

I. 直接当结论记忆 — 常见情况下磁感应强度的计算

(1) 长直导线:

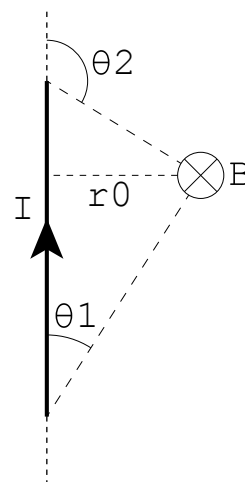
如图所示, 通电直导线在位置 \otimes 产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ 时, 对应的是无限长直导线, 因此, 无限长直导线产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

方向利用右手螺旋定则判定。



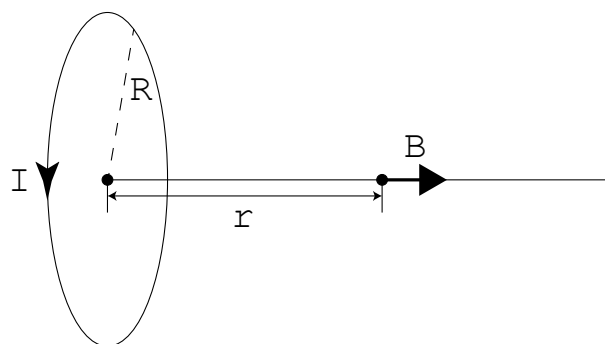
参考题目 5.2

(2) 圆形导线:

如图所示, 半径为 R 的圆形导线在轴线上, 距离圆心 r 处产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}},$$

方向利用右手螺旋定则判定。



参考题目 5.5

(3) 无限长螺线管:

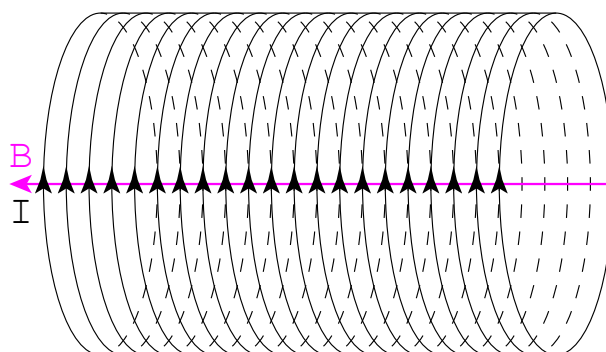
如图所示, 单位长度线圈匝数为 n 的无限长螺线管内部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I,$$

或者如果给定面电流密度为 i , 则内部的磁感应强度为

$$B = \mu_0 i,$$

方向利用右手螺旋定则判定。螺线管外部的磁感应强度为 0。



参考题目 5.7, 2021 秋电磁学 C 期末试卷第一大题。令题目 5.7 积分的上限为 ∞ , 下限为 $-\infty$ 即可得出结论。

作者: 阿笠博士「因为我和他一样身材肥硕, 到了中年还在单身」

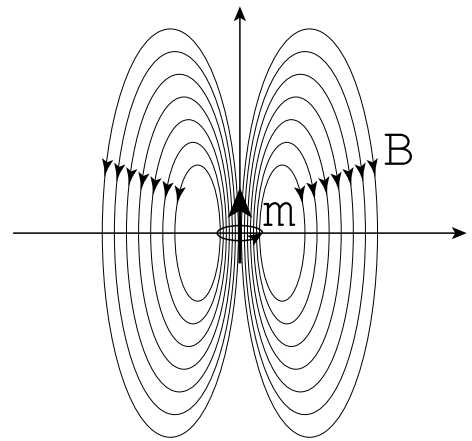
(4) 磁矩:

如图所示, 磁矩为 \mathbf{m} 的线圈在空间内任意位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right),$$

其中 $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

参考题目 5.6



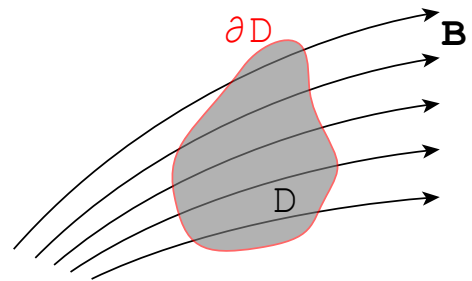
II. 利用对称性化繁为简 — 高斯定理与安培环路定理

(1) 高斯定理:

如图所示, 令 ∂D 为 D 的边界, 则磁场在曲面 ∂D 上的曲面积分为 0, 相当于

$$\int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

即 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ 。



(2) 安培环路定理:

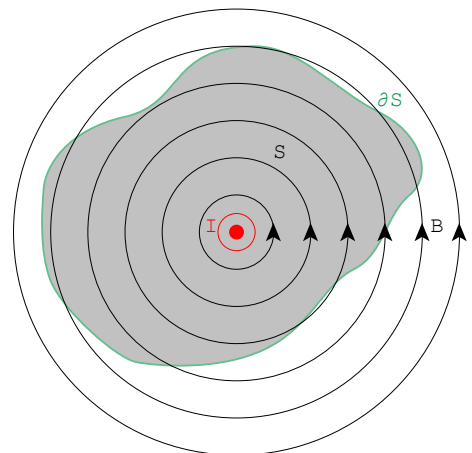
如图所示, 令 ∂S 为 S 的边界, 则磁场在曲线 ∂S 上的曲线积分与通过曲面 S 的电流强度成正比, 相当于

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

定向利用右手螺旋定则判定。

即 $\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, 可以利用空间电流密度分布 \mathbf{J} 得出关于空间磁感应强度分布 \mathbf{B} 的偏微分方程。

参考题目 5.12

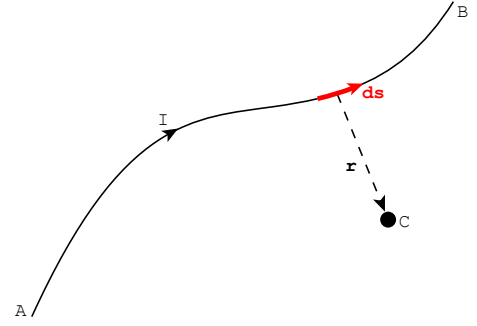


III. 广义情况下磁感应强度的计算 — 毕奥萨伐尔定理

如图所示，C 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_A^B \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

其中 $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, \int_A^B 相当于将 $d\mathbf{s}$ 从 A 处到 B 处进行积分。



IV. 磁介质各个物理量之间的关系

(1) 此时高斯定理与安培环路定理为

$$\begin{cases} \int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \\ \int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \end{cases}$$

即 $\text{div } \mathbf{B} = 0, \text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 。

磁场强度 \mathbf{H} ，磁化强度 \mathbf{M} 与磁感应强度 \mathbf{B} 之间的关系为

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

在均匀磁介质中，磁场强度 \mathbf{H} 与磁化强度 \mathbf{M} 成线性关系，定义磁化率 χ_m ，使得

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

定义相对磁导率 μ_r ，使得

$$\mu_r = 1 + \chi_m,$$

因此

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H},$$

定义磁导率，使得

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$

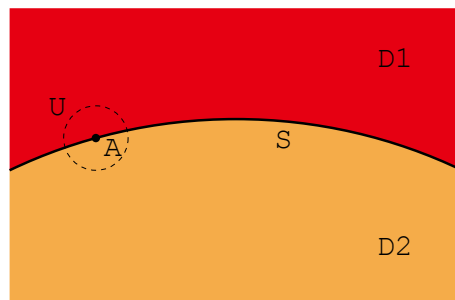
因此

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

作者：阿笠博士「因为我和他一样身材肥硕，到了中年还在单身」

如果界面两边的磁化强度不同, 则界面会有磁化电流。

如图所示, 记界面 S 上面的区域为 D_1 , 界面 S 下面的区域为 D_2 。以界面上的一点 A 为球心, 构建一个球 U , 并让球 U 的半径非常小, 以至于区域 $U \cap D_1$ 与 $U \cap D_2$ 的内部磁化强度接近均匀, 沿平行于界面的分量分别为 M_1^\top, M_2^\top ; 并且区域 $U \cap S$ 接近于平面。因此界面 S 在 A 点附近的磁化电流面密度为



$$i_m = M_1^\top - M_2^\top.$$

写成矢量形式可得 $\mathbf{i} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{N}$, 其中 \mathbf{N} 为垂直于边界的法向量, 在图中是指向区域 D_2 这一侧。

参考题目 6.11

(2)

内部磁化强度为 \mathbf{M} 的物质磁矩为

$$\mathbf{m} = \int_D \mathbf{M} dV,$$

其中 \int_D 为该物质对应的区域。

磁矩为 \mathbf{m} 的物质, 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的磁场中, 势能为

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B},$$

因此, 该物质受到的作用力为

$$\mathbf{F} = -\text{grad } W = \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}).$$

参考题目 6.10

V. 边界条件

如果两介质的接触面上没有自由电荷，也没有电流通过「相当于电荷不会移动」，那么

$$\begin{cases} B_1^\perp = B_2^\perp, \\ H_1^\top = H_2^\top, \end{cases}$$

其中上标 \perp, \top 分别表示垂直于边界的分量与平行于边界的分量。

如果有面电流密度为 i 的电流通过，则应该改为

$$\begin{cases} B_1^\perp = B_2^\perp, \\ H_1^\top - H_2^\top = i, \end{cases}$$

方向利用右手螺旋定则判定。

可以在边界上选取高度远小于半径的圆柱面与宽度远小于长度的长方形环路，利用高斯定理与安培环路定理，证明这个结论。

VI. 计算多个磁介质各个物理量的步骤

步骤 1：先假设每一种磁介质中的各个物理量 $\mathbf{B}_i, \mathbf{H}_i$ 。 $\mathbf{B}_i = \mu_i \mathbf{H}_i$ 。

步骤 2：根据边界条件，推导出对于不同下标 i ， $\mathbf{B}_i, \mathbf{H}_i$ 之间的关系。根据公式

$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \text{ 与电流的分布得出关于 } \mathbf{B}_i, \mathbf{H}_i \text{ 的所有表达式，计算 } \mathbf{B}_i, \mathbf{H}_i。$$

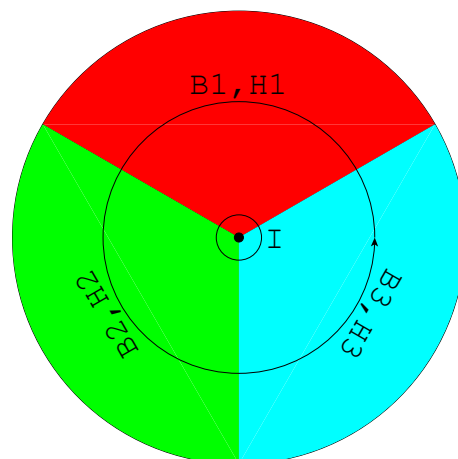
举例：如图所示，三个磁介质的磁导率分别为 μ_1, μ_2, μ_3 ，电流强度为 I ，计算三个磁介质内部的磁感应强度与磁场强度 $B_1, B_2, B_3; H_1, H_2, H_3$ 。

$$B_i = \mu_i H_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

选取半径为 r 的环路，因为环路在边界的切向量与边界垂直，所以根据边界条件，

$$B_1 = B_2 = B_3,$$

因为 H_1, H_2, H_3 在平行于边界的分量为 0，所以也满足边界条件。



根据 $\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ 可得

$$\frac{2}{3}\pi r H_1 + \frac{2}{3}\pi r H_2 + \frac{2}{3}\pi r H_3 = I,$$

因此

$$B_1 = B_2 = B_3 = \frac{3I}{2\pi r \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)},$$

$$H_1 = \frac{3I}{2\pi r \mu_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)},$$

$$H_2 = \frac{3I}{2\pi r \mu_2 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)},$$

$$H_3 = \frac{3I}{2\pi r \mu_3 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} \right)}.$$

VII. 磁路定理

N 匝线圈的磁动势为

$$\mathcal{E}_m = NI,$$

长度为 L ，横截面积为 A ，磁导率为 μ 的磁介质「如果是真空，则磁导率为 μ_0 」的磁阻为

$$R_m = \frac{L}{\mu A},$$

因此可以等效为纯电阻电路。每个支路的“电流强度 I_m ”对应磁通量，因此每个支路的磁感应强度为

$$B = \frac{I_m}{A}.$$

参考题目 6.19

VIII. 磁场能量

真空中的磁能密度为

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

介质中的磁能密度为

$$u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{B^2}{2\mu},$$

区域 D 内部的磁能为

$$W = \int_D u_m dV.$$

参考题目 8.2

IX. 磁力

(1) 洛伦兹力:

电荷量为 q 的电荷在磁感应强度为 \mathbf{B} 的磁场中, 以速度 \mathbf{v} 运动时, 受到的洛伦兹力为

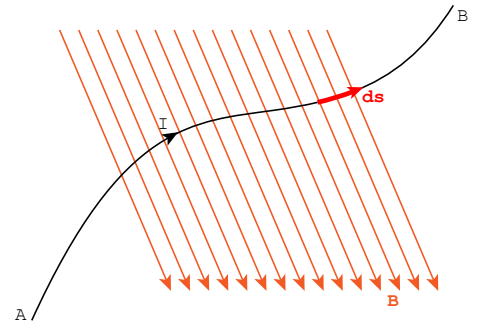
$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

(2) 导线受到的磁力:

如图所示, 导线受到的磁力为

$$\mathbf{F} = I \int_A^B d\mathbf{s} \times \mathbf{B},$$

其中 \int_A^B 相当于将 $d\mathbf{s}$ 从 A 处到 B 处进行积分。



如果是磁感应强度为 \mathbf{B} 的匀强磁场, 那么导线受到的磁力为

$$\mathbf{F} = I \int_A^B d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = I \left(\int_A^B d\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B},$$

其中 $\mathbf{L} = \overrightarrow{AB}$, 因此只与 A 、 B 的位置有关, 与导线的形状无关。

参考题目 6.3

(3) 边界受到的作用力:

A. 电力: 如果界面两边的电能密度「 $u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 」不同, 则界面会受到沿着法向的电力。

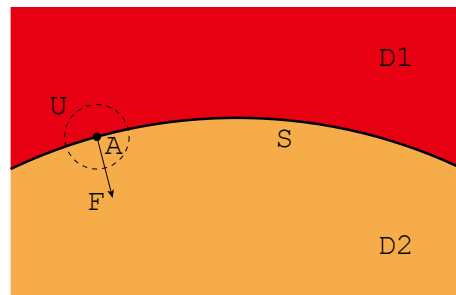
如图所示, 记界面 S 上面的区域为 D_1 , 界面 S 下面的区域为 D_2 。以界面上的一点 A 为球心, 构建一个球 U , 并让球 U 的半径非常小, 以至于区域 $U \cap D_1$ 与 $U \cap D_2$ 的内部电能密度接近均匀, 大小分别为 u_{e1}, u_{e2} ; 并且区域 $U \cap S$ 接近于平面。

因此界面 S 在 A 点附近受到法向的电力, 单位面积受到的电力大小「压强」为

$$P_e = |u_{e1} - u_{e2}|,$$

当 $u_{e2} > u_{e1}$ 时, 电力方向就是图中的情况; 当 $u_{e2} < u_{e1}$ 时, 电力方向与图中的情况相反。

「注意下标 2 在下标 1 的前面」



B. 磁力: 如果界面两边的磁能密度「 $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ 」不同, 则界面会受到沿着法向的磁力。

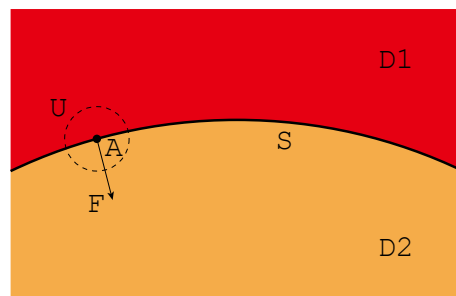
如图所示, 记界面 S 上面的区域为 D_1 , 界面 S 下面的区域为 D_2 。以界面上的一点 A 为球心, 构建一个球 U , 并让球 U 的半径非常小, 以至于区域 $U \cap D_1$ 与 $U \cap D_2$ 的内部磁能密度接近均匀, 大小分别为 u_{m1}, u_{m2} ; 并且区域 $U \cap S$ 接近于平面。

因此界面 S 在 A 点附近受到法向的磁力, 单位面积受到的磁力大小「压强」为

$$P_m = |u_{m1} - u_{m2}|,$$

当 $u_{m1} > u_{m2}$ 时, 磁力方向就是图中的情况; 当 $u_{m1} < u_{m2}$ 时, 磁力方向与图中的情况相反。

「注意下标 1 在下标 2 的前面」



可以看出, 电力方向与磁力方向的判定是**相反**的。这个是虚功原理无法解释的, 因为本身就和虚功原理无关。「涉及 Maxwell 应力张量, 超出本课程的范围」

举例 A: 计算带电量为 Q , 半径为 R 的均匀带电球面表面单位面积受到的作用力大小。

根据高斯定理, 电场强度分布为

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R, \end{cases}$$

因此, 电能密度分布为

$$u_e(r) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2 = \begin{cases} 0, & 0 < r < R, \\ \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r \geq R, \end{cases}$$

也就是球外侧的电能密度大于球内侧的电能密度。因此根据刚才的结论, 电力方向是**向外的**, 并且单位面积受到的电力大小为

$$P_e = \left| \lim_{r \searrow R} u_e(r) - \lim_{r \nearrow R} u_e(r) \right| = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

举例 B: 计算沿轴线方向均匀通过电流强度为 I 的电流, 半径为 R 的**圆柱壳**导线单位面积受到的作用力大小。

根据环路定理, 磁感应强度分布为

$$B(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R, \end{cases}$$

因此, 磁能密度分布为

$$u_m(r) = \frac{B(r)^2}{2\mu_0} = \begin{cases} 0, & 0 < r < R, \\ \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, & r \geq R, \end{cases}$$

也就是圆柱外侧的磁能密度大于圆柱内侧的磁能密度。因此根据刚才的结论, 磁力方向是**向内的**, 并且单位面积受到的磁力大小为

$$P_m = \left| \lim_{r \nearrow R} u_m(r) - \lim_{r \searrow R} u_m(r) \right| = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

参考题目 2021 秋电磁学 C 期末试卷第一大题

X. 电磁感应

(1) 动生电动势:

导线在磁感应强度为 \mathbf{B} 的磁场中, 以速度 \mathbf{v} 运动时, 会产生动生电动势, 大小为

$$\mathcal{E}_1 = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s},$$

其中 \int_A^B 相当于将 $d\mathbf{s}$ 从导线端点 A 到导线端点 B 进行积分。

如果导线是闭合的, 则动生电动势为

$$\mathcal{E}_1 = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

其中 ∂S 为闭合曲面 S 的边界。

参考题目 7.2

(2) 感生电动势:

如果导线是闭合并且静止不动的, 通过导线的磁通量 $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ 发生变化, 则导线会产生感生电动势, 大小为

$$\mathcal{E}_2 = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}.$$

参考题目 7.7

(3) 如果导线既是闭合的, 又在运动, 那么产生的总电动势为这两者的叠加, 即

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi}{dt},$$

其中 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ 是通过导线的磁通量。电动势为磁通量对时间全微分的相反数。

举例：如图所示，圆形导线的半径为 $r = r_0 + vt$ ，空间磁感应强度分布为 $B = B_0 + \lambda t$ ，则动生电动势为

$$\mathcal{E}_1 = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -2\pi r v B,$$

感生电动势为

$$\mathcal{E}_2 = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = -\pi r^2 \lambda,$$

规定逆时针为正方向。

总电动势为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -2\pi r v B - \pi r^2 \lambda,$$

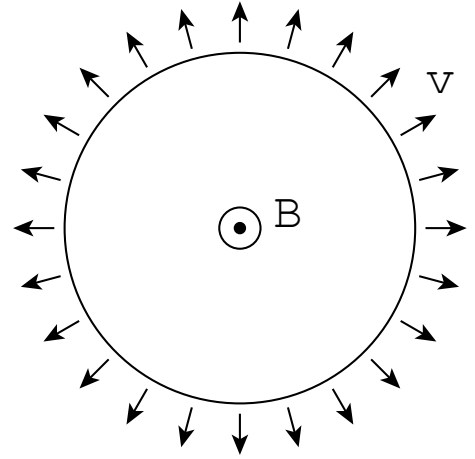
圆形导线的磁通量为

$$\Phi = \pi r^2 B,$$

磁通量对时间全微分的相反数为

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\pi \left(2r \frac{dr}{dt} B + r^2 \frac{dB}{dt} \right) = -2\pi r v B - \pi r^2 \lambda,$$

因此在这个例子中 $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi}{dt}$ 是成立的。



XI. 涡旋电场

令 ∂S 为 S 的边界，则电场在曲线 ∂S 上的曲线积分是通过曲面 S 的磁通量变化率的相反数，相当于

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}.$$

即 $\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，可以利用空间磁感应强度变化率分布 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 得出关于空间电场强度分布 \mathbf{E} 的偏微分方程。

参考题目 7.6

XII. 自感与互感

(1) 自感：

对于自感系数为 L 的闭合导线，当它通有电流强度 I 的电流时，电流产生的磁场在导线产生的磁通量为

$$\Phi = LI,$$

自感电动势为

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

参考题目 8.4

(2) 互感：

如果闭合导线 1 与闭合导线 2 之间的互感系数为 M ，则

导线 1 通有电流强度 I_1 的电流时，电流产生的磁场在导线 2 产生的磁通量为

$$\Phi_2 = MI_1,$$

此时导线 2 的电动势为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt},$$

导线 2 通有电流强度 I_2 的电流时，电流产生的磁场在导线 1 产生的磁通量为

$$\Phi_1 = MI_2,$$

此时导线 1 的电动势为

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt},$$

导线 1 对导线 2 的互感系数与导线 2 对导线 1 的互感系数是相等的，均为 M 。

参考题目 7.8

XIII. 自感与互感对应的能量

(1) 自感能量「自能」：

对于自感系数为 L 的闭合导线，当它通有电流强度 I 的电流时，电流产生的磁场的总能量为

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

(2) 互感能量「相互作用能」：

如果闭合导线 1 与闭合导线 2 之间的互感系数为 M ，导线 1 通有电流强度 I_1 的电流，导线 2 通有电流强度 I_2 的电流，则相互作用能为

$$W = MI_1I_2,$$

总能量是自能与相互作用能的总和，因此，总能量为

$$W_0 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm MI_1I_2,$$

其中 L_1, L_2 分别为导线 1 与导线 2 的自感系数。当互感产生的磁通量让自感产生的磁通量增强时，正负号将取正号；当互感产生的磁通量让自感产生的磁通量减弱时，正负号将取负号。

参考题目 8.1, 8.3

XIV. 暂态电路

(1) RC 电路：在 RC 电路中

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} + IR,$$

根据

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

可得

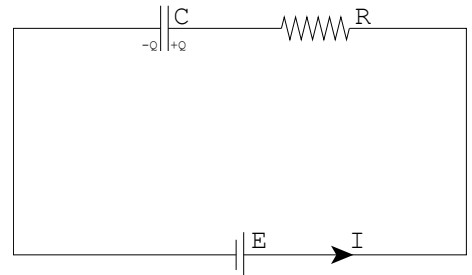
$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{C} + IR \right) = \frac{1}{C}I + Ri,$$

因此

$$\dot{I} + \frac{1}{RC}I = 0,$$

$$I = Ae^{-t/RC},$$

作者：阿笠博士「因为我和他一样身材肥硕，到了中年还在单身」



其中 A 是一个常数。在 $t = 0$ 时, $Q = 0$ 「请务必注意 $\lim_{t \searrow 0} I \neq 0$, 因为在电路接通的瞬间, 电容器可以视为通路, 因此 $\lim_{t \searrow 0} I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ 」, 代入 $Q = C(\mathcal{E} - IR) = C(\mathcal{E} - AR e^{-t/RC})$ 可得

$$\mathcal{E} = AR,$$

$$A = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

因此,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC},$$

时间常数 $\tau = RC$ 。

(2) RL 电路: 在 RL 电路中

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt},$$

令

$$i = I - \frac{\mathcal{E}}{R},$$

可得

$$\dot{i} + \frac{R}{L}i = 0,$$

$$i = A e^{-Rt/L},$$

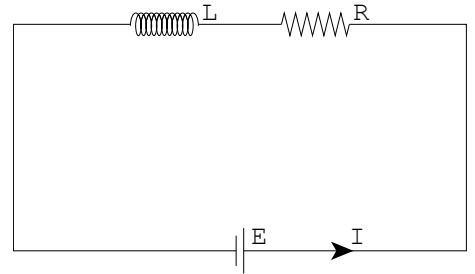
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} + A e^{-Rt/L},$$

其中 A 是一个常数。在 $t = 0$ 时, $I = 0$ 「因为在电路接通的瞬间, 电感可以视为断路, 因此 $\lim_{t \searrow 0} I(t) = 0$ 」, 代入 $I = \frac{\mathcal{E}}{R} + A e^{-Rt/L}$ 可得

$$A = -\frac{\mathcal{E}}{R},$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

时间常数 $\tau = L/R$ 。



(3) LC 电路: 在 LC 电路中

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt},$$

根据

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

可得

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} \right) = \frac{1}{C} I + L \ddot{I},$$

因此,

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0,$$

$$I = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t,$$

其中 A_1, A_2 是常数, $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 是 LC 电路的固有频率。在 $t = 0$ 时, $Q = 0, I = 0$ 「因为在电路接通的瞬间, 电感可以视为断路, 因此 $\lim_{t \searrow 0} I(t) = 0$ 」, 代入 $I = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$ 可得

$$A_1 = 0,$$

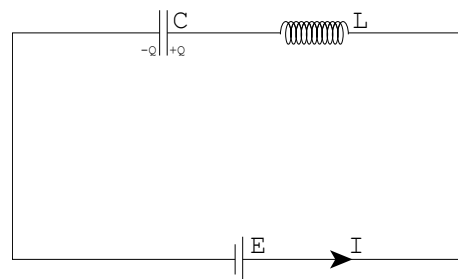
$$I = A_2 \sin \omega t,$$

代入 $Q = C(\mathcal{E} - L\dot{I}) = C(\mathcal{E} - A_2 \omega L \cos \omega t)$ 可得

$$\mathcal{E} - A_2 \omega L = 0,$$

$$A_2 = \frac{\mathcal{E}}{\omega L},$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\omega L} \sin \omega t.$$



XV. Maxwell 方程组「非常重要，必考」

介质中的情况

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0, \\ \operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases}$$

真空中的情况「将 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ 代入即可」

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} \equiv 0, \\ \operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}), \end{cases}$$

再利用 Stokes 定理，对于任意欧几里得空间 \mathbb{R}^3 中的矢量场 \mathbf{X}

$$\begin{cases} \int_D (\operatorname{div} \mathbf{X}) dV = \int_{\partial D} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{A}, \\ \int_S (\operatorname{curl} \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}, \end{cases}$$

可得方程的积分形式

$$\begin{cases} \int_{\partial D} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_D \rho dV, \\ \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{A}, \\ \int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \equiv 0, \\ \int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{A}, \end{cases}$$

真空中的情况「将 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ 代入即可」

$$\begin{cases} \int_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_D \rho dV, \\ \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{A}, \\ \int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \equiv 0, \\ \int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{A}. \end{cases}$$

XVI. Maxwell 方程组的意义

介质中, 引入变量

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

这个变量称为位移电流。因此

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_D,$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{A},$$

真空中「将 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ 代入即可」, $\mathbf{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 因此

$$\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D),$$

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{A}.$$

因为 $\text{div} \circ \text{curl} \equiv 0$, 对方程第四行的两边求散度可得

$$0 = \text{div}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial(\text{div } \mathbf{D})}{\partial t},$$

根据方程第一行可得

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

因此, Maxwell 方程组印证了电荷守恒定律。

参考题目 10.1, 10.2, 10.3, 2022 秋电磁学 C 期末试卷第一大题

XVII. 电磁场的各个物理量

(1) 能量密度:

电磁场的能量密度为

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H},$$

区域 D 内部的能量为

$$W = \int_D u dV.$$

(2) 能流密度:

电磁场的能流密度「坡印廷矢量」为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

如图所示, 对于曲面 Σ , 积分

$$P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

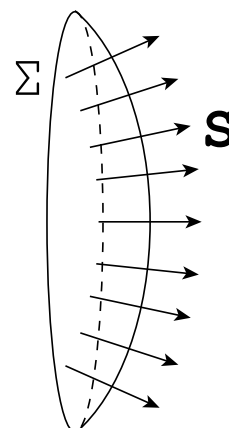
代表了电磁场单位时间内, 在曲面 Σ 发射出去的能量大小。

因此, 单位时间内, 区域 D 内部的能量损失为

$$\int_{\partial D} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A},$$

其中 ∂D 为区域 D 的边界。

参考题目 10.7



(3) 动量密度:
电磁场的动量密度为

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B},$$

因此, 对于相对介电常数与相对磁导率分别为 ϵ_r, μ_r 的介质

$$\mathbf{g} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \epsilon_r \mu_r \frac{\mathbf{S}}{c^2},$$

在真空中

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2},$$

区域 D 内部的动量为

$$\mathbf{p} = \int_D \mathbf{g} dV.$$

参考题目 10.9

(4) 角动量密度:
电磁场的角动量密度为

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g},$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是参考点的坐标。

区域 D 内部的角动量为

$$\mathbf{L} = \int_D \mathbf{l} dV.$$

参考题目 10.10

XVIII. 真空中的电磁波

令电磁波的电场强度与磁感应强度为 \mathbf{E}, \mathbf{B} ，则这两者的关系可以表示为

$$\|\mathbf{E}\| = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

$$\|\mathbf{B}\| = B_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

其中 E_0, B_0 均为常数，称为振幅。这两者之间的关系为

$$B_0 = \frac{E_0}{c},$$

电磁波的波数「传播单位长度引起的相位改变」为

$$k = \|\mathbf{k}\|,$$

电磁波的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

电磁波的频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi},$$

电磁波的波速为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299,792,458 \text{ m/s},$$

电磁波的能量密度为

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{S}} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{S}},$$

其中 $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}$ 是与坡印廷矢量 \mathbf{S} 方向相同的单位矢量，对应电磁波的传播方向。

电磁波的平均能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{S}},$$

电磁波的能量密度为

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

电磁波的平均能量密度为

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2,$$

电磁波的动量密度为

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{c}\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{S}},$$

电磁波的平均动量密度为

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{2c}\epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{S}}.$$

参考题目 10.5, 10.6, 10.8