(mm)	1.969	1.982	1.979	1.969	1.979	1.978
大球质量(g)	0.1789	0.1790	0.1786	0.1793	0.1783	0.1791
中球质量(g)	0.1135	0.1134	0.1145	0.1137	0.1136	0.1133
小球质量(g)	0.0355	0.0352	0.0354	0.0322	0.0339	0.0339

表2 匀速区测量			
长度(cm)	第一段时间间隔	第二段时间间隔	第三段时间间隔
6.95	0" 64	0" 70	0" 56
6.87	0" 49	0" 50	0" 51
6.79	0" 43	0" 61	0" 50

表3 落球数据						
大球时间间隔	1" 85	2" 10	1" 98	2" 08	2" 11	1" 79
中球时间间隔	2" 75	2" 64	2" 69	2" 77	2" 64	2" 66
小球时间间隔	5" 71	5" 75	5" 66	5" 90	5" 57	5" 77

表4 其他数据			
温度T(°C)	28.3	28.6	28.7
直径D(cm)	8.014	8.046	8.000
高度H(cm)	43.42	43.39	43.37
$\rho_0(Kg/m^3)$	0.9532	0.9531	0.9532

数据处理

由表 1,

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 &= \frac{3.483 + 3.480 + 3.477 + 3.472 + 3.476 + 3.472}{6} mm = 3.477 mm \\ \bar{d}_2 &= \frac{2.979 + 2.968 + 2.983 + 2.970 + 2.969 + 2.972}{6} mm = 2.974 mm \\ \bar{d}_3 &= \frac{1.969 + 1.982 + 1.979 + 1.969 + 1.979 + 1.978}{6} mm = 1.976 mm \\ \bar{m}_1 &= \frac{0.1789 + 0.1790 + 0.1786 + 0.1793 + 0.1783 + 0.1791}{6} g = 0.1789 g \\ \bar{m}_2 &= \frac{0.1135 + 0.1134 + 0.1145 + 0.1137 + 0.1136 + 0.1133}{6} g = 0.1137 g \\ \bar{m}_3 &= \frac{0.0355 + 0.0352 + 0.0354 + 0.0322 + 0.0339 + 0.0339}{6} g = 0.0344 g\end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_1 &= \frac{\bar{m}_1}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\bar{d}_1}{2}\right)^3} = 0.0081 g/mm^3 \\ \bar{\rho}_2 &= \frac{\bar{m}_2}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\bar{d}_2}{2}\right)^3} = 0.0083 g/mm^3 \\ \bar{\rho}_3 &= \frac{\bar{m}_3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\bar{d}_3}{2}\right)^3} = 0.0085 g/mm^3\end{aligned}$$

由表 2,

$$\bar{h} = \left(\frac{6.95 + 6.97 + 6.79}{3} \right) cm = 6.90 cm$$

△ 这里记录出现混乱, 匀速区(200ml-1100ml)高度明显大于7cm, 根据拍摄的视频及预先标定的距离(160ml 对应3cm)

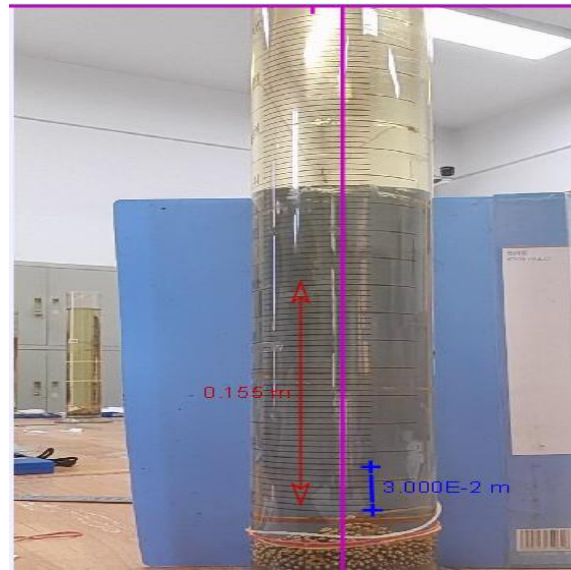


图0.1 定标尺与匀速区长度

可知，匀速区长度约为16m，故记录的 \bar{h} 应为200ml-400ml 的长度，真正的 \bar{h} 应为其 $\frac{9}{4}$ 倍。

即， $\bar{h} = 15.53\text{cm}$

由表 3，

$$\bar{t}_1 = \frac{1'85 + 2'10 + 1'98 + 2'08 + 2'11 + 1'79}{6} = 1'99$$

$$\bar{t}_2 = \frac{2'75 + 2'64 + 2'69 + 2'77 + 2'64 + 2'66}{6} = 2'69$$

$$\bar{t}_3 = \frac{5'71 + 5'75 + 5'66 + 5'90 + 5'57 + 5'77}{6} = 5'73$$

那么，

$$v_1 = \frac{\bar{h}}{\bar{t}_1} = 7.82\text{cm/s}$$

$$v_2 = \frac{\bar{h}}{\bar{t}_2} = 5.77\text{cm/s}$$

$$v_3 = \frac{\bar{h}}{\bar{t}_3} = 2.71\text{cm/s}$$

△ 这里大球速度为7.82cm/s，这与下图中统计结果7.75cm/s 类似，说明匀速区的倍乘确然为此。

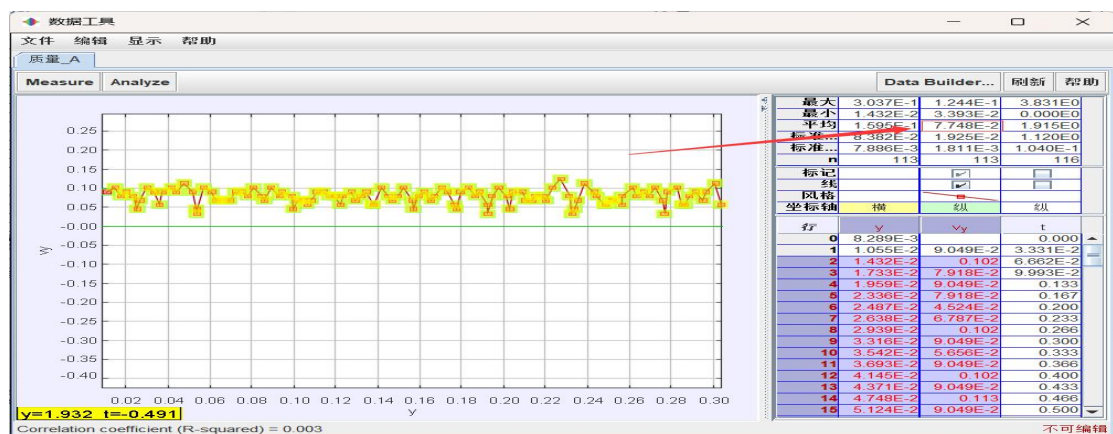


图0.2 大球下落速度-位移图

由表 4,

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{28.3 + 28.6 + 28.7}{3} ^\circ\text{C} = 28.5^\circ\text{C} \\ \bar{D} &= \frac{8.014 + 8.046 + 8.000}{3} \text{cm} = 8.020\text{cm} \\ \bar{H} &= \frac{43.42 + 43.39 + 43.37}{3} \text{cm} = 43.39\text{cm} \\ \bar{\rho}_0 &= \frac{0.9532 + 0.9531 + 0.9532}{3} \text{Kg/m}^3 = 0.9532\text{g/cm}^3\end{aligned}$$

那么,

$$\bar{R} = \frac{\bar{D}}{2} = 4.010\text{cm}$$

由公式

$$\eta_0 = \frac{1}{18} \frac{(\rho - \rho_0)gd^2}{v \left(1 + 2.4 \frac{d}{2R}\right) \left(1 + 3.3 \frac{d}{2h}\right)}$$

取 $g = 9.7947\text{m/s}^2$, 得,

$$\begin{aligned}\eta_{01} &= \frac{1}{18} \frac{(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0)g\bar{d}_1^2}{\bar{v}_1 \left(1 + 2.4 \frac{\bar{d}_1}{2\bar{R}}\right) \left(1 + 3.3 \frac{\bar{d}_1}{2\bar{H}}\right)} = 0.5392\text{Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{02} &= \frac{1}{18} \frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_0)g\bar{d}_2^2}{\bar{v}_2 \left(1 + 2.4 \frac{\bar{d}_2}{2\bar{R}}\right) \left(1 + 3.3 \frac{\bar{d}_2}{2\bar{H}}\right)} = 0.05530\text{Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{03} &= \frac{1}{18} \frac{(\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_0)g\bar{d}_3^2}{\bar{v}_3 \left(1 + 2.4 \frac{\bar{d}_3}{2\bar{R}}\right) \left(1 + 3.3 \frac{\bar{d}_3}{2\bar{H}}\right)} = 0.7022\text{Pa} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

那么, 根据公式

$$R_e = \frac{2rv\rho}{\eta}$$

得,

$$0.1 < R_{e1} = \frac{\bar{d}_1 \bar{v}_1 \bar{\rho}_1}{\eta_{01}} = 0.4809 < 0.5$$

$$0.1 < R_{e2} = \frac{\bar{d}_2 \bar{v}_2 \bar{\rho}_2}{\eta_{02}} = 0.2958 < 0.5$$

$$R_{e3} = \frac{\bar{d}_3 \bar{v}_3 \bar{\rho}_3}{\eta_{03}} = 0.0922 < 0.1$$

所以, 根据公式

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_0 - \frac{3}{16} dv\rho_0 \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} \eta_1 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \right]\end{aligned}$$

得出修正后的粘滞系数,

$$\begin{aligned}\eta_{11} &= \eta_{01} - \frac{3}{16} \bar{d}_1 \bar{v}_1 \bar{\rho}_0 = 0.4906\text{Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{12} &= \eta_{02} - \frac{3}{16} \bar{d}_2 \bar{v}_2 \bar{\rho}_0 = 0.5232\text{Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{13} &= \eta_{03} - \frac{3}{16} \bar{d}_3 \bar{v}_3 \bar{\rho}_0 = 0.5446\text{Pa} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

即, 大球粘滞系数为 $0.4906\text{Pa} \cdot \text{s}$, 中球粘滞系数为 $0.5232\text{Pa} \cdot \text{s}$, 小球粘滞系数为 $0.5446\text{Pa} \cdot \text{s}$ 。

对于大球轨迹进行追踪, 所得数据如下:



图 1 大球的速度与位移图

由图及右侧统计可知，大球的匀速区在 0.1291m 至 0.3210m 间，长约 19.19cm。

对于中球轨迹进行追踪，所得数据如下：

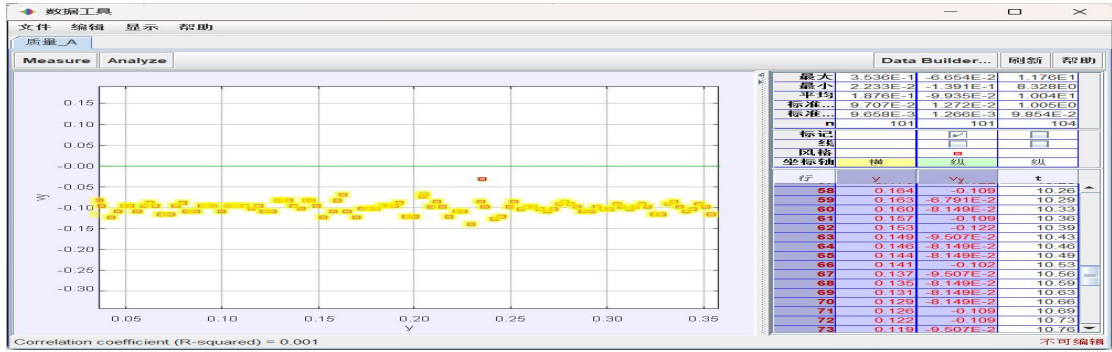


图 2 中球的速度与位移图

忽略由于遮光板边缘影响无法追踪的一点，可见中球的匀速区在 0.0223m 到 0.3536m 之间，匀速区长度为 30.13cm。

小球的匀速区明显超出视频拍摄区，故不予以分析。

上述结果符合“大球匀速区包含于小球匀速区之内”的规律。

上述计算处理中，我们最终使用的公式为：

$$\eta_0 = \frac{1}{18} \frac{(\rho - \rho_0)gd^2}{v \left(1 + 2.4 \frac{d}{2R}\right) \left(1 + 3.3 \frac{d}{2h}\right)}$$

$$\eta_1 = \eta_0 - \frac{3}{16} dv\rho_0$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \eta_1 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \right]$$

由不确定度计算与合成式，

$$U_{AD} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^3 (D_i - \bar{D})^2}{n(n-1)}} = 0.06cm$$

$$U_{BD} = k_{0.95} \frac{\Delta_{BD}}{C} = 1.645 \times \frac{\sqrt{0.02^2 + 0.02^2}}{\sqrt{3}} = 0.03cm$$

$$U_D = \sqrt{U_{AD}^2 + U_{BD}^2} = 0.06cm$$

$$U_{AH} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^3 (H_i - \bar{H})^2}{n(n-1)}} = 0.06cm$$

$$U_{BH} = k_{0.95} \frac{\Delta_{BH}}{C} = 1.960 \times \frac{\sqrt{0.02^2 + 0.5^2}}{3} = 0.3cm$$

$$U_H = \sqrt{U_{AH}^2 + U_{BH}^2} = 0.3cm$$

$$U_{A\rho_0} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^3 (\rho_{0i} - \bar{\rho}_0)^2}{n(n-1)}} = 0.00014g/cm^3$$

$$U_{B\rho_0} = k_{0.95} \frac{\Delta_{B\rho_0}}{C} = 1.960 \times \frac{\sqrt{0.002^2 + 0.001^2}}{3} = 0.0015g/cm^3$$

$$U_{\rho_0} = \sqrt{U_{A\rho_0}^2 + U_{B\rho_0}^2} = 0.0015g/cm^3$$

$$U_{Ah} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^3 (h_i - \bar{h})^2}{n(n-1)}} = 0.2cm$$

$$U_{Bh} = k_{0.95} \frac{\Delta_{B\rho_0}}{C} = 1.960 \times \frac{\sqrt{0.02^2 + 0.05^2}}{3} = 0.04cm$$

$$U_h = \sqrt{U_{Ah}^2 + U_{Bh}^2} = 0.2cm$$

对 h 修正, $U_h = 0.5cm$

对大球 (下述物理量省略下标 1),

$$U_{Ad} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^6 (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = 0.005mm$$

$$U_{Bd} = k_{0.95} \frac{\Delta_{Bd}}{C} = 1.960 \times \frac{\sqrt{0.004^2 + 0.005^2}}{3} = 0.004mm$$

$$U_d = \sqrt{U_{Ad}^2 + U_{Bd}^2} = 0.006mm$$

$$U_{Am} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^6 (m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} = 0.0004g$$

$$U_{Bm} = k_{0.95} \frac{\Delta_{Bd}}{C} = 1.960 \times \frac{0.0004}{3} = 0.0003g$$

$$U_m = \sqrt{U_{Am}^2 + U_{Bm}^2} = 0.0005g$$

$$U_{At} = t_{0.95} \sqrt{\frac{\sum_1^6 (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} = 0.14s$$

$$U_{Bt} = k_{0.95} \frac{\Delta_{Bt}}{C} = 1.960 \times \frac{\sqrt{0.01^2 + 0.2^2}}{3} = 0.13s$$

$$U_t = \sqrt{U_{At}^2 + U_{Bt}^2} = 0.19s$$

即,

物理量	D(cm)	H(cm)	$\rho_0(g/cm^3)$	h(cm)	d(mm)	m(g)	t(s)
不确定度	0.06	0.3	0.0015	0.5	0.006	0.0005	0.19

表 5 大球的相关参量不确定度

那么根据不确定度传递公式

$$\begin{aligned}
 U_{\eta_0} &= \eta_0 \left[\frac{U_{(\rho-\rho_0)}}{(\rho-\rho_0)} + \frac{2U_d}{d} + \frac{U_v}{v} + \frac{U_{(1+2.4\frac{d}{2R})}}{1+2.4\frac{d}{2R}} + \frac{U_{(1+3.3\frac{d}{2H})}}{1+3.3\frac{d}{2H}} \right] \\
 &= \eta_0 \left[\frac{\rho \left(\frac{U_m}{m} + 3\frac{U_d}{d} \right) + U_{\rho_0}}{(\rho-\rho_0)} + \frac{2U_d}{d} + \frac{U_h}{h} + \frac{U_t}{t} + \frac{2.4\frac{d}{D} \left(\frac{U_d}{d} + \frac{U_D}{D} \right)}{1+2.4\frac{d}{D}} + \frac{3.3\frac{d}{2H} \left(\frac{U_d}{d} + \frac{U_H}{H} \right)}{1+3.3\frac{d}{2H}} \right] \\
 &= 0.08Pa \cdot s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\eta_1} &= U_{\eta_0} + \frac{3}{16} U_{dv\rho_0} \\
 &= U_{\eta_0} + \frac{3}{16} dv\rho_0 \left(\frac{U_d}{d} + \frac{U_v}{v} + \frac{U_{\rho_0}}{\rho_0} \right) \\
 &= U_{\eta_0} + \frac{3}{16} dv\rho_0 \left(\frac{U_d}{d} + \frac{U_h}{h} + \frac{U_t}{t} + \frac{U_{\rho_0}}{\rho_0} \right) \\
 &= 0.08Pa \cdot s
 \end{aligned}$$

如要计算 U_{η_2} , 则需下述公式:

$$\begin{aligned}
U_{\eta_2} &= \eta_2 \left[\frac{U_{\eta_1} + \frac{U}{1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2}} \right] \\
&= \eta_2 \left[\frac{U_{\eta_1} + \frac{\sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} U_{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2}}{2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \right) \left(1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2 \right)} \right] \\
&= \eta_2 \left[\frac{U_{\eta_1} + \frac{\sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2 U_{\frac{dv\rho_0}{\eta_1}}}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \right) \left(1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2 \right)} \right] \\
&= \eta_2 \left[\frac{U_{\eta_1} + \frac{\sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^3 \left(\frac{U_d}{d} + \frac{U_h}{h} + \frac{U_t}{t} + \frac{U_{\rho_0}}{\rho_0} + \frac{U_{\eta_1}}{\eta_1} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2} \right) \left(1 + \frac{19}{270} \left(\frac{dv\rho_0}{\eta_1} \right)^2 \right)} \right]
\end{aligned}$$

同理，可得中球小球的系列参数。

将实验中涉及的物理量及不确定度整理如下：

量筒参数	物理量	D(cm)	H(cm)	$\rho_0(g/cm^3)$	h(cm)
	数值	8.02	43.4	0.9532	15.5
	不确定度	0.06	0.3	0.0015	0.5
大球参数	物理量	d(mm)	m(g)	t(s)	$\eta(Pa \cdot s)$
	数值	3.477	0.1789	1.99	0.54
	不确定度	0.006	0.0005	0.19	0.08
中球参数	物理量	d(mm)	m(g)	t(s)	$\eta(Pa \cdot s)$
	数值	2.974	0.1137	2.69	0.52
	不确定度	0.007	0.0005	0.14	0.06
小球参数	物理量	d(mm)	m(g)	t(s)	$\eta(Pa \cdot s)$
	数值	1.976	0.0344	5.73	0.54
	不确定度	0.007	0.0014	0.18	0.05
实验温度	28.5°C				

计算 $\frac{U}{\eta}$ ，得大球 14.8%，中球 11.5%，较大，可能是因为速度过快，秒表计数不及时，

小球为 9.3%，略小，数据较为准确。

本实验最大错误为匀速区测量时记录了 200ml-400ml 之间长度，后来更改了橡皮筋间距离，并未再次测量。