运筹学第六、七章习题答案

第六章

6.1 A—2

这个题有歧义，如果考虑到体现动态规划问题的特质的话，这个题应该加一条，三座山都必须要爬，在这个前提下求出最长距离的策略。

建立模型：

取$i = 012$分别表示华山，杰山和亚山。

s_i表示当天要爬的山，x_i表示当天下山前往露营的山，也就是另一天要爬的山，所以状态转移方程为$s_{i+1} = x_i$，递归函数为：

$$f_i(s_i, x_i) = 2h(s_i) + d(s_i, x_i) + f^*(s_{i+1}),$$

$h(s_i)$表示当天要爬的山的高度，$d(s_i, x_i)$表示当天要爬的山和另一天要爬的山的距离。后向递归求解如下：

阶段5：最后要回到华山山脚，所以x_5只能取0。

s_5	x_5	f^*	x^*
0	$2 \times 6 = 12$	12	0
1	$8 + 3 = 11$	11	0
2	$10 + 5 = 15$	15	0

阶段4：相邻的两天不去同一座山，所以$s_i \neq x_i$。

s_4	$x_4 = 0$	$x_4 = 1$	$x_4 = 2$	f^*	x^*
0		26	32	32	2
1	23		25	25	2
2	27	23		27	0

以此类推，最后求出最优策略为（考虑必须爬三座山的最长距离）：

第一天：爬杰山，回华盛顿山脚；第二天：爬华山，回亚山脚；

第三天：爬亚山，回华山脚，$\cdots$，之后就一直在这两座山之间来回，总路程为78。（这题逻辑上有点不太适合出在动态规划这一节，可能是数字没设计好。）

6.2 B—3

这题关键的点在于建立模型时函数的表达式，理解题意的过程很重要。

建立动态规划模型：

$b_1 = 7$，$b_2 = 4$，$b_3 = 7$，$b_4 = 8$

$x_i > s_i$时，$h(s_i, x_i) = 500 + 220x_i$；$x_i \le s_i$时，$h(s_i, x_i) = 220x_i$。

s_i为上周实际车辆数，x_i为本周实际车辆数，阶段i中子问题的目标函数为：

$$f_i(s_i, x_i) = \min_{x_i}\{h(s_i, x_i) + f^*_{i+1}(s_{i+1})\}$$

最后求解最优策略为：第一周租7辆车；第二周还3辆车，实际车辆数4；

第三周租4辆车，实际车辆数8；第四周实际车辆数8。

最小花费为6940美元。

6.2 C—4

题意关键：设备使用年限为5年，当前设备已经使用2年，所以未来5年必然会有更新过程，需要求的就是采取什么样的方式更新使得收益最大。

建立动态规划模型：

$x_i = K$时，$s_{i+1} = s_i + 1$；$x_i = R$时，$s_{i+1} = 1$；

$x_i = K$时，$f_i(s_i, x_i) = r(s_i) + f^*_{i+1}(s_i + 1)$；$x_i = R$时，$f_i(s_i, x_i) = s(s_i) - b + r(0) + f^*_{i+1}(1)$；

阶段i中子问题的目标函数为：

$$f_i(s_i, x_i) = \max_{x_i \in \{K, R\}}\{r(s_i) + f^*_{i+1}(s_i + 1), s(s_i) - b + r(0) + f^*_{i+1}(1)\}$$

通过计算得出最优更新策略为：第一年保持，第二年更新设备，第三年保持，第四年保持，第五年保持；最大收益为3700。

6.2 D—3

最优策略：前两年不卖羊，第3年年底卖出去所有的羊，一共8只，收益960。

6.3 A—1a

$x_1 \in [0, \frac{1}{3}]$，$x_2 = \frac{21-2x_1}{7}$时，$f^* = 42$。

第七章

7.1 B—4

Steve：$w_I w_{IS} + w_E w_{ES} + w_R w_{RS} = 0.331$

Jane：$w_I w_{IJ} + w_E w_{EJ} + w_R w_{RJ} = 0.29$

Maisa：$w_I w_{IM} + w_E w_{EM} + w_R w_{RM} = 0.377$

所以聘用Maisa。

数据的一致性问题：

$$\begin{aligned}
CR^{A} &= \frac{0.015}{0.58} = 0.026 < 0.1 \\
CR^{A_I} &= \frac{0.283}{0.58} = 0.488 > 0.1 \\
CR^{A_E} &= \frac{0.368}{0.58} = 0.634 > 0.1 \\
CR^{A_R} &= \frac{0.113}{0.58} = 0.195 > 0.1
\end{aligned}$$

所以，A_I，A_E，A_R不一致性程度太高，决策者需要重新估计。

7.1 B—5

三套房子的优先级次序：

A：$w_K(w_{KY}w_{KYA} + w_{KW}w_{KWA}) + w_J(w_{JY}w_{JYA} + w_{JW}w_{JWA}) = 0.4227$

B：$w_K(w_{KY}w_{KYB} + w_{KW}w_{KWB}) + w_J(w_{JY}w_{JYB} + w_{JW}w_{JWB}) = 0.2267$

C：$w_K(w_{KY}w_{KYC} + w_{KW}w_{KWC}) + w_J(w_{JY}w_{JYC} + w_{JW}w_{JWC}) = 0.351$

所以优先级次序为$A > C > B$。A_{JY}不一致性程度太高，需要重新估计。

7.2 A—9

期望利润为：$\mathbb{E} = \mathbb{E}(5a - 55ap) = 5a - 55a\mathbb{E}(p)$，其中$p$为次品概率。

$\mathbb{E}(p) = \frac{a}{a+1}$，

$a = 0.05$时，期望利润最大

7.2 B—5

(a)：

$Pr\{X = x_1 | Y = y_1\} = 0.96$，$Pr\{X = x_2 | Y = y_1\} = 0.04$

$Pr\{X = x_1 | Y = y_2\} = 0.851$，$Pr\{X = x_2 | Y = y_2\} = 0.149$

$Pr\{X = x_1 | Y = y_3\} = 0.575$，$Pr\{X = x_2 | Y = y_3\} = 0.425$

(b)：

决策树节点处期望值

节点5：$-50\times0.96-1000\times0.04=-88$

节点6：$-200\times0.96-700\times0.04=-220$

节点7：$-50\times0.851-1000\times0.149=-192$

节点8：$-200\times0.851-700\times0.149=-275$

节点9：$-50\times0.575-1000\times0.425=-453$

节点10：$-200\times0.575-700\times0.425=-413$

检验结果为y_1 或者y_2时，给A优先供货；检验结果为y_3时，给B优先供货。

7.2 C—1

略。

7.3 A—1

最小遗憾准则：$r(a_i,s_j)=\max\{v(a_k,s_j)\}-v(a_i,s_j)$，$v$ 为收益矩阵，根据极小化最大遗憾准则，最优行动方案为a_3。

折中主义：

v表示收益矩阵，选择行动方案的依据为：

$\max_{a_i}\{\alpha\max_{s_j}v(a_i,s_j)+(1-\alpha)\min_{s_j}v(a_i,s_j)\}$。

7.4 A—1

(a)、纯策略解为(A_2,B_3)，并且是纯策略意义下的鞍点解，相应的对策值为$v=4$；

(b)、纯策略解为(A_1,B_3)，并且是纯策略意义下的鞍点解，相应的对策值为$v=-5$。

7.4 A—3

证明：(a)、

$$v^-=\max_i\{\min_j a_{ij}\}\le\max_i\{a_{ij}\}$$

对任意的j上述不等式都成立，所以

$$v^-\le\min_j\{\max_i\{a_{ij}\}=v^+$$

(b)、$v^-=v^+\Rightarrow$鞍点：

记$v^-=v^+=a_{irjr}$，即同行中最小，同列中最大的那个值；

所以

$$h_A(A_{ir},B_{jr})\ge h_A(A_k,B_{jr}),$$

$$h_B(A_{ir},B_{jr})\ge h_B(A_{ir},B_l)$$

由此得：(A_{ir}, B_{jr})为纯策略意义下的鞍点。

鞍点$\Rightarrow v^- = v^+$：

令(A_{i_r}, B_{j_r})为其鞍点，则有

$$v^- = \max_i\{\min_j a_{ij}\} \geq a_{irjr}$$
$$v^+ = \min_j\{\max_i\{a_{ij}\} \leq a_{irjr}$$

由此得$v^- \geq v^+$，又由(a)的证明知$v^- \leq v^+$，结合得$v^- = v^+$，由此得证。

7.4 B—6

(a)、$v^- = 2$，$v^+ = 4$；

(b)、$v^- = 0$，$v^+ = 7$；

(c)、$v^- = 2$，$v^+ = 3$；

(d)、$v^- = v^+ = 1$，(A_1, B_3)为纯策略意义下的鞍点；

7.4 B—7

(a)、局中人为A, B两家公司，两个局中人分策略集分别记为$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$、$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$。

A_1, B_1：两家公司都不做广告；

A_2, B_2：两家公司都选择电视；

A_3, B_3：两家公司都选择报纸；

A_4, B_4：两家公司都选择广播；

赢得矩阵如下：这里对于潜在客户的理解有不同，但是最后得出的最优策略是一致的，但是理解的含义不同赢得矩阵不同，我就列出来直接含义的情况。

$$\begin{array}{ccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{array} & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0 & -50 & -30 & -20 \\ 50 & 0 & 20 & 30 \\ 30 & -20 & 0 & 10 \\ 20 & -30 & -10 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$v^- = v^+ = 0$；两家公司都选择电视广告，相应的对策值为$v = 0$。

7.4 C—2

第3列被前两列的组合优超，所以化简后的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

使用图解法求解：

B的最优解为$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，相应的对策值为$v = \frac{16}{3}$；

A的最优解为$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$，相应的对策值为$v = \frac{16}{3}$。

7.4 D—2

Robin策略集：A_1：走路线A；A_2：走路线B；

交警策略集：B_1：只在A路上布防；B_2：两条路对半布防；B_3：只在B路上布防；

Robin的赢得矩阵为：

$$\begin{pmatrix} & B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & -100 & -50 & 0 \\ A_2 & 0 & -30 & -100 \end{pmatrix}$$

可以使用图解法求解：$x_1^* = 0.5$，对应收益为-50；$y_1^* = 0.5$，对应收益为50。

7.4 E—1a

使用图解法或者线性规划解法：

A最优解为$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$，相应的对策值为$v = \frac{8}{5}$，$B$的最优解为$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$，相应的对策值为$v = \frac{8}{5}$。