第三次书面作业参考答案

1 课本习题

1.1 习题 2

1. 提供两种方法：求极值与利用法方程。

（1）求极值

$$Q = \int_0^1 (\sqrt{x} - (a+bx))^2 dx = a^2 + \frac{1}{3}b^2 + ab - \frac{4}{3}a - \frac{5}{4}b + \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 2a + b - \frac{4}{3} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = a + \frac{2}{3}b - \frac{4}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{15} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

又容易验证 Q 关于 a,b 的 Hessian 矩阵正定，上述 a,b 即为所求。

（2）法方程（具体原理可以看看补充讲义第九章）

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 1*1dx & \int_0^1 1*xdx \\ \int_0^1 1*xdx & \int_0^1 x*xdx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1*\sqrt{x}dx \\ \int_0^1 x*\sqrt{x}dx \end{pmatrix}$$

解得：$a = \frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}$

2. 方法同 1，结果为 $f(x) = \frac{1}{3}$

3. 利用法方程：

一次：$f(x) = 2.0715 + 2.0751x, \quad minQ = 0.1476$

二次：$f(x) = 1.9074 + 2.2045x + 0.4722x^2, \quad minQ = 0.0266$

7. 同样利用法方程（注意此时拟合函数所在空间由基函数 $cosx$ 与 $sinx$ 张成）（用计算器时注意是角度还是弧度）

$a = 1.9949, b = -2.9899$

10(2). 解方程 $A^TAx = A^Tb$, 得 $x_1 = 3.4586, x_2 = 1.7983$

1.2 习题 6

1.(1)

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)\\
=&\int_a^b (f(x)-f(a))dx\\
=&f'(\epsilon)\int_a^b (x-a)dx\\
=&\frac{(b-a)^2}{2}f'(\epsilon) \quad \epsilon \in [a,b]
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \int_a^b (f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\epsilon_x)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2)dx\\
&= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + 0 + \frac{f''(\epsilon)}{24}(b-a)^3 \quad \epsilon \in [a,b]\\
E(f) &= \frac{f''(\epsilon)}{24}(b-a)^3
\end{aligned}$$

2. 方法 1：分别代入 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$，可知该求积公式只对不超过二次的多项式精确成立，即代数精度为 2.

方法 2：将公式左右两边全在 $x = a$ 处 Talyor 展开：

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b (f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3\frac{f'''(a)}{3!} + o((x-a)^4)\\
&= 3hf(a) + \frac{9}{2}h^2f'(a) + \frac{9}{2}h^3f''(a) + \frac{27}{8}h^4f'''(a) + o(h^5)\\
\frac{9}{4}hf(x_1) &= \frac{9}{4}h(f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2f''(a) + \frac{1}{6}h^3f'''(a) + o(h^4))\\
\frac{3}{4}hf(x_2) &= \frac{3}{4}h(f(a) + 3hf'(a) + \frac{9}{2}h^2f''(a) + \frac{9}{2}h^3f'''(a) + o(h^4))
\end{aligned}$$

对比系数可知该求积公式截断误差为 $E = \frac{3}{8}h^4 f'''(\epsilon), \epsilon \in [a, b]$

12.

$$f'(0.02) = \frac{7.00 - 9.00}{0.04 - 0.02} = -100 \quad f'(0.04) = \frac{10.00 - 7.00}{0.06 - 0.04} = 150$$

13.

$$\begin{aligned} f''(0.20) &= \frac{f'(0.20) - f'(0.10}{0.20 - 0.10} \\ &= \frac{\frac{f(0.20)-f(0.10)}{0.20-0.10} - \frac{f(0.10)-f(0.00)}{0.10-0.00}}{0.20 - 0.10} \\ &= 30 \end{aligned}$$

类似的，$f''(0.40) = -50$

15. 方法 1：将 $f(-h), f(2h)$ 在 0 处 Taylor 展开至 h^2 项，解出 $f'(0), f''(0)$;
方法 2：构造在 0,-h,2h 处插值 f 的多项式 $L_2(x)$，计算 $L_2'(0), L_2''(0)$.
两种方法答案均为

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{2}{3h} \\ c_2 = \frac{1}{2h} \\ c_3 = \frac{1}{6h} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = \frac{2}{3h^2} \\ d_2 = -\frac{1}{h^2} \\ d_3 = \frac{1}{3h^2} \end{cases}$$

2 补充题

证明 Simpson 公式截断误差为

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5, \quad a \le \eta \le b$$

Pf: 考虑在 $a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b$ 上插值 f 的 Hermite 多项式 $H_3(x)$, 则 $\int_a^b H_3(x)dx =$

$S(H_3) = S(f)$

$$\begin{aligned}
\therefore E_2(f) &= |\int_a^b f(x) - S(f)| \\
&= |\int_a^b f(x)dx - \int_a^b H_3(x)dx + S(H_3) - S(f)| \\
&= |\int_a^b (f(x) - H_3(x))dx| \\
&= |\int_a^b \frac{f^{(4)}(\epsilon_x)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx| \\
&= \frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5 \quad \eta \in [a,b]
\end{aligned}$$