热学若干知识点总结

January 2021

本文档所提的课本均为张玉民《热学》，带 * 为扩展内容，一般不做要求。

1、平均自由程

1、理解平均自由程的定义：单个分子连续两次与其他分子碰撞之间平均通过的距离。

2、平均自由程和碰撞频率的推导公式与定量计算课本 page10.

(1) 习题 1.2

本题计算仅需理解定义即可，单位路程平均碰撞概率为 $\frac{1}{\lambda}$, 那么走过 dx 的距离因为碰撞而“损失”的分子数为：

$$dN = -N\frac{dx}{\lambda}$$

再结合 $N(x=0) = N_0$, 可以得到：

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

其中 N 的意义为平均自由程大于 x 的分子数。

(2) 平均自由程计算与性质

性质：与分子数密度成反比，与分子平均运动速率（温度）无关，后者可以理解为，温度越高，速率越大，但同时碰撞频率也越高，可以理解为碰撞时间缩短但速度增大，这两者效果恰好抵消。

定量计算：课后习题 1.1。

(3) 混合气体平均自由程 *

见 http://www.cqvip.com/qk/97362a/199402/4001401447.html

2、麦克斯韦分布律

关于 maxwell 分布律的计算，建议掌握 Γ 函数的相关积分，Γ 函数积分在微积分课本上有介绍，也可访问以下网址学习。需要提醒一点是 Γ 函数是从 0 到无穷积分，但涉及到速度分布积分的时候有可能从负无穷到正无穷积分。

https://zh.wikipedia.org/wiki/%CE%93%E5%87%BD%E6%95%B0

麦克斯韦速度分布律：

$$f_{\mathrm{v}}\left(v_x, v_y, v_z\right) dv_x dv_y dv_z=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}\right] dv_x dv_y dv_z$$

三维情况下的麦克斯韦速率分布律 (即把速度分布函数中的 $dv_x dv_y dv_z$ 换为 $4\pi v^2 dv$)：

$$f(v)dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv$$

(1) 物理意义

在速度相空间 (v_x, v_y, v_z) 的一块无穷小区域 (dv_x, dv_y, dv_z) 内找到具有特定速度 v = (v_x, v_y, v_z) 的气体分子的几率为:$f_{\mathbf{v}}\left(v_x, v_y, v_z\right) dv_x dv_y dv_z$

(2) 定量计算

A、最概然速率、平均速率和方均根速率的计算请见课本 page131-132，这三个速率的相对大小需要掌握。

B、$\overline{v^3}$ 的计算：

$$\int_0^{\infty} f(v) v^3 dv=\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^5 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) dv$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^2 d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)(\frac{2kT}{m})^3 \frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2kT}{m})^3 \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \Gamma(3)$$

$$= 8\sqrt{\frac{2}{\pi}(\frac{kT}{m})^3}$$

C、$\overline{\frac{1}{v}}$ 计算

$$\overline{\frac{1}{v}} = \int_0^\infty f(v)\frac{1}{v}dv = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v\exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)dv$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)d(\frac{mv^2}{2kT})\frac{kT}{m}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\frac{kT}{m}\Gamma(1)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)}$$

D、$\overline{\frac{1}{v^2}}$ 求解

$$\int_0^\infty f(v)\frac{1}{v^2}dv = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)dv$$

$$= \frac{m}{kT}$$

E、$\overline{\frac{1}{v^3}}$ 积分不收敛

(3) 估算

课后习题 4.6：

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\int_{v_1}^{v2} f(v)dv}{\int_{v_3}^{v4} f(v)dv}$$

由于 $v_2 - v_1 = v4 - v_3 << v1$, 因此可以做如下近似计算:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\int_{v_1}^{v2} f(v)dv}{\int_{v_3}^{v4} f(v)dv} \approx \frac{f(\overline{v_1})}{f(\overline{v3})}$$

$$= 0.267$$

4.9（计算器计算）

(4) 变量替换

变量替换只要抓住下面这个关系式即可：

$$f(v)dv = f(x)dx$$

$$f(x) = f(v)\frac{dv}{dx}$$

只需求解 $\frac{dv}{dx}$ 再把 $f(v)$ 中的 v 换为 x 即可。

课后习题 4.8(1)：

$$v = x * v_p$$

$$\frac{dv}{dx} = v_p$$

$$f(x) = f(v) * v_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right) v_p$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}$$

4.8(2):

$$\epsilon_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$d\epsilon_k = mvdv$$

$$\frac{dv}{d\epsilon_k} = \frac{1}{\sqrt{2m\epsilon_k}}$$

$$f(\epsilon_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} \frac{2\epsilon_k}{m} e^{-\frac{\epsilon_k}{kT}} \frac{1}{\sqrt{2m\epsilon_k}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\epsilon_k}{\pi k^3 T^3}} e^{-\frac{\epsilon_k}{kT}}$$

(5) 麦克斯韦-玻尔兹曼（M-B）分布律

详细理论推导见课本 page138-143

$$f(r, v) = C * e^{-\frac{1}{kT} * (\frac{1}{2}mv^2 + \epsilon_p)}$$

其中 C 为一个归一化常数。

课后习题 4.10：

由于 $p = nkT$，在等温大气模型中，气压之比等于分子数密度之比。那么有：

$$\frac{760mmHg}{590mmHg}=\frac{n_1}{n_2}=e^{-\frac{ugh}{N_AkT}}=e^{-\frac{ugh}{RT}}$$

代入数据解得:

$$h=2060m$$

课后习题 4.11:

采用同 4.10 一样的方法，可以得到:

$$h=6070m$$

课后习题 4.12:

由于 M-B 分布律中的速率和势能可以看成两个独立的分布，所以平均动能为:

$$\overline{\epsilon_k}=\frac{3kT}{2}$$

把 M-B 分布律中速率部分积分得到:

$$n(h)=n_0e^{-mgh/kT}---(1)$$

$$\overline{\epsilon_p}=\frac{\int_0^L n(h)mgh}{\int_0^L n(h)}---(2)$$

把（1）式代入（2）中积分得到:

$$\epsilon_p=kT+\frac{mgL}{1-e^{\frac{mgL}{kT}}}$$

(6) 二维麦克斯韦速率分布

见下面三张图片

3、泻流

详细的公式见课本 page134-138，

(1) 核心公式

泻流速率:

$$\Gamma=\frac{1}{4}n\overline{v}$$

例 **因为固体的原子和气体分子之间有力的作用，所以在真空系统中的固体表面上会形成厚度为1个分子直径那样的一个单分子层，设这层分子仍可十分自由的在固体表面上滑动，这些分子十分近似的形成了二维理想气体。如果这些分子是单原子分子，吸附层的温度为T，是给出表示分子处于速率为v到$v+\mathrm{d}v$范围内的概率$f(v)\mathrm{d}v$的表达式。**

解: 在Maxwell速度分布律中，每个速度分量的分布律为

$$f(v_i)dv_i=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{v_i^2}{2kT}\right)dv_i \qquad (i=x,y,z)$$

则二维理想气体Maxwell速度分布律为

$$f(\vec{v})d\vec{v}=f(v_x)\mathrm{d}v_x\bullet f(v_y)\mathrm{d}v_y=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2kT}\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y$$

而速率分布律，对二维理想气体而言，就是求半径为v-$v+\mathrm{d}v$的圆环内的概率

从定义出发，先写出速度空间的分子数密度

$$D(v_x,v_y)=\frac{\mathrm{d}N_{v_x,v_y}}{\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y}=Nf(v_x,v_y)=N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

求半径为v-$v+\mathrm{d}v$的圆环内的概率，就是

$$f(v)dv=\frac{\mathrm{d}N_{v-v+\mathrm{d}v}}{N}=D(v_x,v_y)\cdot 2\pi vdv=\frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\cdot 2\pi vdv$$

$$=\frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\cdot vdv$$

**可以据此求方均根

$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2f(v)dv=\int_0^\infty v^3\frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

令 $\xi = \frac{mv^2}{kT}$ ，可得

$$\overline{v^2} = \frac{2kT}{m}\int_0^\infty \xi \exp(-\xi) d\xi = \frac{2kT}{m}\left(\int_0^\infty \exp(-\xi) d\xi - \xi \exp(-\xi)\Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{2kT}{m}$$ **（与三维的 $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$ 比较）**

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{2kT}{m} = kT$$ **（与三维的 $\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT$比较）**

泻流中处于不同速度的分子数目即泻流分子数强度 I(v)(见课本 page138):

$$I(v) = \frac{1}{4}nvf(v)$$

其中 f(v) 为麦克斯韦速率分布函数，而泻流中的速率分布律为:

$$g(v) = \frac{I(v)}{\int_0^\infty I(v)}$$

(2) 一般计算

课后习题 4.13:

$$\Gamma = \frac{1}{4}n\overline{v}$$

短时间内泻流分子数 Q 为:

$$Q = \Gamma A \delta t$$

代入数据得到:

$$\overline{v} = 199m/s$$

$$Q = 0.014g$$

课后习题 4.14:

$$dN = -\Gamma A dt$$

$$dN = -\frac{1}{4}nA\overline{v}dt = -\frac{1}{4}\frac{N}{V}A\overline{v}$$

结合初始条件 $N(t=0)=N_0$:

$$N=N_0e^{-\frac{A\overline{v}}{4V}t}$$

(3) 泻流补充题

例 **处于低温下的真空容器器壁可吸附气体分子，这叫做“低温泵”，它是提高真空度的一种简便办法。考虑一半径为0.1 m的球形容器，器壁上有一面积为1 cm²的区域被冷却到液氮温度(77 K)，其余部分及整个容器均保持300 K。初始时刻容器中的水蒸气压强为1.3 Pa，设每个水分子碰到这一小区域上均能被吸附或被凝结在上面，试问要使容器的压强减小为 1.3×10^{-4} Pa，需多少时间？**

解: 设 t 时刻分子数密度为 $n(t)$，则在 $\mathrm{d}t$ 时间内碰在 ΔA 面积上的分子数为

$$\mathrm{d}n(t)=-\frac{n(t)}{4V}\bar{v}\Delta A\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}n(t)}{n(t)}=-\frac{1}{4V}\bar{v}\Delta A\mathrm{d}t$$

由于 $p=nkT$，可得 $$\frac{\mathrm{d}p(t)}{p}=\frac{\mathrm{d}n(t)}{n(t)}=-\frac{1}{4V}\bar{v}\Delta A\mathrm{d}t$$

两边积分可得

$$p(t)=p_0e^{-\frac{1}{4V}\bar{v}\Delta A\,t}=p_0e^{-\frac{\Delta A}{V}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M_m}}t}$$

$$\frac{p(t)}{p_0}=\frac{1.33\times10^{-4}\,\mathrm{Pa}}{1.33\,\mathrm{Pa}}=-\frac{\Delta A}{V}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M_m}}t \Longrightarrow t=-\frac{4V\ln 4}{\Delta A}\sqrt{\frac{2\pi M_m}{RT}}=2.60\ (\mathrm{s})$$

(4) 双向泻流

一容器被中间隔板分为两体积相等部分，中间隔板上开有一个面积为 A 的小孔，刚开始时，气体全部集中在左边，其分子数密度为 n_0。现在打开小孔，求两边分子数随时间的关系，设平均速率为 $\overline{v}$，左右两边体积均为 V。

记左边分子数密度为 n_1，右边为 n_2:

$$n_1+n_2=n_0---(1)$$

$$dn_1*V=-\frac{A}{4}(n_1-n_2)\overline{v}---(2)$$

把 (1) 代入 (2) 中:

$$d(n_1)=-\frac{A}{4V}(2n_1-n_0)\overline{v}---(2)$$

$$d(2n_1-n_0)=-\frac{A}{2V}(2n_1-n_0)\overline{v}---(2)$$

$$(2n_1-n_0)(t=0)=n_0$$

$$2n_1-n_0=n_0e^{-\frac{A\overline{v}t}{2V}}$$

$$n_1=\frac{n_0}{2}+\frac{n_0}{2}e^{-\frac{A\overline{v}t}{2V}}$$

$$n_2=\frac{n_0}{2}-\frac{n_0}{2}e^{-\frac{A\overline{v}t}{2V}}$$

4、输运过程

热量传导

核心公式：单位时间从 S 面上流过的热量：

$$\frac{dQ}{dt}=-\kappa\frac{dT}{dz}S$$

热流强度：

$$j_Q=-\kappa\frac{dT}{dz}$$

热传导系数：

$$\kappa=\frac{1}{3}n\overline{v}\overline{\lambda}c_e$$

其中 c_e 为分子热容，$\overline{\lambda}$ 为分子平均自由程。

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}\pi nd^2}$$

对一般气体：

$$\kappa=\frac{1}{3}(t+r+2s)\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

t,r,s 怎么取和当时计算摩尔热容一样，正常情况对于双原子气体分子不考虑振动自由度，题目有具体说明例外.

对单原子气体：

$$\kappa=\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

课后习题 5.7:

(1) 由于两个圆桶之间的空气不会自发的产生热量，因此有 $\nabla\cdot J_q=0$，其中 J_q 为热流密度 $J_q=-\kappa\nabla T$。因此必有 $\nabla^2T=0$

$$\nabla^2T=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}$$

根据对称性，显然 T 只与 r 有关，那么：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) = 0$$

$$r\frac{dT}{dr} = constant$$

$$T = Alnr + B$$

再根据 $T(R_1) = T_1, T(R_2) = T_2$ 可以确定：

$$T = \frac{1}{lnR_2 - lnR_1}[(T_2 - T_1)lnr + T_1 lnR_2 - T_2 lnR_1]$$

因此：

$$Q = J_q S = -2\pi L r\kappa \nabla T = 2\pi L\kappa \frac{T_1 - T_2}{lnR_2 - lnR_1}$$

这个结果是个常数，与 r 无关，这也验证了我们 T(r) 解的正确性。

(2) 提供一种数学不那么复杂的解法：

$$J_q = -\kappa(\frac{\partial T}{\partial r})$$

对于任意层的空气：

$$2\pi r L J_q(r) = 2\pi(r + dr)LJ_q(r + dr)$$

$$r(\frac{\partial T}{\partial r})_r = C$$

由于 T 只和 r 有关：

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C}{r}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dT}{dr}dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{C}{r}dr = T_2 - T_1$$

$$C = \frac{T_2 - T_1}{lnR_2 - lnR_1}$$

$$Q = J_q S = -2\pi L r\kappa \frac{dT}{dr} = 2\pi L\kappa \frac{T_1 - T_2}{lnR_2 - lnR_1}$$

近似问题：

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{lnR_2 - lnR_1}\frac{1}{r}$$

若 $R_2 \approx R_1 \approx R$ **且** $R_2 - R_1 = \Delta R << R$, 则：

$$\frac{dT}{dr} \approx \frac{T_2 - T_1}{ln(1 + \frac{\Delta R}{R})}\frac{1}{R} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta R}$$

动量传输

核心公式：

一面积为 S 的表面由于两侧速度差产生的力：

$$f=-\eta\frac{dv}{dz}S$$

粘滞系数 η:

$$\eta=\frac{1}{3}nm\overline{\lambda}\overline{v}$$

$$\eta=\frac{2}{3}\frac{1}{\pi d^2}\sqrt{\frac{mkT}{\pi}}$$

课后习题 5.6：粘滞系数测定实验详见课本 page165-166

$$\eta=\frac{G(R_2-R_1)}{2\pi L\omega R^3}=8.692\times10^{-5}Pa\cdot s$$

物质输运（扩散）

核心公式单位面积上的物质输运：

$$\frac{dN}{dt}=-D\frac{dn}{dz}S$$

扩散方程：

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

扩散系数：

$$D=\frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$$

$$D=\frac{2}{3\pi d^2 p}(\frac{k^3T^3}{\pi m})^{\frac{1}{2}}$$

课后习题 5.5

由于两种分子各占一半且分子数密度线性减小，右端放射性分子数密度为 0，因此分子数密度梯度可用如下方法计算：

(1):

$$p=nkT$$

$$\frac{\partial n}{\partial z}=-\frac{n}{L}=-\frac{p}{kTL}=-1.34\times10^{25}/m^4$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{\partial n}{\partial z}*m_{C^{14}O_2}=1.023kg/m^4$$

(2)

$$D=\frac{2}{3\pi d^2p}(\frac{k^3T^3}{\pi m})^{\frac{1}{2}}=4.4235\times10^{18}s^{-1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=D\frac{\partial n}{\partial z}S=9.87\times10^{15}s^{-1}$$

(3)

$$\frac{\partial m}{\partial t}=m_{C^{14}O_2}\frac{\partial n}{\partial t}=7.54\times10^{-10}kg/s$$

5、热机循环

(1) 做功

法 1：根据下式直接积分计算, 但需要区分系统对外界做功还是外界对系统做功，如果是后者则需要添负号。

$$W=\int pdV$$

法 2：根据热力学第一定律间接计算。

课后习题 2.4、2.5、2.6

以 2.4 为例：

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$$

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$$

$$W=-\int_{v_i}^{v_f}(\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2})dv$$

$$=RTln(\frac{v_i-b}{v_f-b})+a(\frac{1}{v_i}-\frac{1}{v_f})$$

(2) 吸热

法 1：根据热容计算，但要区分等容过程与等压过程。

$$Q=\int CdT$$

法 2：根据热力学第一定律间接计算。

课后习题 2.8 采用法 1 求解：(1)

$$Q_1=\rho Vc_V\Delta T=\rho V\frac{c_p}{\gamma}\Delta T$$

$$= 492kJ$$

(2)

$$Q_2 = \rho V c_p \Delta T = 694kJ$$

(3)

该过程可看做质量不断变化的等压加热过程：

由于 $pV = \frac{m}{\mu}RT$, 而 pV 是一个常量，因此 m 与 T 成反比。

$$m = \frac{m_0 T_0}{T}$$

$$Q_3 = \int_{T_i}^{T_f} mc_p dT = \int_{T_i}^{T_f} c_p \frac{m_0 T_0}{T} dT$$

$$= c_p m_0 T_0 ln \frac{T_f}{T_i} = 696.8kJ$$

第三问还有一种较为严谨的解法，可以访问蜗壳学社热学部分查看。

课后习题 2.12

采用法 2 求解：

(a) iaf 路径：

$$\Delta U = Q_{iaf} - W = 30J$$

ibf 路径吸热：

$$Q_{ibf} = \Delta U + W = 35J$$

(b) 从 f 到 i:

$$Q_{fi} = -\Delta U - W = -40J$$

放热

(c)

此处题目有误，应改为 $U_b = 20J$, 且要借助 (a) 中条件。

由于 ibf 过程对外做功全在 ib 段：

$$Q_{ib} = W + \Delta U_{ib} = 20J$$

(3) 热机效率

计算各个分过程的对外做功与吸热，然后相加得到整个过程对外做功 (即 pV 图上曲线所围面积) 和从外界吸热。在计算各个分过程的对外做功时，可以灵活的运用 (1),(2) 中提到的两种方法，例如绝热过程可以多利用热力学第一定律求做功等。化简结果的时候灵活运用等温、绝热线上的 pV 关系。

$$\eta = \frac{W}{Q_{absorb}} = \frac{Q_{absorb} - Q_{release}}{Q_{absorb}}$$

课后习题 2.31

略，直接计算所围面积与整个过程吸收的热量，但要分析清楚哪个过程吸热哪个过程放热。

课后习题 2.32

该循环有两条绝热线，因此只有 2-3 和 4-1 过程有吸放热，优先采用如下公式计算：

$$\eta = \frac{Q_{absorb} - Q_{release}}{Q_{absorb}}$$

$$Q_{absorb} = c_p(T_3 - T_2)$$

$$Q_{release} = c_p(T_4 - T_1)$$

$$\eta = \frac{Q_{absorb} - Q_{release}}{Q_{absorb}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

(4) 制冷机

制冷机制冷系数计算公式：

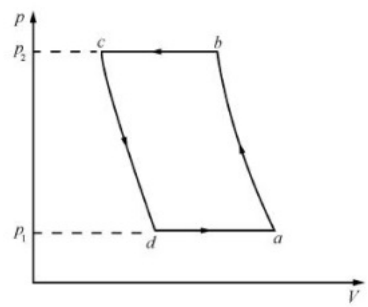
$$\epsilon = \frac{Q_{absorb}}{W}$$

课后习题 2.36:

c-d 过程为等温膨胀，记温度为 T_1, 外界对气体做功：

$$P = \frac{\gamma R T_1}{V}$$

$$dW = -PdV = -\frac{\gamma R T_1}{V} dV$$



积分得:

$$W_1 = -\gamma RT_1 ln\frac{V_d}{V_c}$$

记 a-b 过程温度为 T_2, 同理可以求得 a-b 过程外界对气体做功:

$$W_2 = \gamma RT_2 ln\frac{V_a}{V_b}$$

d-a 和 b-c 段均是等压过程，记其压强分别为 P_1,P_2, 外界对气体做功分别为:

$$W_3 = P_1(V_d - V_a)$$

$$W_4 = P_2(V_b - V_c)$$

因此外界对气体总的做功为:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

考虑等温过程，有:

$$P_2V_c = P_1V_d$$

$$P_2V_b = P_1V_a$$

因此:

$$W_3 + W_4 = 0$$

$$W = \gamma R(T_2 - T_1)ln\frac{P_2}{P_1}$$

从低温热源处吸收的热量为 (2.35 题也只考虑在低温热源处吸热):

$$Q = -W_1 = \gamma RT_1 ln\frac{P_2}{P_1}$$

制冷系数为:

$$\epsilon = \frac{Q}{W} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

(5) 卡诺热机

卡诺热机效率 (在 T_1 高温热源和 T_2 低温热源工作热机的最高效率):

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

卡诺制冷机制冷系数:

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

课后习题 2.34: 依题意可知，工作介质在冷却器的放热始终不变，即为 $Q_{release}$。

由卡诺循环的效率有:

$$\frac{W}{Q_{absorb}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\frac{W}{Q_{release}} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

由于 T_2 始终不变，若要使功率翻倍，即使 W 翻倍，则从上式可以看出 $T_1 - T_2$ 要翻倍。

那么:

$$T_1' - T_2 = 2(T_1 - T_2)$$

$$T_1' = 473.15K$$

$$\eta' = \frac{T_1' - T_2}{T_1'} = 0.423$$

课后习题 3.2

(1) 由卡诺定理，卡诺制冷循环其制冷系数为:

$$\epsilon = \frac{Q_2}{P} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

(2) 当吸放热功率相等时，室温达到稳定:

$$P\frac{T_2}{T_1 - T_2} = A(T_1 - T_2)$$

$$PT_2 = A(T_1 - T_2)^2 \tag{1}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{P}{2A} - \frac{P}{2A}\sqrt{1 + \frac{4AT_1}{P}}$$

(3) 由于室温 T_2 保持不变, 从式 (1) 可以看出，当满荷运转时，方程左边为只工作 30% 时间的 $\frac{10}{3}$, 那么：

$$(T_1-20)^2=\frac{10}{3}(30-20)^2$$

$$T_1=38.26°\mathrm{C}=311.41K$$

(4) 若反向运转：

$$P\frac{T_2}{T_2-T_3}=A(T_2-T_3)$$

与式 (1) 对比可以得到：

$$T_3=1.74°\mathrm{C}=274.89K$$

课后习题 3.1

与课后习题 3.2 类似，略。

6、绝热振动

详细推导请见课本 page55-56.

核心公式：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma pA^2}}---(1)$$

$$\gamma=\frac{4\pi^2 mV}{A^2pT^2}$$

其中 $\gamma=\frac{c_p}{c_V}$.

课后习题 2.26

将数据代入上面 (1) 式得到：

$$T=1.175s$$

类比与谐振子的周期表达式：

$$k=\frac{\gamma pA^2}{V}$$

则下降高度为：

$$h=\frac{2mg}{k}=\frac{2mgV}{\gamma pA^2}=0.693m$$

7、熵

(1) 概念

热力学第二定律的两种表述
卡诺定理、热力学温标
熵是状态量，熵差的计算：

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

详细计算课本 page95-98。
熵增加原理与统计解释，课本 page103-109。

课后习题 3.10 记 dQ_r 为物体释放的热量，物体的熵变为：

$$dS = -\frac{dQ_r}{T}$$

由卡诺定理可以知道，热机最大效率为：

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_{low}}{T}$$

其中 T_{low},T 分别为低温热源和物体的温度，由于物体质量有限，依题意认为低温热源温度保持 T_1 不变：

$$dW \leq dQ_r * (1 - \frac{T_1}{T})$$

$$dW \leq -TdS(1 - \frac{T_1}{T})$$

由于 $\int -TdS = Q$, 积分可得：

$$W_{max} = Q - T_1(S_2 - S_1)$$

课后习题 3.11 (1) 由卡诺定理：

$$C\frac{dT_1}{T_1} + C\frac{dT_2}{T_2} \geq 0$$

对上式积分有：

$$Cln\frac{T_f^2}{T_1T_2} \geq 0$$

$$T_f \geq \sqrt{T_1 T_2}$$

(2)

$$W_{max} = Q_{release} - Q_{absorb} = CT_1 + CT_2 - 2CT_f$$

当 T_f 取等号时输出功最大：

$$W_{max} = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

课后习题 3.15 (1) 套用课本公式 3.4.5:$S(T,V) = C_V \ln T + \nu R \ln V + C_1$ 可得：

$$\Delta S = \nu_A R \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} + \nu_B R \ln \frac{V_A + V_B}{V_B}$$

(2) 由于熵是一个状态量，过程 1 与过程 2 均是准静态过程，且初末状态温度和体积均相同，因此熵变也相同：

$$\Delta S = \nu_A R \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} + \nu_B R \ln \frac{V_A + V_B}{V_B}$$

(3) 把热源和系统看做一个孤立系统，可以构造一个可逆过程：

$$\Delta S_{total} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{source} = 0$$

$$\Delta S_{source} = -\nu_A R \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} - \nu_B R \ln \frac{V_A + V_B}{V_B}$$

课后习题 3.17 由于是瞬间拉动活塞使得体积增大，因此该过程等效于气体在真空中绝热膨胀，既不对外做功，也不吸放热，因此整个过程中温度不变。

套用课本公式 3.4.5:$S(T,V) = C_V \ln T + \nu R \ln V + C_1$ 可得:

$$\Delta S = \nu R ln \frac{V_2}{V_1}$$

注意要用题目中已知的物理量表达最后结果

$$\nu R = \frac{N}{N_A} R = N k_B$$

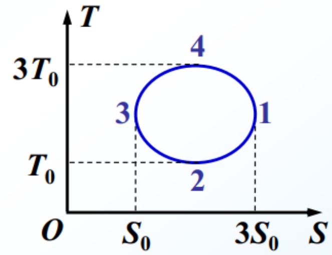
其中 k_B 为玻尔兹曼常数，最后结果为：

$$\Delta S = N k_B ln \frac{V_2}{V_1}$$

若题目的意思是活塞缓慢移动，其余条件不变，则这个过程视为准静态绝热膨胀，此时熵变为 0。

(2)T-S 图

例: 有一热机循环, 它在T-S图上可表示为其半长轴和半短轴分别平行于T轴及S轴的椭圆. 循环中熵的变化范围为从S_0到$3S_0$, T的变化的变化范围为从T_0到$3T_0$, 试求该热机的效率.



解: 椭圆中心坐标$(2S_0, 2T_0)$

椭圆方程为

$$\frac{(S-2S_0)^2}{S_0^2}+\frac{(T-2T_0)^2}{T_0^2}=1$$

椭圆面积为 $A=\pi T_0 S_0=Q_{净}=W_{净}$

3-4-1熵增加, 吸热 $Q_{吸}=\frac{\pi T_0 S_0}{2}+2T_0\cdot 2S_0=\left(\frac{\pi}{2}+4\right)T_0\cdot S_0$

$$\eta=\frac{W}{Q_{吸}}=\frac{2\pi}{\pi+8}$$