2022-2023 第一学期期中考试试卷解答

2023 秋　刘佳

目录

一、填空题

1. 写出向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关组：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 8 & -9 & 8 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

所以答案是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中任选 2 个加上 α_5

2. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & x & 7 & x \\ 1 & x & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -x & 1 \\ 2x & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的完全展开式中，x^4 项的系数为：

选择含有 x 的项 (4,1),(3,3),(2,2),(1,4),$\tau(4231) = 5$, 系数为 2

3. 已知 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A =$

$AA^* = |A|I, A = |A|(A^*)^{-1}, |A^*| = |A|^2, |A| = \pm 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

所以 $(\mathbf{A}^*)^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A} = \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设 B, C, D 均为 n 阶方阵，且 B, C 可逆，则 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 也可逆，且 $M^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} O & B & I & O \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B + C^{-1}D & I & C^{-1} \\ C & D & O & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B + C^{-1}D & I & C^{-1} \\ O & -CB & -C & O \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} I & B + C^{-1}D & I & C^{-1} \\ O & -CB & -C & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & O & -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ O & I & B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{M}^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$

5. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 则集合 $V = \{B \in R^{4\times 4} | AB = O\}$ 是 $R^{4\times 4}$ 的子空间，子空间的维数 $dimV =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(A) = 2, dimV_A = 2$

$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), AB = O \Rightarrow A\alpha_i = 0, 1 \leq i \leq 4$

$dimV_A = 2 \Rightarrow dimV = 8$

6. 将 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 分解成矩阵乘积 $A = LU$，其中 L 为下三角方阵，U 为上三角方阵，且主对角线上的元素为 1 或 0，则 L= , U=

对 A 进行行变化化成上三角矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

确定出 U 之后再用待定系数法算出 L（答案不唯一）

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rmk : LU$ 分解在本质上是高斯消元法的一种表达形式。实质上是将 A 通过初等行变换变成一个上三角矩阵，其变换矩阵就是一个下三角矩阵

二、判断题

（正确的简单说明理由，错误的举出反例）

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系，则 $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$ 也是该方程组的基础解系。

正确。

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

上述矩阵记为 T, 则 T 可逆且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V_A 的基，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 V_A 的基。

2. 设 A, B 都是 n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B||A - B|$

正确。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - B & B - A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - B & O \\ B & A + B \end{vmatrix} = |A + B||A - B|$$

3. 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则 A 与 B 的列向量组等价。

错误。线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则 A 与 B 的行向量组等价（反例略）

4. 设 $A \in R^{n \times n}$, 满足 $AA^T = A^2$, 则 A 为对称矩阵。

正确。

记 $B=A-A^T$, 则 $BB^T=(A-A^T)(A-A^T)^T=AA^T-A^2-(A^T)^2+A^TA$

$AA^T=A^2\Rightarrow(A^T)^2=AA^T$

$\Rightarrow BB^T=A^TA-AA^T\Rightarrow tr(BB^T)=tr(A^TA-AA^T)=0$

又 $B\in R^{n\times n},\Rightarrow B=O, i.e. A=A^T$

三

考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1+4x_2-3x_3+16x_4=a \end{cases}$$

(1) 根据 a 的取值，讨论方程组解的情况。

(2) 有解时，求出方程组的通解。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 16 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-8 \end{pmatrix}$$

所以 $a=8$ 时有无穷多解，$a\neq 8$ 时无解。

(2) 通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

四

计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n-a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2...a_n\neq 0$

$=(-1)^n a_1a_2...a_n(1-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i})$

五

考虑 $R^{2\times 2}$ 中的两组基

$$\Gamma_1: \mathbf{A_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \mathbf{A_2}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}, \mathbf{A_3}=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}, \mathbf{A_1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

$$\Gamma_2: \mathbf{B_1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \mathbf{B_2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \mathbf{B_3}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \mathbf{B_4}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

(1) 求 Γ_1 到 Γ_2 的过渡矩阵。

(2) 已知 $C \in R^{2\times 2}$ 在 Γ_2 下的坐标是 $(1,1,1,1)^T$, 求 C 在 Γ_1 下的坐标。

(3) 求所有的 $D \in R^{2\times 2}$, 使得 D 在 Γ_1 和 Γ_2 下的坐标相同。

(1)$(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)=(E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})T_1$,$T_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}$

$(B_1\ B_2\ B_3\ B_4)=(E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})T_2=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)T_1^{-1}T_2$,$T_2=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$

所以过渡矩阵为 $\mathbf{T_1^{-1}T_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$

(2)$C=(B_1\ B_2\ B_3\ B_4)(1,1,1,1)^T=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)T_1^{-1}T_2(1,1,1,1)^T$

$=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)\ (\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4})^T$

(3) 设 D 在 Γ_1 下的坐标为 a^T, 则

$D=(B_1\ B_2\ B_3\ B_4)a^T=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)T_1^{-1}T_2a^T=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)a^T$

$\Rightarrow (T_1-T_2)a^T=0$,rank$(T_1-T_2)$=4 $\Rightarrow a^T=0$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

六

已知 $A\in R^{m\times n}, m\leq n, rank(A)=r.$

(1) 证明：存在 $B \in R^{m\times n}$, 满足 $AB=O, BA=O, rank(B)=m-r$.

(2) 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 求一个满足 (1) 中条件的 B。

(1) 存在可逆矩阵 P,Q 使得 $\mathbf{PAQ}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 则 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$

取 $B=Q\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{m-r} \end{pmatrix}P$, 则 $AB=O, BA=O, rank(B)=m-r$

(2) $$(\mathbf{A}\ \mathbf{I})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(C\ P)$$

$$\begin{pmatrix} C \\ I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $B=Q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0.5 \\ 5 & -2.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$