严镇军《复变函数》习题全解

邓嘉驹

2022 年 12 月 9 日

目录

1 复变数函数

1. 记 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$. 再设 $w=u+\mathrm{i}v$，则 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

   (1) $x=1 \implies u=\dfrac{1}{1+y^2}, v=\dfrac{-y}{1+y^2} \implies u^2+v^2=\dfrac{1}{1+y^2}=u$. 此时该曲线为以 $z_C=\dfrac{1}{2}$ 为圆心、$R=\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆周.

   (2) $y=0 \implies u=\dfrac{1}{x}, v=0$. 此时该曲线为实轴.

   (3) $y=x \implies u=\dfrac{1}{2x}, v=\dfrac{-1}{2x} \implies u+v=0$. 此时该曲线为直线 $u+v=0$.

   (4) $x^2+y^2=4 \implies u=\dfrac{x}{4}, v=\dfrac{-y}{4} \implies u^2+v^2=\dfrac{x^2+y^2}{16}=\dfrac{1}{4}$. 此时该曲线为以原点为圆心、$R=\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆周.

   (5) 这里 x,y 不好直接消元，可逆向变换：$z=\dfrac{1}{w} \implies x=\dfrac{u}{u^2+v^2}, y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$，则

   $$5=(x-1)^2+y^2=\left(\frac{u}{u^2+v^2}-1\right)^2+\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}+1,$$

   即

   $$u^2+v^2=\frac{1-2u}{4} \implies \left(u+\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\frac{5}{16}.$$

   此时该曲线为以 $z_C=-\dfrac{1}{4}$ 为圆心、$R=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ 为半径的圆周.

2. 取路径 $y=kx$，则 $z\neq 0$ 时，$f(z)=\dfrac{k}{1+k^2}$，因此 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 与 k 的取值相关，极限不存在，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.

3. 记 $p_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k\ (a_n\neq 0)$，则

   $$\begin{aligned}|p_n(z)|&=\left|\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|\geqslant|a_nz^n|-\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right|\geqslant|a_nz^n|-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z^k|\\&=|z|^n\left(|a_n|-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|a_k|}{|z|^{n-k}}\right).\end{aligned}$$

   因此当 $z\to\infty$ 即 $|z|\to+\infty$ 时，不等号右侧为 $+\infty\cdot|a_n|$，即 $\lim\limits_{z\to\infty}|p_n(z)|=+\infty$，即 $\lim\limits_{z\to\infty}p_n(z)=\infty$.

4. (1) $f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，即 $u=\sqrt{x^2+y^2}, v=0$，显然对 $\forall z\in\mathbb{C}$ 不满足 C-R 方程，$f(z)$ 在全平面处处不可导.

   (2) $f(z)=x+y$，即 $u=x+y, v=0$，显然对 $\forall z\in\mathbb{C}$ 不满足 C-R 方程，$f(z)$ 在全平面处处不可导.

(3) $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$，即 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，注意到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

即满足 C-R 方程当且仅当 $x^2=y^2, xy=0$ 同时成立 $\implies x=y=0$. 但 $z=0$ 时 $\bar{z}=0$，$f(z)$ 无定义且在该处不连续，故 $f(z)$ 在全平面处处不可导.

5. (1) $u=xy, v=y$，由 C-R 方程得，$f(z)$ 可导时 $y=1, x=0$. 但 $f(z)$ 在 $z_0=\mathrm{i}$ 的邻域内不可导，因此 $f(z)$ 在全平面都不解析.

(2) i. $|z|<1$ 时，$f(z)=|z|z \implies u=x\sqrt{x^2+y^2}, v=y\sqrt{x^2+y^2}$，由 C-R 方程，$f(z)$ 可导时

$$\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

从中解得 $x=y=0$，但 $f(z)$ 在原点附近不可导，因此 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 处不解析.

ii. $|z|>1$ 时，$f(z)=z^2$ 为幂函数，显然解析.

iii. $|z|=1$ 时，由于 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上的点的邻域中 $|z|<1$ 的部分不解析，因此 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 处必然不解析.

综上，$f(z)$ 的解析区域为 $|z|>1$.

6. (1) $z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=(x^3-3xy^2)+\mathrm{i}(3x^2y-y^3) \implies u=x^3-3xy^2, v=3x^2y-y^3$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3(x^2-y^2)=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 成立，因此 z^3 在全平面上解析.

(2) $u=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y), v=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x[(x+1)\cos y-y\sin y]=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x[(x+1)\sin y+y\cos y]=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 成立，因此该函数在全平面上解析.

(3) $u=\cos x\cosh y, v=-\sin x\sinh y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\cosh y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\cos x\sinh y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 成立，因此该函数在全平面上解析.

7. 注意到 $z\neq z_0$ 时，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Big/\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0},$$

等式两端同时取 $z\to z_0$，由于 $f(z), g(z)$ 在 z_0 解析，故

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

8. (1) 由 C-R 方程，$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

因此 $u(x,y),v(x,y)=\mathrm{const}$，亦即 $f(z)=u+\mathrm{i}v=\mathrm{const}$.

(2) 由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v,\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 均解析，由 C-R 方程，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(-v)}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x},$$

从中解得 u,v 各偏导数均为 0，同样有 $u,v=\mathrm{const}\implies f(z)=\mathrm{const}$.

(3) $\mathrm{Re}z=u=\mathrm{const}$ 时，由 C-R 方程知 v 的各偏导数均为 0，则 $v=\mathrm{const}$，进而 $f(z)=\mathrm{const}$.

(4) 同上一条.

(5) $|f(z)|^2=u^2+v^2=\mathrm{const}$，两端分别对 x,y 求偏导，约分得

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \end{cases}$$

联立 C-R 方程，消去 v 的各偏导得

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}=0. \end{cases}$$

当 $u=v\equiv 0$ 时，显然 $f(z)=0$ 为常数；否则从中解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\implies u=\mathrm{const}$，同理 $v=\mathrm{const}$，进而 $f(z)=\mathrm{const}$.

(6) 记 $\theta=\arg f(z)=\mathrm{const}$，则 $v=u\tan\theta=ku$，其中 $k=\tan\theta=\mathrm{const}$，将其代入 C-R 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=k\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-k\frac{\partial u}{\partial x},$$

从中解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；特别地，若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $k=+\infty$，则 $u=\dfrac{v}{k}=0$，由 C-R 方程知 $u=0$. 因此无论 k 取何值，均有 $f(z)=\mathrm{const}$.

9. 由链式法则，

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}&=\frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 H}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\ &=\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 H}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial H}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right), \end{aligned}$$

而 $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ 同理. 由 C-R 方程,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}=0.$$

注意到

$$f'(z)=\frac{\partial \xi}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \eta}{\partial x}\implies |f'(z)|^2=\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

并且 $f(z)$ 有任意阶导数，对于 $f'(z)=\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\dfrac{\partial \eta}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}$，由 C-R 方程,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=&\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}+\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}\\&+2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 H}{\partial \xi\partial \eta}\\&+\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial H}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial H}{\partial \eta}\\=&|f'(z)|^2\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}+|f'(z)|^2\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2}+2\cdot 0\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial \xi\partial \eta}+0\cdot\frac{\partial H}{\partial \xi}+0\cdot\frac{\partial H}{\partial \eta}\\=&|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right).\end{aligned}$$

10. 极坐标下，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\\\frac{\partial v}{\partial r}&=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y},\\\frac{\partial u}{\partial \theta}&=r\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\\frac{\partial v}{\partial \theta}&=r\left(-\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

利用 C-R 方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}-\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\\\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}&=-\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial v}{\partial r}.\end{aligned}$$

11. (1) $\dfrac{1}{w}, w=z^2-3z+2$ 在有定义点均解析，因此只需要除去无定义点：$z_1=1, z_2=2$，其微商:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2-3z+2}\right)=\frac{3-2z}{(z^2-3z+2)^2}.$$

(2) 同上,显然该函数在有定义点解析,无定义点:$z^3+a=0 \implies z=\sqrt[3]{|a|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg a+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$,即

$$z_1=\sqrt[3]{a},\quad z_2=\sqrt[3]{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}),\quad z_3=\sqrt[3]{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=-\frac{\sqrt[3]{a}}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}),$$

其微商:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^3+a}\right)=-\frac{3z^2}{(z^3+a)^2}.$$

12. 显然多项式函数 w 在 $|z|<1$ 内解析,下证该映照为一一映照:对 $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$,其对应函数值分别为 w_1,w_2,则

$$w_1-w_2=(z_1^2-z_2^2)+2(z_1-z_2)=(z_1-z_2)(z_1+z_2+2).$$

当 $w_1=w_2$ 时,要求 $z_1=z_2$ 或 $z_1+z_2=-2$.
若为第一种情况,则已得证;若为第二种情况,注意到 $|z|<1$,即 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|<2$,即第二个等式不可能成立. 综上,$w_1=w_2$ 当且仅当 $z_1=z_2$,因此该函数为从 z 到 w 的单叶映照.

13. $w=\sqrt{z}$ 的两个单值连续分支:$w_k=\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{2}}$ $(k=0,1)$,具体为:

$$w_0=\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}},\quad w_1=\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\arg z}{2}+\pi\right)}\ \left(-\frac{3\pi}{2}\leqslant\arg z<\frac{\pi}{2}\right).$$

由题意,$w(z)\big|_{\arg z=2k'\pi\ (k'\in\mathbb{Z})}=0$,此时 $w_0=\sqrt{|z|}>0, w_1=-\sqrt{|z|}<0$,因此取 w_0. 故

$$w_0(i)\Big|_{\arg z=-\frac{3\pi}{2}+}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}=-\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\quad w_0(i)\Big|_{\arg z=\frac{\pi}{2}-}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

进而

$$w(-1)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=-\mathrm{i},\quad w'(-1)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{2\sqrt{1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

14. 注意到 $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ 可分解成:

$$\sqrt{|(1-z^2)(1-k^2z^2)|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(1-z)+\mathrm{Arg}(1+z)+\mathrm{Arg}(1-kz)+\mathrm{Arg}(1+kz)}{2}\right),$$

因此在 $z_1=1,z_2=-1,z_3=\dfrac{1}{k},z_4=-\dfrac{1}{k}$ 点附近绕行一圈,函数值均会发生改变(具体为其一辐角增加 2π),故 z_1,z_2,z_3,z_4 均为支点,算上 $z_5=\infty$,共 5 个支点.
现在全平面作一闭合回路,则其 z_1,z_3 与 z_2,z_4 必然同时被包含或不被包含,因此辐角会增加 $0,4\pi$ 或 8π,函数辐角增加 $0,2\pi$ 或 4π,每个分支内函数值保持不变,即为单值解析分支.

15. (与上一问一样,待完成)

16. 含 e^z 形式的函数极限,通常取 $z=\mathrm{Re}z=x$ 并分别令 $x\to\pm\infty$加以反证[1].

[1]必要时还可令$z=\mathrm{i}y$进一步反证

(1) 令 $z=\mathrm{Re}z=x$，则 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{z}{\mathrm{e}^z}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\to 0$；$x\to-\infty$ 时，$\dfrac{z}{\mathrm{e}^z}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\to-\infty$. 两者不相等，故极限不存在.

(2) 令 $w=\dfrac{1}{z}$，则 $z\to 0$ 时 $w\to\infty$，且 $\sin w=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}$. 令 $w=\mathrm{Re}w=u$，则 $u\to\infty$ 时，

$$\frac{\sin w}{w}\to 0.$$

再令 $w=\mathrm{iIm}w=\mathrm{i}v$，则 $v\to\infty$ 时，

$$\frac{\sin w}{w}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}w}=\frac{\mathrm{e}^{v}-\mathrm{e}^{-v}}{2v}\to+\infty.$$

可见两者不相等，原极限不存在.

(3) 令 $z=\mathrm{Re}z=x$，则 $x\to 1^+$ 时，$\dfrac{z\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z-1}=\dfrac{x\mathrm{e}^{1/(x-1)}}{\mathrm{e}^x-1}\to\dfrac{+\infty}{\mathrm{e}-1}=+\infty$；$x\to 1^-$ 时，$\dfrac{z\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{\mathrm{e}^z-1}\to\dfrac{-\infty}{\mathrm{e}-1}=-\infty$. 两者不相等，故极限不存在.

17. 取 $y=kx$，其中 k 可从 $-\infty$ 取到 $+\infty$，那么 $z=x+\mathrm{i}y=(1+\mathrm{i}k)x$，则

$$|z+\mathrm{e}^z|\geqslant\big||\mathrm{e}^z|-|z|\big|=\left|\mathrm{e}^x-\sqrt{1+k^2}|x|\right|$$

对任意取定的 $|k|<+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$|z+\mathrm{e}^z|\geqslant\mathrm{e}^x-\sqrt{1+k^2}x$，此时 $|z+\mathrm{e}^z|\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$|z+\mathrm{e}^z|\geqslant-\sqrt{1+k^2}x-\mathrm{e}^x$，即 $|z+\mathrm{e}^z|\to+\infty+0=+\infty$.
特别地，当 $k=\infty$ 时，$x=0$，代入得

$$|z+\mathrm{e}^z|=\left|\mathrm{i}y+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right|\geqslant|y-1|,$$

因此 $y\to\infty$ 时，$|z+\mathrm{e}^z|\to+\infty$.
综上，$\lim\limits_{z\to\infty}(z+\mathrm{e}^z)=\infty$.

18. (1) $\sin z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=2\implies(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2-4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1=0\implies\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$，因此

$$\begin{aligned}z&=-\mathrm{i}\mathrm{Ln}[(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}]=-\mathrm{i}[\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+2k\pi\mathrm{i}]\\&=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi-\mathrm{i}\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)\quad(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

(2) $\cosh z=\dfrac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}=0\implies\mathrm{e}^{2z}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\implies z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$.

(3) $\mathrm{e}^z=A\implies z=\mathrm{Ln}A=\ln|A|+\mathrm{i}(\arg A+2k\pi)\ (k\in\mathbb{Z})$.

19. (1) 奇点：$\mathrm{e}^z+1=0\implies z=(2k+1)\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$，即解析区域为 $D=\{z\in\mathbb{C}|z\neq(2k+1)\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z}\}$，该函数微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^z}\right)=-\frac{\mathrm{e}^z}{(1+\mathrm{e}^z)^2}\quad(z\in D).$$

(2) 奇点：$\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = 2 \implies z = \mathrm{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})\mathrm{i}] = \ln\big(2 \pm \sqrt{3}\big) + \mathrm{i}\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$，即解析区域为

$$D = \{z \in \mathbb{C} | z \neq \ln\Big(2 \pm \sqrt{3}\Big) + \left(2k + \frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

该函数微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{\sin z - 2}\right) = -\frac{\cos z}{(\sin z - 2)^2} \quad (z \in D).$$

(3) 奇点：$z - 1 = 0$，即解析区域 $D = \{z \in \mathbb{C} | z \neq 1\}$，该函数微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}\right) = \left[1 - \frac{z}{(z-1)^2}\right] \exp\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

20. (1) 由定义，

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 + z_2) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2})}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}} \\
&= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.
\end{aligned}$$

(2) 由定义，

$$\begin{aligned}
\sinh(z_1 + z_2) &= \frac{\mathrm{e}^{z_1+z_2} - \mathrm{e}^{-(z_1+z_2)}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{-z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z_2} + \mathrm{e}^{-z_2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{z_1} + \mathrm{e}^{-z_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z_2} - \mathrm{e}^{-z_2}}{2} \\
&= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.
\end{aligned}$$

(3) 记 $w = \mathrm{Arccos}\ z$，则 $z = \cos w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2} \implies (\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2 - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0$，解得[2]

$$w = \mathrm{Arccos}\ z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

21. 记 $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$，则

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y,$$

因此 $\mathrm{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y$, $\mathrm{Im}(\sin z) = \cos x \sinh y$,

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2} = \sqrt{\sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y} \\
&= \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}.
\end{aligned}$$

[2]这里根式函数默认多值，因此无需“±”号

22. 记 $z = x + \mathrm{i}y$，则

$$\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cos(\mathrm{i}y) - \sin x \sin(\mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y,$$

因此当 $\cos z \in \mathbb{R}$ 时，其虚部

$$\mathrm{Im}(\cos z) = -\sin x \sinh y = 0 \implies \sin x = 0 \quad \text{或} \quad \sinh y = 0,$$

即 $x = \mathrm{Re}\ z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ 或 $y = 0$.

23. (1) $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi\mathrm{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\ln(-1) = \pi\mathrm{i}$;

(2) $\mathrm{Ln}\mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i}\Big(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\Big) = \Big(2k + \dfrac{1}{2}\Big)k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\ln \mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$;

(3) $1^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}k\pi\mathrm{i}}$, $(-2)^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}(-2)} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}[\ln 2 + (2k+1)\pi\mathrm{i}]}$,
$2^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}2} = \mathrm{e}^{-2k\pi + \mathrm{i}\ln 2}$,
$(3-4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} = \exp\big[(\ln 5 - 2k\pi + \arctan \frac{4}{3}) + \mathrm{i}(\ln 5 + 2k\pi - \arctan \frac{4}{3})\big]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(4) $\cos(2+\mathrm{i}) = \cos 2 \cosh 1 - \mathrm{i} \sin 2 \sinh 1$, $\sin 2i = \mathrm{i} \sinh 2$,
$\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\ln 2\right) = \dfrac{\cos(\mathrm{i}\ln 2) + \sin(\mathrm{i}\ln 2)}{\cos(\mathrm{i}\ln 2) - \sin(\mathrm{i}\ln 2)} = \dfrac{\cosh(\ln 2) + \mathrm{i}\sinh(\ln 2)}{\cosh(\ln 2) - \mathrm{i}\sinh(\ln 2)} = \dfrac{8 + 15\mathrm{i}}{17}$,
$\coth(2+\mathrm{i}) = \dfrac{\cosh 2 \cos 1 + \mathrm{i} \sinh 2 \sin 1}{\sinh 2 \cos 1 + \mathrm{i} \cosh 2 \sin 1} = \dfrac{\sinh 2 \cosh 2 - \mathrm{i} \sin 1 \cos 1}{\sin^2 1 + \sinh^2 2} = \dfrac{\sinh 4 - \mathrm{i} \sin 2}{\cosh 4 - \cos 2}$.

(5) 记 $w = \mathrm{Arcsin}\ \mathrm{i}$，则 $\mathrm{i} = \sin w = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}} \implies (\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0 \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = -1 \pm \sqrt{2}$，即

$$w_1 = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\sqrt{2} - 1) = 2k\pi - \mathrm{i}\ln\Big(\sqrt{2} - 1\Big) \ (k \in \mathbb{Z}),$$
$$w_2 = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(-\sqrt{2} - 1) = (2k+1)\pi - \mathrm{i}\ln\Big(\sqrt{2} + 1\Big) \ (k \in \mathbb{Z}).$$

后同，故略去.

24. 注意到 $(a^b)^c =$

2 解析函数的积分表示

1. C 上 z 的参数方程为 $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

(1) θ 从 π 到 0，因此

$$\int_C \frac{2z-3}{z}\,\mathrm{d}z=\int_\pi^0\left(2-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\cdot 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\int_0^\pi(4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-3)\,\mathrm{d}\theta$$
$$=-\mathrm{i}\left(-4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-3\theta\right)\Big|_0^\pi=8+3\pi\mathrm{i}.$$

(2) θ 从 π 到 2π，因此

$$\int_C \frac{2z-3}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_0^\pi(4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-3)\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\left(-4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-3\theta\right)\Big|_\pi^{2\pi}=8-3\pi\mathrm{i}.$$

(3) θ 从 0 到 2π，因此

$$\int_C \frac{2z-3}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\left(-4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-3\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=-6\pi\mathrm{i}.$$

2. (1) 参数方程：$z=\mathrm{i}y\ (-1\leqslant y\leqslant 1)$，因此

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}|z|\,\mathrm{d}z=\int_{-1}^1|y|\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{d}y=2\mathrm{i}\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=\mathrm{i}.$$

(2) 参数方程：$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 从 $\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，因此

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}|z|\,\mathrm{d}z=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{i}.$$

(3) 参数方程：$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$，因此

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}|z|\,\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{i}.$$

3. (1) 代入 $x=0$，得

$$\left|\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}(x^2+\mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{-1}^1\left|\mathrm{i}y^2\right|\,|\mathrm{d}z|\leqslant\int_{-1}^1 1\,\mathrm{d}y=2.$$

(2) 注意到 $|x^2+\mathrm{i}y^2|=\sqrt{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}\leqslant x^2+y^2=|z|^2=1$，则

$$\left|\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}(x^2+\mathrm{i}y^2)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\ |\mathrm{d}z|=\int_{-\frac{c\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

4. z 仅在 x 上变动，虚部恒为 1，因此

$$\left|\int_{\mathrm{i}}^{2+\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right|\leqslant\int_0^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}=\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\leqslant\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{0+1}=2.$$

5. 由于奇点 $z=-2$ 位于闭路 $|z|=1$ 围成的闭区域外，且 $\dfrac{1}{z+2}$ 在此区域内解析，故由柯西积分定理，

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z=0.$$

注意到 z 在此闭路上参数方程为 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 从 0 到 2π，因此

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

代入 $\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$，则有

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z\right)=0.$$

6. (1) 原式 $=2\sin\dfrac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2\mathrm{i}}=2\cos\mathrm{i}=2\cosh 1.$

(2) 勘误：依答案此题上限应改为“1”而非“i”，但此处按原题干进行计算.

原式 $=z+\mathrm{i}z^4\Big|_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}=2\mathrm{i}.$

(3) 原式 $=-\mathrm{e}^{-z}\Big|_{-\pi\mathrm{i}}^{0}=-2.$

7. 构造 $\displaystyle\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{i}\alpha$. 由题设条件，$\displaystyle\lim_{z\to\infty}zf(z)=A\implies$ 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists R_c(\varepsilon)>0$，当 $|z|>R_c$ 时，$|zf(z)-A|<\dfrac{\varepsilon}{\alpha}$，故当 $R>R_c$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}A\alpha\right|&=\left|\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z-A\int_{C_R}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{C_R}\frac{zf(z)-A}{z}\,\mathrm{d}z\right|\\&\leqslant\int_{C_R}\frac{|zf(z)-A|}{|z|}\,|\mathrm{d}z|<\int_0^{\alpha}\frac{\varepsilon}{\alpha R}\cdot R\,\mathrm{d}\theta=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}A\alpha.$

8. 记 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，那么 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$，由上一题结论，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\cdot 0\cdot 2\pi=0.$$

9. 记 $f(z)=\mathrm{e}^z$，由柯西积分公式，

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(0)=2\pi\mathrm{i}\cdot 1=2\pi\mathrm{i}.$$

设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}[-\sin(\sin\theta)+\mathrm{i}\cos(\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta\,.$$

代入 $\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$，得

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z\right)=0.$$

10. $\dfrac{e^z}{1+z^2}$ 的奇点为 $z_1=-i, z_2=i$，那么

(1) 记 $f(z)=\dfrac{e^z}{z+i}$，由柯西积分公式，

$$\int_C \frac{e^z}{1+z^2}\,dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i\cdot\frac{e^i}{2i} = \pi e^i.$$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{e^z}{z-i}$，由柯西积分公式，

$$\int_C \frac{e^z}{1+z^2}\,dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\cdot\frac{e^{-i}}{-2i} = -\pi e^{-i}.$$

(3) 将其因式分解，结合柯西积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{1+z^2}\,dz &= \frac{1}{2i}\int_C\left(\frac{e^z}{z-i}-\frac{e^z}{z+i}\right)dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i}(e^i-e^{-i})\\ &= 2\pi i\sin 1.\end{aligned}$$

另解 利用柯西积分定理，取 $z=i,-i$ 附近极小且路径沿正向的圆周，则

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2} &= \int_{|z-i|\leqslant\varepsilon_1}\frac{dz}{1+z^2}+\int_{|z+i|\leqslant\varepsilon_2}\frac{dz}{1+z^2} = \pi e^i-\pi e^{-i}\\ &= 2\pi i\sin 1.\end{aligned}$$

11. 分如下两种情况讨论：

(1) $r<1$ 时，函数只有奇点 $z=0$，则记 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)}$，

$$\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)} = 2\pi i f'(0) = 2\pi i\cdot\left.\frac{-2z}{(z^2-1)^2}\right|_{z=0} = 0.$$

(2) $r>1$ 时，函数有奇点 $z=0,1,-1$，则将其因式分解，得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)} &= \frac{1}{2}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z+1}\right)dz\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i(1-0-1) = 0.\end{aligned}$$

另解 由柯西积分定理，取 $z=0,1,-1$ 附近充分小且路径沿正向的圆周，则

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)} &= \sum_{k=1}^{3}\int_{|z-k+2|\leqslant\varepsilon_k}\frac{dz}{z^2(z+1)(z-1)}\\ &= 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2}-0+\frac{1}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

综上，该积分值为零.

12. (1) 奇点 $z=-i$，记 $f(z)=\dfrac{z}{9-z^2}$，则

$$\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\cdot\frac{-i}{10} = \frac{\pi}{5}.$$

(2) 奇点 $=-\mathrm{i},3,-3$，则

$$\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(9-z^2)(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{6}\int_C \left(\frac{3}{5}\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{3-\mathrm{i}}\frac{1}{z+3} - \frac{1}{3+\mathrm{i}}\frac{1}{z-3}\right)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{3}{5}\cdot 1 - \frac{1}{3-\mathrm{i}}\cdot 1 - \frac{1}{3+\mathrm{i}}\cdot 1\right) = \frac{\pi}{3}\mathrm{i}\cdot 0 = 0.$$

另解 由柯西积分定理，取 $z=-\mathrm{i},3,-3$ 附近充分小且路径沿正向的圆周，则

$$\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{(9-z^2)(z+\mathrm{i})} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left[-\frac{\mathrm{i}}{10} - \frac{1}{2(3+\mathrm{i})} - \frac{1}{2(-3+\mathrm{i})}\right] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{10}+\frac{\mathrm{i}}{10}\right) = 0.$$

13. (1) $z_0=1$ 时，其为 C 所包围的闭域内的奇点，由柯西积分公式，

$$g(1) = 2\pi\mathrm{i}\cdot(2z^2-z+1)\Big|_{z=1} = 4\pi\mathrm{i}.$$

(2) $z_0>2$ 时，C 所包围的闭域内无奇点且被积函数在此闭域内解析，由柯西积分定理，$g(z_0)\equiv 0$.

14. 记 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2}$，由柯西积分公式，

$$\int_C \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} = \int_C \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2} = 2\pi\mathrm{i}f'(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{2\mathrm{i}z}{(z+\mathrm{i})^3}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}.$$

15. 注意到 $\mathrm{Ln}\ p(z) = \sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}(z-a_i)$，因此

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Ln}\ p(z)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-a_i}.$$

设 $p(z)$ 有 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_m}$ $(1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n)$ 这 m 个零点，则

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{1}{z-a_j}\,\mathrm{d}z = \begin{cases}1, & j\in\{k_1,k_2,\cdots,k_m\},\\ 0, & j\in\{1,2,\cdots,n\}-\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}.\end{cases}$$

因此 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{p'(z)}{p(z)}\,\mathrm{d}z = 1+1+\cdots+1=m$，此即多项式函数 $p(z)$ 的零点个数.

16. 假设存在这样的 $f(z)$，当其在闭圆 $|z|\leqslant 1$ 内解析时，以 C 为绕边界的正向路径，由柯西积分定理，

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

又其在 C 上的值为 $f(z)=\dfrac{1}{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，因此

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\neq 0.$$

两个积分值不同，矛盾，故假设不成立，这样的 $f(z)$ 并不存在.

17. 分两种情况讨论：

(1) 当 $z\in D$ 时，$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A \implies$ 对 $\forall\varepsilon>0, z\in\mathbb{C}$，总 $\exists R\in\mathbb{R}^+$，当 $|\zeta|>R$ 时，满足 $|f(\zeta)-A|<\varepsilon-|f(z)-A|$. 现作以以点 z 为圆心、充分大的 R 为半径[3]的正向圆

[3] Γ 围成的闭域包含 C 围成的闭域

周 Γ，记 $L=\Gamma+C^-$，由柯西积分公式，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

18. 当 $f(z)$ 在 D 内无零点时，函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在 D 内同样解析且不恒为常数，由最大模原理，$|g(z)|$ 的最大值不可能在 D 内取到，即 $|f(z)|$ 的最小值不可能在 D 内取到.

19. 反证法. 假设 $f(z)$ 在 D 内无零点，同时 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 内解析（必然连续），由上一问，$|f(z)|$ 的最小值只可能在边界上取到，但对任一边界上的点，都有 $|f(z)|>m>|f(0)|$，两者矛盾. 故假设不成立，$f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

20. 对 $\forall R>0$，$f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ 总在 $|z|\leqslant R$ 内解析. 当 $|z|=R$ 时，记 $M=\max\{a_n\}$，则

$$\begin{aligned}|f(z)|\Big|_{|z|=R} &\geqslant |a_n||z|^n-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^k = M\left(R^n-\frac{R^n-1}{R-1}\right)\\ &=\frac{R^n(R-2)+1}{R-1}M>\frac{(R-2)+1}{R-1}M=M.\end{aligned}$$

又因为 $|f(0)|=|a_0|\leqslant M$，故 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 内至少有一个零点. 考虑到 R 任取，故 $f(z)=0$ 在全平面上至少有一个零点.

3 调和函数

1. 由题意,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6ax + 2by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2cx + 6dy,$$
由于 u 是调和函数，故
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(3a + c)x + 2(b + 3d)y \equiv 0,$$
即满足关系 $c = -3a, b = -3d$.

2. 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. 由于 $f(z)$ 解析，故 $u(x,y), v(x,y)$ 均为调和函数, 那么

(1) 记 $g(x,y) = \ln|f(z)| = \ln\sqrt{u^2+v^2} = \dfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$，并改记 $x = x_1, y = x_2$，则
$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{u^2+v^2}\sum_{i=1}^{2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\right] \\
&= -\frac{2}{(u^2+v^2)^2}\sum_{i=1}^{2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{u^2+v^2}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + v\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right] \\
&= \frac{(v^2-u^2)|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + (u^2-v^2)|\boldsymbol{\nabla}v|^2 - 4uv(\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v)}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^2\Delta u + v^2\Delta v}{u^2+v^2}.
\end{aligned}$$
利用 C-R 方程可得
$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\nabla}u|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
&= |\boldsymbol{\nabla}v|^2, \\
\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= 0,
\end{aligned}$$
并代入 $\Delta u = \Delta v = 0$，可得
$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) &= \frac{[(v^2-u^2) + (u^2-v^2)]|\boldsymbol{\nabla}u|^2 - 4uv\cdot 0}{(u^2+v^2)^2} + \frac{0+0}{u^2+v^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$
因此 $g(x,y) = \ln|f(z)|$ 为调和函数.

(2) 直接验证:
$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2) = 2(|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v|^2 + u\Delta u + v\Delta v) \\
&= 2(|\boldsymbol{\nabla}u|^2 + |\boldsymbol{\nabla}v|^2) = 4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\
&= 4|f'(z)|^2.
\end{aligned}$$

3. 由题意，$\Delta u = 0$，则

(1) 对于 u^2，

$$\Delta(u^2) = 2\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + u\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}\right) = 2(|\boldsymbol{\nabla} u|^2 + u\Delta u) = 2|\boldsymbol{\nabla} u|^2 \geqslant 0.$$

由于 u 不恒为常数，故 $\boldsymbol{\nabla} u$ 不恒为 $\mathbf{0}$，即 Δu 不恒为 0，u^2 不是调和函数.

(2) 当 $f(u)$ 是调和函数时，

$$\begin{aligned}\Delta f(u) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}\right)\right] = f'(u)\Delta u + f''(u)|\boldsymbol{\nabla} u|^2 \\ &= f''(u)|\boldsymbol{\nabla} u|^2 \equiv 0,\end{aligned}$$

由上一问可知，$|\boldsymbol{\nabla} u|$ 不恒为 0，因此等式成立当且仅当 $f''(u) \equiv 0$，积分得

$$f(u) = C_1 u + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为由初始条件确定的常数，即要求 $f(u)$ 是一次函数.

4. 设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，由题意，$f(z)$ 解析.

(1) 先验证 $u(x,y)$ 为调和函数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 12xy - 3y^2\right) = 6x - 12y, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-6x^2 - 6xy + 6y^2\right) = -6x + 12y,\end{aligned}$$

故 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，即 u 为调和函数.
由 C-R 方程，虚部各偏导

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = 6(x^2 + xy - y^2), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3(x^2 - 4xy - y^2),\end{aligned}$$

代入初始条件 $v(0,0) = \mathrm{Im}\, f(0) = 0$，积分得

$$\begin{aligned}v(x,y) &= v(0,0) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} 6(s^2 + st - t^2)\,\mathrm{d}s + 3(s^2 - 4st - t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int_0^x (s^2 + st - t^2)\Big|_{t=0}\,\mathrm{d}s + 3\int_0^y (s^2 - 4st - t^2)\Big|_{s=x}\,\mathrm{d}t \\ &= 2x^3 + 3x^2 y - 6xy^2 - y^3,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) = u + \mathrm{i}v &= (x^3 - 6x^2 y - 3xy^2 + 2y^3) + \mathrm{i}(2x^3 + 3x^2 y - 6xy^2 - y^3) \\ &= x^3(1+2\mathrm{i}) + 3\mathrm{i}x^2 y(1+2\mathrm{i}) - 3xy^2(1+2\mathrm{i}) - \mathrm{i}y^3(1+2\mathrm{i}) \\ &= [x^3 + 3x^2(\mathrm{i}y) + 3x(\mathrm{i}y)^2 + (\mathrm{i}y)^3](1+2\mathrm{i}) = (x+\mathrm{i}y)^3(1+2\mathrm{i}) \\ &= (1+2\mathrm{i})z^3.\end{aligned}$$

(2) 先验证 $u(x,y)$ 为调和函数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{\mathrm{e}^x[(x+1)\cos y - y\sin y]\} = \mathrm{e}^x[(x+2)\cos y - y\sin y],$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\{-\mathrm{e}^x[y\cos y + (x+1)\sin y]\} = -\mathrm{e}^x[(x+2)\cos y - y\sin y],$$

故 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，即 u 为调和函数.
由 C-R 方程，虚部各偏导

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{e}^x[(x+1)\sin y + y\cos y],$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x[(x+1)\cos y - y\sin y],$$

代入初始条件 $v(0,0) = \mathrm{Im}\ f(0) = 0$，积分得

$$\begin{aligned} v(x,y) &= v(0,0) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathrm{e}^s[(s+1)\sin t + t\cos t]\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^s[(s+1)\cos t - t\sin t]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^s[(s+1)\sin t + t\cos t]\Big|_{t=0}\,\mathrm{d}s + \int_0^y \mathrm{e}^s[(s+1)\cos t - t\sin t]\Big|_{s=x}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \mathrm{e}^x[(x+1)\sin y - y\cos y + \sin y] = \mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f(z) &= u + \mathrm{i}v = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y) \\ &= x\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) + \mathrm{i}y\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = (x+\mathrm{i}y)\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \\ &= z\mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

(3) 先验证 $v(x,y)$ 为调和函数:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2+y^2]^2}\right\} = \frac{2y[y^2-3(x+1)^2]}{[(x+1)^2+y^2]^3},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}\right\} = \frac{6(x+1)^2y-2y^3}{[(x+1)^2+y^2]^3},$$

故 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$，即 v 为调和函数.
由 C-R 方程，实部各偏导

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2+y^2]},$$

代入初始条件 $u(0,0)=\mathrm{Re}\,f(0)=2$，积分得

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= u(0,0)-\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{(s+1)^2-t^2}{[(s+1)^2+t^2]}\,\mathrm{d}s+\frac{2(s+1)t}{[(s+1)^2+t^2]}\,\mathrm{d}t\\
&= 2-\int_0^x\left.\frac{(s+1)^2-t^2}{[(s+1)^2+t^2]^2}\right|_{t=0}\mathrm{d}s-\int_0^y\left.\frac{2(s+1)t}{[(s+1)^2+t^2]^2}\right|_{s=x}\mathrm{d}t\\
&= 2-\int_0^x\frac{\mathrm{d}s}{(s+1)^2}-2(x+1)\int_0^y\frac{t\,\mathrm{d}t}{[(x+1)^2+t^2]^2}\\
&= 2-\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}=1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(z)=u+\mathrm{i}v&=\left[1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right]-\mathrm{i}\frac{y}{(x+1)^2+y^2}=1+\frac{(x+1)-\mathrm{i}y}{(x+1)^2+y^2}\\
&=1+\frac{1}{(x+1)+\mathrm{i}y}=1+\frac{1}{1+z}.
\end{aligned}
$$

5. 由于 $u(z)$ 在全平面有界且调和，那么可确定唯一的解析函数 $f(z)$，满足 $u(z)=\mathrm{Re}\,f(z)$. 利用指数函数性质，构造函数 $\mathrm{e}^{f(z)}$，由于 $u(z)$ 有界，即 $\exists M>0$，使得 $|u(z)|\leqslant M$，故

$$
\left|\mathrm{e}^{f(z)}\right|=|\mathrm{e}^{u}|\cdot\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}\right|=\mathrm{e}^{u}\in[\mathrm{e}^{-M},\mathrm{e}^{M}],
$$

即 $\mathrm{e}^{f(z)}$ 在全平面同样有界. 由 Liouville 定理，$\mathrm{e}^{f(z)}$ 为常数，即 $f(z)$ 为常数.

4 解析函数的级数展开

1. (1) 注意到

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 绝对收敛.

(2) 由于 $|z^n| = |z|^n \equiv 1$，故 $\lim_{n\to\infty} z_n$ 必定非 0，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 发散.

(3) 当 $z=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；当 $z=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. 由Leibniz 判别法，该交错级数收敛.

2. (1) 注意到 $|z| \leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，原级数在 $|z| \leqslant 1$ 上绝对一致收敛.

(2) i. 当 $|z| \leqslant r$ $(r<1)$ 时，

$$|z^n| = |z|^n \leqslant r^n,$$

而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$ $(r<1)$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，原级数绝对一致收敛.

ii. 当 $|z|<1$ 时，考虑该级数的部分和：

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} z.$$

可见 $\{S_n(z)\}$逐点收敛于 $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{z}{1-z}$.
假定 $\{S_n(z)\}$ 一致收敛于 $f(z)$，即对于 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，满足

$$|S_n(z) - f(z)| = \left|\frac{1-z^n}{1-z} z - \frac{z}{1-z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} < \varepsilon.$$

另一方面，可取 $z = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}} \in \mathbb{R}^+$，使得

$$|S_n(z) - f(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} > |z|^{n+1} = \frac{1}{2}.$$

即所选择的 ε 不能任意小，两者相矛盾，因此假设不成立，$\{S_n(z)\}$ 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 上不一致收敛.

3. (1) 函数的唯一奇点为 $z_0 = 1$，因此收敛域为 $|z| < 1$.

$$\frac{1}{1-z} + \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

(2) 函数无奇点，收敛域为全平面，代入 $\cos z$ 的 Taylor 展开式得

$$\begin{aligned}
(1 - z + z^2)\cos z &= (1 - z + z^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n} - z^{2n+1} + z^{2n+2}}{(2n)!} \\
&= 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\right] z^{2n} - \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n+1} \\
&= 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n^2 - 2n - 1}{(2n)!} z^{2n} - \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n+1} \\
&= 1 - z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(1 - n - n^2)\cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right]\frac{z^n}{n!} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2 - n - 1)\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right]\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty.
\end{aligned}$$

(3) 函数无奇点，收敛域为全平面，直接展开：

$$\mathrm{e}^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}, \quad |z| < \infty.$$

(4) 函数无奇点，收敛域为全平面. 考虑 $\mathrm{e}^z(\cos z \pm \mathrm{i}\sin z) = \mathrm{e}^{(1\pm\mathrm{i})z}$，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z(\cos z + \mathrm{i}\sin z) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})z} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1+\mathrm{i})z]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{n!} z^n, \\
\mathrm{e}^z(\cos z - \mathrm{i}\sin z) = \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})z} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(1-\mathrm{i})z]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{n!} z^n,
\end{aligned}$$

两式相加除以 2 得

$$\mathrm{e}^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}}{2}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4} z^n, \quad |z| < \infty.$$

(5) 函数奇点为 $z_1 = 1, z_2 = 2$，因此收敛域为 $|z| < 1$，分解后展开：

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

(6) 函数无奇点，收敛域为全平面，利用倍角公式，

$$\begin{aligned}
\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{(2n)!} z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{(2n)!} z^n, \quad |z| < \infty.
\end{aligned}$$

(7) 函数奇点为所有使 $\cos z=0$ 的点，即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=-1$，解得 $z=\mathrm{i}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. 注意到 $|z|=\left|k+\dfrac{1}{2}\pi\right|\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，因此收敛域为 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$. 设

$$\tan z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<\frac{\pi}{2},$$

由于题目只要求写出前四项[4]，并且 $\cos z,\tan z$ 的 Taylor 级数在此收敛域内均一致收敛，那么

$$\begin{aligned}\sin z=\cos z\tan z&=\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots)\\&=a_0+a_1z+\left(a_2-\frac{a_0}{2}\right)z^2+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)z^3+\cdots\\&=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots,\end{aligned}$$

对应系数解得 $a_0=a_2=0,a_1=1,a_3=\dfrac{1}{3}$，因此

$$\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<\frac{\pi}{2}.$$

(8) 函数有唯一奇点 $z_0=1$，因此收敛域为 $|z|<1$. 注意到 $\dfrac{1}{1-z}$ 的 Taylor 级数一致收敛于其本身，利用导数展开：

$$\frac{z}{(1-z)^2}=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=0}^{\infty}nz^n,\quad |z|<1.$$

(9) 函数无奇点，收敛域为全平面，注意到

$$\mathrm{e}^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!},$$

并且 e^{z^2} 的 Taylor 级数一致收敛于其本身，故

$$\int_0^z\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{u^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!},\quad |z|<\infty.$$

(10) 由于 $\sin z$ 在全平面无奇点，且

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n},$$

可见 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在全平面也解析，收敛域为全平面，因此

$$\begin{aligned}\int_0^z\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u&=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^z u^{2n}\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n+1}}{(2n+2)!-(2n+1)!},\quad |z|<\infty.\end{aligned}$$

[4] 根据答案意思应该是展到第三阶即 z^0,z^1,z^2,z^3 这四项

4. 由题中所设，

$$\begin{aligned}1 &= (1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z^n - z^{n+1} - z^{n+2})\\ &= C_0 + (C_1 - C_0)z + \sum_{n=0}^{\infty}(C_{n+2} - C_{n+1} - C_n)z^{n+2},\end{aligned}$$

对比系数可知，$C_0 = C_1 = 1$，$C_{n+2} - C_{n+1} - C_n = 0$（恰为**斐波那契数列**），因此前五项为

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = C_0 + C_1 = 2,\quad C_3 = C_1 + C_2 = 3,\quad C_4 = C_2 + C_3 = 5,$$

写成展开式为

$$\frac{1}{1-z-z^2} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \cdots.$$

该递推的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$，解得特征根

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in (1,\infty),\quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in (-1,0),$$

则各系数形式为

$$C_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n = A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

因此收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

5. (1) 在其收敛域内，题设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)t^n$ 一致收敛于于函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$，故可以逐项求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}[p_n(z)t^n]}{\mathrm{d}t}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n(z)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(z)t^n\\ &= -\frac{t-z}{(1-2tz+t^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

移项得

$$\begin{aligned}&(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(z)t^n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(z)(t^n - 2zt^{n+1} + t^{n+2})\\ =&p_1(z) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)p_{n+2}(z) - 2z(n+1)p_{n+1}(z) + np_n(z)]t^{n+1},\end{aligned}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(z)t^n &= -\frac{t-z}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = -(t-z)\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)t^n \\
&= zp_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty}[zp_{n+1}(z)-p_n(z)]t^{n+1},
\end{aligned}
$$

由Taylor 展开式的唯一性，对比系数可知

$$
(n+2)p_{n+2}(z) - 2z(n+1)p_{n+1}(z) + np_n(z)t^{n+1} = zp_{n+1}(z) - p_n(z) \quad (n\in\mathbb{N}),
$$

整理可得

$$
(n+1)p_{n+1}(z) - (2n+1)zp_n(z) + np_{n-1}(z) = 0 \quad (n\geqslant 1). \tag{1}
$$

(2) 条件同上一问，但此时变为对 z求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}[p_n(z)t^n]}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty}p_n'(z)t^n \\
&= \frac{t}{(1-2tz+t^2)^{3/2}},
\end{aligned}
$$

移项得

$$
\begin{aligned}
&(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}p_n'(z)t^n \\
=&\sum_{n=0}^{\infty}p_n'(z)(t^n - 2zt^{n+1} + t^{n+2}) \\
=&p_0'(z) + [p_1'(z) - 2zp_0'(z)]t + \sum_{n=0}^{\infty}[p_{n+2}'(z) - 2zp_{n+1}'(z) + p_n'(z)]t^{n+2},
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
(1-2tz+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}p_n'(z)t^n &= \frac{t}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = t\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)t^n \\
&= p_0(z)t + \sum_{n=0}^{\infty}p_{n+1}(z)t^{n+2},
\end{aligned}
$$

由Taylor 展开式的唯一性，对比系数可知

$$
p_{n+2}'(z) - 2zp_{n+1}'(z) + p_n'(z) = p_{n+1}(z) \quad (n\in\mathbb{N}),
$$

整理可得

$$
p_n(z) = p_{n+1}'(z)2 - 2zp_n'(z) + p_{n-1}'(z) \quad (n\geqslant 1). \tag{2}
$$

(3) 式(1)×2 再对 z 求导得

$$
2(2n+1)p_n(z) + 2(2n+1)zp_n'(z) = (2n+2)p_{n+1}'(z) + np_{n-1}'(z), \tag{3}
$$

式(2)×$(2n+1)$−(3)得

$$
(2n+1)p_n(z) = p_{n+1}'(z) - p_{n-1}'(z) \quad (n\geqslant 1). \tag{4}
$$

6. 构造复数 $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，那么 $|z| = |a| < 1$，且

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} &= \frac{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}\\ &= \frac{(1-a\cos\theta)+\mathrm{i}(a\sin\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}.\end{aligned}$$

而 $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$

(1) 取其实部:

$$\begin{aligned}\frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos n\theta.\end{aligned}$$

(2) 取其虚部:

$$\begin{aligned}\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n\sin n\theta.\end{aligned}$$

(3) 对 $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ 在 $(0,z)$ 上积分得

$$\mathrm{Ln}(1-z) = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} u^n\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z u^n\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

对 $\displaystyle\frac{1}{1-\bar{z}} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ 在 $(0,\bar{z})$ 上积分得

$$\mathrm{Ln}(1-\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}^n\,\mathrm{d}\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\bar{z}} \bar{u}^n\,\mathrm{d}\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{z}^{n+1}}{n+1}.$$

两式相加得

$$\mathrm{Ln}(1-z)(1-\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}+\bar{z}^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2a^{n+1}\cos(n+1)\theta}{n+1},$$

代入 $(1-z)(1-\bar{z}) = |1-z|^2 = 1-2a\cos\theta+a^2$，整理得

$$\ln\left(1-2a\cos\theta+a^2\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos n\theta}{n}.$$

7. 利用指数函数的 Taylor 展开，

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^z-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|z|}-1\\ &= |z|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!} = |z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!} \leqslant |z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = |z|\mathrm{e}^{|z|},\end{aligned}$$

综上，

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant |z|e^{|z|}.$$

8. 设 $f(z)$ 具有 m $(m\geqslant n)$ 级零点，则 $\exists f_1(z),\varphi_1(z)$ 在 z_0 点解析且非零，且使得

$$f(z)=(z-z_0)^m f_1(z),\quad \varphi(z)=(z-z_0)^n\varphi_1(z),$$

那么

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}&=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m f_1(z)}{(z-z_0)^n\varphi_1(z)}=\frac{f_1(z_0)}{\varphi_1(z_0)}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}\\&=\begin{cases}\dfrac{f_1(z_0)}{\varphi_1(z_0)}, & m=m,\\ 0, & m>n.\end{cases}\end{aligned}$$

当 $m\geqslant n$ 时，由 Leibniz 公式，

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}f^{(n)}(z)&=\lim_{z\to z_0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f_1^{(k)}(z)\frac{m!}{(m-n+k)!}(z-z_0)^{m-n+k}\\&=\frac{m!}{(m-n)!}f_1(z_0)\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}+0+0+\cdots+0\\&=\begin{cases}f_1(z_0), & m=m,\\ 0, & m>n,\end{cases}\\ \lim_{z\to z_0}\varphi^{(n)}(z)&=\lim_{z\to z_0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_1^{(k)}(z)\frac{n!}{k!}(z-z_0)^k=\varphi_1(z_0),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f^{(n)}(z)}{\varphi_1^{(n)}(z)}=\begin{cases}\dfrac{f_1(z_0)}{\varphi_1(z_0)}, & m=n,\\ 0, & m>n\end{cases}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

9. 由题意，总 $\exists f_1(z),g_1(z)$ 在 z_0 点解析且非零，则有

$$f(z)=(z-z_0)^m f_1(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n g_1(z).$$

(1) 代入得

$$f(z)g(z)=(z-z_0)^{m+n}[f_1(z)g_1(z)].$$

可见 $f_1(z_0)g_1(z_0)$ 解析且非零，故 $f(z)g(z)$ 具有 $(m+n)$ 阶零点.

(2) 代入得

$$\begin{aligned}f(z)+g(z)&=(z-z_0)^m f_1(z)+(z-z_0)^n g_1(z)\\&=(z-z_0)^n[(z-z_0)^{m-n}f_1(z)+g_1(z)],\end{aligned}$$

注意到

$$[(z-z_0)^{m-n}f_1(z)+g_1(z)]\Big|_{z=z_0}=\begin{cases}f_1(z)+g_1(z), & m=n,\\ g_1(z), & m>n\end{cases}\neq 0,$$

因此当 $m>n$ 时，$f(z)+g(z)$ 具有 n 阶零点；当 $m=n$ 时，由于可能出现 $(z-z_0)|[f_z(z_0)+g_1(z_0)]$ 的情况，因此 $f(z)+g(z)$ 具有不少于 n 阶的零点.

(3) 代入得

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

显然 $\dfrac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}\neq 0$，故 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 具有 $(m-n)$ 阶零点. 特别地，当 $m=n$ 时，$z=z_0$ 为其可去奇点.

10. (1) 由题意，

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(1-z)}&=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\\&=z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=-2}^{\infty}z^n.\end{aligned}$$

(2) 将 $\mathrm{e}^{1/z}$ 在 $z=0$ 附近展开成 Laurent 级数，取曲线 C 为 $|z|=1$，则令 $u=\dfrac{1}{z}$，对于 u 的积分路径同样为 $|u|=1$. 需要注意的是，若记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $u=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，而 θ 仍从 0 沿逆时针到 2π，但 u 的积分路径反向，故

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{e}^{1/z}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\xlongequal{u=1/z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-C}u^{n+1}\mathrm{e}^u\cdot\frac{-\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C u^{n-1}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\,.$$

i. 当 $n\geqslant 1$ 时，$u^{n-1}\mathrm{e}^u$ 在 $|u|\leqslant 1$ 内解析，由 Cauchy 积分定理，$a_n=0$.

ii. 当 $n\geqslant 0$ 时，记 $f(z)=\mathrm{e}^z$，则

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{e}^u}{u^{1-n}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{(-n)!}f^{(-n)}(0)=\frac{1}{(-n)!}.$$

综上，该函数的 Laurent 级数为

$$z^2\mathrm{e}^{1/z}=z^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n=z^2\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^n}{(-n)!}=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^{n+2}}{(-n)!}=\sum_{n=-\infty}^{2}\frac{z^n}{(2-n)!}.$$

另解 按提示，考虑 e^u 在 $u=0$ 附近的 Taylor 展开：$\mathrm{e}^u=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$. 令 $u=\dfrac{1}{z}$，则该函数的 Laurent 级数为

$$z^2\mathrm{e}^{1/z}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n\xlongequal{m=-n+2}z^2\sum_{m=-\infty}^{2}\frac{z^{m-2}}{(2-m)!}=\sum_{n=-\infty}^{2}\frac{z^n}{(2-n)!}.$$

11. 首先将该函数展开成 $\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right)$ 的形式.

(1) $0 \leqslant |z| < |a|$ 时，

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n, \quad \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n,$$

因此

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)z^n.$$

(2) $|a| < |z| < |b|$ 时，

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n, \quad \frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n,$$

因此

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{a^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right)$$

(3) 当 $|b| < |z| < \infty$ 时，

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}\left(\frac{a}{z}\right)^n, \quad \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n,$$

因此

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)z^n.$$

(4) $0 < |z-a| < |b-a|$ 时，

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = -\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n,$$

因此

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right] = -\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}.$$

(5) $|b-a| < |z-a| < \infty$ 时，

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b-a)^{n-1}}{(z-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}.\end{aligned}$$

(6) $0<|z-b|<|a-b|$ 时,

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-b)-(a-b)}=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{a-b}\right)^n,$$

因此

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}}-\frac{1}{z-b}\right]=-\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}.$$

(7) $|a-b|<|z-b|<\infty$ 时,

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-b)-(a-b)}=\frac{1}{z-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-b}{z-b}\right)^n,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)(z-b)}&=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+1}}-\frac{1}{z-b}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-b)^{n-1}}{(z-b)^{n+1}}\\&=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}.\end{aligned}$$

12. (1) $f(z)$ 在 $a=a_i$ $(i=1,2,3)$ 附近的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a_i)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a_i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a_i)^n.$$

当 a_i 为本性奇点时，$a_{-n}\neq 0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$；当 a_i 为 m 级极点时，$a_{-m}\neq 0$，且当 $n>m$ 时，$a_{-n}\equiv 0$；当 a_i 为可去奇点时，$a_{-n}\equiv 0$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

记在 $a=a_i$ 附近展开的 Laurent 级数的收敛半径为 R_i，那么当 $a=a_1$ 时，$R_1=|a_2-a_1|$，收敛域为 $0<|z-a_1|<|a_2-a_1|$；当 $a=a_2$ 时，$R_2=\min\{|a_1-a_2|,|a_3-a_2|\}=|a_2-a_1|$，收敛域为 $0<|z-z_2|<|a_2-a_1|$；当 $a=a_3$ 时，$R_3=|a_3-a_2|$，收敛域为 $0<|z-z_3|<|a_3-a_2|$.

(2) 当 a 为平面上其他点时，可在 a 点作 Taylor 展开：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n,\quad b_n=\left.\frac{\mathrm{d}^nf(z)}{\mathrm{d}z^n}\right|_{z=a}.$$

收敛半径 $R=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}|a_i-a|$，则收敛域为 $|z-a|<R$.

13. (1) 变形得 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2+4}=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$，而 $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}}\neq 0$，因此 $\pm 2\mathrm{i}$ 均为 1 级极点.

(2) 奇点满足 $\cos z=0$，即 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\in\mathbb{R}$ $(k\in\mathbb{Z})$. 记 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$，则 z_k 为 $\dfrac{1}{f(z)}=\cos z$ 的 1 级零点，因此 z_k 为 $\dfrac{1}{\cos z}$ 的 1 级极点.

(3) 奇点为 $z_0=1$，将函数在 z_0 附近作 Laurent 展开：

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}},$$

可见展开式的主要部分有无穷多项，因此 $z_0=1$ 为其本性奇点.

(4) 奇点为 $z_k=2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$，记 $f(z)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^z}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{f(z)}\right)\bigg|_{z=z_k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,(1-\mathrm{e}^z)\bigg|_{z=z_k}=-1,$$

因此 $z=z_k$ 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 1 级零点，故 $z=z_k$ 为 $f(z)$ 的 1 级极点.

(5) 奇点为 $z_0=0$，取 $z=\mathrm{Re}(z)=x$，则

$$\lim_{z\to0}\mathrm{e}^{-z}\cos\frac{1}{z}=1\cdot\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x},$$

而后者极限不存在，故 $\lim\limits_{z\to0}\mathrm{e}^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$ 极限必然不存在，$z_0=0$ 为其本性奇点.

(6) 奇点为 $z_1=0,z_2=1$，又因为

$$\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{e}^z-1}{z}=\lim_{z\to0}\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=\lim_{z\to0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}=1,$$

因此在 $z_1=0$ 附近，

$$\lim_{z\to0}\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=1\cdot\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

即 $z_1=1$ 为其可去奇点. 取 $z=\mathrm{Re}(z)=x$，则

$$\lim_{x\to1^+}\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\lim_{x\to1^+}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}-1}\lim_{x\to1^-}\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}\exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ 极限不存在，故 $z\to1$ 时其极限必然不存在.
综上，$z_1=0,z_2=1$ 分别为其可去奇点与本性奇点.

(7) 奇点为 $z_1=0,z_2=-1,z_3=3$，注意到

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}=1,$$

因此在 $z_1=0$ 附近，

$$\frac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{(z-3)^2(z+1)^3}\frac{\sin z}{z}\right],$$

故 $z_1=0$ 为其 1 级极点. 由于 $\sin z_2,\sin z_3\neq0$，z_2,z_3 分别为其 3 级、2 级极点.

(8) $\sin z-\sin a=2\cos\dfrac{z+a}{2}\sin\dfrac{z-a}{2}$，因此奇点为

$$z_k=(2k+1)\pi-a,\quad z_l=2l\pi+a,\quad k,l\in\mathbb{Z}.$$

记 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$，那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{f(z)}\right]\bigg|_{z=z_k}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sin z-\sin a\right)\bigg|_{z=z_k}=\cos z_k=-\cos a,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{f(z)}\right]\bigg|_{z=z_l}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sin z-\sin a\right)\bigg|_{z=z_l}=\cos z_l=\cos a,\end{aligned}$$

因此若 $a=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，则 z_k,z_l 均为其 2 级极点；若 a 为其他取值，则 z_k,z_l 均为其 1 级极点.

(9) 奇点为 $z_0=0$，将 $(1-\cos z)$ 在 z_0 附近作 Taylor 展开：

$$\frac{1-\cos z}{z^n}=\frac{1}{z^n}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\right]=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k-n},$$

因此若 $n<2$，则 $2k-n>0$，即 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z^n}=0$；若 $n=2$，则 $k=1$ 时 $2k-n=0$，即 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\dfrac{1}{2}$；若 $n>2$，则存在 z 的负幂次项，负幂次最高为 $-(2-n)=n-2$，此时 z_0 为其 $(n-2)$ 级极点.

综上，若 $n\leqslant2$，则 $z_0=0$ 为其可去奇点；若 $n\geqslant3$，则 $z_0=0$ 为其 $(n-2)$ 级极点.

14. (1) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2}{2+z^2}=1$，因此 ∞ 为其可去奇点.

(2) 取 $z=\mathrm{Re}(z)=x$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{\mathrm{e}^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{\mathrm{e}^x}=+\infty,$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{z^2+4}{\mathrm{e}^z}$ 极限不存在，故 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{z^2+4}{\mathrm{e}^z}$ 必然不存在，∞ 为其本性奇点.

(3) 令 $u=\dfrac{1}{z}$，那么

$$\lim_{z\to\infty}\exp\left(-z^{-2}\right)=\lim_{u\to0}\mathrm{e}^{-u^2}=1,$$

因此 ∞ 为其可去奇点.

(4) 将其在 $0<|z|<\infty$ 范围内作 Laurent 展开，得

$$\frac{1-\cos z}{z^n}=\frac{1}{z^n}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\right]=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k-n},$$

可见无论 n 取何值，当 $k\geqslant\max\left\{\left[\dfrac{n}{2}+1\right],0\right\}$ 时，该函数的展开式总有无穷多个正幂次项，因此 ∞ 为其本性奇点.

(5) 令 $u=\dfrac{1}{z}$，那么 $\dfrac{z^5}{z^2+8}=\dfrac{1}{(1+8u^2)u^3}$；而 $u_0=0$ 为 $\dfrac{1}{(1+8u^2)u^3}$ 的 3 级极点，故 ∞ 为 $\dfrac{z^5}{z^2+8}$ 的 3 级极点.

(6) 令 $u=\dfrac{1}{z}$，那么 $\sec\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\cos u}$. 由第 13(2) 题结论，$u_0=0$ 为其 1 级极点，故 ∞ 为 $\sec\dfrac{1}{z}$ 的 1 级极点.

(7) 令 $u=\dfrac{1}{z}$，那么 $\sin\dfrac{1}{z}=\sin u$，而 $\lim\limits_{u\to 0}\sin u=0$，故 u_0 为 $\sin u$ 的可去奇点，因此 ∞ 为 $\sin\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点.

(8) a

(9) 令 $z=\mathrm{Re}(z)=x$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-z}\cos\frac{1}{z}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\frac{1}{x}=0\cdot 1=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-z}\cos\frac{1}{z}=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos\frac{1}{x}=+\infty\cdot 1=+\infty,$$

因此 $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$ 不存在，∞ 为其本性奇点.

15. 由题意，$\exists f_1(z),g_1(z)$ 在 a 点解析且 $f_1(a),g_1(a)\neq 0$，并且

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{(z-a)^m},\quad g(z)=\frac{g_1(z)}{(z-a)^n}.$$

(1) 若 $m>n$，则

$$f(z)\pm g(z)=\frac{f_1(z)\pm(z-a)^{m-n}g_1(z)}{(z-a)^m},$$

显然 $[f_1(z)\pm(z-a)^{m-n}g_1(z)]$ 在 $z=0$ 处非零，故 $z=a$ 为其 $(m-n)$ 级极点；$m<n$ 时同理.

而当 $m=n$ 时，$f_1(z)\pm g_1(z)$ 可能被 $(z-a)$ 整除，a 为 $f(z)\pm g(z)$ 的至多 m 级极点.

综上，当 $m\neq n$ 时，a 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 $(\max\{m,n\}-\max\{m,n\})$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 为 $f(z)\pm g(z)$ 的至多 m 级极点或可去极点.

(2) $f(z)g(z)=\dfrac{f_1(z)g_1(z)}{(z-a)^{m+n}}$，显然 $f_1(a)g_1(a)\neq 0$ 且 $f_1(z)g_1(z)$ 在 $z=a$ 附近解析，故 $z=a$ 为其 $(m-n)$ 级极点.

(3) 当 $m>n$ 时，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f_1(z)}{g_1(z)}\frac{1}{(z-a)^{m-n}},$$

显然 $\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}$ 在 $z=a$ 处非零且在其附近解析，故 a 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $(m-n)$ 级极点.

当 $m\leqslant n$ 时，$\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}(z-a)^{n-m}$，即

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f_1(a)}{g_1(a)}\lim_{z\to a}(z-a)^{n-m}=\begin{cases}\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}, & m=n,\\ 0, & m<n,\end{cases}$$

此时 $z=a$ 为 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

16. 由题意，设

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad \varphi(a)\neq 0,\ m\in\mathbb{N}^*,$$
$$g(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n\neq 0\ (n\leqslant -1).$$

(1) 可知

$$f(z)g(z)=\varphi(z)\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^{n-m}$$

5 留数及其应用

1. (1) $z_0=\mathrm{i}$ 为其 1 级极点，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z-\mathrm{i}},z_0\right]=\frac{\cos\mathrm{i}}{1}=\cosh 1.$$

(2) 奇点满足 $z^{2n}=-1$，故 $z_k=\exp\left[\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]$ $(k=0,1,\cdots,2n-1)$ 为其 1 级极点，

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{1+z^{2n}},z_k\right]=\frac{z_k^{2n}}{2n\cdot z_k^{2n-1}}=\frac{z_k}{2n}=\frac{1}{2n}\exp\left[\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right],\quad k=0,1,\cdots,2n-1.$$

(3) $z_k=2k\pi\mathrm{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 为其 1 级极点，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^z-1},z_k\right]=\frac{1}{\mathrm{e}^{z_k}}=1.$$

(4) $z_0=0$ 为其 4 级极点，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4},z_0\right]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[z^4\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}.$$

(5) $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}=\dfrac{1}{(z-\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})^3}$，因此 $z_1=-\mathrm{i},z_2=\mathrm{i}$ 均为其 3 级极点，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3},z_1\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z+\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{(-2\mathrm{i})^5}=\frac{3}{16}\mathrm{i},$$
$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^3)^3},z_2\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(1+z^2)^3}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{(2\mathrm{i})^5}=-\frac{3}{16}\mathrm{i}.$$

(6) $z_0=1$ 为其 n 级极点，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(z-1)^n},z_0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}\right]=\frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

(7) z_1,z_2 分别为其 m,n 级极点，那么

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n},z_1\right]&=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_1)^m\cdot\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n}\right]\\&=\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!}\frac{(-1)^{m-1}}{(z_1-z_2)^{n+m-1}},\\\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n},z_2\right]&=\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-z_2)^n\cdot\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n}\right]\\&=\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!}\frac{(-1)^{n-1}}{(z_2-z_1)^{n+m-1}}.\end{aligned}$$

(8) 注意到

$$\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}=\frac{1}{z+1}\frac{1-\left(\dfrac{1}{z+1}\right)^n}{1-\dfrac{1}{z+1}}=\frac{1}{z}\left[1-\frac{1}{(z+1)^n}\right],$$

因此原函数 $f(z)$ 可写为

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}\right]=\frac{1}{z^2}\left[1-\frac{1}{(z+1)^n}\right],$$

$z_1=0, z_2=-1$ 分别为其 2 级、n 级极点，那么

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),z_1]&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2f(z)\right]=\frac{n}{(0+1)^n}=n,\\ \operatorname{Res}[f(z),z_2]&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z+1)^nf(z)]\\ &\xlongequal{\text{Leibniz 公式}}\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\left\{[(z+1)^n-1]\cdot\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(n-1)}+0\right\}\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-1}\frac{n!}{(-1)^{n+1}}=-n.\end{aligned}$$

2. (1) 记 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，则 $\varphi(\zeta)=f(z)$，其收敛域为 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$，那么 $\varphi(\zeta)$ 在收敛域内的 Laurent 展开式为

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^+}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

其中 C^+ 为区域内任一包含原点且取正向的闭路，因此

$$f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nz^n,$$

注意到换元时路径方向反向[5]，那么

$$b_n=a_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^+}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\xlongequal{\zeta=1/z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

因此当 b_{-1} 恰为 $f(z)$ 在无穷远处的留数的相反数，即

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-b_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

(2) 取一条包含 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的闭路 C，结合留数定理，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),a_k]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^+}f(z)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C^++C^-}f(z)\,\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

(3) 对于函数 $\dfrac{\cos z}{z-\mathrm{i}},\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$，由上一问结论，

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z-\mathrm{i}},\infty\right]&=-\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z-\mathrm{i}},\mathrm{i}\right]=-\cosh 1,\\ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3},\infty\right]&=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3},-\mathrm{i}\right]-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3},\mathrm{i}\right]=0.\end{aligned}$$

[5]设想 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 θ 从 0 到 2π；而 $z=\dfrac{1}{u}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，其中 φ 从 0 到 -2π，可见路径反向

对于函数 $\sin\dfrac{1}{z}, \mathrm{e}^{1/z}$，将其在 ∞ 附近作 Laurent 展开，得、

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}},\quad \mathrm{e}^{1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k},$$

由第一小问结论，两者的 b_{-1} 均为 1，因此

$$\operatorname{Res}\left[\sin\frac{1}{z},\infty\right]=-b_{-1}=-1,\quad \operatorname{Res}\left[\mathrm{e}^{1/z},\infty\right]=-b_{-1}=-1.$$

(4) 注意到

$$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

即其在 ∞ 附近的 Laurent 展开式中 $(z-1)^{-1}$ 的系数为 0，故

$$\operatorname{Res}\left[\cos\frac{1}{z-1},\infty\right]=-b_{-1}=0.$$

由上一问结论及积分的可加性，

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\sin\frac{z}{1-z},1\right]&=-\operatorname{Res}\left[\sin\left(\frac{1}{1-z}-1\right),\infty\right]\\&=\cos 1\operatorname{Res}\left[\sin\frac{1}{z-1},\infty\right]+\sin 1\operatorname{Res}\left[\cos\frac{1}{z-1},\infty\right]\\&=\cos 1\cdot(-1)+\sin 1\cdot 0=-\cos 1.\end{aligned}$$

3. (1) 圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$，因此 $z_1=1, z_2=\mathrm{i}$ 均在 C 所包围的区域内[6]，分别为函数的 2 级、1 级极点，而 $z_3=-\mathrm{i}$ 并非奇点. 由留数定理，

$$\begin{aligned}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}&=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)},z_k\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]+2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1/(\mathrm{i}-1)^2(2\mathrm{i})}{1}\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(2) 圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$，因此函数在全平面的奇点 $z_k=\exp\left[\mathrm{i}\dfrac{(2k+1)\pi}{4}\right]$ $(k=0,1,2,3)$ 中，z_0,z_3 位于 C 所包围的区域内，且为 1 级极点. 由留数定理，

$$\begin{aligned}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}&=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4+1},z_0\right]+2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4+1},z_3\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{z_0-z_i}+\prod_{j=0}^{2}\frac{1}{z_3-z_j}\right)\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\cdot\sqrt{2}\mathrm{i}}+\frac{1}{-\sqrt{2}\mathrm{i}\cdot\sqrt{2}(1-\mathrm{i})\sqrt{2}}\right]=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

[6] $z_2=\mathrm{i}$ 对应 $x=0,y=1$，后 $z_3=-\mathrm{i}$ 同理

(3) 此函数在全平面的奇点有 $z_k = \exp\left[\mathrm{i}\dfrac{(2k+1)\pi}{3}\right]$ $(k=0,1,2)$，$z_3 = 1$，且 $|z_n| = 1$ $(n=0,1,2,3)$.

i. $r<1$ 时，此函数在 C 包围的域内解析，由 Cauchy 积分定理，

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} = 0.$$

ii. $r>1$ 时，z_0, z_2, z_3 均为其 1 级极点，z_1 为其 2 级极点，那么[7]

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} &= 2\pi\mathrm{i}\left[\sum_{i\neq 1}\frac{1}{(z_i+1)^2}\prod_{j\neq 1,i}\frac{1}{z_i-z_j} + \lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\prod_{i\neq 1}\frac{1}{z-z_i}\right)\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\right] = 0.\end{aligned}$$

综上，

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} = 0.$$

另解 $r>1$ 时，记正向闭路 $C_R : R < |z| < r$，其中 $1 < R < r$，那么由复闭路的 Cauchy 积分定理，

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)}.$$

将被积函数在 $1 < R < |z| < r$ 内作 Laurent 展开：

$$\frac{1}{(z^2-1)(z^3+1)} = \frac{1}{z^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^m \cdot \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^3}\right)^n = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2m+3n+5}}.$$

可见 $2m+3n+5 \geqslant 5 > 1$，因此 $a_{-1} = 0$，即

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} = \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3+1)} = 2\pi\mathrm{i}a_{-1} = 0.$$

(4) $z_k = k$ $(k=1,2,3)$ 均为其在 C 所围成的闭域内的 1 级极点，因此

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

(5) $z_1 = 1, z_2 = -1$ 均为其在 C 所包围的闭域内的 2 级极点，而 $z_3 = 3$ 不在此内，由留数定理，

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-3)^2} &= 2\pi\mathrm{i}\left\{\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z+1)^2(z-3)^2}\right] + \lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z-3)^2}\right]\right\} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(0 + \frac{3}{128}\right) = \frac{3\pi}{64}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

[7] 技巧：在各项的复数运算中，加减用一般式，乘除用指数式

4. (1) 记 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$，则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$. 记正向闭路 $C : |z| = 1$，那么

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \int_C \frac{1}{a+\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{2}{\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}$$
$$= \frac{2}{\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\left(z+a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(z+a+\sqrt{a^2-1}\right)^2}.$$

由于 $a > 1$，故

$$|z_1| = \left|-a-\sqrt{a^2-1}\right| = a+\sqrt{a^2-1} > 1+0 = 1,$$
$$|z_2| = \left|-a+\sqrt{a^2-1}\right| = \frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} < \frac{1}{1} = 1,$$

因此 $z_2 = -a+\sqrt{a^2-1}$ 为 C 所包围的区域内的 1 级极点，故

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2}{\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{z^2+a+\sqrt{a^2-1}}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(2) 记 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$，正向闭路 $C : |z| = 1$，那么

$$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_C \frac{2rz-(z^2+1)}{(1+r^2)z-r(z^2+1)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{z^2-2rz+1}{z(z-r)(rz-1)}\,\mathrm{d}z\,.$$

i. 当 $r > 1$ 时，$z_0 = 0, z_1 = \dfrac{1}{r}$ 为被积函数在 C 所包围的区域内的 1 级极点，那么

$$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right) = \frac{2\pi}{r}.$$

ii. 当 $r < 1$ 时，$z_0 = 0, z_2 = r$ 为被积函数在 C 所包围的区域内的 1 级极点，那么

$$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right) = 0.$$

iii. 当 $r = 1$ 时，该积分发散：

$$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot 1 = \pi.$$

综上，

$$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & r < 1, \\ \pi, & r = 1, \\ \dfrac{2\pi}{r}, & r > 1 \end{cases} = \frac{\pi}{r}[1+\operatorname{sgn}(r-1)].$$

(3) 令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}$ $(0 \leqslant \theta < \pi)$，则 $\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta$，且

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z} + 2\right),$$

记正向曲线 $C : |z| = 1$，因此

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+1-\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{a^2+1-\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}+2\right)}\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z}$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a^2+1)z+1}.$$

可见被积函数奇点为

$$z_1 = (2a^2+1) - 2a\sqrt{a^2+1} \in \mathbb{R}, \quad z_2 = (2a^2+1) + 2a\sqrt{a^2+1} \in \mathbb{R},$$

又因为

$$|z_2| = z_1 = (2a^2+1) + 2a\sqrt{a^2+1} > 0+1+0 = 1,$$

$$|z_1| = z_2 = (2a^2+1) - 2a\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{(2a^2+1)+2\sqrt{a^2+a}} < 1,$$

因此 z_1 在 C 所包围的区域内，为奇点，而 z_2 并非奇点，由留数定理，

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}$$

$$= -2\pi\cdot\frac{1}{-4a\sqrt{a^2+1}} = \frac{\pi}{2a\sqrt{1+a^2}}.$$

(4) 记$\varphi = \theta + \pi$，那么

$$\int_0^{\pi} \tan(\theta+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{\varphi=\theta+\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \tan(\varphi-\pi+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi}^{2\pi} \tan(\varphi+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

记 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\mathrm{i}a)} = \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$，正向曲线 $C : |z| = \mathrm{e}^{-a}$，那么

$$\int_0^{\pi} \tan(\theta+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta+\mathrm{i}a)}{\cos(\theta+\mathrm{i}a)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_C \frac{z-\frac{1}{z}}{\mathrm{i}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$= \frac{1}{2}\int_C \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,\mathrm{d}z$$

i. $a > 0$ 时，闭路 C 上 $|z| = \mathrm{e}^{-a} < 1$，因此被积函数在全平面的奇点 $z_1 = -\mathrm{i}, z_2 = \mathrm{i}$ 均位于 C 所包围的区域外，而 $z_0 = 0$ 为其 1 级极点，由留数定理，

$$\int_C \tan(\theta+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1-0}{1+0} = \pi\mathrm{i}.$$

ii. $a < 0$ 时，闭路 C 上 $|z| = \mathrm{e}^{-a} > 1$，因此在 C 所包围的区域内具有奇点 z_0, z_1, z_2，且 z_0, z_1, z_2 均为 1 级极点，由留数定理，

$$\int_0^{\pi} \tan(\theta+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_C \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}} + \frac{2}{(-\mathrm{i})\cdot(-2\mathrm{i})} + \frac{1-0}{1+0}\right]$$

$$= -\pi\mathrm{i}.$$

综上，

$$\int_0^\pi \tan(\theta+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}-\pi\mathrm{i}, & a<0,\\ \pi\mathrm{i}, & a>0\end{cases}=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(a).$$

5. (1) 记 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$，则

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^3}{(z^2+a^2)^2}=0,$$

那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]=\frac{\pi}{2a}.$$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$，则

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=0,$$

那么

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]+2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),b\mathrm{i}]\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2a\mathrm{i}(b^2-a^2)}+\frac{1}{2b\mathrm{i}(a^2-b^2)}\right]=\frac{\pi}{ab(a+b).}\end{aligned}$$

(3) 记 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+z^4}$，则

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^3+z^2}{z^4+1}=0,$$

注意到 $f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ 为偶函数，那么

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x&=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\big[f(z),\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}\big]+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\big[f(z),\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}\big]\\&=\pi\mathrm{i}\left[\frac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}+\frac{1-\mathrm{i}}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}\right]=\frac{\pi\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\big(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}\big)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

6. (1) 引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$，其中 (z^2+b^2) 比 z 高 1 次. 又因为被积函数为偶函数，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),b\mathrm{i}]=\pi\mathrm{i}\cdot\frac{b\mathrm{i}}{2b\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-ab}=\frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}\mathrm{i},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,\mathrm{d}z\right]=\frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-ab}.$$

(2) 引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z^2+b^2)}$，其中 $z(z^2+b^2)$ 比 1 高 3 次. 又因为被积函数为偶函数，那么

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),b\mathrm{i}]+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),0]\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{b\mathrm{i}\cdot 2b\mathrm{i}}+\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{\pi\mathrm{i}}{b^2}\big(1-\mathrm{e}^{-ab}\big),\end{aligned}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2b^2}\big(1-\mathrm{e}^{-ab}\big).$$

(3) 引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-a^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)z}$，其中 $z(z^2+a^2)$ 比 (z^2-a^2) 高 1 次. 又因为被积函数为偶函数，那么

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a\mathrm{i}]+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),0]\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-2a^2\cdot\mathrm{e}^{-a}}{2a\mathrm{i}\cdot a\mathrm{i}}+\pi\mathrm{i}\cdot(-1)=\pi(2\mathrm{e}^{-a}-1)\mathrm{i},\end{aligned}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\pi\left(\mathrm{e}^{-a}-\frac{1}{2}\right).$$

(4) 引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+4)(z-1)}$，其中 $(z^2+4)(z-1)$ 比 1 高 3 次，那么

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),2\mathrm{i}]+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),1]\\ &= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4\mathrm{i}(2\mathrm{i}-1)}+\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5}\\ &= \frac{\pi}{10}\big[-(2\sin 1+\mathrm{e}^{-2})+2(\cos 1-\mathrm{e}^{-2})\big],\end{aligned}$$
$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{5}(\cos 1-\mathrm{e}^{-2}).$$

(5) 引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{2az\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{2bz\mathrm{i}}}{z^2}$，其中 z^2 比 1 高 2 次. 又因为被积函数是偶函数，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\mathrm{e}^{2az\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{2bz\mathrm{i}}\big)=2\pi(b-a),$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\pi(b-a).$$

(6) 将原积分改写为

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

故引入辅助函数 $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^2}$，其中 z^2 比 1 高 2 次. 又因为被积函数是偶函数，

那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),0] = \pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{2z}$$
$$= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(2\mathrm{i})^n z^{n-1} = \pi,$$
$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{2}.$$

注 对于函数 $f(z) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{2z^2}$ 在 C_R 上的积分，可令 $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2}$. 由于

$$\lim_{z\to\infty} zf_1(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0, \quad \lim_{z\to\infty} f_1(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2} = 0,$$

分别由引理 1 和约当引理，可得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f_1(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f_1(z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(7) 利用提示，引入辅助函数 $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^{\pi z}-\mathrm{e}^{-\pi z}}$. 注意到

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n z^{n-1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\pi)^n z^{n-1}}{n!}\right]^{-1}$$
$$= \lim_{z\to 0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi^{2n+1}z^{2n}}{(2n+1)!}\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi},$$

因此 $z=0$ 实际上为 $f(z)$ 的可去奇点.

考虑由 $z=0, z=R, z=\mathrm{i}h\ (h\in\mathbb{R}), z=-R$ 围成的正向复闭路，上述四条路线依次记为 C_1, C_2, C_3, C_4，那么

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_2} f(z) + \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

当 z 在 C_2 上时，$z = R+\mathrm{i}y$，由长大不等式，

$$\left|\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^h \frac{|z|}{|\mathrm{e}^{\pi z}-\mathrm{e}^{-\pi z}|}|\mathrm{d}z| \leqslant \int_0^h \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{\mathrm{e}^{\pi R}-\mathrm{e}^{-\pi R}}\,\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \frac{h\sqrt{R^2+h^2}}{\mathrm{e}^{\pi R}} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty),$$

因此 $f(z)$ 在 C_2 上的积分值当 $R\to\infty$ 时为零. 同理，$f(z)$ 在 C_4 上的积分值当 $R\to\infty$ 时同样为零.

对于 $f(z)$ 在 C_3 上的积分，为使计算方便，取 $h=1/2$，那么 $z = x+\mathrm{i}/2$，

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-C_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R}\frac{x+\mathrm{i}/2}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\pi x}-(-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi x})}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R}\frac{1-2\mathrm{i}x}{2(\mathrm{e}^{\pi x}+\mathrm{e}^{-\pi x})}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\pi x}+\mathrm{e}^{-\pi x}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}(\sinh\pi x)}{\cosh^2\pi x} = \frac{1}{4\pi}\arctan(\sinh\pi x)\bigg|_{-R}^{R}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\arctan(\sinh\pi R),$$

综上，积分值为

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\pi x}-\mathrm{e}^{-\pi x}} &= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}\lim_{R\to\infty}\arctan(\sinh\pi R)\\ &= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

7. (1) 引入辅助函数 $R(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$，可见 $R(x)$ 在正实轴上无奇点，且

$$\begin{aligned}\lim_{Z\to\infty}z^{p+1}R(z) &= \lim_{z\to\infty}\frac{z^{p+1}}{(1+z^2)^2}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^{3-p}}=0,\\ \lim_{z\to 0}z^{p+1}R(z) &= \lim_{z\to 0}\frac{z^{p+1}}{(1+z^2)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{0}{1^2}=0,\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^pR(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}}\{\mathrm{Res}[z^pR(z),\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[z^pR(z),-\mathrm{i}]\}\\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}}\left[\frac{1-p}{4}\mathrm{e}^{(p-1)\pi\mathrm{i}/2}+\frac{1-p}{4}\mathrm{e}^{3(p-1)\pi\mathrm{i}/2}\right]\quad(0\leqslant\theta<2\pi)\\ &= \frac{(1-p)\pi}{2(\mathrm{e}^{2p\pi\mathrm{i}}-1)}\cdot\left(\mathrm{e}^{3p\pi\mathrm{i}/2}-\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}/2}\right)=\frac{(1-p)\pi}{2(\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}})}\cdot\left(\mathrm{e}^{p\pi\mathrm{i}/2}-\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}/2}\right)\\ &= \frac{(1-p)\pi\sin\dfrac{p\pi}{2}}{2\sin p\pi}=\frac{(1-p)\pi}{4\cos\dfrac{p\pi}{2}}.\end{aligned}$$

并且

$$\lim_{p\to 1}\int_0^{\infty}x^pR(x)\,\mathrm{d}x\ \overset{\text{L'Hospital 法则}}{=\!=\!=\!=}\ \lim_{p\to 1}\frac{\pi}{2\pi\sin\dfrac{p\pi}{2}}=\frac{1}{2},$$

因此

$$\int_0^{\infty}x^pR(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(1-p)\pi}{4\cos\dfrac{p\pi}{2}}, & p\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & p=1\end{cases}\qquad(-1<p<3).$$

(2) 记 $f(z)=\dfrac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$[8]. 注意到 $\ln z$ 的多值性，取正实轴为支割线，在上岸 $f(z)=\dfrac{\ln^2 x}{(1+x^3)}$，在下岸 $f(z)=\dfrac{\ln^2(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}{(1+x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^3}$. 取闭路 C 为：从正实轴上岸 $z=r$ 点到 $z=R$ 点，再沿 $C_R:|Z|=R$（正向）从正实轴上岸到下岸，接着从下岸 $Z=R$ 点到 $z=r$ 点，最后沿 $-C_r:|z|=r$（反向）回到起点，那么 $f(z)$ 在 C 围成的闭路内

[8] 不能构造 $f(z)=\dfrac{\ln z}{(1+|z|)^3}$，这样的 $f(z)$ 在半圆环带区域内并不解析，也就是说，从出发点就错了

仅有一个 3 级奇点 $z_0=-1$，从而

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_r^R \frac{\ln^2 x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x + \int_R^r \frac{\ln^2(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})}{(1+x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_r^R \frac{-4\pi\mathrm{i}\ln x+4\pi^2}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),-1] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\ln^2 z\right) = 2\pi(\pi+\mathrm{i}).\end{aligned}$$

由于

$$|\ln z| = \sqrt{(\ln|z|)^2+\varphi^2} \leqslant \sqrt{\ln^2|z|+4\pi^2},$$

因此有

$$\begin{aligned}\left|\lim_{z\to\infty} zf(z)\right| &\leqslant \lim_{z\to\infty}\frac{|z||\ln z|^2}{|1+z|^3} \leqslant \lim_{|z|\to\infty}\frac{|z|(\ln^2|z|+4\pi^2)}{(|z|-1)^3} = 0, \\ \left|\lim_{z\to 0} zf(z)\right| &\leqslant \lim_{z\to 0}\frac{|z||\ln z|^2}{|1+z|^3} \leqslant \lim_{|z|\to 0}\left(|z|\ln^2|z|+4\pi^2|z|\right) = 0,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$，由引理 1、2 得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

代入最初的方程并令 $R\to\infty, r\to 0$，得

$$4\pi^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3} - 4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = 2\pi^2+2\pi\mathrm{i},$$

对比等式两端虚部得

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{-4\pi\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}.$$

(3) 记 $f(z)=\dfrac{\ln^2 z}{z^2+a^2}$，取闭路 C 为：从 $z=r$ 点到 $z=R$ 点，再经 $C_R:|z|=R$（正向）到达 $z=-R$ 点。然后从 $z--R$ 点到 $z=-r$ 点，最后经 $-C_r:|z|=r$（反向）回到起点，且 $r<a<R$，则 $f(z)$ 在闭路 C 所包围的区域内仅有一个 1 级极点 $z_0=|a|\mathrm{i}$，那么

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-R}^{-r} \frac{\ln^2(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})}{(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^2+a^2}\,\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}) \\ &= \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_r^R \frac{2\ln^2 x-\pi^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\lim_{z\to\infty} zf(z)\right| &\leqslant \lim_{z\to\infty}\frac{|z||\ln z|^2}{|z^2+a^2|} \leqslant \lim_{|z|\to\infty}\frac{|z|(\ln^2|z|+\pi^2)}{|z|^2-a^2} = 0, \\ \left|\lim_{z\to 0} zf(z)\right| &\leqslant \lim_{z\to 0}\frac{|z||\ln z|^2}{|z^2+a^2|} = \frac{1}{a^2}\lim_{|z|\to 0}|z|(\ln^2|z|+\pi^2) = 0,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$，由引理 1、2 得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

代入最初的方程并令 $R\to\infty, r\to 0^+$，得

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\int_{0^\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x - \pi^2\cdot\frac{\pi}{2|a|} - 2\pi\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z), a\mathrm{i}] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\ln^2(|a|\mathrm{i})}{2|a|\mathrm{i}} = \frac{\pi}{|a|}\left(\ln^2|a| - \frac{\pi^2}{4} + \mathrm{i}\pi\ln|a|\right),\end{aligned}$$

对比等式两端实部得

$$\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{|a|}\left(\ln^2|a| + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8|a|}(\pi^2+\ln^2|a|).$$

8. (1) 记 $f(z) = 8, \varphi(z) = 2z^5 - z^4 + z^2 - 2z$，那么在 $|z| = 1$ 上

$$|\varphi(z)| \leqslant 2|z|^5 + |z|^4 + |z|^2 + 2|z| = 6 < |f(z)| = 8,$$

而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内无零点，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点.

(2) 记 $f(z) = -6z^5, \varphi(z) = z^7 + z^2 - 3$，那么在 $|z| = 1$ 上

$$|\varphi(z)| \leqslant 1+1+3 = 5 < |f(z)| = 6,$$

而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内仅有一个 5 级零点 $z_0 = 0$，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点.

(3) 记 $f(z) = -8z, \varphi(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 + 2$，那么在 $|z| = 1$ 上

$$|\varphi(z)| \leqslant 1+2+1+2 = 6 < |f(z)| = 8,$$

而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内仅有一个 1 级零点 $z_0 = 0$，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内仅有一个零点.

(4) 记 $f(z) = -3z^n, \varphi(z) = \mathrm{e}^z$，那么在 $|z| = 1$ 上

$$|\varphi(z)| = \left|\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^\infty\frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!} = \mathrm{e} < |f(z)| = 3,$$

而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内仅有一个 n 级零点，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点.

9. 将区域分成两部分讨论：

(1) 在 $|z| = \dfrac{1}{2}$ 上，令 $f(z) = 6z, \varphi(z) = z^4 + 1$，则

$$|\varphi(z)| \leqslant |z|^4 + 1 = 1 + \frac{1}{16} < |f(z)| = 6|z| = 3,$$

而 $f(z)$ 在 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 内仅有一个 1 级零点 $z_0=0$，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 内仅有 1 个零点.

在 $|z|=2$ 上，令 $f(z)=z^4,\varphi(z)=6z+1$，则

$$|\varphi(z)|\leqslant 6|z|+1=13<|f(z)|=|z|^4=16,$$

而 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内仅有一个 4 级零点 $z_0=0$，由 Rouché 定理，$f(z)+\varphi(z)$ 在 $|z|<2$ 内有 3 个零点.

综上，$z^4+6z+1=0$ 在 $\dfrac{1}{2}<|z|<2$ 内共有 $4-1=3$ 个根.

(2) 将方程改写 $(z-\lambda)\mathrm{e}^z+1=0$，则记 $f(z)=(z-\lambda)\mathrm{e}^z,\varphi(z)=1$. 对于足够大的 $R\in\mathbb{R}$，取闭路 C 为：从 $z=-\mathrm{i}R$ 沿 $|z|=R$ 逆时针到达 $z=\mathrm{i}R$ 点，再从 $z=\mathrm{i}R$ 沿虚轴返回起点.

在 $|z|=R\ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$ 上，

$$|f(z)|=|z-\lambda||\mathrm{e}^z|\geqslant(|z|-\lambda)\mathrm{e}^x\geqslant R-\lambda>1=|\varphi(z)|,$$

在虚轴上，$z=\mathrm{i}y\ (-R<y<R)$，那么

$$|f(z)|=|\mathrm{i}y-\lambda|\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right|=\sqrt{\lambda^2+y^2}\geqslant\lambda>1=|\varphi(z)|,$$

即在 C 上总有 $|f(z)|>|\varphi(z)|$，而 $f(z)$ 在 C 所围成的区域内仅有一个 1 级零点 $z_0=\lambda$，由 Rouché 定理，令 $R\to\infty$，$f(z)+\varphi(z)=0$ 在右半平面内仅有一个零点.

对于函数 $g(x)=\lambda-x-\mathrm{e}^{-x}$，考虑到

$$g(0)=\lambda-1>0,\quad g(\lambda)=-\mathrm{e}^{-\lambda}<0,$$

由零点存在定理，$\exists\xi\in(0,\lambda)$，使得 $g(\xi)=0$. 可见 $g(z)=0$ 在实轴上有零点. 由零点的唯一性，$g(z)=0$ 在右半平面内唯一的一个根为此实根 $z=\xi$.

10. 记多项式函数 $f(z)=z^4+z^3+4z^2+2z+3$，则 $n=4$. 现研究

$$f(\mathrm{i}y)=y^4-\mathrm{i}y^3-4y^2+2\mathrm{i}y+3=(y^4-4y^2+3)+(-y^3+2y)\mathrm{i}\xlongequal{\triangle}u(y)+\mathrm{i}v(y),$$

其中 $u(y)$ 零点为 $\pm1,\pm\sqrt{3}$，$v(y)$ 零点为 $0,\pm\sqrt{2}$. 当 y 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时，

$$u'(y)=4y^3-8y=4y(y^2-2),\quad v'(y)=-3y^2+2,$$

$u(y),v(y)$ 的变化趋势如下表：可见 $f(z)$ 在 y 从 $-\infty$ 到 ∞ 的过程中绕原点转了 $k=2$

y	$-\infty$	$-\sqrt{3}^-$	$-\sqrt{2}^-$	-1^-	0^-	1^-	$\sqrt{2}^-$	$\sqrt{3}^-$	∞
$u(y)$	$\infty\uparrow$	$0\downarrow$	$-1\uparrow$	$0\uparrow$	$3\downarrow$	$0\downarrow$	$-1\uparrow$	$0\uparrow$	$\infty\uparrow$
$v(y)$	$\infty\downarrow$	$\sqrt{3}\downarrow$	$0\downarrow$	$-1\downarrow$	$0\uparrow$	$1\downarrow$	$0\downarrow$	$-\sqrt{3}\downarrow$	$\infty\downarrow$
$v(y)/u(y)$	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
$\arg f(z)$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	0

圈，因此 $f(z)$ 在左半平面共有 $\left(\dfrac{n}{2}+k\right)=4$ 个零点.

6 解析开拓

1. 与唯一性定理并不矛盾. 记 $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}, g(z)\equiv 0$，由题意可知，

$$f\left(1-\frac{1}{k\pi}\right)=g\left(1-\frac{1}{k\pi}\right)=0,\quad k=1,2,\cdots,$$

但 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{k\pi}\right)=1$, 此极限值并不在 $|z|<1$ 内, 因此无法使用唯一性定理证明 $f(z)\equiv g(z)$.

2. (1) a

(2) 假定存在函数 $f(z)$，使得

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{2k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{N}^*),$$

记 $g(z)=\dfrac{1}{z}$ $(z\neq 0)$，则 $f\left(\dfrac{1}{2k}\right)=g\left(\dfrac{1}{2k}\right)$，但极限值 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k}=0$ 并不在 $g(z)$ 的解析域上，因此无法利用唯一性定理证明 $f(z)\equiv g(z)$，即假设不成立，不存在这样的函数 $f(z)$.

(3) a

(4) 取 $z_n=\dfrac{1}{n}, g(z)=\dfrac{1}{1+z}$ $(z\neq -1)$. 假设存在这样的 $f(z)$，使得

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=g\left(\frac{1}{n}\right),$$

并且极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 在 $g(z)$ 的解析域内, 由唯一性定理, $f(z)\equiv g(z)=\dfrac{1}{1+z}$ $(z\neq 1)$.

7 保形变换及其应用

1. (1) 转动角 $\arg w'(1) = \arg 3 = 0$，伸张系数 $|w'(1)| = 3$.

   (2) 转动角 $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \arg\dfrac{3}{4} = 0$，伸张系数 $\left|w'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \dfrac{3}{4}$.

   (3) 转动角 $\arg w'(1+\mathrm{i}) = \arg 6\mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2}$，伸张系数 $|w'(1+\mathrm{i})| = 6$.

   (4) 转动角 $\arg w'\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big) = \arg 6\big(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\big) = -\dfrac{\pi}{3}$，伸张系数 $\big|w'\big(\sqrt{3}-\mathrm{i}\big)\big| = 12$.

2. (1) 伸张系数 $|w'(z)| = 2|z|$，则 $|z| > \dfrac{1}{2}$ 的部分被放大，$|z| < \dfrac{1}{2}$ 的部分被缩小.

   (2) 伸张系数 $|w'(z)| = \dfrac{1}{|z|^2}$，则 $|z| < 1$ 的部分被放大，$|z| > 1$ 的部分被缩小.

   (3) 伸张系数 $|w'(z)| = |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$，则 $x > 0$ 的部分被放大，$x < 0$ 的部分被缩小.

3. (1) 设 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$，那么 L 的长度为

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

   (2) 结合上一问结论 L' 的长度为

$$\int_\alpha^\beta \left|\frac{\mathrm{d}f[z(t)]}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |f'[z(t)]z'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

4. 设 $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，那么由 C-R 方程，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{i},$$

   因此区域 G 的面积为

$$\begin{aligned}\iint_G \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \iint_D \left\|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right\|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

   当 $w = z^2$ 且积分区域 $D = \{(x,y)|0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ 时，区域 G 的面积为

$$\begin{aligned}\iint_D |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D 4|z|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

5. 设各圆周方程为 $C_i : |z - a_i| = r_i\ (r_i > 0)$，且 C_1, C_2 相切于原点. 对这样的圆，总可以选取实轴方向使得 C_1, C_2 的圆心在实轴上，且 C_3 位于上半平面. 不妨设 $r_2 \geqslant r_1$，则规定实轴方向为从 C_2 圆心指向 C_1 圆心，那么两者方程简化为

$$C_1 : |z - r_1| = r_1, \quad C_2 : |z + r_2| = r_2,$$

对于 C_1，代入变换 $w=\dfrac{1}{z}$ 得

$$r_1^2=|z-r_1|^2=z\bar{z}-r_1(z+\bar{z})+r_1^2=\frac{1}{w\bar{w}}-r_1\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}\right)+r_1^2,$$

整理得 $r_1(w+\bar{w})=1$，即 $C_1':\mathrm{Re}(w)=\dfrac{1}{2r_1}$. 类似地，$C_2$ 经变换得 $C_2':\mathrm{Re}(w)=\dfrac{1}{-2r_2}$. 注意到 $w(r_1)=\dfrac{1}{r_1}>\dfrac{1}{2r_1}$，因此 C_1,C_2 的圆内域分别变为区域 $\mathrm{Re}(w)\leqslant-\dfrac{1}{2r_2}$, $\mathrm{Re}(w)\geqslant\dfrac{1}{2r_1}$.

对于 C_3，其圆心满足方程

$$\begin{cases}|a_3-r_1|=r_1+r_3,\\ |a_3+r_2|=r_2+r_3,\end{cases}$$

设 $a_3=x_3+\mathrm{i}y_3$，代入上述方程组解得

$$a_3=x_3+\mathrm{i}y_3=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}r_3+\frac{2\mathrm{i}}{r_2+r_1}\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)},$$

代入变换 $w=\dfrac{1}{z}$，C_3 的方程可写为 $\left|\dfrac{1}{w}-a_3\right|=r_3$. 令 $w=u+\mathrm{i}v$，可得

$$\begin{aligned}
r_3^2|w|^2&=|1-a_3w|^2=1-(a_3w+\bar{a}_3\bar{w})+|a_3|^2|w|^2=1-2\mathrm{Re}(a_3w)+|a_3|^2|w|^2,\\
|a_3|^2&=\left(\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}r_3\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_2+r_1}\right)^2\\
&=\frac{r_3}{(r_2+r_1)^2}\left[r_3(r_2+r_1)^2+4r_1r_2(r_2+r_1)\right]=r_3^2+\frac{4r_1r_2r_3}{r_2+r_1},\\
\mathrm{Re}(a_3w)&=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}r_3u-\frac{2v}{r_2+r_1}\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)},
\end{aligned}$$

因此整理得 C_3 经变换得 C_3' 的方程:

$$\left(u-\frac{r_2-r_1}{4r_2r_1}\right)^2+\left(v+\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3}}\right)^2=\frac{(r_2+r_1)^2}{16r_2^2r_1^2}.$$

注意到当 $u=-\dfrac{1}{2r_2}$ 或 $u=\dfrac{1}{2r_1}$ 时，$v=0$，可见 C_1',C_2',C_3' 仍保持相切. 又因为待求区域为圆外域交集中不含 ∞ 点的区域，而 $w(\infty)=0$，并且 $w=0$ 的点在 C_3' 所包围的圆的外部区域. 因此 C_3 的圆内域变换为 C_3' 的圆内域:

$$\left|w-\left(\frac{r_2-r_1}{4r_2r_1}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3}}\right)\right|\leqslant\frac{r_2+r_1}{4r_2r_1}.$$

综上，这三个圆的边界围成的封闭图形的外部区域即三个圆外域的交集中包含 ∞ 点的连续区域. 因此，在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的变换下，其形状为一半无限长且端口为一内凹的半圆的区域，在此坐标轴选取下，其可表示为

$$-\frac{1}{2r_2}\leqslant\mathrm{Re}(w)\leqslant\frac{1}{2r_1},\quad \mathrm{Im}(w)\leqslant\sqrt{\frac{(r_2+r_1)^2}{16r_2^2r_1^2}-\left(\mathrm{Re}(w)-\frac{r_2-r_1}{4r_2r_1}\right)^2}-\sqrt{\frac{r_1+r_2+r_3}{4r_1r_2r_3}}.$$

6. 利用公式

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

(1) 取 $z_1=-1, z_2=\infty, z_3=\mathrm{i}$，那么方程变为

$$\frac{w-\mathrm{i}}{w-1}\frac{\mathrm{i}}{1}=\frac{z+1}{1}\frac{1}{1+\mathrm{i}},$$

从中解得分式线性变换 M 为

$$w=\frac{z+2+\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}.$$

(2) 取 $z_1=\infty, z_2=\mathrm{i}, z_3=-1$，那么方程变为

$$\frac{w-\mathrm{i}}{w-1}\frac{1}{1}=\frac{1}{z-\mathrm{i}}\frac{-1-\mathrm{i}}{1},$$

从中解得

$$w=\frac{\mathrm{i}z+2+\mathrm{i}}{z+1}.$$

(3) 取 $z_1=-1, z_2=\mathrm{i}, z_3=\infty$，那么方程变为

$$\frac{w}{w-1}\frac{1}{1}=\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\frac{1}{1},$$

从中解得

$$w=\frac{z+1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}(z+1).$$

7. z 平面内区域 $\mathrm{Im}z>0$ 边界为实轴 $\mathrm{Im}z=0$, 显然 $-\mathrm{i}$ 为 i 关于边界的对称点, 且 $w(\mathrm{i})=0$, 因此 $w(-\mathrm{i})=\infty$，变换可写为

$$w=k\frac{z-\mathrm{i}}{z+i}.$$

而在变换后得到的圆的边界上,

$$1=|w|=|k|\left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right|=|k|\left|\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right|=|k|\left|\frac{x-\mathrm{i}}{\overline{x-\mathrm{i}}}\right|=|k|,$$

因此 $k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$，即 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$. 又因为

$$w'(\mathrm{i})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}},$$
$$\arg w'(\mathrm{i})=\theta-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

从中解得 $\theta=0$，因此最终得到线性变换 $w=w(z)=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

8. 由题意，$z_0=\dfrac{1}{2}$ 关于圆 $|z|=1$ 的对称点位于正实轴上，且有模长关系：$|z_0'|\cdot\dfrac{1}{2}=1^2$，即 $z_0'=2$. 而在 w 平面上，0 关于圆 $|w|=1$ 的对称点为 ∞，因此

$$w\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad w(2)=\infty,$$

那么分式线性变换可写为 $w(z)=k\dfrac{2z-1}{2(z-2)}$，且要求当 $|z|=1$ 时，

$$|w|=|k||z|\left|\frac{2-\bar{z}}{2(z-2)}\right|=|k|\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1,$$

因此 $k=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$. 又因为

$$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right)=\arg\left.\frac{-3k}{(z-2)^2}\right|_{z=1/2}=\arg\left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)=\theta-\pi=0,$$

因此 $\theta=\pi$，即 $k=-2$，分式线性变换为 $w=-\dfrac{2z-1}{z-2}$.

9. 由题意，$w(a)=\bar{a}$，那么 $w(\bar{a})=a$，因此设分式线性变换为

$$\frac{w-\bar{a}}{w-a}=k\frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

注意到 $\mathrm{Im}(z)=0$ 时，$\mathrm{Im}(w)=0$，即 $z=\bar{z},\bar{w}=w$，因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{w-\bar{a}}{w-a}\right|=|k|\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|=|k|\left|\frac{z-z}{\bar{z}-\bar{a}}\right|=|k|\\=\left|\frac{w-\bar{a}}{\bar{w}-a}\right|=1,\end{aligned}$$

因此 $k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(-\pi\leqslant\theta<\theta)$. 对上述分式线性变换两端关于 z 求导，得

$$-w'(z)\cdot\frac{a-\bar{a}}{(w-a)^2}=k\frac{a-\bar{a}}{(z-\bar{a})^2}.$$

(1) 当 $a\in\mathbb{R}$ 时，$k=1$，

(2) 当 $a\notin\mathbb{R}$ 时，

$$w'(a)=-k\left.\frac{(w-a)^2}{(z-a)^2}\right|_{z=a}=-\mathrm{e}^{i\theta}\frac{(\bar{a}-a)^2}{(a-\bar{a})^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)},$$

因此 $\arg w'(a)=\theta-\pi=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，分式线性变换为

$$\frac{w(z)-\bar{a}}{w(z)-a}=\mathrm{i}\frac{z-a}{z-\bar{a}}\quad\text{或}\quad w(z)=\frac{(\bar{a}-a\mathrm{i})z+(a^2\mathrm{i}-\bar{a}^2)}{(1-\mathrm{i})z+(a\mathrm{i}-\bar{a})}.$$

10. (1) 在边界上，$\mathrm{Im}(z)=1,|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}=2$，因此 $z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 或 $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$. 再考虑 $z_3=2\mathrm{i}$. 这里希望经变换 $t=t(z)$ 后，

$$t(-\sqrt{3}+\mathrm{i})=0,\quad t(2\mathrm{i})=\infty,\quad t(\sqrt{3}+\mathrm{i})\in\mathbb{R},$$

结合前两式，可得变换 $t(z)=k\dfrac{z-(-\sqrt{3}+\mathrm{i})}{z-2\mathrm{i}}$. 取 $|k|=1$，且

$$t(\sqrt{3}+\mathrm{i})=k\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=k\frac{3+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\in\mathbb{R},$$

那么 $k=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$，由线性变换的保角性，经变换

$$t(z)=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\frac{z-(-\sqrt{3}+\mathrm{i})}{z-2\mathrm{i}}$$

后得到的区域是角域 $0<\arg t<\dfrac{\pi}{3}$，因此通过指数变换

$$\begin{aligned}w(z)=[t(z)]^3&=\left(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right)^3=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}\left(\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right)^3\\&=-\mathrm{i}\left(\frac{z+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}\right)^3.\end{aligned}$$

(2) a

(3) 两个圆域边界交点分别为 $z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}},z_2=\dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，两圆周在该点交角恰为 $\dfrac{\pi}{2}$，那么作变换

$$t(z)=\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{\sqrt{2}z-(1-\mathrm{i})}{\sqrt{2}z+(1+\mathrm{i})},$$

此时 z_1 变为 0，z_2 变为 ∞，由保角性，其形成一个角域 $\alpha<\arg t<\alpha+\dfrac{\pi}{2}$. 考虑圆周 $|z+\mathrm{i}|=1$ 上一点 $z=0$ 变换为

$$t(0)=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i},$$

因此该段变换后变成射线 $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$，另一段变为射线 $\arg z=\pi$，因此二次变换

$$u(z)=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}t(z)=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}\frac{\sqrt{2}z-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}z+1+\mathrm{i}}$$

将角域中辐角小的一边与实轴正向重合，最后经变换

$$w(z)=[u(z)]^2=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}\left(\frac{\sqrt{2}z-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}z+1+\mathrm{i}}\right)^2=-\left(\frac{\sqrt{2}z-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}z+1+\mathrm{i}}\right)^2.$$

得到上半平面.

(4) 两圆周与实轴的交点分别为 $z_1=-2,z_2=4,z_3=2$，其中 z_2 为其公共交点. 设作线性变换 $t=t(z)$ 后，

$$t_1=t(z_1)=0,\quad t_2=t(z_2)=\infty,$$

因此可取线性变换为 $t(z)=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=\dfrac{z+2}{z-4}$，则 z_3 变为 $t_3=-2$. 由保角性，射线 $\arg t=\arg t_3=\pi$ 与从原点到 ∞ 的两条射线交角均为 $\dfrac{\pi}{2}$，因此变换后的区域为角域

$$\frac{\pi}{2}<\arg t<\frac{3\pi}{2},$$

因此为得到上半平面，作旋转变换

$$w(z)=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}t(z)=-\mathrm{i}\frac{z+2}{z-4}.$$

(5) 考虑圆周与实轴的交点 $z_1=0,z_2=2,z_3=-2$，其中 z_2 为公共交点. 设线性变换 $t=t(z)$ 将 z_1,z_2 分别变为 $t_1=0,t_2=\infty$，因此可取线性变换

$$t(z)=\frac{z}{z-2},$$

此变换将 z_3 变为 $t_3=\dfrac{1}{2}$，由保角性，射线 $\arg t=\arg t_3=0$ 为平角角域平分线，因此角域为

$$-\frac{\pi}{2}<\arg t<\frac{\pi}{2},$$

因此为得到上半平面，作旋转变换

$$w(z)=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}\frac{z}{z-2}=\frac{\mathrm{i}z}{z-2}.$$

11. (1) 先将该角域映照为上半平面，可作变换 $t(z)=z^{\pi/\alpha}$. 然后经线性变换 $w(t)$ 得单位圆，不妨设 $w(\mathrm{i})=0$，那么 $w(-\mathrm{i})=\infty$，线形变换可取

$$w(z)=\frac{t(z)-\mathrm{i}}{t(z)+\mathrm{i}}=\frac{z^{\pi/\alpha}-\mathrm{i}}{z^{\pi/\alpha}+\mathrm{i}}.$$

(2) a

(3) 先作变换 $t=z^2$ 将第一象限变为上半平面. 记 $z_1=\sqrt{2}\mathrm{i},z_2=0,z_3=1$，则在此变换下，

$$t_1=t(z_1)=-2,\quad t_2=t(z_2)=0,\quad t_3=t(z_3)=1,$$

现考虑分式线性变换 $w=w(t)$，使得上半平面变为上半平面，且满足

$$w(t_1)=-1,\quad w(t_2)=1,\quad w(t_3)=\infty,$$

由于 $t_i\in\mathbb{R}$，不妨取 $w_i=w(t_i)$ $(i=1,2,3)$ 均位于实轴上，因此分式线性变换为

$$\frac{w-(-1)}{w-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{t-(-2)}{t-0}\cdot\frac{1-0}{1-(-2)},$$

整理可得

$$w(z)=-\frac{2t(z)+1}{t(z)-1}=-\frac{2z^2+1}{z^2-1}.$$

(4) 该区域为 $0 < \arg z < 2\pi, |z| < 1$，先作变换 $t(z) = \sqrt{z}$，将其变为上半单位圆域：

$$0 < \arg t < \pi, \quad |t| < 1$$

设线性变换 $u(t)$ 将 $t_1 = -1, t_2 = 1$ 分别映照为 $u_1 = 0, u_2 = \infty$，则可取线性变换

$$u(t) = \frac{t(z)+1}{t(z)-1} = \frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}.$$

此线性变换将 $t_3 = \mathrm{i}$ 映照为 $u_3 = -\mathrm{i}$，由保角性，此时角域为

$$\pi < \arg u < \frac{3\pi}{2},$$

因此最后作变换 $w(z)$ 得到上半平面：

$$w(z) = u^2(z) = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2.$$

8 拉氏变换

1. (1) $L\left[\frac{1}{2}\sin 2t+\cos 3t\right]=\frac{1}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+9}$.

(2) $L[\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-2t}]=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p+2}=\frac{5}{(p-3)(p+2)}$.

(3) $L[1-\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{p}-\frac{1}{p-a}=\frac{-a}{p(p-a)}$.

(4) $L\left[\frac{a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt}}{a-b}\right]=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{p-a}-\frac{b}{p-b}\right)=\frac{p}{(p-a)(p-b)}$.

(5) $L\left[\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\sin bt)\right]=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{b}{p^2+b^2}\right)$.

(6) $L\left[\frac{at-\sin at}{a^3}\right]=\frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{p^2}-\frac{a}{p^2+a^2}\right)=\frac{1}{p^2(p^2+a^2)}$.

(7) 由位移定理，$L[\mathrm{e}^{-2t}\sin 5t]=\frac{5}{(p+2)^2+5^2}$.

(8) $L[\mathrm{e}^{-(3+4\mathrm{i})t}]=\frac{1}{p+(3+4\mathrm{i})}$.

(9) 由位移定理，$L[t\mathrm{e}^{5t}]=\frac{1}{(p-5)^2}$.

(10) $L[\cosh\omega t]=L[\cos(\mathrm{i}\omega t)]=\frac{p}{p^2+(\mathrm{i}\omega)^2}=\frac{p}{p^2-\omega^2}$.

(11) 由位移定理，$L[\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t+\varphi)]=\frac{(p+a)\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{(p+a)^2+\omega^2}$.

(12) 由本函数的微分法及位移定理，

$$\begin{aligned}L\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t)\right]&=p^2L[\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t]-p\cdot 0-\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t)\\&=\frac{\omega p^2}{(p+a)^2+\omega^2}-\omega.\end{aligned}$$

(13) 由位移定理，$L[t^2\mathrm{e}^{t}]=\frac{2!}{(p-1)^3}=\frac{2}{(p-1)^3}$.

(14) 由本函数的积分法及位移定理，

$$L\left[\int_0^{\infty}t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{p}L[t\mathrm{e}^{2t}]=\frac{1}{p(p-2)^2}.$$

(15) 记 $f(t)=\sinh 3t, g(t)=\sin 2t$，由卷积定理，

$$L[f*g]=L[f]\cdot L[g]=\frac{3}{p^2-9}\cdot\frac{2}{p^2+4}=\frac{6}{(p^2-9)(p^2+4)}.$$

(16) 记 $f(t)=t^n, g(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t$，由卷积定理及位移定理，

$$L[f_1*f_2]=L[f_1]\cdot L[f_2]=\frac{n!}{p^{n+1}}\cdot\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}=\frac{n!(p+a)}{p^{n+1}[(p+a)^2+\omega^2]}.$$

(17) 由延迟定理，$L[\cos\omega(t-\varphi)h(t-\varphi)]=\mathrm{e}^{-p\varphi}L[\cos\omega t]=\frac{p\mathrm{e}^{-p\varphi}}{p^2+\omega^2}$.

(18) 由延迟定理，$L[\cos\omega(t-\varphi)h(t-2\varphi)] = \mathrm{e}^{-2\varphi}L[\cos\omega(t+\varphi)] = \mathrm{e}^{-2\varphi}\dfrac{p\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$.

2. a

3. (1) $f(t)=(t-T)h(t-T)$，因此像函数 $L[f(t)]=\dfrac{\mathrm{e}^{-pT}}{p^2}$.

(2) $f(t)=-Eh(t-T)$，因此像函数 $L[f(t)]=-\dfrac{E\mathrm{e}^{-pT}}{p}$.

(3) $f(t)=E[h(t-t_1)-h(t-t_1-\tau_1)]+E[h(t-t_2)-h(t-t_2-\tau_2)]$，因此像函数

$$L[f(t)]=\frac{E}{p}\mathrm{e}^{-pt_1}(1-\mathrm{e}^{-p\tau_1})+\frac{E}{p}\mathrm{e}^{-pt_2}(1-\mathrm{e}^{-p\tau_2}).$$

(4) $f(t)=Eh(t)-\dfrac{E}{4}[h(t-T)+h(t-2T)+h(t-3T)+h(t-4T)]$，因此像函数

$$L[f(t)]=\frac{E}{4p}(4-\mathrm{e}^{-pT}-\mathrm{e}^{-2pT}-\mathrm{e}^{-3pT}-\mathrm{e}^{-4pT}).$$

(5) $f(t)=\dfrac{E}{T}t[h(t)-h(t-T)]$，因此像函数 $L[f(t)]=\dfrac{E}{p^2T}[1-(1+pT)\mathrm{e}^{-pT}]$.

4. a

5. 本题中四个函数均为周期函数.

(1) 周期为 T，本函数 $f(t)=E\left(1-\dfrac{2t}{T}\right)$ $(0\leqslant t<T)$，因此其像函数为

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^T E\left(1-\frac{2t}{T}\right)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\cdot\frac{2-p(T-2t)}{p^2T}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^T\\&=\frac{E}{p}\frac{1+\mathrm{e}^{-pT}}{1-\mathrm{e}^{-pT}}-\frac{2E}{p^2T}=\frac{E}{p}\tanh\left(\frac{1}{2}pT\right)-\frac{2E}{p^2T}.\end{aligned}$$

(2) 周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，本函数 $f(t)=\sin\omega t[h(t)-h(t-\pi/\omega)]$ $(0\leqslant t<2\pi/\omega)$，因此其像函数为

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2p\pi/\omega}}\int_0^{\pi/\omega}A\sin\omega t\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{A}{1-\mathrm{e}^{-2p\pi/\omega}}\cdot\frac{-1}{p^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-pt}(\omega\cos\omega t+p\sin\omega t)\Big|_0^{\pi/\omega}\\&=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1+\mathrm{e}^{-p\pi/\omega}}{1-\mathrm{e}^{2p\pi/\omega}}=\frac{A\omega}{(p^2+\omega^2)(1-\mathrm{e}^{-p\pi/\omega})}.\end{aligned}$$

(3) 周期为 T，本函数 $f(t)=\begin{cases}E(1-2t/5T), & 0\leqslant t<T/2,\\ 2E/5(t/T-1), & T/2\leqslant t<T,\end{cases}$ 因此其像函数为

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[\int_0^{T/2} E\left(1-\frac{2t}{5T}\right)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t+\int_{T/2}^{T}\frac{2E}{5}\left(\frac{t}{T}-1\right)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[\frac{(-2+5pT)+2(1-2pT)\mathrm{e}^{-pT/2}}{5p^2T}+\frac{(2-pT)\mathrm{e}^{-pT/2}-2\mathrm{e}^{-pT}}{5p^2T}\right]\\
&= \frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[\frac{1}{p}(1-\mathrm{e}^{-pT/2})-\frac{2}{5p^2T}(1-\mathrm{e}^{-pT/2})^2\right]\\
&= \frac{E}{p}\frac{1-\mathrm{e}^{-pT/2}}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\left[1-\frac{2(1-\mathrm{e}^{-pT/2})}{5pT}\right].
\end{aligned}
$$

(4) 周期为 T，本函数 $f(t)=E\sin\dfrac{2\pi}{\tau}t[h(t)-h(t-\tau)]$ $(0\leqslant t<T)$，因此其像函数为

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\int_0^{\tau}\sin\frac{2\pi t}{\tau}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{\omega=2\pi/\tau} \frac{E}{1-\mathrm{e}^{-pT}}\frac{-1}{p^2+\omega^2}\,\mathrm{e}^{-pt}(\omega\cos\omega t+p\sin\omega t)\Big|_0^{\tau}\\
&= \frac{\omega E}{p^2+\omega^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-p\tau}}{1-\mathrm{e}^{-pT}}=\frac{2\pi\tau E}{p^2\tau^2+4\pi^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-p\tau}}{1-\mathrm{e}^{-pT}}.
\end{aligned}
$$

6. 由拉式变换的线性性及位移定理，

$$
L[f(t)\sin\omega t]=\frac{1}{2\mathrm{i}}L[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(t)]-\frac{1}{2\mathrm{i}}L[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)]=\frac{1}{2\mathrm{i}}[F(p-\mathrm{i}\omega)-F(p+\mathrm{i}\omega)].
$$

7. (1) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+3)(p+1)}\right]=\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+1}\right]-\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+3}\right]=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})$.

(2) $L^{-1}\left[\dfrac{1-p}{p^3+p^2+p+1}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+1}\right]-L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+1}\right]=\mathrm{e}^{-t}-\cos t$.

(3) $L^{-1}\left[\dfrac{p+2}{p^2+4p+5}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}\right]=\mathrm{e}^{-2t}\cos t$.

(4) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p+a)}\right]=\dfrac{1}{a}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]-\dfrac{1}{a}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p+a}\right]=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-at}}{a}$.

(5) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)}\right]=\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-2}\right]-L^{-1}\left[\dfrac{1}{p-1}\right]+\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{t}-1)^2$.

(6) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+3)}\right]=\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right]-\dfrac{1}{2}L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+3}\right]=\dfrac{\sqrt{3}\sin t-\sin\sqrt{3}t}{2\sqrt{3}}$.

(7) 先将 $\dfrac{1}{(p-2)p}$ 拆分，再分别将 $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+1)}$ 和 $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ 拆分，得

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-2)(p^2+1)}\right] &= \frac{1}{10}L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{2p-1}{p^2+1}\right]\\
&= \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{5}(2\cos t-\sin t)-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(8) 由位移定理，

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-2)^2}\right] &= \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(2t-1)\mathrm{e}^{2t}+1\right].
\end{aligned}
$$

(9) 由位移定理，

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{p+3}{p^3+3p^2+6p+4}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{(p+1)-1}{(p+1)^2+3}\right] \\
&= \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right].
\end{aligned}
$$

(10) $L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^4+3p^2-4}\right] = \dfrac{1}{5}L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2-1}\right] - \dfrac{1}{5}L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+4}\right] = \dfrac{1}{5}(\cosh t - \cos 2t).$

(11) 由卷积定理，

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{1}{p^4-3p^3+3p^2-p}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] * L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^3}\right] = \int_0^t \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(t^2-2t+2)\mathrm{e}^t - 1.
\end{aligned}
$$

(12) 将分母拆解成二次项：

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{a^2p}{p^4+a^4}\right] &= \frac{1}{2\mathrm{i}}L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-\mathrm{i}a^2}\right] - \frac{1}{2\mathrm{i}}L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\mathrm{i}a^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cos\left(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}at\right) - \frac{1}{2\mathrm{i}}\cos\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}at\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\sin\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{2}at\right)\sin\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{2}at\right) \\
&= \sin\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)\sinh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

(13) 仿照上一问的解法，

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{p^3}{p^4+a^4}\right] &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cos\left(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}at\right) - \frac{1}{2\mathrm{i}}\cos\left(\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}at\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\cos\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{2}at\right)\cos\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{2}at\right) \\
&= \cos\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{at}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

(14) 由位移定理，$L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+1)^4}\right] = \dfrac{1}{6}t^3\mathrm{e}^{-t}.$

(15) 由像函数的微分法及位移定理，

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p^2-2p+2)^2}\right] &= L^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)\right] \\
&= \frac{t}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1}\right] = \frac{t}{2}\mathrm{e}^t\sin t.
\end{aligned}
$$

(16) $L^{-1}\left[\dfrac{3p+7}{p^2+2p+1+a^2}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{3(p+1)+4}{(p+1)^2+a^2}\right]=\mathrm{e}^{-t}\left(3\cos at+\dfrac{4}{a}\sin at\right).$

(17) 由延迟定理，e^{-p} 对应将 $\dfrac{p+2}{p^2+1}$ 的本函数中 t 换成 $(t-1)$，因此

$$L^{-1}\left[\frac{p+2}{p^2+1}\mathrm{e}^{-p}\right]=L^{-1}\left[\frac{p+2}{p^2+1}\right]\bigg|_{t\to t-1}=[\cos(t-1)+2\sin(t-1)]h(t-1).$$

(18) 由延迟定理，e^{-10p} 将 $\dfrac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}$ 的本函数中 t 换成 $(t-10)$，因此

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}\mathrm{e}^{-10p}\right]&=L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right]\bigg|_{t\to t-10}\\&=[\mathrm{e}^{-(t-10)}-\cos(t-10)]h(t-10).\end{aligned}$$

(19) 由延迟定理，$L^{-1}\left[\dfrac{1-\mathrm{e}^{-3p}}{p}\right]=h(t)-L^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right]\bigg|_{t\to t-3}=h(t)-h(t-3).$

(20) 将 $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-p\pi}}$ 在 $\mathrm{Re}(p)=\infty$ 附近展开，得 $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-p\pi}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-pn\pi}$，由拉式变换的线性性与延迟定理，

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{p}{P^2+1}\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}L^{-1}\left[\mathrm{e}^{-pn\pi}\frac{p}{p^2+1}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\cos(t-n\pi)h(t-n\pi)\\&=\cos t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h(t-n\pi)\\1&=\begin{cases}\cos t, & 2n\pi\leqslant t<(2n+1)\pi,\\ 0, & (2n+1)\pi\leqslant t<2(n+1)\pi\end{cases}\quad(n\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

8. 以下均记 $X(p)=L[x(t)],Y(p)=L[y(t)],Z(p)=L[z(t)]$.

(1) $L[y''(t)]=p^2Y(p),L[y'(t)]=pY(p)$，那么原方程变为

$$p^2Y(p)+pY(p)=L[1]=\frac{1}{t},$$

因此 $Y(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$，故

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]=\mathrm{e}^{-t}+t-1.$$

(2) $L[y''(t)]=p^2Y(p),L[y'(t)]=pY(p)$，那么原方程变为

$$p^2Y(p)-pY(p)=L[\mathrm{e}^t]=\frac{1}{p-1},$$

因此 $Y(p)=\dfrac{1}{p(p-1)^2}$，故

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{p-1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=(t-1)\mathrm{e}^t+1.$$

(3) $L[y''(0)] = p^2Y(p) - 1, L[y'(t)] = pY(p)$，那么原方程变为

$$p^2Y(p) - (a+b)pY(p) + abY(p) = 1,$$

因此 $Y(p) = \dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$，故

$$\begin{aligned} y(t) = L^{-1}[Y(p)] &= \frac{1}{b-a}L^{-1}\left[\frac{1}{p-b}\right] - \frac{1}{b-a}L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{b-a}. \end{aligned}$$

(4) $L[y''(t)] = p^2Y(p), L[y'(t)] = pY(p)$，那么原方程变为

$$p^2Y(p) - 2pY(p) + Y(p) = L[t\mathrm{e}^t] = \frac{1}{(p-1)^2},$$

因此 $Y(p) = \dfrac{1}{(p-1)^4}$，因此

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^4}\right] = \frac{1}{6}t^3\mathrm{e}^t.$$

(5) $L[y''(t)] = p^2Y(p) + p + 2$，那么原方程变为

$$p^2Y(p) - Y(p) + p + 2 = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4},$$

因此 $Y(p) = \dfrac{4}{(p^2-1)(p^2+1)} + \dfrac{5p}{(p^2-1)(p^2+4)} - \dfrac{p+2}{p^2-1}$，故

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = -2L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right] = -2\sin t - \cos 2t.$$

(6) $L[y''(t)] = p^2Y(p)$，那么原方程变为

$$p^2Y(p) - Y(p) = L[th(t) - (t-1)h(t-1)] = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{p^2},$$

因此 $Y(p) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{p^2(p^2-1)}$，故

$$\begin{aligned} y(t) = L^{-1}[Y(p)] &= L^{-1}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{p^2-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{p^2}\right] \\ &= \sinh t h(t) - \sinh(t-1)h(t-1) - th(t) + (t-1)h(t-1) \\ &= (\sinh t - t)h(t) - [\sinh(t-1) - (t-1)]h(t-1). \end{aligned}$$

(7) $L[y^{(n)}(t)] = p^nY(p)\ (n = 0, 1, 2, 3)$，那么原方程变为

$$p^3Y(p) + 3p^2Y(p) + 3pY(p) + Y(p) = L[6\mathrm{e}^{-t}] = \frac{6}{p+1},$$

因此 $Y(p) = \dfrac{6}{(p+1)^4}$，因此

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = 6L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^4}\right] = t^3\mathrm{e}^{-t}.$$

(8) $L[x'(t)] = pX(p) - b, L[y'(t)] = pY(p) - a$，那么原方程组变为

$$\begin{cases} pY(p) - a + pX(p) - b = 4Y(p) + 1/p, \\ pY(p) - a + X(p) = 3Y(p) + 2/p^3, \end{cases}$$

因此 $Y(p) = \dfrac{ap}{(p-2)^2} + \dfrac{2}{p^2(p-2)^2} - \dfrac{a+b}{(p-2)^2} - \dfrac{1}{p(p-2)^2}$，故

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{4a-1}{4(p-2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{a-b}{(p-2)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{4p}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{2p^2}\right] \\ &= \left(a - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2t} + (a-b)t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ x(t) &= 3y(t) - y'(t) + t^2 = \left(b - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2t} + (a-b)t\mathrm{e}^{2t} + t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(9) $L[x'(t)] = pX(p), L[y'(t)] = pY(p) - 1$，那么原方程组变为

$$\begin{cases} pX(p) - 2pY(p) + 2 = 1/(p^2+1), \\ pX(p) + pY(p) - 1 = p/(p^2+1), \end{cases}$$

因此 $X(p) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{p^2+1}\right), Y(p) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{p} + \dfrac{p+1}{p^2+1}\right)$，故

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{3}(1 - \cos t + 2\sin t), \\ y(t) &= L^{-1}[Y(p)] = \frac{1}{3}(2 + \cos t + \sin t). \end{aligned}$$

(10) $L[x'(t)] = pX(p), L[y'(t)] = pY(p), L[z(t)] = pZ(p)$，那么原方程组变为

$$\begin{cases} pX(p) - pY(p) = 0, \\ pY(p) + pZ(p) = 1/p, \\ pX(p) - pZ(p) = 1/p^2, \end{cases}$$

因此 $X(p) = Y(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^3}\right), Z(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^3}\right)$，故

$$x(t) = y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2, \quad z(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2.$$

9. 记 $L[y(t)] = Y(p), L[f(t)] = F(p)$，且 $y'(0) = y''(0) = 0$，那么原方程变为

$$p^2Y(p) + \omega^2 Y(p) = F(p),$$

因此 $Y(p) = \dfrac{F(p)}{p^2+\omega^2}$，结合卷积定理，

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\omega^2} \cdot F(p)\right] = L^{-1}\left\{L\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] \cdot L[f(t)]\right\} \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-u) f(u)\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

10. 记 $L[f(t)]=F(p)$，由卷积定理，原方程变为

$$F(p)=\frac{ab}{p^2+b^2}+\frac{bc}{p^2+b^2}F(p),$$

因此 $F(p)=\dfrac{ab}{p^2+(b^2-bc)}$，故

$$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{ab}{\sqrt{b^2-bc}}\sin\left(\sqrt{b^2-bc}t\right).$$