11.25

第六章课后习题：4、5、25、32、47、50

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X的一个简单随机样本，试求总体 X 在具有下列概率密度时参数 θ 的矩估计.

$$(1) f(x;\theta)=\begin{cases} 2(\theta-x)/\theta^2, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(2) f(x;\theta)=\begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1, \theta>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(3) f(x;\theta)=\begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1, \theta>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(4) f(x;\theta)=\begin{cases} \theta c^{\theta}/x^{(\theta+1)}, & x>c(c>0\text{已知}), \theta>1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(5) f(x;\theta)=\begin{cases} 6x(\theta-x)/\theta^3, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(6) f(x;\theta)=\begin{cases} \theta^2 x^{-3}\mathrm{e}^{-\theta/x}, & x>0, \theta>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解：

(1) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_0^{\theta} 2x(\theta-x)/\theta^2 \mathrm{d}x=\theta/3$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=3\bar{X}$；

(2) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=(\theta+1)/(\theta+2)$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=1/(1-\bar{X})-2$；

(3) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_0^1 \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}x=\theta/3$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=(1/(1-\bar{X})-1)^2$；

(4) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_c^{\infty} \theta c^{\theta}/x^{\theta}\mathrm{d}x=c\theta/(\theta-1)$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=1/(c^{-1}\bar{X}-1)+1$；

(5) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_0^{\theta} 6x^2(\theta-x)/\theta^3\mathrm{d}x=\theta/2$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=2\bar{X}$；

(6) 由 $\mathbb{E}(X)=\int_0^{\infty} \theta^2 x^{-2}\mathrm{e}^{-\theta/x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\theta^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta^2$ 可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\sqrt{\bar{X}}$.

5. 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/\theta^2}, & x\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2)求 $\hat{\theta}$ 的方差.

解： (1)

$$EX = \int_0^{+\infty} \frac{4x^3}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} dx, \quad = \int_0^{+\infty} \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} (\frac{x}{\theta})^2 e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} \cdot \frac{2x}{\theta^2} dx$$

$$\overset{y=\frac{x^2}{\theta^2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} y e^{-y} dy = -\frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} (y+1) e^{-y}|_0^{+\infty} = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{X}$$

(2)

$$Var\hat{\theta} = \frac{\pi}{4} Var\bar{X} = \frac{\pi}{4n^2} Var\sum_{i=1}^n X_i = \frac{\pi n}{4n^2} VarX$$

$$EX^2 = \int_0^{+\infty} \frac{4x^4}{\theta^3\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} (\frac{x^2}{\theta^2})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{\theta^2}} \cdot \frac{2x}{\theta^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} y^{\frac{3}{2}} e^{-y} dy = \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{2\theta^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{3\theta^2}{2}$$

$$\therefore VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{\pi}$$

$$\therefore Var\hat{\theta} = \frac{\pi}{4n} (\frac{3\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{\pi}) = (\frac{3\pi}{8} - 1) \frac{\theta^2}{n}$$

25. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体X的一个简单随机样本，试求总体X在具有下列概率质量函数时参数θ的极大似然估计：

(1) $p(x;\theta) = 1/\theta$, $x = 0, 1, 2, \cdots, \theta - 1$,其中$\theta$ (正整数) 是未知参数；

(2) $p(x;\theta) = \binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}$, $x = 0, 1, \cdots, m$；

(3) $p(x;\theta) = (x-1)\theta^2(1-\theta)^{x-2}$, $x = 2, 3, \cdots, 0 < \theta < 1$；

(4) $p(x;\theta) = -\theta^x/(x\ln(1-\theta))$, $x = 1, 2, \cdots, 0 < \theta < 1$；

(5) $p(x;\theta) = \theta^x \mathrm{e}^{-\theta}/x!$, $x = 0, 1, 2, \cdots$.

解：为便于表示，C 代表与参数无关的常数。

(1) 似然函数 $l(\theta) = 1/\theta^n \cdot \mathrm{I}(X_{(n)} \le \theta - 1)$，故 θ 的似然估计 $\hat{\theta} = X_{(n)} + 1$

(2) 对数似然函数 $l(\theta) = C + n\bar{X}\ln\theta + (nm - n\bar{X})\ln(1-\theta)$，对似然函数求导，令导数等于0，可得似然方程 $n\bar{X}(1-\theta) - \theta(nm - n\bar{X}) = 0$，故 θ 的似然估计 $\hat{\theta} = \bar{X}/m$

(3) 对数似然函数 $l(\theta) = C + 2n\ln\theta + (n\bar{X} - 2n)\ln(1-\theta)$，对似然函数求导，令导数等于0，可得似然方程 $2n(1-\theta) + \theta(2n - n\bar{X}) = 0$，故 θ 的似然估计 $\hat{\theta} = 2/\bar{X}$

(4) 似然方程无解析解，极大似然估计无法求得。

(5)对数似然函数 $l(\theta) = C + n\bar{X}\ln\theta - n\theta$，对似然函数求导，令导数等于0，可得似然方程 $n\bar{X} - n\theta = 0$，故 θ 的似然估计 $\hat{\theta} = \bar{X}$

32. 设总体 $X \sim Exp(-\lambda x), \lambda > 0$,求 $P(\lambda < X \leqslant 2\lambda)$ 的矩估计和最大似然估计.

解：

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= P(\lambda < X \leq 2\lambda) \\ &= \lambda \int_{\lambda}^{2\lambda} e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda^2} - e^{-2\lambda^2} \end{aligned}$$

易知 λ 的最大似然估计为 $\hat{\lambda_1} = \dfrac{1}{\bar{X}}$，故 $h(\lambda)$ 的最大似然估计为 $h(\hat{\lambda_1})$

47. 设总体 X 服从韦布尔分布，概率密度函数为

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad \lambda > 0,\ \alpha > 0.$$

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为从此总体中抽取的简单样本. 若 α 已知，求 λ 的矩估计和最大似然估计.

解：(1) 矩估计：

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^{+\infty} \lambda\alpha \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx \quad \overset{y=\lambda x^{\alpha}}{=} \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-y} dy \quad = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \\ &= \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1) = \frac{1}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma(\frac{1}{\alpha}) \\ &\therefore \hat{\lambda} = \left[\frac{T(\frac{1}{\alpha})}{\alpha\bar{X}}\right]^{\alpha} \end{aligned}$$

(2) 最大似然估计：

$$f(\alpha; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} [\lambda\alpha x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i^{\alpha}}]$$

$$l(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} [\ln\lambda - \lambda x_i^{\alpha} + \ln\alpha \cdot x_i^{\alpha-1}]$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} = 0, \quad \therefore \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}}$$

50. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两组独立样本，求 μ_1, μ_2 和 σ^2 的最大似然估计.

解：

$$\text{联合分布}f(x,y) = f(x_1,\ldots,x_m,y_1\ldots y_n) = \prod_{i=1}^{n}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{(x_i-u_1)^2}{2\sigma^2}]\prod_{j=1}^{n}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{(y_j-u_2)^2}{2\sigma^2}]$$

$$\begin{aligned}
l(\theta) &= \sum_{i=1}^{m}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x_i-u_1)^2}{2\sigma^2}+\sum_{j=1}^{n}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(y_j-u_2)^2}{2\sigma^2}+c\\
&= -\frac{m+n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-u_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-u_2)^2}{2\sigma^2}+c.\\
&\frac{\partial l}{\partial u_1}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(x_i-u_1)=0\Rightarrow\hat{u}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\bar{X}\\
&\frac{\partial l}{\partial u_2}=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}(y_j-u_2)=0\Rightarrow\hat{u}_2=\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_j}{n}=\bar{Y}\\
&\frac{\partial l}{\partial\sigma^2}=0\Rightarrow-\frac{m+n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-u_1)^2+\sum_{j=1}^{n}(y_j-u_2)^2}{2(\sigma^2)^2}=0.\\
&\therefore\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-u_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_j-u_2)^2}{m+n}\\
&\text{代入}\quad\hat{u}_1,\hat{u}_2.\quad\hat{\sigma_2}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\bar{Y})^2}{m+n}
\end{aligned}\tag{1}$$