中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第八次作业

第三章 46. (1). $P(Y=y)=\begin{cases} 0, & y<a \\ \int_{-\infty}^{a} f(x)dx, & y=a \\ \int_{a}^{y} f(x)dx, & a<y<b \\ \int_{b}^{+\infty} f(x)dx, & y=b \\ 0, & y>b \end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<a \\ \int_{-\infty}^{y} f(x)dx, & a\le y<b \\ 1, & y\ge b \end{cases}$

第四章. 1. (1) $X=4,5,6,7$. $P(X=4)=P(X=4,A)+P(X=4,B)$

$=2\times(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$.

$P(X=5)=2\times C_4^1\cdot(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{4}$, $P(X=6)=2\times C_5^2(\frac{1}{2})^6=\frac{5}{16}$, $P(X=7)=2\times C_6^3(\frac{1}{2})^7=\frac{5}{16}$, $EX=\frac{93}{16}=5.8125$

(2). $P(X=4)=0.6^4+0.4^4=0.1552$. $P(X=5)=C_4^1(0.6^4\cdot0.4+0.4^4\cdot0.6)=0.2688$.

$P(X=6)=C_5^2(0.6^4\cdot0.4^2+0.4^4\cdot0.6^2)=0.29952$. $P(X=7)=C_6^3(0.6^4\cdot0.4^3+0.4^4\cdot0.6^3)=0.27648$

$EX=5.69728=\frac{17804}{3125}$.

2. (1) $EX=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P(X=k)I(n\le k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)I(k\ge n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\ge n)$.

(2). $\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx=\int_0^{\infty}P(X>x)dx=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}f(t)dtdx=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)I(t\ge x)dtdx$.

由Fubini: $=\int_0^{\infty}f(t)\int_0^{\infty}I(t\ge x)dxdt=\int_0^{\infty}tf(t)dt=EX$.

(3). $EX=E\int_0^X dx=E\int_0^{\infty}I(x<X)dx \xlongequal{\text{Fubini}} \int_0^{\infty}EI(X>x)dx=\int_0^{\infty}P(X>x)dx$.

3. $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}xd\Phi(x)+0.5\int_{-\infty}^{+\infty}xd\Phi(\frac{x-4}{2})=0.5EY+0.5EZ$, $Y\sim N(0,1)$, $Z\sim N(4,4)$

$\Rightarrow EX=2$.

6. 盲盒成本 $5\times0.2+10\times0.3+15\times0.3+20\times0.1+50\times0.1=15.5$. 销售价 $15.5\times1.18=18.29$.

$\underline{(18.29-15.5)\times1500}-15\times1000\times0.2=1185$ (元).

每天毛利润: 4185(元).

8. (1). 设 T_k 表示已有 $k-1$ 种条件下，再获一种新卡片所需购买数. $X_n=T_1+\cdots+T_n$. , $T_k\sim Ge(\frac{n-k+1}{n})$

$EX=\sum_{i=1}^{n}ET_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n-k+1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx37.24$.

(2). $\lim_{n\to\infty}E\frac{X_n}{n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}\approx\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\gamma}{\ln n}=1$

10. 由Taylor展开. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce=1\Rightarrow C=\frac{1}{e}$

$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{C}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{k(k-1)}{k!}+\frac{k}{k!})=\frac{1}{e}(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!})=\frac{1}{e}\cdot2e=2$.