37. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = a + b\arctan x, \quad -\infty < x < \infty.$$

连续型 r.v

(1) 试求常数 a, b 的值;

(2) 试求随机变量 $Y = 3 - \sqrt[3]{X}$ 的密度函数 $p(y)$;

(3) 试证明 X 与 $1/X$ 具有相同的分布. ← 在 $X \neq 0$ 时，单点零概，因此不影响整个分布

37. (1) $F(-\infty) = a - \frac{\pi}{2}b = 0$

$F(\infty) = a + \frac{\pi}{2}b = 1$

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

(2) $Y = 3 - \sqrt[3]{X} := u(X)$

$X = u^{-1}(Y) = (3-Y)^3$

记 $u^{-1} = h$, $h(\cdot)$ 严格单调, 可导

$h'(y) = -2(3-y)^2$

非负

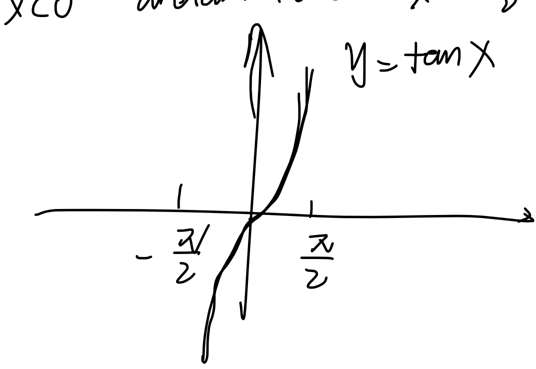
$p(y) = f(h(y))\,|h'(y)| = \dfrac{3(y-3)^2}{\pi(1+(3-y)^6)}$

$a \wedge b = \min(a,b)$

$a \vee b = \max(a,b)$

if $x>0$ $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

if $x<0$ $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$



(3) 由于 $X \cdot \frac{1}{X} = 1$. 因此令 $Y = \frac{1}{X}$ if

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le \frac{1}{y} \wedge 0) + P(X \ge \frac{1}{y} \vee 0)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{y} \wedge 0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{1}{y} \vee 0)$

if $y > 0$

$= 1 + \frac{1}{\pi}\arctan(0) - \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \arctan(y)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan y$

if $y < 0$

$= 1 + \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2} - \arctan(y)) - \frac{1}{\pi}\arctan 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan y$

也可以用密度变换公式，运算较繁

39. 设元件寿命 X 服从指数分布 $Exp(\lambda)$, 求 $Y = XI_{(t,\infty)}(X)$ 的分布.

剩余寿命

let $y > 0$

① $:= P(Y \le y) = P(X \le y,\ X > t) + P(0 \le y,\ X \le t) = P(X \le t \vee y)$

if $t < y$ ① $= P(X \le y)$

if $t \ge y$ ① $= P(X \le t)$

so $P(Y \le y) = 1 - e^{-\lambda(t \vee y)}$ $(y>0)$

即 $y \le 0$ 时为 0.

40. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 试求下列随机变量的密度函数:

(1) $Y_1 = e^X$; (2) $Y_2 = X^{-1}$; (3) $Y_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln X$, 其中 $\lambda > 0$ 为常数.

都可用密度变换

(1) $Y_1 = e^x \in (1, e)$

$P(Y_1 \le y) = P(X \le \ln y) = \ln y$

$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{y} \qquad y \in (1, e)$

(2) $Y_2 = x^{-1} \in (1, +\infty)$

$P(Y_2 \le y) = P(X \ge \frac{1}{y}) = 1 - \frac{1}{y}$

$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{y^2} \qquad y \in (1, +\infty)$

(3) $Y_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln X \in (0, +\infty)$

$P(Y_3 \le y) = P(X \ge e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}$

$f_{Y_3}(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad y \in (0, +\infty)$

48. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{a}x^2, 0 < x < 3$, 令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leqslant 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X > 2. \end{cases}$$

(1) 求随机变量 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P(X \leqslant Y)$.

(1) $\int_0^3 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow a = 9 \qquad f(x) = \frac{1}{9}x^2$

故 $P(X \le x) = \int_0^x f(y)\,dy = \frac{1}{27}x^3$

$P(Y=1) = P(X>2) = \int_2^3 f(y)\,dy = \frac{19}{27}$

$P(Y=2) = P(X \le 1) = \int_0^1 f(y)\,dy = \frac{1}{27}$

令 $y \in (1,2]$ 则

$P(Y \le y) = P(1 < Y \le y) + P(Y=1)$

$= P(1 < X \le y) + P(Y=1)$

$= \frac{1}{27}(y^3 - 1) + \frac{19}{27} = \frac{1}{27}(y^3 + 18)$

$$P(Y \le y) = \begin{cases} \frac{19}{27} & \text{if } y = 1 \\ \frac{1}{27}(y^3+18) & \text{if } y \in (1,2] \\ 1 & \text{if } y > 2 \end{cases}$$

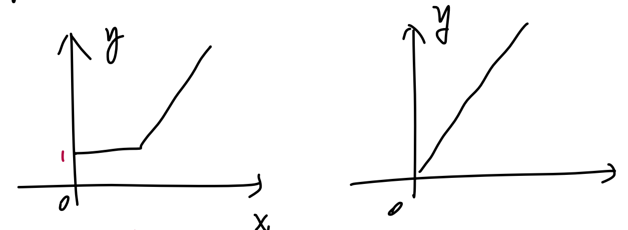
42. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调连续函数, 证明: 随机变量 $Y = F(X)$ 服从区间 (0, 1) 上的均匀分布.

经典结论

$Y = F(X) \in [0, 1]$

$P(Y \le y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y))$

$= F(F^{-1}(y)) = y$ 　　严格单调才有逆函数！



有 $y = y(x)$

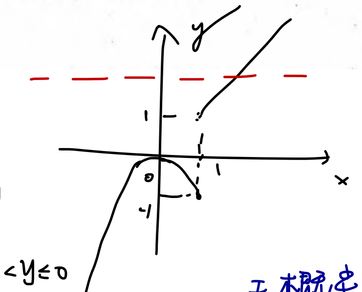
无 $x = x(y)$

因为 $x = x(1)$ 不良定

46. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 且随机变量 Y 定义为

$$Y = \begin{cases} X, & X \geqslant 1, \\ -X^2, & X < 1. \end{cases}$$

试求 Y 的密度函数 $p(y)$.



① if $y \le 0$

$P(Y \le y) = P(-X^2 \le y, X < 1)$

$= P(X \ge \sqrt{-y}, X < 1) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \le -1 \\ e^{-\lambda\sqrt{-y}} - e^{-\lambda} & \text{if } -1 < y \le 0 \end{cases}$

② if $0 < y \le 1$

$P(Y \le y) = P(-X^2 \le y, X < 1) = P(X < 1) = 1 - e^{-\lambda}$ 　无概率堆积

③ if $y > 1$

$P(Y \le y) = P(-x^2 \le y, X < 1) + P(X \le y, X \ge 1)$

$= P(X < 1) + P(1 \le X \le y) = P(X \le y) = 1 - e^{-\lambda y}$

从而 $p(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda\sqrt{-y}}}{2\sqrt{-y}} & -1 < y \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda y} & y \ge 1 \end{cases}$

(2) $P(X \le Y) = P(X \le 1) + P(1 < X < 2)$

$= P(X < 2) = \frac{8}{27}$

49.* 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 求下列随机变量的分布函数或密度函数:

(1) $Y = \dfrac{X}{1-X}$; (2) $Z = XI_{(a,1]}(X)$, 其中 $0<a<1$;

(3) $W = X^2 + XI_{[0,b]}(X)$, 其中 $0<b<1$.

Tips: (3) 问这种题运算量大

应画图分类 & 用记号

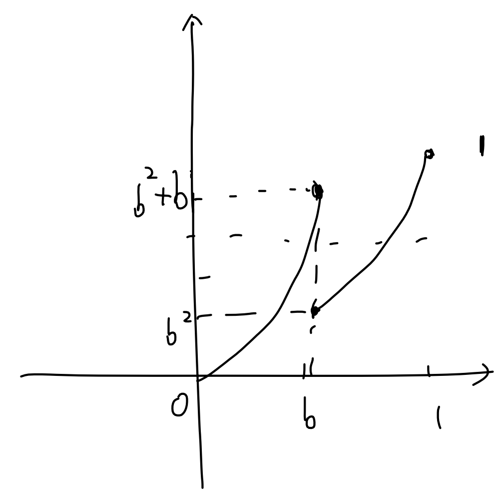
(1) $Y = \dfrac{1}{\frac{1-X}{X}} = \dfrac{1}{\frac{1}{X}-1}$ $\frac{1}{X} \in (1,+\infty)$ $Y \in (0,+\infty)$

$P(Y\le y) = P(X \le \frac{y}{1+y}) = \frac{y}{1+y}$

(2) $P(Z\le z) = P(a<X\le 1,\ X\le z) + P(X\le a,\ \le z)0$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } z\ge 1 \\ z & \text{if } 1>z>a \\ a & \text{if } z\le a \end{cases}$$

(3) 由于 $W = \begin{cases} x^2+x & x\in[0,b] \\ x^2 & x\in(b,1) \end{cases}$



由图所示, 需讨论 b^2+b 与 1 的关系

① if $b^2+b\le 1$ i.e. $b \le \frac{-1+\sqrt5}{2}$

1.1 if $w \le b^2$ then $P(W\le w) = P(X\in[0,b],\ X^2+X\le w)$

$= P\left(0\le X \le \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2} := c_1(w)$

1.2 if $b^2 < w \le b^2+b$, then $P(W\le w) = P(X\in[0,b],\ X^2+X\le w)$

$+ P(X>b,\ X^2\le w) = P\left(0<X\le \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}\right) + P(b<X\le\sqrt{w})$

$= \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2} + \sqrt{w} - b$

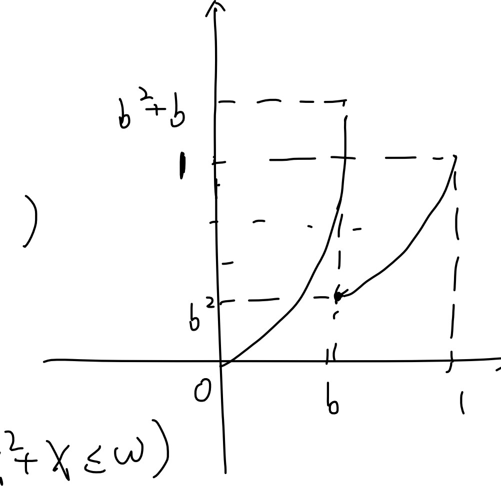
1.3 if $1 \ge w > b^2+b$ then $P(W\le w) = P(X\in[0,b])$

$+P(X>b,\ X^2\le w) = P(0<X\le b) + P(b<X\le\sqrt{w}) = \sqrt{w}$

1.4 if $w>1$ then $P(W\le w) = 1$

综上 $P(W\le w) = \begin{cases} c_1(w) & \text{if } w\le b^2 \\ c_1(w)+\sqrt{w}-b & \text{if } b^2<w\le b^2+b \\ \sqrt{w} & \text{if } b^2+b<w\le 1 \\ 1 & w>1 \end{cases}$

② if $b^2+b>1$ i.e $1>b>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



1.1 if $w\le b^2$ then $P(W\le w)=P(X\in[0,b],\ X^2+X\le w)$

$$=P\left(0\le X\le \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}:=c_1(w)$$

1.2 if $b^2<w\le 1$, then $P(W\le w)=P(X\in[0,b],\ X^2+X\le w)$

$$+P(X>b,\ X^2\le w)=P\left(0<X\le\frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}\right)+P(b<X\le\sqrt{w})$$

$$=\frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}+\sqrt{w}-b$$

1.3 if $1<w\le b^2+b$ then $P(W\le w)=P(X>b)$

$$+P(0<X\le b,\ X^2+X\le w)=P\left(0<X\le\frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}\right)+P(1>X>b)=1-b+\frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}$$

1.4 if $w>b^2+b$ then $P(W\le w)=1$

综上 $$P(W\le w)=\begin{cases} c_1(w) & \text{if } w\le b^2 \\ c_1(w)+\sqrt{w}-b & \text{if } b^2<w\le 1 \\ 1-b+c_1(w) & \text{if } 1<w\le b^2+b \\ 1 & w>b^2+b. \end{cases}$$