第 12 章综合习题参考解答

1. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是任意在 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积函数的 Fourier 级数.

证明 设 $[a,b]\subset(0,2\pi)$. 则当 $x\in[a,b]$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

又因为 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于零, 所以根据 Dirichlet 判别法, 可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于 $\sin nx$ 以 2π 为周期, 故, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛. 显然该级数在每点都收敛, 设其和函数为 $f(x)$. $f(x)$ 的 Fourier 级数就是上面的级数.

若该级数在 $[-\pi, \pi]$ 上平方可积, 则由 Bessel 不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} < +\infty.$$

这与 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散是矛盾的.

2. 证明下列等式:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\ (-\pi<x<\pi);$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\ (0<x<2\pi).$$

证明 令 $f(x)=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$, $(-\pi<x<\pi)$. 则 $f(x)$ 是连续可导的偶函数. 因此

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=2\ln 2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=0$, 对上面右边的积分作变换 $x=\pi-t$, 可知 $a_0=0$.

对于 $n=1,2,\cdots$, 应用分部积分及变换 $x=\pi-t$, 我们有

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

利用

$$
\sin nx\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x,
$$

$$
\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx, \quad \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx,
$$

可得 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n=1,2,\cdots$. 由 Dirichlet 收敛定理知 (1) 成立. 类似地, 可证明 (2).

3. 设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数. 证明:

(1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上递减, 那么 $b_n \geqslant 0$;

(2) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上递增, 那么 $b_n \leqslant 0$.

证明 只需证明 f 在 $(0,2\pi)$ 上递减的情况. 因为无界递减函数可用有界递减函数逼近, 所以可以只对 $f(x)$ 是有界的函数证明. 根据第二积分中值定理, 对于 $[s,t] \subset (0,2\pi)$, 存在 $\xi \in [s,t]$ 使得

$$
\begin{aligned}
\int_s^t f(x)\sin nx\mathrm{d}x &= f(s)\int_s^\xi \sin nx\mathrm{d}x + f(t)\int_\xi^t \sin nx\mathrm{d}x \\
&= f(s)\frac{\cos ns - \cos n\xi}{n} + f(t)\frac{\cos n\xi - \cos nt}{n} \\
&= \frac{1-\cos n\xi}{n}(f(s)-f(t)) + f(s)\frac{\cos ns - 1}{n} + f(t)\frac{1-\cos nt}{n} \\
&\geqslant f(s)\frac{\cos ns - 1}{n} + f(t)\frac{1-\cos nt}{n}
\end{aligned}
$$

令 $s \to 0, t \to 2\pi$, 得 $2b_n \geqslant 0$. 故, $b_n \geqslant 0$.

4. 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).$$

证明 根据第二积分中值定理, 存在 $\xi\in[-\pi,\pi]$ 使得

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx\mathrm{d}x + f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(f(-\pi)\frac{\sin n\xi}{n} - f(\pi)\frac{\sin n\xi}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

同理, 可证 $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

(Riemann-Lebesgue **引理**) **设函数** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上** Riemann **可积**, **则有**

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x=0.$$

(**广义** Riemann-Lebesgue **引理**) **设函数** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上** Riemann **可积**, **函数** $g(x)$ **以正数** T **为周期**, **且在** $[0,T]$ **上可积**, **则有**

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 **情形** 1: $g(x)\geqslant 0$ **时**, **取自然数** m **使得** $[a,b]\subset[-mT,mT]$, **令**

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-mT,mT]\setminus[a,b]\end{cases}$$

则有

$$\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \int_{-mT}^{mT} F(x)g(nx)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{-mT}^{mT} F(x)\mathrm{d}x.$$

考虑分割 $-mT,\ -mT+\frac{T}{n},\ -mT+\frac{2T}{n},\cdots,-mT+\frac{2mnT}{n}$, 我们有

$$\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2mn-1}\int_{-mT+\frac{kT}{n}}^{-mT+\frac{(k+1)T}{n}} F(x)g(nx)\mathrm{d}x.$$

由于 $g(nx)\geqslant 0$, 根据第一积分中值定理, 存在

$$x_k\in[-mT+\frac{kT}{n},-mT+\frac{k+1}{n}T]$$

使得

$$\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2mn-1}F(x_k)\int_{-mT+\frac{kT}{n}}^{-mT+\frac{(k+1)T}{n}} g(nx)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{2mn-1} F(x_k)\frac{1}{n}\int_0^T g(x - mnT + kT)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{2mn-1} F(x_k)\frac{1}{n}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x \sum_{k=0}^{2mn-1} F(x_k)\cdot\frac{T}{n}.
\end{aligned}
$$

因为 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2mn-1} F(x_k)\cdot\frac{T}{n}$ 介于函数 $F(x)$ 在区间 $[-mT, mT]$ 上关于前述分割的 Darboux 上和与 Darboux 下和之间, 所以

$$
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2mn-1} F(x_k)\cdot\frac{T}{n} = \int_{-mT}^{mT} F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
$$

于是

$$
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
$$

情形 2: 对一般的 $g(x)$, 利用

$$g(x)=\frac{|g(x)|+g(x)}{2}-\frac{|g(x)|-g(x)}{2}.$$

有

$$\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\frac{|g(nx)|+g(nx)}{2}\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\frac{|g(nx)|-g(nx)}{2}\mathrm{d}x.$$

根据情形 1 的结论, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{|g(x)|+g(x)}{2}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{T}\int_0^T\frac{|g(x)|-g(x)}{2}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

至此证明了广义 Riemann-Lebesgue 定理.

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

5. 设 f 在 $[-a,a]$ 上连续, 且在 $x=0$ 处可导. 求证:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明 作变换 $x=-t$, 有

$$\int_{-a}^{0}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0\frac{1-\cos\lambda t}{t}f(-t)\,\mathrm{d}t.$$

因此,

$$\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^a F(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,$$

其中 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(-x)}{x}, & x\neq 0\\ 2f'(0), & x=0.\end{cases}$ 由于 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 且在 $x=0$ 处可导, 可知 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 连续. 根据 Riemann-Lebesgue 引理, 可知上式右端第二个积分当 $\lambda\to+\infty$ 时趋于零. 故, 结论得证.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据习题12.3的结论, 对 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx,$$
$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

因此

$$f(x)|\cos\lambda x|=\frac{2}{\pi}f(x)+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}f(x)\cos 2n\lambda x.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 可知 $f(x)$ 有界, 因而上面式子右端的级数关于 x 在

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

$[a,b]$ 上一致收敛. 因此有

$$\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\int_a^b f(x)\cos 2n\lambda x\mathrm{d}x.$$

此式右端的级数关于 λ 一致收敛. 再由 Riemann-Lebesgue 引理, 可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同理可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

7. 设 f 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

用 a_n, b_n 和 A_n, B_n 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0=a_0^2,\ A_n=a_n^2+b_n^2,\ B_n=0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明 这里只对 $f(x)$ 是分段可导的连续函数情况证明, 一般的情况要用 Fourier 级数均值求和的 Fejér 定理, 见 9-10题.

因为 f 是周期为 2π 的连续函数, 所以 f 是有界函数, 即, 存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|<M$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 成立. $f(x)$ 也是在 $\mathbb{R}$ 上一致连续函数. 因此对任意正数 ε 存在 $\delta>0$ 使得当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}.$$

因此, 对给定 x_0 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|F(x)-F(x_0)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\big[f(x+t)-f(x_0+t)\big]\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(t)\big[f(x+t)-f(x_0+t)\big]\Big|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\mathrm{d}t=\varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明 $F(x)$ 在 x_0 连续. $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数是显然的. 故, $F(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 也容易证明当 $f(x)$ 可导时, $F(x)$ 也可导.

$$\begin{aligned}
F(-x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+u)f(u)\mathrm{d}u && (\text{作变换 } t=x+u) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u)\mathrm{d}u, && (\text{利用 } f \text{ 的周期性}) \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

故, $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数. 因此 $B_n = 0$. 对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\left(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} a_n^2 + b_n^2, & n \geqslant 1 \\ a_0^2, & n = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

当 $f(x)$ 分段可导时, $F(x)$ 也分段可导, 由 Dirichlet 收敛定理, 有

$$F(x)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

在上式中令 $x=0$ 得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

即, Parseval 等式成立.

8. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

证明 把 f 和 f' 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$. 设函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 a_n, b_n, 设函数 $f'(x)$ 的 Fourier 系数为 a_n', b_n'. 因为

$$f(-\pi)=f(\pi),\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

我们有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = nb_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -na_n \end{aligned}$$

注意到 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是可积且平方可积的, 根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\big((a_n')^2 + (b_n')^2\big) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

因此有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

且上式成为等号当且仅当 $a_n = b_n = 0\ (n \geqslant 2)$, 即,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x = \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

9. **设** a_n, b_n **是** $f(x)$ **的** Fourier **系数**, **则** f **的** Fejér **算子** (**即**, Fourier **级数前** n **项和的均值**) **可表为**

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)(a_j \cos jx + b_j \sin jx). \tag{1}$$

证明　**由定义**

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(x)\right)\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)\right)\right]\\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)\end{aligned}$$

交换求和号, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}(a_j \cos jx + b_j \sin jx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(a_j \cos jx + b_j \sin jx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)(a_j \cos jx + b_j \sin jx)\end{aligned}$$

利用以上结果和三角函数的正交性, 可得下面的推论.

推论 1 设 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, $\sigma_n(x)$ 是 $f(x)$ Fejér 算子. 则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)^2\left(a_j^2+b_j^2\right).$$

10. (**连续函数** Parseval **定理**) **若** $\boldsymbol{f(x)}$ **是周期为** $\boldsymbol{2\pi}$ **的连续函数**, **则其** Fourier **系数** $\boldsymbol{a_n, b_n}$ **满足**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

证明 **由** Fejér **定理和前面的例子和推论**, **只需证明**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(2 - \frac{k}{n}\right)\left(a_k^2 + b_k^2\right) = 0.$$

由于 $\boldsymbol{a_n, b_n}$ **是** $\boldsymbol{f(x)}$ **的** Fourier **系数**, **故**, **根据** Bessel **不等式**, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ **收敛**, **因而**

$$A_k := \sum_{j=k}^{\infty}(a_j^2 + b_j^2) \to 0,\ (k \to \infty).$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} k\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k}\left(a_k^2+b_k^2\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} A_j \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left(a_k^2+b_k^2\right) = 0.
$$

11. (可积函数 Parseval 定理) 若 $f(x)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数, 则其 Fourier 系数 a_n, b_n 满足

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

证明 我们只证明 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的情况. 不妨设 $f(\pi)=f(-\pi)$, 不然就修改 $f(\pi)$ 的值, 这并不会影响 $f(x)$ 的可积性和 Fourier 系数, 也不会影响 $f^2(x)$ 的积分值. 设 $|f(x)|<M$. 由可积性可知, 对任意自然数 m 存在折线(连续)函数 $f_m(x)$, 使得 $f_m(-\pi)=f_m(\pi)$, $|f_m(x)|<M$, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_m(x)-f(x)|\,dx<\frac{1}{m}.$$

由此可知, $f_m(x)$ 的 Fourier 系数收敛于 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 且 $f_m^2(x)$ 的积分收敛于 $f^2(x)$ 的积分. 从而根据 Parseval 定理, 即得本定理结论. 证毕