中国科学技术大学

2021～2022 学年第二学期考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：__力学 B__　　课程代码：__PHYS1001B.11__

开课院系：_物理学院_　　考试形式：半开卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

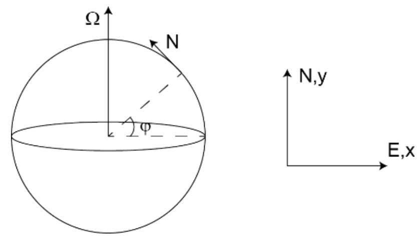
注：共八道大题，请勿漏答。请在首页写上姓名和学号，并在每道题下方空白处答题，答题时要注意写上必要的计算步骤。本次考试允许携带一张写满笔记的 A4 纸。

（装订线内不要答题）

1. 在地球上纬度为φ的实验室中做傅科摆实验。单摆的振动角频率为ω，地球自西向东转动的角频率为Ω（Ω<<ω）。如图取实验室参考系里北方向（N）为 y 方向，东方向为 x 方向。

（a）（7 分）并简要分析 x 和 y 方向傅科摆的受力情况。

（b）（5 分）简述傅科摆的实验现象。



解：（a）科里奥利力：$F_c = 2m\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega} + 2m\dot{\vec{y}} \times \vec{\Omega}$

其在 xy 平面的分量为：$F_{c,xy} = 2m\vec{\Omega}\dot{y}\sin\varphi\,\hat{x} - 2m\vec{\Omega}\dot{x}\sin\varphi\,\hat{y}$ （3 分）

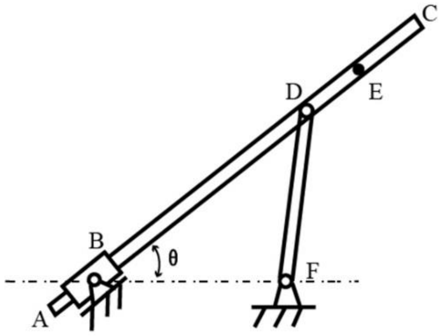
单摆回复力为：$F_0 = -m\omega^2 x\hat{x} - m\omega^2 y\hat{y}$ （3 分）

合力为：$F_x = \left(2m\vec{\Omega}\dot{y}\sin\varphi - m\omega^2 x\right)\hat{x} - (2m\vec{\Omega}\dot{x}\sin\varphi + m\omega^2 y)\hat{y}$ （1 分）

（b）在这个力的作用下，单摆的振动平面会在 xy 平面发生转动。（3 分）

其转动角速度为Ωsinφ。（2 分）

2. （10 分）螺线划规，如图所示，杆 AC 和曲柄 DF 铰接，并穿过固定于点 B 的套筒。取点 B 为极坐标的极点，直线 BF 为极轴，已知极角$\theta=kt$（k 为常数），$BF=DF=a$，$DE=b$。试求点 E 的极坐标形式的运动方程，轨迹方程，以及速度和加速度的大小。



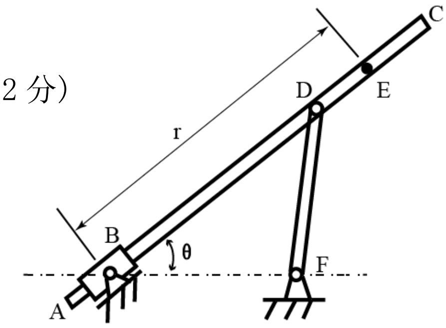
解：点 E 的运动方程为

$\theta = kt$

$r = BD + DE = 2a\cos\theta + b = 2a\cos kt + b$（2 分）

轨迹方程

$r = 2a\cos\theta + b$ （2 分）



速度

$v_r = \dot{r} = -2ak\sin kt$

$v_\theta = r\dot{\theta} = k(2a\cos kt + b)$

$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\theta}^2} = k\sqrt{4a^2 + b^2 + 4ab\cos kt}$ （3 分）

加速度

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2ak^2\cos kt - k^2(2a\cos kt + b) = -4ak^2\cos kt - k^2 b$

$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2k\dot{r} = -4ak^2\sin kt$

$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\theta}^2} = k^2\sqrt{16a^2 + b^2 + 8ab\cos kt}$ （3 分）

3.（10 分）（1）一个球形物体以角速度 ω 转动，如果仅有引力阻碍球的离心分解，此物体的最小密度是多少？由此估算巨蟹座中转数为每秒 30 转的脉冲星的最小密度。这脉冲星是我国在 1054 年就观察到的超新星爆的结果。（2）如果脉冲星的质量与太阳的质量相当（$\approx 2\times10^{30}$kg 或 $3\times10^5 M_e$，M_e 为地球质量），此脉冲星的最大可能半径是多少？（3）若脉冲星的密度与核物质相当，它的半径是多少？核物质密度约为 1.2×10^{17}kg/m^3。

解：（1）设此球体半径为 R，质量为 m。考虑球体赤道上的质元 Δm，它所受到的离心惯性力最大 $f^*=\Delta m\omega^2 R$，若不被分解，它所受到的引力至少等于离心惯性力，即

$G m\Delta m/R^2=\Delta m\omega^2 R$ （2 分）

$\therefore\ m=\omega^2R^3/G$ （1 分）

而 $m=4\pi R^3\rho/3$，代如上式，可求得，

$\rho=\frac{3\omega^2}{4\pi G}$ （1 分）

脉冲星的最小密度

$\rho=\frac{3\times(30\times2\pi)^2}{4\pi\times6.51\times10^{-11}}\approx1.3\times10^{14}\,kg/m^3$ （2 分）

（2）据密度公式，$m=\rho V=4\pi R^3\rho/3$,$\therefore R^3=3m/(4\pi\rho)$

$R=\sqrt[3]{3\times2\times10^{30}/(4\times3.14\times1.3\times10^{14})}=1.5\times10^2\,km$ （2 分）

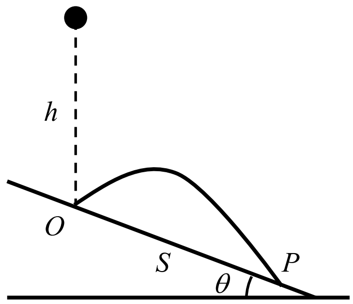
（3）$R=\sqrt[3]{3\times2\times10^{30}/(4\times3.14\times1.2\times10^{17})}=16km$ （2 分）

4. （18 分）在固定斜面的 O 点上方$h = 1.60$ m处有一小球从静止自由落下。已知斜面是光滑的，倾角为$\theta = 15°$，小球与斜面法向碰撞恢复系数为$e = 0.60$，忽略空气阻力。试求：

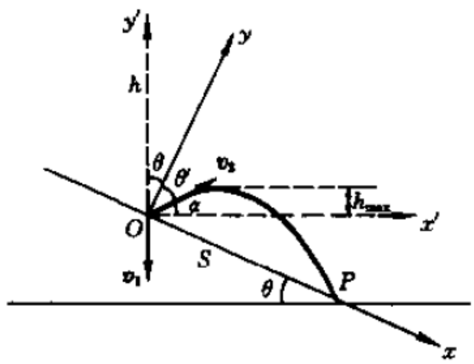
（1）小球碰后达到的最高点与 O 点的高度差$h_{\max}$.

（2）设小球碰后落在斜面上 P 点，则 O 点与 P 点的距离 S 是多少？

（3）小球与斜面碰撞后，其机械能损失的百分数是多少？



解：（1）如图，取直角坐标Oxy及$Ox'y'$，x 轴沿斜面切向，y轴沿斜面法向，x' 轴为水平方向，y' 轴为竖直方向，原点O为碰撞点。设碰前小球速度为v_1，碰后为v_2，设v_2与y轴夹角为θ'，v_2与x'轴夹角为α



小球碰前速度为

$v_1 = \sqrt{2gh}$ （1 分）

v_1 的两个分量为

$$\begin{cases} v_{1x} = v_1 \sin\theta \\ v_{1y} = -v_1 \cos\theta \end{cases}$$ （2 分）

因斜面光滑，故碰撞前、后小球的速度沿斜面切向（即沿 x 轴）的分量不变，有

$v_{2x} = v_{1x} = v_1 \sin\theta$ （1 分）

由小球与斜面法向恢复系数的定义为

$e = \frac{v_{2y}}{-v_{1y}}$ （1 分）

可得

$v_{2y} = -ev_{1y} = ev_1 \cos\theta$ （1 分）

所以碰后小球的速度为

$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta}\,\sqrt{2gh} = 3.55\,m/s$ （1 分）

碰后 v_2 的方向用θ'表示（见图），为

$\tan\theta' = \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{1}{e}\tan\theta$

$\theta' = 24.06°$ （1 分）

小球碰后做斜抛运动的射高 $h_{\max}$ 为

$h_{max} = \frac{v_2^2\sin^2\alpha}{2g} = 0.39m$ （1 分）

（用到$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta - \theta' = 50.94°$）

（2）在 $Ox'y'$坐标系中，小球做斜抛运动的轨迹方程为

$y' = x'\tan\alpha - \frac{g}{2v_2^2\cos^2\alpha}x'^2$ （2 分）

斜面方程为

$y' = -x'\tan\theta'$ （1 分）

由以上两式，解出小球落在斜面上的 P 点的 x' 坐标为

$x' = \frac{2v_2^2\sin^2(\theta+\theta')}{g}[\cot(\theta+\theta') + \tan\theta]$ （1 分）

O 点与 P 点的距离 S 为：

$S = \frac{x'}{\cos\theta} = \frac{2v_2^2\sin^2(\theta+\theta')}{g\cos\theta}[\cot(\theta+\theta') + \tan\theta] = 1.59m$ （2 分）

3．小球因碰撞损失的机械能为

$\Delta E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$ （1 分）

则损失的百分数为

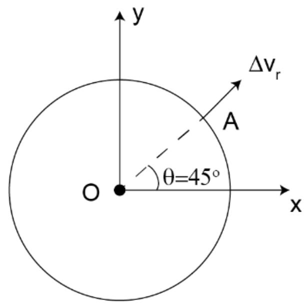
$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 1 - (\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta) = 60\%$ （2 分）

5. 考虑质量为 m 的飞船绕质量为 M 的星球 O 飞行，设 m 相对于 M 的位置矢量为 $\mathbf{r}$，运动速度为 $\mathbf{v}$，角动量为 $\mathbf{L}$。

（a）（5 分）求证 Runge-Lenz 矢量$\mathbf{B}=\mathbf{v}\times\mathbf{L}-\mathrm{GMm}\mathbf{r}/\mathrm{r}$是守恒量。

（b）（7 分）在飞船轨迹为椭圆时，求飞船轨迹半长轴与飞船机械能 E 的关系。

（c）（6 分）如图所示，若初始时刻飞船绕星球作圆周运动。在 A 点（θ=45º）时，飞船开始加速，速度增加的方向径向，达到新的椭圆轨道。求变速后新轨道的长轴的指向。



解：（a）因为 $\boldsymbol{L}$ 是守恒量，所以有：

$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times\boldsymbol{L}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=-\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$ （2 分）

对最后的式子中的叉乘展开有:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L})=-\frac{GMm}{r^3}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})-r^2\boldsymbol{v}]=-GMm\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\frac{dr}{dt}-\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]$$
$$=GMm\left[\boldsymbol{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]=GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\quad（3 分）$$

从而有：$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}-GMm\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$

（b）飞船机械能的表达式为：$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\omega^2r-\frac{GMm}{r}$

考虑到$\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=mr^2\boldsymbol{\omega}$

从而有$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}-\frac{GMm}{r}$ （2 分）

在椭圆轨道时，E<0。在椭圆轨道长轴的两个端点有：$\dot{r}=0$。从而有两个端点的方程满足：$r^2+\frac{GMm}{E}r-\frac{L^2}{2mE}=0$ （2 分）

这样椭圆两个端点到星球的距离为：$r_\pm=-\frac{GMm}{2E}\pm\sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2+\frac{L^2}{2mE}}$ （2 分）

这样，半长轴为：$\mathrm{a}=\frac{r_++r_-}{2}=-\frac{GMm}{2E}$ （1 分）

（c）在圆周运动时，Runge-Lenz 矢量为零。（2 分）

由于变速延径向方向，变速后飞船角动量不变。（1 分）

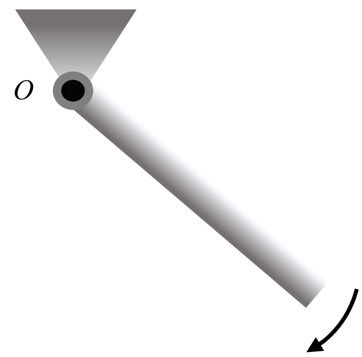
这样，在 A 点，变速后的 Runge-Lenz 矢量为：$\mathbf{B} = \Delta\mathbf{v}_{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{L}$，其方向是沿着$\theta$=135º的方向，这也是椭圆的长轴方向。 （3 分）

6. (12 分)长为 R，质量分布不均匀的细杆，线密度为$\lambda=\lambda_0\sqrt{r/R}$。离 O 点越远密度越大。细杆可绕 O 轴在铅直平面转动。如图所示。忽略一切摩擦，将杆从水平位置释放。求

1） 杆关于 O 轴的转动惯量I_0；

2） 杆的质心位置；

3） 杆转到铅直位置时，杆具有的角速度 ω。



解：（1）关于 O 点的转动惯量

$I_0=\int r^2dm=\int_0^R r^2\lambda_0\sqrt{\frac{r}{R}}dr\ =\frac{\lambda_0}{\sqrt{R}}\int_0^R r^{\frac{5}{2}}dr=\frac{2}{7}\lambda_0R^3$ （3 分）

（2）杆的质量为

$m=\int dm=\int_0^R\lambda_0\sqrt{\frac{r}{R}}dr=\frac{\lambda_0}{\sqrt{R}}\int_0^R r^{\frac{1}{2}}dr=\frac{\lambda_0}{\sqrt{R}}\frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\lambda_0R$ （2 分）

杆的质心位置为

$r_c=\frac{\int rdm}{m}=\frac{\int_0^R r\lambda_0\sqrt{\frac{r}{R}}dr}{\frac{2}{3}\lambda_0R}=\frac{\frac{\lambda_0}{\sqrt{R}}\int_0^R r^{\frac{3}{2}}dr}{\frac{2}{3}\lambda_0R}=\frac{\frac{\lambda_0}{\sqrt{R}}\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}\lambda_0R}=\frac{3}{5}R$ （3 分）

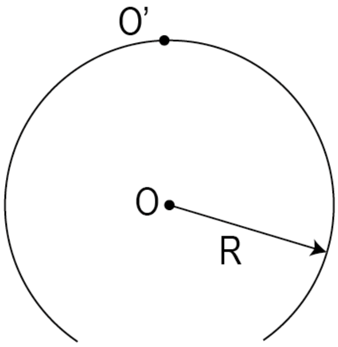
（3）由机械能守恒，并设水平位置为重力 0 势能点

$0=\frac{1}{2}I_0\omega^2-mgr_c$ （2 分）

则

$\omega=\sqrt{\frac{2mgr_c}{I_0}}=\sqrt{\frac{2\times\frac{2}{3}\lambda_0Rg\times\frac{3}{5}R}{\frac{2}{7}\lambda_0R^3}}=\sqrt{\frac{14g}{5R}}$ （2 分）

7.（10 分）如图所示，一个半径为 R 的匀质细圆环被截断一段圆弧之后的质量为 m，O’点为新圆环上的对称点。将该圆环以 O’点固定在墙面上，则它可以作为一个复摆运动。求其运动周期。



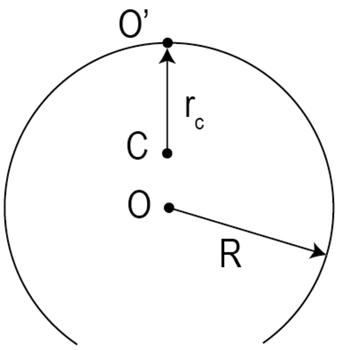
解答：如下图所示，设圆环的质心在 C 点，其与 O’的距离为 r_c，则由复摆的周期公式可得：$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{o'}}{mgr_c}}$ （3 分）（可直接引用，也可推导出来）

已知绕圆环中心 O 点的转动惯量为 $I_o = mR^2$ （2 分）

则根据平行轴定理可知，$I_o = I_c + m(R - r_c)^2$，$I_{o'} = I_c + mr_c^2$ （2 分）

合并可得$I_{o'} = 2mRr_c$ （1 分）

从而有$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ （2 分）



8.（10 分）在同一直线上相向传播的两列同频率同振幅的简谐波，甲波在 A 点是波峰时乙波在 B 点是波谷，A、B 两点相距 20.0m。已知两波的频率为 100Hz，波速为 200m/s。求 AB 连线上静止不动点的位置。

解：波长$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{200m/s}{100Hz}=2.00m$，得$\overline{AB}=20.0m=10\lambda$ （1 分）

以 A 点为原点，由 A 指向 B 为坐标轴。

$$u_{甲}(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_{甲}\right]$$ （2 分）

$$u_{乙}(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_{乙}\right]$$ （2 分）

当甲波在 A 点是波峰时，t=0。有：

$$u_{甲}(0,0)=A\cos\varphi_{甲}=A$$

$$u_{乙}(10\lambda,0)=A\cos\left(20\pi+\varphi_{乙}\right)=-A$$

由此得：$\varphi_{甲}=0$，$\varphi_{乙}=\pi$ （2 分）

所以合成波（驻波）为

$$U=u_{甲}(x,t)+u_{乙}(x,t)=2A\sin\frac{2\pi t}{T}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$ （2 分）

在 AB 连线上的波节为从 A 点往 B 点 1.0m 处起，其间每隔半波长 1.0m 有一个，共 19 个（注：考虑 A、B 两点也是节点，所以 21 个也算正确）。 （1 分）