

## 1 补充题目

1. 已知对  $K_{18}$  染色或者存在红色  $K_5$ ，或者同时存在红色  $K_4$  和蓝色  $K_3$ ，证明对  $K_{35}$  染色一定存在红色  $K_5$  或蓝色  $K_4$ 。

2. 请证明以下命题：

(a) 简单连通图有一个圈等价于  $|V| = |E|$ ；

(b) 若  $|V| - |E| = k$ ，图中存在两个顶点之间有  $k + 1$  条路径。

3. 证明连通简单平面图有一个顶点度数小于等于 5。

4. 请给出以下组合问题的方案数：

(a)  $n$  对夫妻排成一行，求每对夫妻不相邻的排法；

(b)  $n$  对夫妻排成一行，求每对夫妻不相邻，且同性不相邻的排法。

5. 对正方形用  $n$  种颜色染色。

(a) 用了至多三种颜色的染色数；

(b) 排除旋转、对称下重复的染色方案求方案数；

(c) 排除中心对称和绕对角线翻转下重复的方案，求方案数；

(d) 在 (c) 的基础上求至多用了三种颜色的染色数。

6.  $S$  为  $n$  元集合， $f, g$  是定义在  $S$  的子集上的整值函数。已知对于  $S$  的偶数元子集，有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} g(Y),$$

对于  $S$  的奇数元子集，有

$$f(X) = \sum_{Y \subseteq X, |Y| \text{ is even}} -g(Y)$$

问题：对于  $S$  的奇数元子集  $X$ ，计算

$$\sum_{Y \subseteq X} f(Y)$$