第四章　正弦交流电路习题解答

4.1　已知图示电路中 $u = 100\cos(\omega t + 10°)\text{V}$，$i_1 = 2\cos(\omega t + 100°)\text{A}$，$i_2 = -4\cos(\omega t + 190°)\text{A}$，$i_3 = 5\sin(\omega t + 10°)\text{A}$。试写出电压和各电流的有效值、初相位，并求电压越前于电流的相位差。

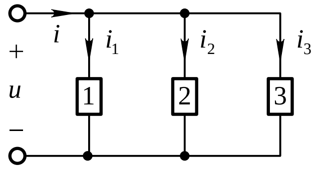


图 题 4.1

解：将 i_2 和 i_3 改写为余弦函数的标准形式，即

$$i_2 = -4\cos(\omega t + 190°)\text{A} = 4\cos(\omega t + 190° - 180°)\text{A} = 4\cos(\omega t + 10°)\text{A}$$
$$i_3 = 5\sin(\omega t + 10°)\text{A} = 5\cos(\omega t + 10° - 90°)\text{A} = 5\cos(\omega t - 80°)\text{A}$$

电压、电流的有效值为

$$U = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7\text{V},\ I_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414\text{A}$$
$$I_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.828\text{A},\ I_3 = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54\text{A}$$

初相位　$\psi_u = 10^\circ,\ \psi_{i_1} = 100^\circ,\ \psi_{i_2} = 10^\circ,\ \psi_{i_3} = -80^\circ$

相位差　$\varphi_1 = \psi_u - \psi_{i_1} = 10^\circ - 100^\circ = -90^\circ$　　u与i_1正交，u滞后于i_1；

$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{i_2} = 10° - 10° = 0^\circ$　　u 与 i_2 同相；

$\varphi_3 = \psi_u - \psi_{i_3} = 10° - (-80°) = 90^\circ$　　u 与 i_3 正交，u 超前于 i_3

4.2 写出下列电压、电流相量所代表的正弦电压和电流(设角频率为ω)：

(a) $\dot{U}_\text{m} = 10\angle -10^\text{o}\,\text{V}$　　(b) $\dot{U} = (-6 - \text{j}8)\text{V}$

(c) $\dot{I}_\text{m} = (0.2 - \text{j}20.8)\text{V}$　　(d) $\dot{I} = -30\text{A}$

解：

(a) $u = 10\cos(\omega t - 10°)\text{V}$

(b) $\dot{U} = \sqrt{6^2 + 10^2}\angle\text{arctg}\dfrac{-8}{-6} = 10\angle 233.1°\text{V},\ u = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 233.1°)\text{V}$

(c) $\dot{I}_m = \sqrt{0.2^2 + 20.8^2}\angle\text{arctg}\dfrac{-20.8}{0.2} = 20.8\angle -89.4°\text{A},\ i = 20.8\cos(\omega t - 89.4°)\text{A}$

(d) $\dot{I} = 30\angle 180°\,\text{A},\ i = 30\sqrt{2}\cos(\omega t + 180°)\text{A}$

4.3 图示电路中正弦电流的频率为 50Hz 时，电压表和电流表的读数分别为 100V 和 15A；当频率为 100Hz 时，读数为 100V 和 10A。试求电阻 R 和电感 L。

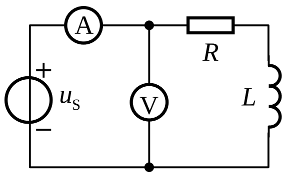


图 题 4.3

解：电压表和电流表读数为有效值，其比值为阻抗模，即

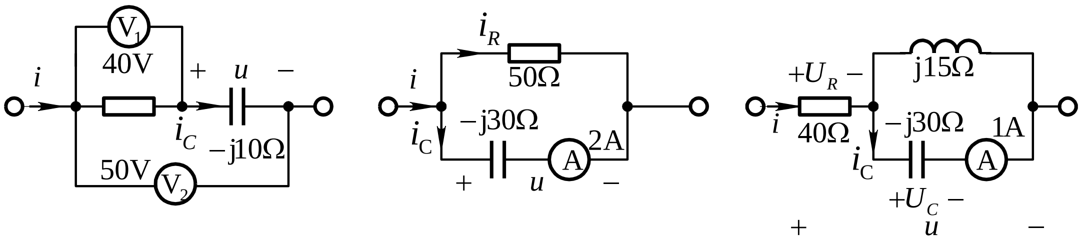
$$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=U/I$$

将已知条件代入，得

$$\begin{cases}\sqrt{R^2+(2\pi\times 50\times L)^2}=\dfrac{100\text{V}}{15\text{A}}\\ \sqrt{R^2+(2\pi\times 100\times L)^2}=\dfrac{100\text{V}}{10\Omega}\end{cases}$$

联立方程，解得 $L=13.7\text{mH},\ R=5.08\Omega$

4.4 图示各电路中已标明电压表和电流表的读数，试求电压 u 和电流 i 的有效值。



(a)　(b)　(c)

图 题 4.4

解：(a) RC 串联电路中电阻电压与电容电压相位正交，各电压有效值关系为

$$U=\sqrt{{U_2}^2-{U_1}^2}=\sqrt{50^2-40^2}\text{V}=30\text{V}$$

电流 i 的有效值为 $I=I_C=\dfrac{U}{|X_C|}=\dfrac{30\text{V}}{10\Omega}=3\text{A}$

(b) $U=|X_C|I_C=30\Omega\times 2\text{A}=60\text{V}$

$$I_R=\frac{U}{R}=\frac{60\text{V}}{50\Omega}=1.2\text{A}$$

RC 并联电路中电阻电流与电容电流相位正交，总电流有效值为

$$I=\sqrt{I_C{}^2+I_R{}^2}=\sqrt{2^2+1.2^2}\text{A}=2.33\text{A}$$

(c)　　$U_C=|X_C|I_C=30\Omega\times 1\text{A}=30\text{V}$

由　　$U_L=U_C=X_L I\Rightarrow I_L=\dfrac{U_C}{X_L}=\dfrac{30\text{V}}{15\Omega}=2\text{A}$

并联电容、电感上电流相位相反，总电流为 $I=|I_L-I_C|=1\text{A}$

电阻电压与电容电压相位正交，总电压为：

$$U=\sqrt{U_C{}^2+U_R{}^2}=\sqrt{30^2+40^2}\text{V}=50\text{V}$$

4.5 在图示电路中已知 $i_R=\sqrt{2}\cos\omega t$ A， $\omega=2\times 10^3$ rad/s。求各元件的电压、电流及电源电压 u，并作各电压、电流的相量图。

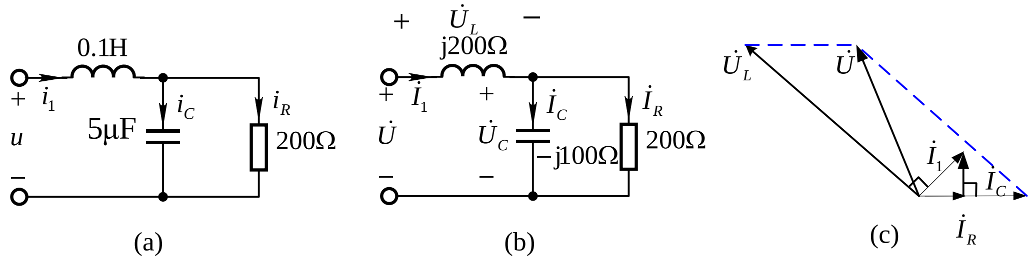


图　题 4.5

解：感抗 $X_L=\omega L=\left(2\times 10^3\right)\text{rad/s}\times 0.1\text{H}=200\Omega$

容抗 $X_C=-\dfrac{1}{\omega C}=\dfrac{-1}{\left(2\times 10^3\right)\text{rad/s}\times\left(5\times 10^{-6}\right)\text{F}}=-100\Omega$

图(a)电路的相量模型如图(b)所示。

由已知得 $\dot{I}_R=1\angle 0^\circ\text{A}$，按从右至左递推的方法求得各元件电压、电流相量如下：

$$\dot{U}_C=\dot{I}_R R=200\angle 0^\circ\text{V}$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_C}{\text{j}X_C}=\frac{200\angle 0^\circ\text{V}}{-\text{j}100\Omega}=2\angle 90^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_1=\dot{I}_C+\dot{I}_R=(1\angle 0^\circ+2\angle 90^\circ)\text{A}=(1+2\text{j})\text{A}=\sqrt{5}\angle 63.43^\circ\text{A}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_L+\dot{U}_C=(200\sqrt{5}\angle153.43°+200\angle0°)\text{V}=200\sqrt{2}\angle135^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_L=\text{j}X_L\dot{I}_1=\text{j}200\times\sqrt{5}\angle63.43°\text{V}=200\sqrt{5}\angle153.43^\circ\text{V}$$

由以上各式画出电压、电流相量图如图(c)所示。由各相量值求得各元件电压、电流瞬时值分别为

$$i_C=2\sqrt{2}\cos(\omega t+90°)\text{A},\ i_1=\sqrt{10}\cos(\omega t+63.43°)\text{A}$$
$$u_R=u_C=200\sqrt{2}\cos(\omega t)\text{V},\ u_L=200\sqrt{10}\cos(\omega t+153.43°)\text{V}$$
$$u=400\cos(\omega t+135°)\text{V}$$

4.6 已知图示电路中$U_R=U_L=10\text{ V}$，$R=10\Omega$，$X_C=10\Omega$，求I_S。

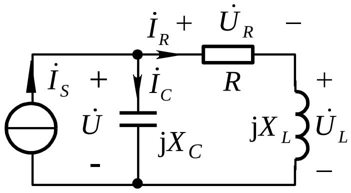


图 题4.6

解：设$\dot{U}_R=10\angle0^\circ\text{V}$，则

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}_R}{R}=1\angle0^\circ\text{ A},\dot{U}_L=jX_L\dot{I}_R=10\angle90^\circ\text{V}$$
$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L=(10\angle0°+10\angle90°)\text{V}=10\sqrt{2}\angle45°\text{V}$$
$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}}{\text{j}X_C}=\frac{10\sqrt{2}\angle45°\text{V}}{-\text{j}10\Omega}=\sqrt{2}\angle135°\text{A}$$
$$\dot{I}_S=\dot{I}_R+\dot{I}_C=(1\angle0°+\sqrt{2}\angle135°)\text{A}=\text{jA}=1\angle90^\circ\text{A}$$

所求电流有效值为$I_S=1\text{A}$。

4.7 已知图示电路中$g=1\text{S}$，$u_S=10\sqrt{2}\cos\omega t\text{ V}$，$i_S=10\sqrt{2}\cos\omega t\text{ A}$，$\omega=1\text{rad/s}$。求受控电流源的电压$u_{12}$。

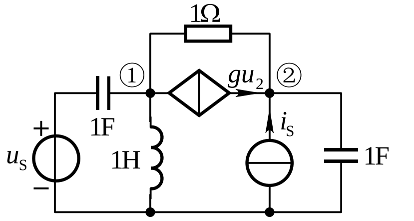


图 题4.7

解：电压源和电流源的相量分别为 $\dot{U}_{\mathrm{S}}=10\angle 0^{0}\ \mathrm{V}$，$\dot{I}_{\mathrm{S}}=10\angle 0^{0}\ \mathrm{A}$

对节点①和②列相量形式节点电压方程

$$\begin{cases}(\mathrm{j}\omega C_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}+1\mathrm{S})\dot{U}_{\mathrm{n1}}-1\mathrm{S}\times\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\mathrm{j}\omega C_1\dot{U}_{\mathrm{S}}-g\dot{U}_2\\ -1\mathrm{S}\times\dot{U}_{\mathrm{n1}}+\left(\mathrm{j}\omega C_2+1\mathrm{S}\right)\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\dot{I}_{\mathrm{S}}+g\dot{U}_2\end{cases}$$ 由图可知受控源控制量 $\dot{U}_2=\dot{U}_{n1}$

解得 $\dot{U}_{\mathrm{n1}}=\mathrm{j}10\mathrm{V}$　$\dot{U}_{\mathrm{n2}}=10-\mathrm{j}10\mathrm{V}$

$\dot{U}_{12}=\dot{U}_{\mathrm{n}_1}-\dot{U}_{\mathrm{n}_2}=(-10+\mathrm{j}20)\mathrm{V}=22.36\angle 116.57^{0}\ \mathrm{V}$

受控电流源的电压为　$u_{12}=22.36\sqrt{2}\cos\left(\omega t+116.57^{0}\right)\mathrm{V}$

4.8 在图示 RC 移相电路中设 $R=1/(\omega C)$，试求输出电压 u_{o} 和输入电压 u_{i} 的相位差。

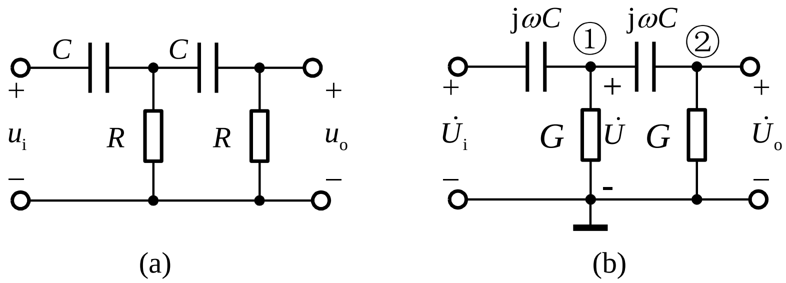


图 题 4.8

解：相量模型如图(b)所示。对节点①、②列节点电压方程：

$$(\mathrm{j}\omega C+\mathrm{j}\omega C+G)\dot{U}_{\mathrm{n1}}-\mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{i}} \qquad (1)$$

$$-\mathrm{j}\omega C\dot{U}_{\mathrm{n1}}+(\mathrm{j}\omega C+G)\dot{U}_{\mathrm{n2}}=0 \qquad (2)$$

联立解得 $\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{n2}}}{\dot{U}_{\mathrm{i}}}=\dfrac{1}{3}\angle 90^{0}$

又因为 $\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\dot{U}_{\mathrm{o}}$，所以 $\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{o}}}{\dot{U}_{\mathrm{i}}}=\dfrac{1}{3}\angle 90^{0}$，即 u_{o} 越前于 u_{i} 的相位差为 90^{o}。

4.9 图示电路中 $u_{\mathrm{S}}=\cos\omega t\,\mathrm{V}$，$\omega=10^{3}\,\mathrm{rad/s}$，试求输出电压 u_{o}。

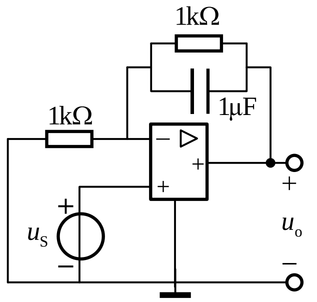


图 题 4.9

解：对含运算放大器的电路宜列写节点电压方程：

$$(\frac{1}{1\text{k}\Omega}+\frac{1}{1\text{k}\Omega}+\text{j}10^3\times 1\mu\text{F})\dot{U}_{\text{n1}}-(\frac{1}{1\text{k}\Omega}+\text{j}10^3\times 1\text{uF})\dot{U}_{\text{n2}}=0 \qquad (1)$$

$$\dot{U}_{n2}=\dot{U}_{\text{o}} \qquad (2)$$

由端口特性得 $\dot{U}_{n1}=\dot{U}_{\text{S}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle 0^{\circ}\ \text{V}$ (3)

将式(2)(3)代入(1)得：

$$\dot{U}_{\text{o}}=\frac{1.5-\text{j}0.5}{\sqrt{2}}\text{V}=\frac{1.58}{\sqrt{2}}\angle -18.43^{\circ}\ \text{V}$$

输出电压瞬时值为 $u_{\text{o}}=1.58\cos\left(\omega t-18.43^{\circ}\right)\text{V}$

4.10 已知图示电路中 $u_{\text{S1}}=u_{\text{S2}}=4\cos\omega t\ \text{V}$， $\omega=100\ \text{rad/s}$。试求电流 i 。

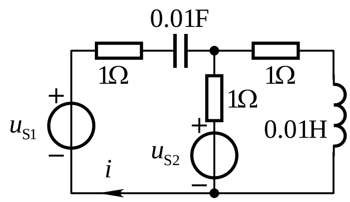


图 题 4.10

解：图示电路容抗 $X_C=-\frac{1}{\omega C}=-\frac{1}{100\times 0.01}\Omega=-1\Omega$，

感抗 $X_L=\omega L=(100\times 0.01)\Omega=1\Omega$

列节点电压方程

$$[\frac{1}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}+\frac{1}{1\Omega}+\frac{1}{1\Omega+\mathrm{j}\Omega}]\dot{U}_{n1}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{S1}}}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}+\frac{\dot{U}_{\mathrm{S2}}}{1\Omega} \qquad (1)$$

将$\dot{U}_{\mathrm{S1}}=\dot{U}_{\mathrm{S2}}=2\sqrt{2}\angle 0°\mathrm{V}$ 代入(1)式

解得　　　$\dot{U}_{n1}=\sqrt{5}\angle 18.43°\mathrm{V}$

$$\dot{I}=-\frac{-\dot{U}_{n1}+\dot{U}_{\mathrm{S1}}}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{A}$$

电流　　　$i=\cos(100t)\mathrm{A}$

4.11 求图示一端口网络的输入阻抗Z，并证明当$R=\sqrt{L/C}$时，Z与频率无关且等于R。

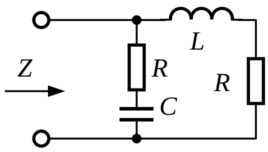


图 题 4.11

解：由阻抗的串、并联等效化简规则得

$$Z=(R+\mathrm{j}\omega L)//(R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C})=\frac{R^2+\dfrac{L}{C}+\mathrm{j}R(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}{2R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

当$R=\sqrt{L/C}$时，由上式得$Z=R$，且与频率无关。

4.12 求图示电路的戴维南等效电路。

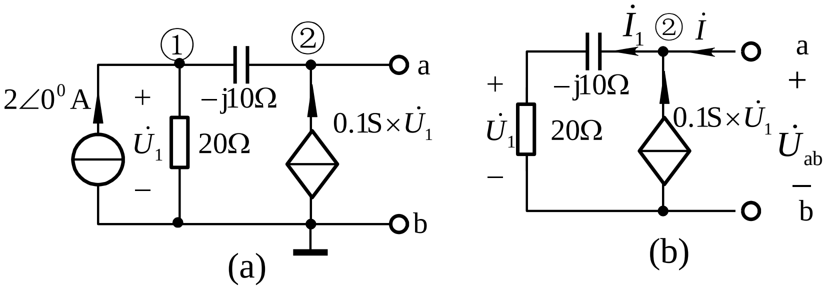


图 题 4.12

解：(1)求开路电压$\dot{U}_{\mathrm{OC}}$

对图(a)电路列节点电压方程

$$\begin{cases}(\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}10})\mathrm{S}\times\dot{U}_{\mathrm{n1}}-\dfrac{1}{-\mathrm{j}10}\times\dot{U}_{\mathrm{n2}}=2\angle 0^\circ\mathrm{A} & (1)\\ -\dfrac{1}{-\mathrm{j}10}\mathrm{S}\times\dot{U}_{\mathrm{n1}}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}10}\mathrm{S}\times\dot{U}_{\mathrm{n2}}=0.1\mathrm{S}\times\dot{U}_1 & (2)\end{cases}$$

受控源控制量$\dot{U}_1$即为节点电压$\dot{U}_{\mathrm{n1}}$，即 $\dot{U}_1=\dot{U}_{\mathrm{n1}}$　　(3)

将式(3)代入式(2)再与式(1)联立解得

$$\dot{U}_{\mathrm{n1}}=-40\mathrm{V}\text{，}\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\dot{U}_{\mathrm{OC}}=40\sqrt{2}\angle 135^\circ\mathrm{V}$$

(2)求等效阻抗Z_{i}

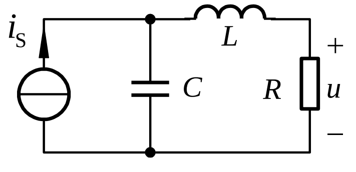
在 ab 端外施电压源$\dot{U}_{\mathrm{ab}}$，求输入电流$\dot{I}$，$\dot{U}_{\mathrm{ab}}$与$\dot{I}$的比值即为等效阻抗Z_{i}。

由节点②得 $\dot{I}=\dot{I}_1-0.1\mathrm{S}\times\dot{U}_1=\dfrac{\dot{U}_1}{20\Omega}-\dfrac{\dot{U}_1}{10\Omega}$

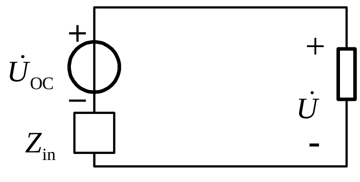
又$\dot{U}_{\mathrm{ab}}=(20-\mathrm{j}10)\Omega\dot{I}_1=(20-\mathrm{j}10)\times\dfrac{\dot{U}_1}{20}$

得 $Z_{\mathrm{i}}=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{ab}}}{\dot{I}}=\dfrac{(20-\mathrm{j}10)\times\dfrac{\dot{U}_1}{20}}{(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{10})\dot{U}_1}=22.36\angle 153.43^\circ\Omega$

4.13 图示电路中$L=0.01\mathrm{H}$，$C=0.01\mathrm{F}$，$i_{\mathrm{S}}=10\sqrt{2}\cos\omega t\ \mathrm{A}$。求$\omega$为何值时电压$u$与电阻$R$($R\neq 0$)无关？求出电压$u$。



(a)



(b)

解：对图(a)电路做戴维南等效，如图(b)所示。

$$Z_{\mathrm{i}}=\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)\qquad(1)$$

$$\dot{U}_{\mathrm{OC}}=\frac{\dot{I}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{j}\omega C} \qquad (2)$$

由图(b)可知，当 $Z_{\mathrm{i}}=0$ 时，电阻两端电压 $\dot{U}$ 与电阻 R 无关，始终等于 $\dot{U}_{\mathrm{OC}}(R\neq 0)$ 。

由式(1)解得 $$\omega=1/\sqrt{LC}=100\,\mathrm{rad/s}$$

将式(3)代入式(2)得 $$\dot{U}=\dot{U}_{\mathrm{OC}}=10\angle 0^{\circ}\mathrm{A}\times\frac{1}{\mathrm{j}100\mathrm{rad/s}\times 0.01\mathrm{F}}=10\angle -90^{\circ}\mathrm{V}$$

$$u=10\sqrt{2}\cos(\omega t-90^{\circ})\mathrm{V}$$

4.14 图中 u_{S} 为正弦电压源，$\omega=2000\,\mathrm{rad/s}$。问电容 C 等于多少才能使电流 i 的有效值达到最大？

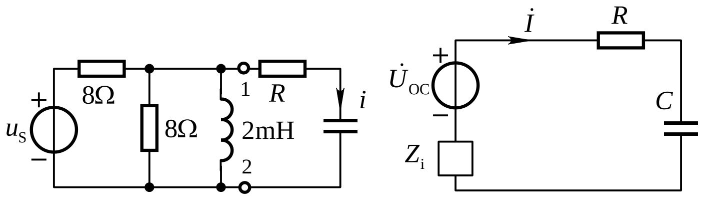


图 题 4.14

解：先对左图电路 12 端左侧电路作戴维南等效，如右图所示，令

$$X_L=\omega L=2000\,\mathrm{rad/s}\times 2\times 10^{-3}\,\mathrm{H}=4\Omega$$

得等效阻抗 $$Z_{\mathrm{i}}=8\Omega//8\Omega//\mathrm{j}4\Omega=\frac{4\Omega\times\mathrm{j}4\Omega}{4\Omega+\mathrm{j}4\Omega}=2(1+\mathrm{j})\Omega$$

由 $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{OC}}}{Z_{\mathrm{i}}+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$ 知，欲使电流 i 有效值为最大，电容的量值须使回路阻抗虚部为零，即：$\mathrm{Im}[Z_i+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}]=2-\dfrac{1}{\omega C}=0$

等效后电路如右图所示。解得 $C=\dfrac{1}{2\omega}=250\mu\mathrm{F}$

4.15 图示阻容移相器电路，设输入电压$\dot{U}_\mathrm{i}$及R_1、C已知，求输出电压U_o，并讨论当R由零变到无穷时输出电压$\dot{U}_\mathrm{o}$与输入电压$\dot{U}_\mathrm{i}$的相位差变化范围。

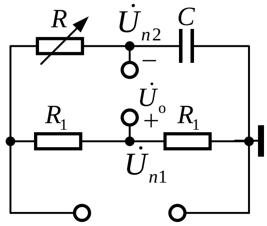


图 题 4.15

解：$\dot{U}_\mathrm{o}=\dot{U}_\mathrm{n1}-\dot{U}_\mathrm{n2}=\dfrac{\dot{U}_\mathrm{i}}{2}-\dfrac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\times\dot{U}_\mathrm{i}=\dfrac{\dot{U}_\mathrm{i}}{2}-\dfrac{\dot{U}_\mathrm{i}}{1+\mathrm{j}\omega CR}=\dfrac{\mathrm{j}\omega CR-1}{2(\mathrm{j}\omega CR+1)}\dot{U}_\mathrm{i}$

当 $R=0$， $\dot{U}_\mathrm{o}$超前于$\dot{U}_\mathrm{i}$ 180°；

当 $R=\dfrac{1}{\omega C}$，$\dot{U}_\mathrm{o}$超前于$\dot{U}_\mathrm{i}$ 90°；

当 $R\to\infty$， $\dot{U}_\mathrm{o}$与$\dot{U}_\mathrm{i}$同相位。

即当R由零变到无穷时，$\dot{U}_\mathrm{o}$超前于$\dot{U}_\mathrm{i}$相位差从180°到0°变化。

4.16 图所示电路，已知$R_1=X_1=X_2=n\Omega$（n已知），试求R_2为何值时，$\dot{I}_1$与$\dot{U}$相位差为90°。

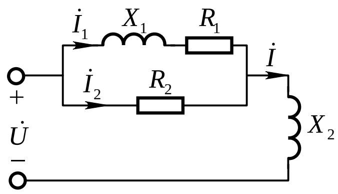


图 题 4.16

解：先列写$\dot{I}_1$与$\dot{U}$的等量关系，列 KVL

$$\dot{U}=(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\times\dot{I} \tag{1}$$

用$\dot{I}_1$表示$\dot{I}$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2 \tag{2}$$

$$\dot{I}_2=\frac{(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1}{R_2} \tag{3}$$

将式(2)(3)带入(1)中整理得

$$\dot{U}=(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\times\frac{R_1+\mathrm{j}X_1}{R_2}\times\dot{I}_1=[(R_1+\frac{-X_1X_2}{R_2})+\mathrm{j}(X_1+\frac{R_1X_2}{R_2})]\times\dot{I}_1$$

可见要使$\dot{I}_1$与$\dot{U}$相位差为$90°$则，上式中$\dot{I}_1$前面系数对应阻抗的实部应为零，即

$$R_1+\frac{-X_1X_2}{R_2}=0$$

得
$$R_2=\frac{X_1X_2}{R_1}=n\Omega=R_1$$

4.17 图示电路，$\dot{U}_\mathrm{S}=10\mathrm{V}$，角频率$\omega=10^3\mathrm{rad/s}$。要求无论$R$怎样改变，电流有效值$I$始终不变，求$C$的值，并分析电流$\dot{I}$的相位变化情况。

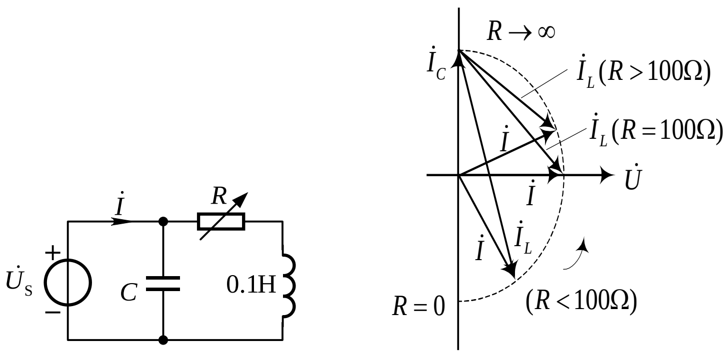


图 题4.17

解：图示电路负载等效导纳为

$$Y=\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}) \quad (1)$$

$$|Y|^2=\left[\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2+\left[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2=\frac{1-2\omega^2LC}{R^2+(\omega L)^2}+(\omega C)^2 \quad （2）$$

由式(2)可见：当$\omega^2=1/(2LC)$时，$|Y|=\omega C$与R无关，电流有效值$I=|Y|U=\omega CU$不随R改变。

解得
$$C=\frac{1}{2\omega^2L}=5\mathrm{uF}$$

将ω、L、C值代入(1)式，得

$$Y=\frac{R+\mathrm{j}5\times10^{-3}(R^2-10^4)}{R^2+10^4}$$

当 $R=0$， $\dot{I}$ 滞后 $\dot{U}_S$ 为 $-90°$；
当 $0<R<100\Omega$， $\dot{I}$ 滞后 $\dot{U}_S$ 为从 $-90°$ 向 0 变化；
当 $R=100\Omega$， $\dot{I}$ 与 $\dot{U}_S$ 同相位；
当 $R>100\Omega$， $\dot{I}$ 越前 $\dot{U}_S$ 为从 0 向 $90°$ 变化；
当 $R\to\infty$， $\dot{I}$ 越前 $\dot{U}_S$ 为 $90°$。
右图为电流相量图。
$\dot{I}$ 的终点轨迹为半圆，当 R 从 0 变到 ∞ 时， $\dot{I}$ 的辐角从 $-90°$ 变到 $90°$。

4.18 图示 RC 分压电路，求频率为何值时 $\dot{U}_2$ 与 $\dot{U}_1$ 同相？

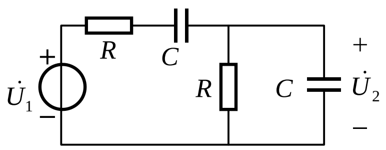


图 题 4.18

解：
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dfrac{R\times(1/\mathrm{j}\omega C)}{R+1/\mathrm{j}\omega C}}{R+1/\mathrm{j}\omega C+\dfrac{R\times(1/\mathrm{j}\omega C)}{R+1/\mathrm{j}\omega C}}=\frac{R}{3R+\mathrm{j}\left(\omega R^2C-1/\omega C\right)}$$

令 $\omega R^2C-1/\omega C=0$，得 $\omega=1/RC$，$f=1/2\pi RC$ 时

则 $\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\dfrac{1}{3}$， $\dot{U}_1$ 与 $\dot{U}_2$ 同相位。

4.19 图示电路，设 $\dot{U}=100\angle0^\circ$ V，求网络 N 的平均功率、无功功率、功率因数和视在功率。

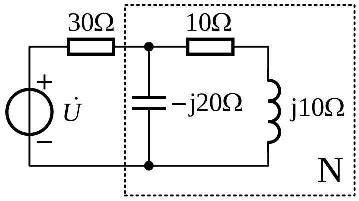


图 题 4.19

解：网络 N 的等效阻抗

$$Z' = (10 + \mathrm{j}10)\Omega // (-\mathrm{j}20)\Omega$$

$$= \frac{(10 + \mathrm{j}10) \times (-\mathrm{j}20)}{10 + \mathrm{j}10 - \mathrm{j}20}\Omega = \frac{(10 + \mathrm{j}10) \times (-\mathrm{j}20)}{10 - \mathrm{j}10}\Omega = 20\angle 0^\circ \Omega$$

输入电流 $$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{30 + Z'} = 2\mathrm{A}$$

网络 N 的平均功率为 $$P = I^2 \times \mathrm{Re}[Z'] = (2\mathrm{A})^2 \times 20\Omega = 80\mathrm{W}$$

无功功率 $$Q = I^2 \times \mathrm{Im}[Z'] = (2\mathrm{A})^2 \times 0 = 0$$

功率因数 $$\lambda = \cos\varphi = \cos 0^\circ = 1$$

视在功率 $$S = P / \cos\varphi = 80\mathrm{VA}$$

4.20 图为三表法测量负载等效阻抗的电路。现已知电压表、电流表、功率表读数分别为 36V、10A 和 288W，各表均为理想仪表，求感性负载等效阻抗 Z。再设电路角频率为 $\omega = 314$ rad/s，求负载的等效电阻和等效电感。

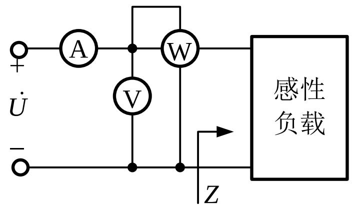


图 题 4.20

解：等效阻抗

$$|Z| = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X_L{}^2} = \frac{36\mathrm{V}}{10\mathrm{A}} = 3.6\Omega \qquad (1)$$

由平均功率 $P = I^2 R$ 得 $R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{288\mathrm{W}}{(10\mathrm{A})^2} = 2.88\Omega$

将式(2)代入式((1)解得 $X_L = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{3.6^2 - 2.88^2}\Omega = 2.16\Omega$

所以等效阻抗为

$$Z = R + \mathrm{j}X_L = (2.88 + \mathrm{j}2.16)\Omega$$

当 $\omega = 314\mathrm{rad/s}$ 时，负载的等效电阻和等效电感分别为

$$R = 2.88\Omega，\quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{2.16\Omega}{314\mathrm{rad/s}} = 6.88\mathrm{mH}$$

注释：功率表的读数等于电压线圈电压有效值、电流线圈电流有效值及电压与电流相位差夹角余弦三者之积。

4.21 图示电路，已知电压$U_1 = 100\text{V}$，电流$I_1 = 10\text{A}$，电源输出功率$P = 500\text{W}$。求负载阻抗及端电压U_2。

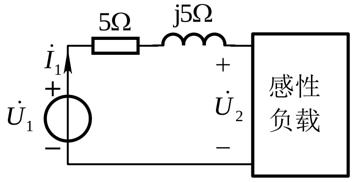


图 题 4.21

解：方法一：

平均功率$P = U_1 I_1 \cos\varphi$，可推出电压与电流的相位差φ

$$\varphi = \arccos\frac{P}{U_1 I_1} = \arccos\frac{500\,\text{W}}{100\text{V}\times 10\,\text{A}} = 60^\circ$$

设$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ$ A，则$\dot{U}_1 = 100\angle 60^\circ$ V

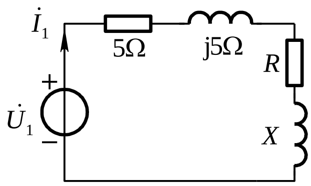
负载端电压相量$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - (5\Omega + \text{j}5\Omega)\dot{I}_1 = 36.6\angle 90^\circ$ V

有效值为$U_2 = 36.6\text{V}$

负载阻抗$Z_\text{L} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 = \text{j}3.66\Omega$

方法二：

感性负载等效后电路可表示成图(b)形式。



(b)

电源输出的平均功率等于所有电阻吸收的平均功率，由此得

$$P = I^2(5\Omega + R) = 10^2(5\Omega + R) = 500\text{W}$$

解得 $R = 0$

又因 $|Z| = \dfrac{U_1}{I_1} = \sqrt{(5+R)^2 + (5+X)^2} = \dfrac{100}{10}$

解得 $$X=3.66\Omega$$

所以负载阻抗 $$Z=R+\mathrm{j}X=\mathrm{j}3.66\Omega$$

负载端电压 $$U_2=I_1|Z|=36.6\mathrm{V}$$

4.22 若已知$U_1=100\sqrt{2}\mathrm{V}$，$I_2=20\mathrm{A}$，$I_3=30\mathrm{A}$，电路消耗的总功率$P$=1000W，求 R 及 X_1。

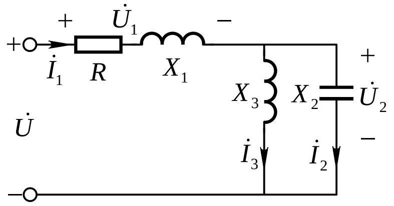


图 题 4.22

解：由题并联电容、电感上电流相位相反，流过电阻电流为

$$I_1=|I_2-I_3|=10\mathrm{A}$$

电路消耗的总功率等于电阻消耗功率，可得

$$R=\frac{P}{I_1^2}=10\Omega$$

电阻电压与电感电压相位正交，总电压为：

$$U_1=\sqrt{{U_L}^2+{U_R}^2}$$

可得 $$U_L=\sqrt{U_1^2-{U_R}^2}=\sqrt{U_1^2-(RI_1)^2}=100\mathrm{V}$$

则 $$X_1=\frac{U_L}{I_1}=10\Omega$$

4.23 已知图示电路中$U=100\,\mathrm{V}$，设功率表不消耗功率，问它的读数应为多少？

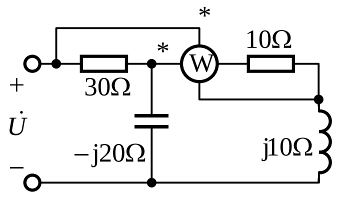


图 题 4.23

解：功率表的读数等于电压线圈电压有效值、电流线圈电流有效值以及上述电压、电流相位差夹角余弦三者之积。对图示电路，功率表读数表达式为

$$P_{\mathrm{W}} = U_{\mathrm{ab}} I_2 \cos\varphi = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{AB}} \overset{*}{I}_2] \qquad (1)$$

下面分别计算$\dot{I}_2$和$\dot{U}_{\mathrm{ab}}$。设$\dot{U} = 100\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}$，端口等效阻抗

$$Z_{\mathrm{i}} = 30\Omega + (-\mathrm{j}20\Omega)//(10+\mathrm{j}10)\Omega$$
$$= 30\Omega + \frac{-\mathrm{j}20\Omega \times (10+\mathrm{j}10)\Omega}{-\mathrm{j}20\Omega + (10+\mathrm{j}10)\Omega} = 50\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z_{\mathrm{i}} = 2\angle 0^{\circ}\ \mathrm{A}$$

由分流公式得
$$\dot{I}_2 = \frac{-\mathrm{j}20\Omega \dot{I}_1}{-\mathrm{j}20\Omega + (10+\mathrm{j}10)\Omega} = (2-\mathrm{j}2)\mathrm{A} \qquad (2)$$

则
$$\dot{U}_{\mathrm{ab}} = 30\Omega \times \dot{I}_1 + 10\Omega \times \dot{I}_2 = (80-\mathrm{j}20)\mathrm{V} \qquad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1)得功率表的读数为

$$P_{\mathrm{W}} = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{AB}} \overset{*}{I}_2] = \mathrm{Re}[(80-\mathrm{j}20)(2+\mathrm{j}2)] = 200\,\mathrm{W}$$

说明：本题功率表的读数也等于两个电阻吸收的平均功率之和，但这是由于题中已知条件导致的一种巧合。

4.24 图示工频正弦交流电路中，$U = 100\mathrm{V}$，感性负载Z_1的电流I_1为$10\mathrm{A}$，功率因数$\lambda_1 = 0.5$，$R = 20\Omega$。

（1）求电源发出的有功功率，电流I，和总功率因数λ。

（2）当电流I限制为$11\mathrm{A}$时，应并联最小多大电容C？并求此时总功率因数λ。

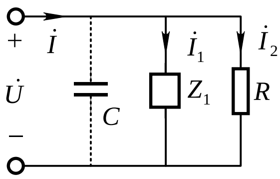


图 题 4.24

解：（1）由$\lambda_1 = 0.5$得，$\phi_1 = \arccos\lambda_1 = 60°$

感性负载Z_1的吸收有功功率$P_1 = UI_1\lambda_1 = 100\times 10\times 0.5 = 500\mathrm{W}$

无功功率$Q_1 = UI_1 \sin\phi_1 = 100\times 10 \sin 60° = 500\sqrt{3} = 866.0\,\mathrm{var}$

电阻R吸收的有功功率$P_2 = \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{100^2}{20} = 500\mathrm{W}$

电源发出的有功功率等于整个负载吸收的有功功率为：

$P = P_1 + P_2 = 1000\text{W}$

电源发出的无功功率 $Q = Q_1 = 866.0\,\text{var}$

视在功率 $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1000^2 + 866^2} = 1322.86\text{VA}$

电源的电流 $I = \dfrac{S}{U} = \dfrac{1322.86}{100} = 13.23\text{A}$

总功率因数 $\lambda = \dfrac{P}{S} = \dfrac{1000}{1322.86} = 0.756$

（2）当电流 I 限制为 11A 时，总功率因数 $\lambda = \dfrac{P}{UI} = \dfrac{1000}{100\times 11} = 0.909$

当电路仍为感性时，并联的电容为最小，此时电压超前电流的相位差为：

$$\phi = \arccos\lambda = 24.62°$$

电源发出的无功功率为 $Q = P\tan\phi = 1000\times\tan 24.62° = 458.26\,\text{var}$

由无功功率守恒得：$Q = Q_1 + (-\omega C U^2)$

$$C = \frac{Q_1 - Q}{\omega U^2} = \frac{866 - 458.26}{314\times 100^2} = 1.299\times 10^{-4}\,\text{F}$$

4.25 图所示为某负载的等效电路模型，已知 $R_1 = X_1 = 8\Omega$，$R_2 = X_2 = 3\Omega$，$R_\text{m} = X_\text{m} = 6\Omega$，外加正弦电压有效值 $U = 220\text{V}$，频率 $f = 50\text{Hz}$。（1）求负载的平均功率和功率因数；（2）若并上电容，将功率因数提高到 0.9，求 $C = ?$。

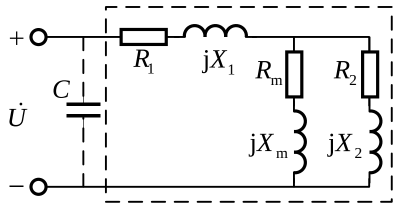


图 题 4.25

解：(1)负载即虚线部分等效阻抗为

$$Z = R_1 + \text{j}X_1 + (R_\text{m} + \text{j}X_\text{m})\,||\,(R_2 + \text{j}X_2) = (10 + \text{j}10)\Omega$$

阻抗角为

$$\varphi_Z = \arctan\frac{10}{10} = 45°$$

则功率因数为

$$\lambda = \cos\varphi_Z = \cos 45° \approx 0.707$$

负载消耗的平均功率为

$$P = \frac{U^2}{|Z|} \times \lambda \approx 2420\text{W}$$

(2)并联电容前负载的无功

$$Q = P\tan\varphi_Z = 2420\text{var}$$

并上电容后

$$\lambda' = 0.9$$

则功率因素角为

$$\varphi' = \arccos 0.9 \approx 25.84°$$

并联电容后总的无功

$$Q' = P\tan\varphi' \approx 1172.06\text{var}$$

则电容引进的无功应为

$$Q_C = Q' - Q = -\omega C U^2 = -1247.94\text{var}$$

则所需电容值为

$$C = -\frac{Q_C}{\omega U^2} \approx 82.1\mu\text{F}$$

4.26 功率为 40W 的白炽灯和日光灯各 100 只并联在电压 220V 的工频交流电源上，设日光灯的功率因数为 0.5(感性)，求总电流以及总功率因数。如通过并联电容把功率因数提高到 0.9，问电容应为多少？求这时的总电流。

解：电路总平均功率为

$$P = P_{白炽灯} + P_{日光灯} = 40\,\text{W} \times 100 + 40\,\text{W} \times 100 = 8000\,\text{W}$$

日光灯的功率因数角 $\varphi = \arccos(0.5) = 60°$

白炽灯的功率因数为 1，不存在无功功率，因此两种灯的总无功功率为：

$$Q = P_{日光灯} \times \text{tg}\varphi = 6928.2\,\text{var}$$

视在功率　$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 10583\,\text{VA}$

总电流　$I = S/U = 48.1\text{A}$

总功率因数　$\lambda = P/S = 0.756$

并联电容后，电路的功率因数角为 $\varphi' = \arccos 0.9 = 25.84°$

电容的并联接入不改变平均功率，而无功功率变为

$$Q' = P\mathrm{tg}\varphi' = 3874.58\,\mathrm{var}$$

并联电容后总功率的变化量等于电容上的无功功率，即

$$Q_C = Q' - Q = -3053.6\,\mathrm{var}$$

因为$Q_C = -\omega C U^2$，所以

$$C = \frac{-Q_C}{\omega U^2} = \frac{3053.6\,\mathrm{var}}{(2\pi\times 50)\,\mathrm{rad/s}\times(220\,\mathrm{V})^2} = 201\,\mu\mathrm{F}$$

并联电容后的总电流为：

$$I' = \frac{P}{U\lambda'} = \frac{8000\,\mathrm{W}}{220\,\mathrm{V}\times 0.9} = 40.40\,\mathrm{A}$$

4.27 图示电路，$U_1 = 200\mathrm{V}$，Z_1吸收的平均功率$P_1 = 800\mathrm{W}$，功率因数$\lambda = 0.8$(感性)。求电压有效值U和电流有效值I。

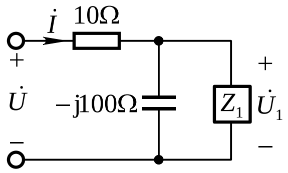


图 题 4.27

解：设 $\dot{U}_1 = 200\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$，$\varphi_1 = \arccos 0.8 = 36.86^\circ$

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1\lambda} = 5\,\mathrm{A}，\dot{I}_1 = I_1\angle -\varphi_1 = 5\angle -36.86^\circ\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_1/(-\mathrm{j}100\Omega) = \mathrm{j}2\,\mathrm{A}，\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_1 = (4-\mathrm{j})\,\mathrm{A} = 4.12\angle -14.04^\circ$$

$$\dot{U} = 10\dot{I} + \dot{U}_1 = (240-\mathrm{j}10)\,\mathrm{V} = 240.2\angle -2.39^\circ$$

$$I = 4.12\,\mathrm{A}，U = 240.2\,\mathrm{V}$$

4.28 图示电路中$u_S = 2\cos\omega t\,\mathrm{V}$，$\omega = 10^6\,\mathrm{rad/s}$，$r = 1\Omega$。问负载阻抗 Z 为多少可获得最大功率？求出此最大功率。

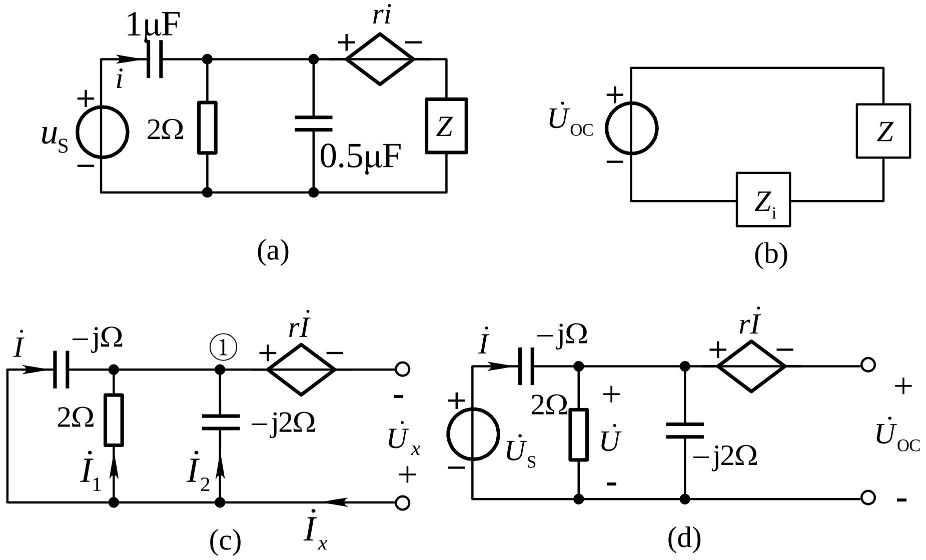


图 题4.28

解：对原电路做戴维南等效，如图（b）所示。

（1）求输入阻抗，由图（c）得：

$$\dot U_x = -\mathrm{j}\Omega\times\dot I + r\dot I = (1-\mathrm{j})\Omega\times\dot I$$

$$\dot I_x = \dot I + \dot I_1 + \dot I_2 = \dot I + (-j\Omega\times\dot I)\times(\frac{1}{2\Omega}+\frac{1}{-\mathrm{j}2\Omega}) = (\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{j}}{2})\dot I$$

$$Z_i = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}X_\mathrm{i} = \frac{\dot U_x}{\dot I_x} = \frac{(1-\mathrm{j})\Omega\dot I}{\frac{1}{2}(3-\mathrm{j})\dot I} = (0.8-\mathrm{j}0.4)\Omega$$

（2）求开路电压，如图（d）所示：

$$\dot U_{OC} = \dot U - r\dot I$$

$$= \frac{2\Omega//(-\mathrm{j}2\Omega)}{2\Omega//(-\mathrm{j}2\Omega)+(-\mathrm{j}\Omega)}\dot U_S - r\frac{\dot U_S}{2\Omega//(-\mathrm{j}2\Omega)+(-\mathrm{j}\Omega)}$$

$$= \frac{1+\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}3}\dot U_S = (0.4-\mathrm{j}0.2)\sqrt{2}\mathrm{V} = 0.2\sqrt{10}\angle -26.57^\circ\mathrm{V}$$

（3）求最大功率：

根据最大功率传输定理，当 $Z_L = \overset{*}{Z}_\mathrm{i} = (0.8+\mathrm{j}0.4)\Omega$ 时，Z_L 可获得最大功率：

$$P_{\max} = \frac{U^2{}_{OC}}{4R_\mathrm{i}} = \frac{(0.2\sqrt{10})^2}{4\times0.8}\mathrm{W} = 0.125\mathrm{W}$$

4.29 图示电路中电源频率 $f = 31.8\,\mathrm{kHz}$，$U_S = 1\,\mathrm{V}$，内阻 $R_S = 125\Omega$，负载电阻

$R_2 = 200\Omega$。为使 R_2 获得最大功率，L 和 C 应为多少？求出此最大功率。

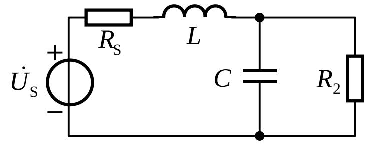


图 题 4.29

解：L、C 及 R_2 的等效阻抗　$Z_L = j\omega L + \dfrac{R_2/(j\omega C)}{R_2 + 1/(j\omega C)}$

当 L、C 改变时，Z_L 的实部及虚部均发生变化，根据最大功率传输定理知，当 $\overset{*}{Z}_L = R_S$，R_2 可获得最大功率，

即
$$\begin{cases} \dfrac{R_2}{1+(\omega R_2 C)^2} = R_S \\ \omega L - \dfrac{\omega R_2{}^2 C}{1+(\omega R_2 C)^2} = 0 \end{cases}$$

联立解得
$$\begin{cases} C = \dfrac{\sqrt{R_2/R_S - 1}}{\omega R_2} = 0.0194\mu\text{F} \\ L = R_2 R_S C = 0.485\text{mH} \end{cases}$$

此时
$$P_{\max} = \frac{U_S{}^2}{4R_S} = \frac{1\text{V}}{4\times 125\Omega} = 2\text{mW}$$

4.30 图示电路已知 $i_S = 0.6e^{-10t}\text{A}$，$u_S = 10te^{-20t}\text{V}$。求电压 u_1 的变化规律。

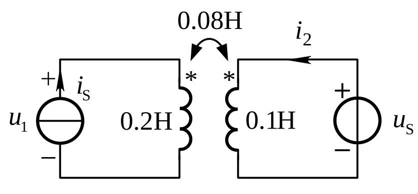


图 题 4.30

解：由互感元件的端口特性方程，得

$$0.2\times\frac{di_S}{dt} + 0.08\times\frac{di_2}{dt} = u_1 \tag{1}$$

$$0.1\times\frac{di_2}{dt} + 0.08\times\frac{di_S}{dt} = u_S \tag{2}$$

将式(2)乘以 0.8，再与式(1)相减，从而消去$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$得

$$u_1 = 0.8\times u_S + (0.2-0.064)\frac{\mathrm{d}i_S}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

将u_S及i_S代入式(3)得　$u_1=(8t\mathrm{e}^{-20t}-0.816\mathrm{e}^{-10t})\mathrm{V}$

4.31 求图示电路的等效电感。

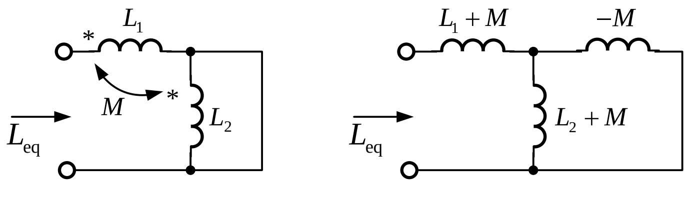


图 题 4.31

解：由消去互感法可将图(a)电路等效成图(b)。由电感的串、并联等效得：

$$L_{eq}=(L_1+M)+(L_2+M)//(-M)$$

$$=(L_1+M)+\frac{(L_2+M)\times(-M)}{L_2+M-M}$$

$$=L_1+M+\frac{-L_2M-M^2}{L_2}=L_1-\frac{M^2}{L_2}$$

4.32 图示电路中，要求$u_2=u_1$,变比 n 应为多少?

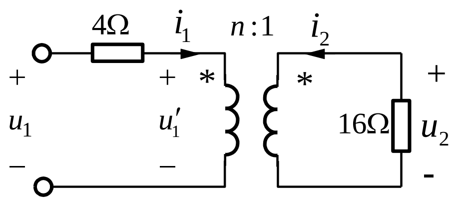


图 题 4.32

解：由变压器特性方程可知

$$\begin{cases} u_1' = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n}i_2 = -\dfrac{1}{n}\times(-\dfrac{u_2}{16}) \end{cases} \tag{1}$$

对左回路应用 KVL 方程

$$u_1 = 4i_1 + u_1' = 4i_1 + nu_2 \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)，考虑到$u_2=u_1$，可得

$$u_1=(\frac{1}{4n}+n)u_2=(\frac{1}{4n}+n)u_1$$

$$\frac{1}{4n}+n=1$$

解得
$$n=0.5$$

4.33 设图示一端口网络中$u_S=200\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$，$\omega=10^3\,\mathrm{rad/s}$。求其戴维南等效电路。

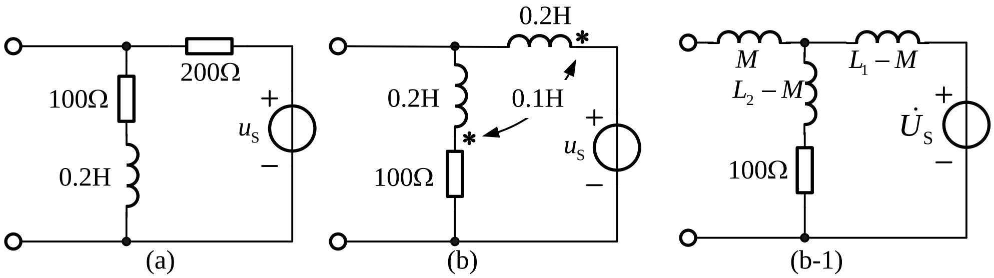


图 题 4.33

解：(a) 对图(a)电路，感抗$X_L=\omega L=10^3\,\mathrm{rad/s}\times0.2\mathrm{H}{=}200\Omega$，由分压公式得端口开路电压

$$\dot{U}_{oc}=\frac{(100+\mathrm{j}200)\Omega}{(100+\mathrm{j}200{+}200)\Omega}\times200\angle0^{\circ}\,\mathrm{V}=124\angle29.7^{\circ}\,\mathrm{V}$$

求等效阻抗，将电压源作用置零，

$$Z_i=(100+\mathrm{j}200)\Omega//200\Omega=\frac{200\Omega\times(100+\mathrm{j}200)\Omega}{(200+100+\mathrm{j}200)\Omega}=124\angle29.7^{\circ}\Omega$$

(b) 对图(b)电路，应用互感消去法，将电路等效成图(b-1)。图中$M=0.1\mathrm{H},\ L-M=0.1\mathrm{H}$。

由分压公式得

$$\dot{U}_{OC}=\frac{R+\mathrm{j}\omega\left(L_2-M\right)}{R+\mathrm{j}\omega\left(L_2-M\right)+\mathrm{j}\omega\left(L_1-M\right)}\dot{U}_S=(120-\mathrm{j}40)\mathrm{V}=126.49\angle-17.55^{\circ}\,\mathrm{V}$$

等效阻抗

$$Z_i=\mathrm{j}\omega M+[R+\mathrm{j}\omega(L_2-M)]//\mathrm{j}\omega(L_1-M)$$
$$=\mathrm{j}\omega M+\frac{\left[R+\mathrm{j}\omega\left(L_2-M\right)\right]\times\mathrm{j}\omega\left(L_1-M\right)}{R+\mathrm{j}\omega\left(L_2-M\right)+\mathrm{j}\omega\left(L_1-M\right)}=(20+\mathrm{j}160)\Omega=161.25\angle82.87^{\circ}\Omega$$

4.34 设图示电路中 $R_1=12\Omega$， $X_1=12\Omega$， $X_2=10\Omega$， $X_M=6\Omega$， $R_3=8\Omega$，

$X_3=6\Omega$，$U=120\,\text{V}$。求电压U_{AB}。

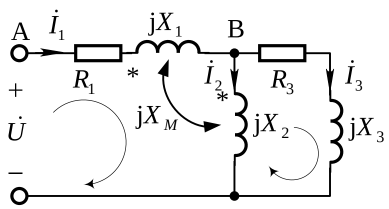


图 题 4.34

解：方法一：

设$\dot{U}=120\angle 0^\circ\,\text{V}$，各支路电流如图所示，列支路电流方程如下：

$$\begin{cases}\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3\\ \dot{U}=R_1\dot{I}_1+\text{j}X_1\dot{I}_1+\text{j}X_M\dot{I}_2+\text{j}X_M\dot{I}_1+\text{j}X_2\dot{I}_2\\ \text{j}X_M\dot{I}_1+\text{j}X_2\dot{I}_2=(R_3+\text{j}X_3)\dot{I}_3\end{cases}$$

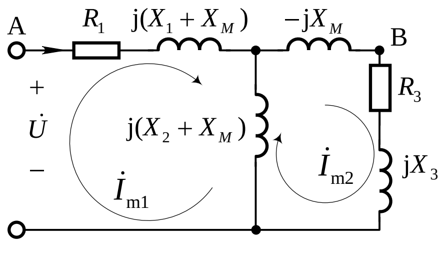
解得 $\dot{I}_1=4.27\angle-49.04^\circ\,\text{A}$， $\dot{I}_2=1.9117\angle-122.475^\circ\,\text{A}$。

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB}&=R_1\dot{I}_1+\text{j}\,X_1\dot{I}_1+\text{j}\,X_M\dot{I}_2\\&=83.63\angle-6.58^\circ\,\text{V}\end{aligned}$$

所以电压有效值为 $U_{AB}=83.63\,\text{V}$

方法二：

应用互感消去法，原电路可等效成为。



列网孔电流方法

$$\begin{cases}[R_1+\text{j}(X_1+X_M)+\text{j}(X_2+X_M)]\dot{I}_{m1}-\text{j}(X_2+X_M)\dot{I}_{m2}=\dot{U} & (1)\\ -\text{j}(X_2+X_M)\dot{I}_{m1}+[-\text{j}X_M+R_3+\text{j}X_3+\text{j}(X_2+X_M)]=0 & (2)\end{cases}$$

将已知条件代入，得

$$\begin{cases}(12+\mathrm{j}34)\Omega\dot{I}_1-j16\Omega\dot{I}_2=120\angle 0^\circ\,\mathrm{V}\\ \text{-j}16\Omega\dot{I}_1+(8+\mathrm{j}16)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

解得

$$\dot{I}_{\mathrm{m1}}=4.27\angle-49.04^\circ\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m2}}=3.82\angle-22.47^\circ\,\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_{\mathrm{AB}}=[R_1+\mathrm{j}(X_1+X_M)]\dot{I}_{\mathrm{m1}}+(-\mathrm{j}X_M)\dot{I}_{\mathrm{m2}}$$

$$=83.63\angle-6.58^\circ\,\mathrm{V}$$

所以有效值$U_{\mathrm{AB}}=83.63\mathrm{V}$。

注释：对含互感的电路宜用支路电流法或回路电流法列写方程。

4.35 电路如图所示，$\dot{U}_{\mathrm{S}}=360\angle 0°\mathrm{V}$。求：

(1)输出电压 u_{o} 的有效值；

(2)理想电压源发出的平均功率的百分之多少传递到20Ω的电阻上。

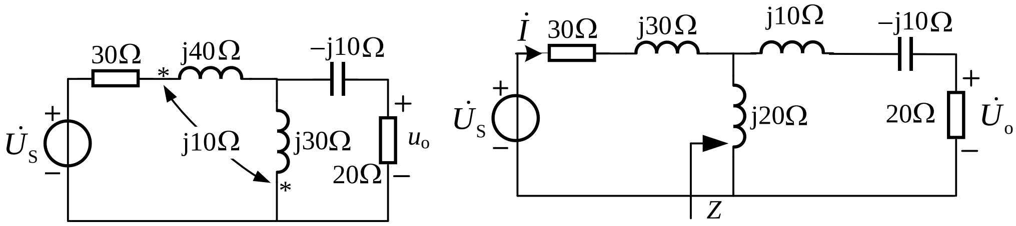


图 题4.35

解：（1）消互感后得等效电路如右图所示，可得右边等效的互感和电容抵消，则并联部分等效阻抗为

$$Z=\frac{\mathrm{j}20\times 20}{\mathrm{j}20+20}=(10+\mathrm{j}10)\Omega$$

则

$$\dot{U}_{\mathrm{o}}=\frac{Z}{(\mathrm{j}30+30)+Z}\times\dot{U}_{\mathrm{S}}=90\angle 0°\mathrm{V}$$

即$U_{\mathrm{o}}=90\mathrm{V}$

（2）理想电源发出的平均功率为

$$P=\left|\frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{(\mathrm{j}30+30)+Z}\right|^2\times(30+10)=1620\mathrm{W}$$

20Ω的电阻吸收功率为

$$P_{20\Omega}=\frac{U_{\rm o}^2}{20}=405{\rm W}$$

传递到20Ω电阻上的百分比为

$$\frac{P_{20\Omega}}{P}\times 100\%=25\%$$

4.36 图示电路，要求在任意频率下，电流i与输入电压$u_{\rm S}$始终同相，求各参数应满足的关系及电流i的有效值。

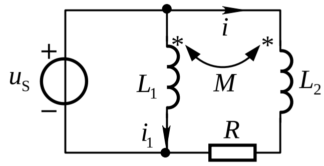


图 题 4.36

解：应用支路电流法，列 KVL 方程。

$$\begin{cases}{\rm j}\omega M\dot{I}_1+{\rm j}\omega L_2\dot{I}+R\dot{I}=\dot{U}_{\rm S} & (1)\\ {\rm j}\omega M\dot{I}+{\rm j}\omega L_1\dot{I}_1=\dot{U}_{\rm S} & (2)\end{cases}$$

方程(1)乘L_1，方程(2)乘M，二者相减消去$\dot{I}_1$得电流$\dot{I}$与输入电压$\dot{U}_{\rm S}$的关系表达式

$$\dot{I}=\frac{(L_1-M)\dot{U}_{\rm S}}{RL_1+{\rm j}\omega(L_1L_2-M^2)}$$

由上式可见：当$M=\sqrt{L_1L_2}$即互感为全耦合时，$\dot{I}=\dfrac{L_1-M}{RL_1}\dot{U}_{\rm S}$，$\dot{I}$与$\dot{U}_S$同相且与频率无关。$i$的有效值为　$I=U_{\rm S}(L_1-M)/(RL_1)$

4.37 图示电路中电源电压$U_{\rm S}=100\,{\rm V}$，内阻$R_{\rm S}=5\Omega$，负载阻抗$Z_{\rm L}=(16+{\rm j}12)\Omega$，问理想变压器的变比$n$为多少时，$Z_{\rm L}$可获得最大功率？试求此最大功率。

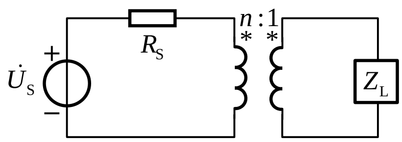


图 题 4.37

解：由理想变压器的阻抗变换关系得 $Z_L' = n^2 Z_{\mathrm{L}}$

当变比 n 改变时的 Z_L' 模改变而阻抗角不变，

此时获得最大功率条件是模匹配，

即 $R_S = \left|Z_L'\right| = \left|n^2 Z_{\mathrm{L}}\right|$

由此求得： $n^2 = \dfrac{R_{\mathrm{S}}}{\left|Z_{\mathrm{L}}\right|} = \dfrac{5\Omega}{\sqrt{16^2+12^2}\Omega} = \dfrac{1}{4}$

$$n = 0.5$$

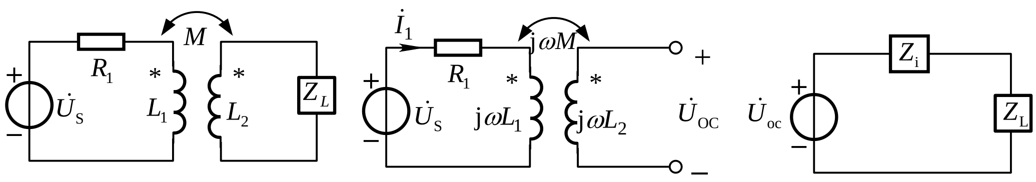
设 $\dot{U}_{\mathrm{S}} = 100\angle 0^\circ \mathrm{V}$，则理想变压器原端电流：

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_S + Z_{\mathrm{L}}'} = \frac{100\angle 0^\circ}{5+4+\mathrm{j}3} = \frac{10}{3}\sqrt{10}\angle -18.4^\circ \mathrm{A}$$

副端电流为 $\dot{I}_2 = -n\dot{I}_1 = -\dfrac{5}{3}\sqrt{10}\angle -18.4^\circ \mathrm{A}$

负载吸收的最大平均功率为 $P_{\max} = I_2{}^2 \times 16\Omega = (\dfrac{5\sqrt{10}}{3})^2 \times 16 = 444.44\mathrm{W}$

4.38 图示电路，已知 $R_1 = 10\Omega$，$L_1 = 1\mathrm{H}$，$L_2 = 1\mathrm{H}$，耦合系数 $K = 0.2$，$\dot{U}_{\mathrm{S}} = 20\mathrm{V}$，角频率 $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$。求负载阻抗 Z_L 为何值时它消耗的功率为最大？并求此最大功率。



(a)　　　(b)　　　(c)

图 题 4.38

解：由 $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ 得 $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.2\sqrt{1\times 1}\mathrm{H} = 0.2\mathrm{H}$

（1）求开路电压，电路如图(b)所示。

$$\dot{U}_{\mathrm{S}} = R_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1$$

可得 $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{R_1 + j\omega L_1} = \dfrac{20V}{(10 + j10)\Omega} = \dfrac{20V}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ A} = \sqrt{2}\angle -45^\circ A$ (1)

$\dot{U}_{OC} = j\omega M \dot{I}_1$，将(1)式代入，得

$$\dot{U}_{OC} = j \times 10 \times 0.2 \times \sqrt{2}\angle -45^\circ V = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ V$$

$$Z_i = \frac{(\omega M)^2}{R_1 + j\omega L_1} + j\omega L_2 = (0.2 + j9.8)\Omega$$

由最大功率传输定理得 $Z_L = (0.2 - j9.8)\Omega$ 时，负载消耗功率最大，最大功率为

$$P_{max} = \frac{{U_S}^2}{4R_1} = \frac{(20V)^2}{4 \times 10\Omega} = 10W$$