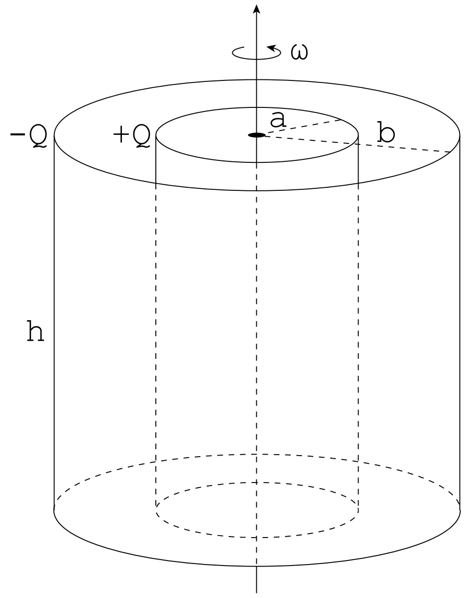
2021年秋季学期电磁学C期末试卷

只有公共题，公共题是课程 A、B、C 统一的，一般来说难度较高



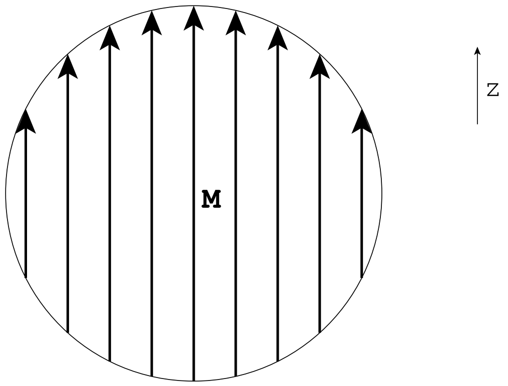
一、【共 18 分】

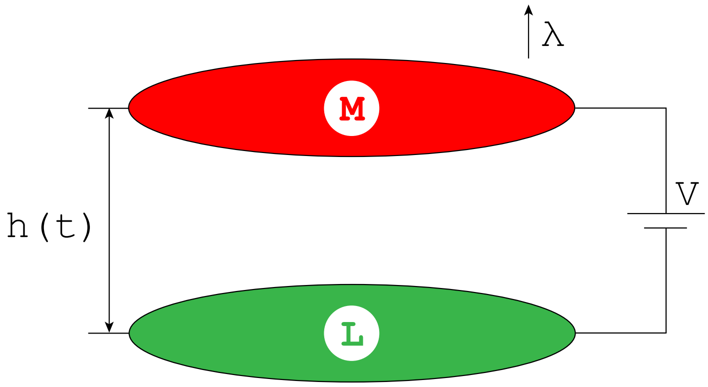
如图所示，两个同轴的圆柱面半径分别为 a,b，高度均为 h，且 $h \gg b > a$。内圆柱面与外圆柱面带电量分别为 $+Q,-Q$，两个圆柱面共同沿中心轴以角速度 ω 转动，忽略边缘效应。

(1) 【6 分】计算空间的磁感应强度分布；

(2) 【8 分】计算外圆柱面单位面积受到的磁力 P_m，并计算它与单位面积受到的电场力 P_e 的比值 P_m/P_e。

(3) 【4 分】计算空间中磁场的总能量。





二、【共 17 分】

「这题我根本不清楚原理，记住怎么做即可，但是不要管为什么」

如左图所示，球的半径为 R，球内部的磁化强度 $\mathbf{M}$ 沿着 z 轴方向，并且是恒定值。已知球内部的磁感应强度是均匀的；关于球外部的磁感应强度计算，可以将球视为位于球心的磁矩。

(1) 【10 分】计算球外部与内部的磁感应强度。

(2) 【7 分】计算球外部的磁场能量。

三、【共 15 分】

如右图所示「任天堂别起诉我啊」，一个平行板电容器由两个半径为 R 的金属圆盘组成，初始时刻它们之间的距离为 h_0，之后下面的圆盘 (L) 保持静止，上面的圆盘 (M) 以速度 λ 向上运动，因此，在时刻 t，两个圆盘之间的距离为 $h(t) = h_0 + \lambda t$。两个圆盘之间始终接有电动势为 V 的电源。假设任何时刻均有 $h(t) \ll R$，可以忽略边缘效应并且忽略变化的磁场产生的感应电场；并假设 λ 很小，具有近似 $1/(h_0 + \lambda t) \approx 1/h_0(1 - \lambda t/h_0)$，并且 λ^2 以及更高阶的小量可以忽略。

(1) 【8 分】计算两个圆盘之间的磁感应强度，并计算坡印廷矢量。

(2) 【7 分】计算电容器的侧面单位时间发射出去的能量，并计算电源输出的功率。

答案

一、

(1)
内圆柱面与外圆柱面因为转动，产生的电流强度均为

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{2\pi/\omega} = \frac{Q\omega}{2\pi},$$

其中，内圆柱面与外圆柱面的电流密度方向分别为逆时针与顺时针「从上面往下看」。

内圆柱面与外圆柱面可以等效为螺线管，因此内部的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{h} = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h},$$

其中，内圆柱面与外圆柱面产生的磁感应强度方向分别为向上与向下。

因此，空间的磁感应强度分布为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{0}, & 0 \le r < a, \\ -\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi h}\mathbf{k}, & a \le r < b, \\ \mathbf{0}, & r \ge b\,. \end{cases}$$

(2)「较为简单的办法」
空间的磁能密度分布为

$$u_m = \frac{\left|\mathbf{B}\right|^2}{2\mu_0} = \begin{cases} 0, & 0 \le r < a, \\ \frac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi^2 h^2}, & a \le r < b, \\ 0, & r \ge b, \end{cases}$$

外圆柱面单位面积受到的磁力为

$$P_m = \left|\lim_{r\searrow b} u_m - \lim_{r\nearrow b} u_m\right| = \frac{\mu_0 Q^2\omega^2}{8\pi^2 h^2},$$

根据高斯定理，空间的电场强度分布为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0}, & 0 \le r < a, \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}\hat{\mathbf{r}}, & a \le r < b, \\ \mathbf{0}, & r \ge b\,. \end{cases}$$

空间的电能密度分布为

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2 = \begin{cases} 0, & 0 \le r < a, \\ \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2 h^2}, & a \le r < b, \\ 0, & r \ge b, \end{cases}$$

外圆柱面单位面积受到的电场力为

$$P_e = \left|\lim_{r\searrow b} u_e - \lim_{r\nearrow b} u_e\right| = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 b^2 h^2},$$

因此

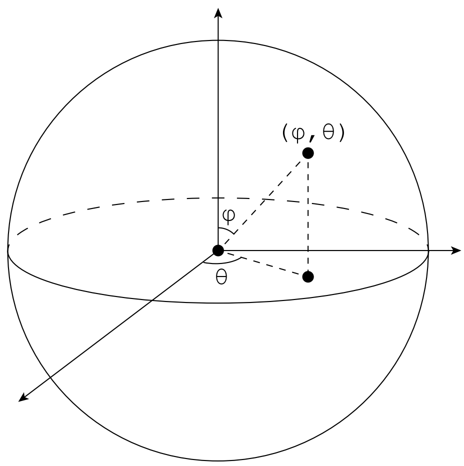
$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{\omega^2 b^2}{c^2} \ll 1,$$

这是完全可以忽略不计的。

(3)
空间中磁场的总能量为

$$W_m = \int_{\mathbb{R}^3} u_m dV = \int_0^\infty u_m 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 Q^2 \omega^2}{8\pi h}(b^2 - a^2).$$

二、



定义球坐标 (ρ, ϕ, θ)，其中

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\phi. \end{cases}$$

(1)
根据题目提示，关于球外部的磁感应强度计算，可以将球视为位于球心的磁矩。这个磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M},$$

因此，球外部的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5}\right) = \frac{\mu_0 R^3 M}{\rho^3}\left((\sin\phi\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\phi\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\cos^2\phi - \frac{1}{3}\right)\mathbf{k}\right).$$

根据题目提示，球内部的磁感应强度是均匀的。假设球内部的磁感应强度与磁场强度分别为 $\mathbf{B}, \mathbf{H}$，因此

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

根据边界条件

$$\begin{cases} B_1^{\perp} = B_2^{\perp}, \\ H_1^{\top} = H_2^{\top}, \end{cases}$$

可得，在球外部，并靠近球坐标 (R, ϕ_0, θ_0) 的磁感应强度 $\lim\limits_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \mathbf{B}$ 沿着 $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ 方向的分量分别为「磁感应强度沿着 $\hat{\theta}$ 方向的分量为 0，否则不满足边界条件 $H_1^{\top} = H_2^{\top}$」

$$\begin{cases} B_{\hat{\rho}} = B \cos \phi_0, \\ B_{\hat{\phi}} = -\mu_0 H \sin \phi_0 = -B \sin \phi_0 + \mu_0 M \sin \phi_0, \end{cases}$$

其中 M, B, H分别为球内部的磁化强度、磁感应强度、磁场强度的大小。而

$$\hat{\rho} = \lim_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \rho}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial \rho \right|} = (\sin \phi_0 \cos \theta_0)\mathbf{i} + (\sin \phi_0 \sin \theta_0)\mathbf{j} + (\cos \phi_0)\mathbf{k},$$

$$\hat{\phi} = \lim_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \phi}{\left| \partial \mathbf{r} / \partial \phi \right|} = (\cos \phi_0 \cos \theta_0)\mathbf{i} + (\cos \phi_0 \sin \theta_0)\mathbf{j} + (-\sin \phi_0)\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = (\rho \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\rho \sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\rho \cos \phi)\mathbf{k}$，因此

$$\lim_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \mathbf{B} = B_{\hat{\rho}} \hat{\rho} + B_{\hat{\phi}} \hat{\phi} = (\mu_0 M \sin \phi_0 \cos \phi_0 \cos \theta_0)\mathbf{i} + (\mu_0 M \sin \phi_0 \cos \phi_0 \sin \theta_0)\mathbf{j} + (B - \mu_0 M \sin \phi_0)\mathbf{k},$$

而根据之前的结论，

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \mathbf{B} &= \lim_{\rho \searrow R, \phi \to \phi_0, \theta \to \theta_0} \frac{\mu_0 R^3 M}{\rho^3} \left((\sin \phi \cos \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \cos \phi \sin \theta)\mathbf{j} + \left(\cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \mathbf{k} \right) \\ &= \mu_0 M \left((\sin \phi_0 \cos \phi_0 \cos \theta_0)\mathbf{i} + (\sin \phi_0 \cos \phi_0 \sin \theta_0)\mathbf{j} + \left(\cos^2 \phi_0 - \frac{1}{3} \right) \mathbf{k} \right), \end{aligned}$$

对比每一个分量可得

$$B - \mu_0 M \sin^2 \phi_0 = \mu_0 M \left(\cos^2 \phi_0 - \frac{1}{3} \right),$$

因此

$$B = \frac{2}{3}\mu_0 M,$$

因此，球内部的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}.$$

(2)

球外部的磁能密度为

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{\left|\mathbf{B}\right|^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{\mu_0 R^6 M^2}{2\rho^6}\left(\sin^2\phi\cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\theta + \left(\cos^2\phi - \frac{1}{3}\right)^2\right) \\ &= \frac{\mu_0 R^6 M^2}{36\rho^6}(5 + 3\cos 2\phi), \end{aligned}$$

对于 $U = (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$，映射 $F : U \to \mathbb{R}^3$

$$F(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$$

Jacobi 行列式的绝对值为

$$\left|\det DF\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{pmatrix}\right| = \rho^2\sin\phi,$$

球外部的磁场能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0 R^6 M^2}{36}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{5 + 3\cos 2\phi}{\rho^6}\left|\det DF\right| d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 R^6 M^2}{36}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{(5 + 3\cos 2\phi)\sin\phi}{\rho^4} d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{4}{27}\pi\mu_0 R^3 M^2. \end{aligned}$$

三、

(1)
两个圆盘之间的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{V}{h}\hat{z} = -\frac{V}{h_0+\lambda t}\hat{z} \approx -\frac{V}{h_0}\left(1-\frac{\lambda t}{h_0}\right)\hat{z},$$

两个圆盘之间的位移电流为

$$\mathbf{J}_D = \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 V\lambda}{h_0^2}\hat{z},$$

两个极板之间的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{J_D \pi r^2}{2\pi r}\hat{\theta} = \frac{\epsilon_0 V\lambda r}{2h_0^2}\hat{\theta},$$

两个极板之间的坡印廷矢量为

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\epsilon_0 V^2\lambda r}{2h_0^3}\left(1-\frac{\lambda t}{h_0}\right)\hat{r} \approx \frac{\epsilon_0 V^2\lambda r}{2h_0^3}\hat{r},$$

(2)
电容器的侧面单位时间发射出去的能量为

$$P_1 = \int_S (\mathbf{P}\cdot\mathbf{N})dA = \frac{\epsilon_0 V^2\lambda R}{2h_0^3}2\pi R(h_0+\lambda t) \approx \frac{\pi\epsilon_0 V^2\lambda R^2}{h_0^2},$$

电容器的电荷量为

$$Q = CV = \frac{\pi\epsilon_0 V R^2}{h} \approx \frac{\pi\epsilon_0 V R^2}{h_0}\left(1-\frac{\lambda t}{h_0}\right),$$

回路中的电流强度为

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\pi\epsilon_0 V\lambda R^2}{h_0^2},$$

电源输出的功率为

$$P_2 = VI = -\frac{\pi\epsilon_0 V^2\lambda R^2}{h_0^2}.$$

负号表示电源是接收功率的「充电」，而且 $P_1+P_2=0$，所以充电的能量来源于电容器的侧面发射出去的能量。