往年试题选讲

张礼贤

11 月 20 日

2016-2017 秋复变函数 B 期末试卷

第四题

设 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析，$f(0)=1$，$f'(0)=2$，$f''(0)=3$，求：

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}dz$$

解 因为 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析，所以存在 $r>0$，在 $|z|<r$ 内，$f(z)$ 可写成幂级数展开：

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2}z^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}z^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}z^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}z^5+...\\
&=1+2z+\frac{3}{2}z^2+z^3\varphi(z)
\end{aligned}$$

这里 $\varphi(z)$ 是一个解析函数.（$\varphi(z)$ 到底是什么样子不重要，实际上我们知道：$\varphi(z)=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}z+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}z^2+...$）

从而

$$\begin{aligned}
(f(z)-1)^2&=\left(2z+\frac{3}{2}z^2+z^3\varphi(z)\right)^2\\
&=z^2g(z)
\end{aligned}$$

这里

$$g(z)=\left(2+\frac{3}{2}z+z^2\varphi(z)\right)^2$$

是一个解析函数，所以是连续函数，在 0 的值为 4，所以存在 $r' > 0$，当 $|z| < r'$ 时，$|g(z) - 4| < 0.0001$，从而当 $|z| < r'$ 时 $g(z) \neq 0$.

我们要求的是 $\rho \to 0$ 时

$$\int_{|z|=\rho} \frac{1}{(f(z)-1)^2} dz$$

的极限，所以只需要考虑 $\rho < r$ 且 $\rho < r'$ 的情况.

当 $\rho < r$ 且 $\rho < r'$ 时，在圆 $|z| < \rho$ 内，$g(z) \neq 0$，

$$\frac{1}{(f(z)-1)^2} = \frac{1}{z^2 g(z)}$$

只有 0 这一个二阶极点.

所以

$$\begin{aligned}\int_{|z|=\rho} \frac{1}{(f(z)-1)^2} dz = &\int_{|z|=\rho} \frac{1}{z^2 g(z)} dz \\ =&2\pi i \ Res\left[\frac{1}{z^2 g(z)}, 0\right] \\ =&2\pi i \left(\frac{1}{g(z)}\right)'_{z=0} \\ =&-\frac{3\pi i}{4}\end{aligned}$$

第五题

已知 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上处处解析，并且有：

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{2016}} = 0$$

求证：$f^{(2016)(z)} = 0$.

注. 这题的结论实际上就是：$f(z)$ 是次数不超过 2015 的多项式.

证明 取一个以 z 为圆心，半径为 R（任意大的正实数）的圆形围道 C_R，由柯西积分公式，

$$f^{(2016)}(z) = \frac{2016!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{2017}} d\xi$$

由于

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^{2016}}=0$$

所以任意 $\varepsilon>0$，存在 $R'>0$，当 $|\xi|>R'$ 时，

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi^{2016}}\right|<\varepsilon$$

$$|f(\xi)|<\varepsilon\,|\xi|^{2016}$$

当 $\xi\in C_R$，即 $|\xi-z|=R$ 时，$|\xi|$ 最大是 $R+|z|$，所以，当 $R>R'$ 时，对于 $\xi\in C_R$ 有 $|f(\xi)|<\varepsilon\,|\xi|^{2016}\le\varepsilon\,(R+|z|)^{2016}$

$$\begin{aligned}\left|f^{(2016)}(z)\right| &= \left|\frac{2016!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{2017}}d\xi\right| \\ &\le \frac{2016!}{2\pi}\frac{\varepsilon\,(R+|z|)^{2016}}{R^{2017}}2\pi R \\ &\le \varepsilon\ 2016!\frac{(R+|z|)^{2016}}{R^{2016}}\end{aligned}$$

请注意，对于任意的 $z\in\mathbb{C}$，从上面我们知道了这样的事情：

对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $R'>0$，对任意的 $R>R'$，有这个不等式：

$$\left|f^{(2016)}(z)\right|\le\varepsilon\ 2016!\frac{(R+|z|)^{2016}}{R^{2016}}$$

R 可以任意大，于是我们考虑 $R\to\infty$ 的极限，得到

$$\left|f^{(2016)}(z)\right|\le\varepsilon\ 2016!$$

就是说：对于任意的 $\varepsilon>0$，

$$\left|f^{(2016)}(z)\right|\le\varepsilon\ 2016!$$

因此 $f^{(2016)}(z)=0$.

注. 为了你能看懂，我已经尽量写得啰嗦一些了。写得简洁些就是这样：取一个以 z 为圆心，半径为 R 的圆形围道 C_R，由柯西积分公式，

$$f^{(2016)}(z)=\frac{2016!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{2017}}d\xi$$

由于

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^{2016}}=0$$

所以任意 $\varepsilon>0$，存在 $R'>0$，当 $|\xi|>R'$ 时，

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi^{2016}}\right|<\varepsilon$$

当 $R>R'$ 时

$$\begin{aligned}\left|f^{(2016)}(z)\right| &= \left|\frac{2016!}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{2017}}d\xi\right| \\ &\leq \varepsilon\ 2016!\frac{(R+|z|)^{2016}}{R^{2016}}\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$ 得

$$\left|f^{(2016)}(z)\right|\leq\varepsilon\ 2016!$$

因此 $f^{(2016)}(z)=0$.

2017-2018 秋复变函数 B 期末试卷

第六题

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ $(a_= \neq 0)$ 的收敛半径 $R>0$，
（1）记 $M(r)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|$,（$r<R$），利用柯西积分公式证明：$|f^{(n)}(0)|\leq\frac{n!M(r)}{r^n}$.
（2）证明：在圆 $|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$ 内 $f(z)$ 无零点，其中 $r<R$.

解　（1）略
（2）设 $f(z)$ 有零点 z_0，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n=0$ 从而

$$-a_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz_0^n$$

$$
\begin{aligned}
|a_0| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n\right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z_0|^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| |z_0|^n \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(r)}{r^n}|z_0|^n \\
&= M(r)\frac{|z_0|/r}{1-|z_0|/r} \\
&= M(r)\frac{|z_0|}{r-|z_0|}
\end{aligned}
$$

即

$$|a_0| \le M(r)\frac{|z_0|}{r-|z_0|}$$

由此得

$$|z_0| \ge \frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$$

2019-2020 秋复变函数 B 期末

第八题

已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 解析，函数 $g(z)$ 在 $|z| \ge 1$ 解析，且存在常数 M，使得在 $|z| \ge 1$ 时，$|g(z)| < M$. 试证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-a} - \frac{ag(\xi)}{\xi(\xi-a)}\right)d\xi = \begin{cases} f(a), & |a|<1 \\ g(a), & |a|>1 \end{cases}$$

注. *这题，并不是简单地用留数定理就能解决. 因为题目只告诉你函数 $g(z)$ 在 $|z| \ge 1$ 解析，所以你必须考虑得更多一些.*

解 由留数定理（或者柯西积分公式、柯西积分定理），当 $|a| < 1$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi = f(a)$$

当 $|a| > 1$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi - a}d\xi = 0$$

所以关键是处理 $g(\xi)$ 的部分.

由于 $g(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 解析，所以根据柯西积分定理，当 $|a| < 1$ 时在任意大的围道上作积分是一样的：对任意 $R > 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} -\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} -\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}d\xi$$

取 $R \to \infty$ 的极限，根据大圆弧引理就知道积分为 0.

如果 $|a| > 1$，那么我们仍然可以考虑在尽可能大的圆上作积分，即：

取围道 $C_R + C_1$，即大圆 $|\xi| = R$ 和小圆 $|\xi| = 1$ 所围的环形区域的边界，由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\xi|=R} -\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}d\xi - \int_{|\xi|=1} -\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}d\xi\right) = Res\left[-\frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}d\xi, a\right] = -g(a)$$

由于 R 可以任意大，仍由大圆弧引理，$|\xi| = R$ 上的积分极限为 0，这样就得到了需要的结论.