关于实数的补充内容

数学分析的主要概念（如收敛, 连续, 微分, 积分等）, 必须有精确定义的数为基础. 一些实际问题抽象为函数关系, 而函数的定义域和值域都是数的集合, 因此有必要对最基本的“数”作进一步了解. 然而这不是一个简单的问题, 事实上随着极限理论的产生, 人们才对“实数”有更加深入的了解.

这里仅对“实数”给出大致描述, 有关理论见第三册（第14章）.

数的特点大致可有下表给出, 其中的“无限”、“序”、“域”、“有序域”以及“完备”等概念, 将随后解释.

自然数	无限性	序		加法（不可逆）			
整数	无限性	序	含0和1	加减法	环		乘法（但不可逆）
有理数	无限性	序	含0 和1	加减乘除	域	有序域	不完备（不连续）
实数	无限性	序	含0和1	加减乘除	域	有序域	连续（确界原理）

一、自然数与整数

自然数（暂且不考虑 ”0”, **因此也称为正整数）：**

$$\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\},$$

（1）序 对任意 $a,b\in\mathbb{N}$, $a>b$ 或 $a<b$ 或 $a=b$ 有且仅有一种成立.

（2）加法 对任意 $a,b\in\mathbb{N}$, $a+b\in\mathbb{N}$, 且 $a+b=b+a$.

这里序与加法是相融的: $a<b\Longrightarrow a+c<b+c$.

（3）归纳公理（自然数的无限性）： 设 $S\subseteq\mathbb{N}$, 如果 S 满足 (a) $1\in S$, (b) 若 $n\in S$, 则 $n+1\in S$, 那么 $S=\mathbb{N}$.

由归纳公理, 不难得到自然数的**最小数原理和数学归纳法**.

定理1**（最小数原理）** *设 $T\in\mathbb{N}$ 且 $T\neq\phi$ (ϕ 表示空集), 则 T 中必有最小的整数.*

证明 设

$$S=\{s\mid s\in\mathbb{N},\ s\le t,\ 对任意\ t\in T\ 成立\}.$$

显然, $1\in S,\Longrightarrow S\neq\phi$. 又因为对 $t\in T$, 有 $t+1>t,\Longrightarrow t+1\notin S$, 即 $S\neq\mathbb{N}$.

据此推出: 存在 $s_0\in S$, 而 $s_0+1\notin S$. 否则, 若这样的 s_0 不存在, 就意味着对任意 $s\in S$, 都有 $s+1\in S$, 根据归纳原理推出 $S=\mathbb{N}$, 这与 $S\neq\mathbb{N}$ 相矛盾.

若 $s_0\notin T$, 则对任意 $t\in T$, 有 $s_0<t$, 从而 $s_0+1\le t$, 推出 $s_0+1\in S$, 这与 s_0 选取矛盾. 所以 $s_0\in T$. 但 $s_0\in S$, 因此对任意 $t\in T$, 有 $s_0\le t$, 即 s_0 是 T 的最小数.

说明 这里的“最小数原理”仅是“自然数集的最小数原理”. 例如, 对于数集 $\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\}$ 是没有最小数的.

定理 2（**数学归纳法**） 设 A_n 是关于正整数的一个命题，如果

（*1*）当 $n=1$ 时，A_1 成立；

（*2*）对任意的正整数 $n>1$，由 A_n 成立可推出 A_{n+1} 成立. 或由前 n 个 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 成立可推出 A_{n+1} 成立.

那么，A_n 对所有正整数 n 成立.

证明 （反证法）假设存在一个数 r，使得命题 A_r 不成立，记

$$S=\{n \mid A_n \text{ 不成立}\} \neq \phi,$$

因此存在最小数 $m \in S$. 根据（1）可知 $1 \notin S$，所以 $m>1$. 又因为 m 是S 中最小数，所以$m-1 \notin S$，即 A_{m-1} 成立. 但是 $m \in S$，即 A_m 不成立，这与条件（2）相矛盾. 矛盾说明假设是错误的，所以结论是在定理条件下所有 A_n 都成立. □

二、无限集合

1、一一对应

最形象的例子是小朋友分苹果.

定义 1 设A, B为两个集合，映射（例：打靶） $f: A \longrightarrow B$ 称为：

单射: 若对任意的 $a, a' \in A$，只要 $a \neq a'$，就有 $f(a) \neq f(a')$（不同子弹打在不同靶上）.

满射: 若对任意的 $b \in B$，至少存在$a \in A$，使得 $f(a)=b$（每个靶子至少被一颗子弹击中）.

1-1 ***映射***: 即是单射又是满射(或称A 和 B *1-1* 对应)（每个靶子只被一颗子弹击中）.

2、可数集合

定义 2 设 A, B 为两个集合，$\mathbb{N}$ 为自然数集合.

（*1*）若 A 和 B *1-1* 对应，则称A 和 B 有***相同的基数***，或者***等势***.

（*2*）若存在$A \to B$的满射，但不存在$A \to B$ 的单射，则称A比B具有***更大的基数***.

（*3*）若存在自然数n，使得A与 $\{1,2,\cdots,n\}$ *1-1*对应，则称A为***有限集合***，n 称为 A 的基数；否则称A为***无限集合***.

（*4*）自然数 $\mathbb{N}$ 的基数称为***可数的***，与 $\mathbb{N}$ *1-1*对应的集合A 的基数是可数的，称为可数集合.

对于有限集合 A, 设 n 是它的基数, 则

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{array}$$

或看成是A 中元素可进行一种不重复的排列（或者说编号）, 当然, 排列方式不唯一. 显然, **一个有限集合**, **去掉一个元素**, **或增加一个元素**, **都不可能与原集合一一对应**, **也就是不可能有相同的基数**.

对于可数集合 A, 则

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

因此通常记可数集合为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

对于可数集, **增加或减少有限个（甚至是无限个）元素**, **仍是可数集**.

例如偶数与自然数的一一对应:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

因此自然数中偶数集合也是可数的, 虽然它是自然数的真子集.

可见, 无限集合具有一些独特的性质. 可数集合的部分性质罗列如下.

性质1 *设 U 是无限集合, 若存在满射:*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow U,$$

则U 可数. 特别, $\mathbb{N}$的任何无限真子集一定可数.也就是在 $\mathbb{N}$ 中去掉有限个数, 或去掉无限个数, 只要剩余的数仍然是无限集合, 那么基数不变.

这里就不再证明了.

性质2 *有限集合与可数集合的并集是可数集合. 有限个可数集合的并集仍然是可数集合. 可数个可数集合的并集还是可数集.*

证明 这里只讨论第三种情形. 设A_1, $A_2, \cdots$为可数个可数集. 记

$$A_k = \{a_{k1},\, a_{k2},\, \cdots,\, a_{kn},\, \cdots\}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

那么并集$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$里的所有元素可以表示为如下无穷矩阵,

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

顺时针方向旋转45°, 沿着箭头我们得到元素的一个排列

$$\begin{gathered} a_{11} \to \\ \to a_{21} \to a_{12} \to \\ \to a_{31} \to a_{22} \to a_{13} \to \\ \to \cdots \to \cdots \to \cdots \to \cdots \to \end{gathered}$$

因此给出了$\mathbb{N}$到并集的一个满射, 但不一定是单射（元素 a_{ij}可能有重复）, 利用性质1, 结论成立.

性质3 整数集合

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+ = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$$

是可数集, 因此与自然数集 $\mathbb{N}$ 有相同的基数. 其中

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_+ &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}, \\ \mathbb{Z}_- &= \{-1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots\}, \end{aligned}$$

性质 4 两个可数集合A, B的直积 *(或者笛卡尔积)*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

是可数集, 有限个可数集的直积也是可数集.

记 $a_{ij} = (a_i, b_j),\ a_i \in A,\ b_j \in B$, 因此证明与性质 2类似.

问题：是否存在基数大于可数集的无限集合?

3、**不可数集合**

定义 3 无限集合称为***不可数***, 是指不存在它与$\mathbb{N}$之间的*1-1* 对应. 换而言之, 它有比$\mathbb{N}$更大的基数.

构造一个不可数集合的思路 一个非空集合A的**幂集** 是它的所有子集构成的集合, 记为

$$2^A = \{X \mid X \subset A\}.$$

例如

当$A=\{a,b\}$ 时

$$2^A=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}.$$

当 $A=\{x,y,z\}$ 时

$$2^A=\{\phi,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}.$$

不难看出, 当 A 的基数（个数）为2 时, 2^A 的基数为 $2^2=4$, 当 A 的基数为3 时, 2^A 的基数为 $2^3=8$.

若有限集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 则 A 的幂集 2^A 中元素的个数为

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

因此对对基数是 n 的有限集合, 其幂集的基数是 2^n:

$$2^A\text{的基数}=2^{(A\text{的基数})}.$$

定理 1 ((Cantor **康托**) $2^{\mathbb{N}}=\{X\mid X\subseteq\mathbb{N}\}$ 是不可数集合.

此处不再讨论, **结论：实数集合是不可数集合，无理数集合也是不可数集合**.

三、有理数

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\;\middle|\;p,q\in\mathbb{Z},\;q\neq 0\right\},$$

1、**算术** $0,1\in\mathbb{Q}$, 且对加、减（加法的逆运算）、乘、除（乘法的逆运算）运算封闭, 因此也称 $\mathbb{Q}$ 为**有理数域**.

2、**序** 对任意的 $x,y\in\mathbb{Q}$, $x<y,\;x=y,\;y<x$有且仅有一种成立.

3、**基数** 有理数集合是可数集.

证明 作映射

$$f_1:(p,q)\longmapsto\frac{p}{q},\quad (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+,$$

那么 f_1 是满射. 因为 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ 与自然数集合 $\mathbb{N}$ 1-1 对应:

$$f_2:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+,$$

所以复合映射

$$f=f_1\circ f_2:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$$

是满射, 所以有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数的. 通常把有理数集排序为

$$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}.$$

4、**稠密性** 任何两个有理数 $a<b$ 之间, 存在有理数 c: $a<c<b$. 例如 $c=\frac{a+b}{2}$, 因此也存在无限多个有理数.

5、**与数轴上点的对应** 任意有理数可对应数轴上一个点.对应的点称为有理点.

6、**不完备性（或不连续性）**：但是数轴上以边长为 1 的正方形的对角线长度的点不可能对应有理数. 也就是**不存在满足 $a^2=2$ 的有理数**.

反证法：假如存在有理数 a 满足 $a^2=2$, 设

$$a=\frac{q}{p},\ (q,p)=1.$$

代入$a^2=2$ 推得

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2=2,\ \Longrightarrow\ q^2=2p^2$$

因此 q 是偶数，$q=2m,\ \Longrightarrow 4m^2=2p^2,\ \Longrightarrow p$ 也是偶数. 这与 $(q,p)=1$ 矛盾, 所以a不是有理数. $\square$

这个问题说明数轴上与有理数对应的点虽然是稠密的, 但是不“连续”（也称不“完备”）, 也就是数轴上除了有理点外, 还存在很多空隙.

进一步分析会发现:

例1 若把有理数 $\mathbb{Q}$ 分成两组

$$\begin{aligned}&X=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x^2<2,x>0,\ \text{或}\ x<0\},\\&Y=\{y\mid y\in\mathbb{Q},y^2>2,y>0\}\end{aligned}$$

则, X 中无最大有理数, Y 中无最小有理数.

证明 设 $a\in\mathbb{Q}$, 且 $a>0$, 令

$$a'=a-\frac{a^2-2}{a+2}=\frac{2a+2}{a+2},$$

于是

$$a'^2-2=\frac{2(a^2-2)}{a+2}.$$

若 $a\in X$, 则 $a^2-2<0$, 因此 $a'>a$, 且 $a'^2-2<0$, 即 $a'\in X$. 也就是任何 X 中的数 a, 在 X 中存在比 a 大的数 $a'\in X$.

若 $a\in Y$, 则 $a^2-2>0$, 因此 $a'<a$, 且 $a'^2-2>0$, 即 $a'\in Y$.

四、实数（抽象定义）

为了弥补有理数的不连续性或不完备性, 需要将有理数进行扩充. 使得扩充后的数集不但保持有理数的特性, 还具有完备性的特点. 为此抽象地给出如下定义.

（一）有序集的定义 设 S 是一个集合, 若在其元素之间可定义一种**序**关系：

(1) 对任意的 $x,y\in S$ $x<y$, $x=y$, $y<x$ 有且仅有一种成立.

(2) 对任意的 $x,y,z\in S$, 如果 $x<y$, $y<z$, 那么 $x<z$.

则称 S 为**有序集**. 有时也用 $y>x$ 代替 $x<y$, 用 $x\le y$ 表示$x<y$ 或 $x=y$, 也就是对 $y<x$ 的否定.

显然,有理数集 $\mathbb{Q}$ 是有序集.

有了"序"的概念, 就可以定义"界"的概念:

有界的定义 设 S 是有序集, $E\subset S$, 若存在 $\beta\in S$, 使得对每个 $x\in E$, 有 $x\le\beta$, 则称 E 有上界, β 为 E 的一个上界. 同理定义下界. 同时有上下界的集合 E称为有界集合.

确界的定义 设 S 是有序集, $E\subset S$ 有界, 若 $\alpha\in S$, 满足

(a) α 是 E 的上界;

(b) 对任何 $\gamma<\alpha$, 那么 γ 就不是 E 的上界.

则称 α 是 E 的**上确界**, 也就是 E 的最小上界. 记为 $\alpha=\sup E$. 由 (b) 不难得到如果上确界存在, 则一定是**唯一的**.

同理定义 E 的下确界α, 记为 $\alpha=\inf E$

例 2 $S=\mathbb{Q}$, $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$, 则 $\sup E=1\in S$, $\inf E=0\in S$

但是 $1\in E$ 而 $0\notin E$, 所以称 E 达到上确界, 但没有达到下确界.

例 3 集合

$$X=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x^2<2,x>0\},\quad Y=\{y\mid y\in\mathbb{Q},y^2>2,y>0\}$$

都是 $\mathbb{Q}$ 的子集, 显然 Y 中的数都是X 在 $\mathbb{Q}$ 中的上界, X 中的数都是 Y 在 $\mathbb{Q}$ 中的下界. 因为 Y 中没有最小数, 所以X **在** $\mathbb{Q}$ **中没有最小的上界**, **即在** $\mathbb{Q}$ **中不存在上确界**. **同理** Y **在** $\mathbb{Q}$ **中没有下确界**, **即在** $\mathbb{Q}$ **中不存在下确界**. .

定义 1 **（确界原理）** 设 S 是有序集, 若 S 的任何非空、有上（下）界的子集, 在 S 中必有上（下）确界. 则称 S 满足**确界原理**.

例 3 **说明**, $\mathbb{Q}$ **不满足确界原理**!

定理 1 设 S 是有序集, 则 S 有上确界当且仅当 S 有下确界.

证明 不妨设 S 有上确界, 要证 S 中任意有下界的子集 E, 在S 中有下确界.

记E 所有下界的集合为

$$E' = \{x \mid x \in S, x \text{ 是 } E \text{ 的下界}\}$$

则, E 中的元素都是 E' 的上界, 因此 E' 有上确界: $\alpha = \sup E' \in S$. 也就是最小上界. 所以对任意的 $x \in E$, 有 $\alpha \le x$, 所以 α 是E 的一个下界.

设 $\beta \in S$ 是E 的任意一个下界, 则 $\beta \in E'$, 推出 $\beta \le \alpha$, 所以 α 是E 的最大下界:$\alpha = \inf E$.

（二）域的定义 若集合 F 具有**加法** 和 **乘法**运算, 且这些运算满足下列公理, 则称 F 为**域**

加法公理: 对任意的 $x, y \in F$, 可定义 $x + y \in F$.加法运算满足

1、零元：存在 $0 \in F$: 使得 $x + 0 = 0 + x = x$, 对任意的 $x \in F$ 成立 .

2、负元：对每个 $x \in F$, 存在 $y \in F$, 使得 $x + y = y + x = 0$, 记 $y = -x$, 称为 x 的负元.

3、交换律：$x + y = y + x$.

4、结合律：$x + (y + z) = (x + y) + z$.

乘法公理: 对任意的 $x, y \in F$, 可定义 $x \cdot y \in F$ 且满足

1、单位元：存在 $1 \in F$, 使得 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, 对任意 $x \in F$ 成立.

2、逆元：对任意的 $x \ne 0$, $x \in F$, 存在 $x^{-1} \in F$, 使得 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

3、交换律：$x \cdot y = y \cdot z$.

4、结合律：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

5、分配律：$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

（三）有序域的定义 设 F 即是有序集, 又是域. 若还满足如下条件, 则称为**有序域**

1、当 $x, y, z \in F$, 且 $y < z$ 时, 有 $x + y < x + z$;

2、当 $x, y \in F$, 且 $x > 0$, $y > 0$, 则 $xy > 0$.

显然, $\mathbb{Q}$ 是有序域.

（四）实数域

定义2 满足确界原理的有序域, 而且包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 作为子集. 称为实数域, 其中的元素称为实数.

定理 3 实数域是存在的.

证明思路是构造出满足定理条件的集合, 构造的方法有Cantor 的有理数基本列方法, Dedekind 分割方法, 十进制小数方法等.

实数的特点:

(1) 实数与数轴上的点 1-1 对应. 因此"实数"和"点"不再区分, 或称数是点的坐标. 整数、有理数、无理数对应的点分别称为"整数点"、"有理点"和"无理点".

(2) $\mathbb{R}$ 的基数大于 $\mathbb{Q}$ 的基数, 因此是不可数的（见第三册）.

定理 4 实数域 $\mathbb{R}$ 满足

(i) Archimedes 性：若 $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$, 则存在正整数 n, 使得

$$nx > y \geq (n-1)x.$$

(ii) 有理数在实数中的稠密性：若 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x < y$, 则一定存在 $c \in \mathbb{Q}$, 使得

$$x < c < y.$$

证明 对任意 $x > 0$, 设 $E = \{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$, 假如 y 是 E 上界, 那么 E 在 $\mathbb{R}$ 中一定有上确界 $\alpha = \sup E \in \mathbb{R}$. 因为 $x > 0$, 所以 $\alpha - x$ 不是 E 的上界, 也就是存在整数 m, 使得 $mx \in E$, $\alpha - x < mx$, 这样就有 $\alpha < (m+1)x \in E$, 这与 α 是上确界矛盾. 推得 y 不是 E 的上界, 推因此一定存在 $n_1 \in \mathbb{Z}$, 使得 $n_1 x > y$.

将上述结果应用到 $x > 0$ 和 $-y \in \mathbb{R}$ 上, 则存在 $n_2 \in \mathbb{Z}$, 使得 $n_2 x > -y$. 两者结合起来, 就是存在 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, 使得

$$-n_2 x < y < n_1 x.$$

记

$$S = \{k \mid k \in \mathbb{Z},\ kx > y\},$$

则 S 包含 n_1 因此非空, 同时对 $k \in S$, 有

$$k > \frac{y}{x} > -n_2,$$

即 $-n_2$ 是 S 的一个下界. 这里要用到一个事实: **有下界整数集必有最小数**, 这个结论可以从自然数的最小数原理推导出来. 设n 是 S 中最小整数, 使得

$$(n-1)x \leq y < nx.$$

关于(ii) 的证明如下, 由于 $x < y$, 得 $y - x > 0$, 对 $y - x$ 和 1, 根据(i), 存在整数 n, 使得

$$n(y-x) > 1, \quad 或 \quad ny > nx + 1.$$

因 $y-x>0$, 所以 $n>0$ 是正整数. 再对 1 和 nx 利用 (i), 存在整数 m 使得

$$m-1\leq nx<m.$$

综合上述不等式, 有

$$nx<m\leq nx+1<ny.$$

因 $n>0$, 从而

$$x<\frac{m}{n}<y.$$

□

（五）十进制小数

设 $\mathbb{R}$ 是实数域. 对任意的 $x>0$, 根据Archimedes 性, 存在非负整数 $a_0\geq 0$, 使得

$$a_0\leq x<a_0+1.$$

同理对 $0\leq 10(x-a_0)<10$, 存在非负整数 a_1, 使得

$$a_1\leq 10(x-a_0)<a_1+1 \quad \text{或} \quad a_0+\frac{a_1}{10}\leq x<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}.$$

显然 $0\leq a_1<10$ 或 $0\leq a_1\leq 9$.

若存在 0 和 9 之间的非负整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\leq x<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}$$

对 n 成立, 则对

$$0\leq 10^{n+1}\left(x-a_0-\frac{a_1}{10}-\frac{a_2}{10^2}-\cdots-\frac{a_n}{10^n}\right)<10$$

存在非负整数 $0\leq a_{n+1}\leq 9$, 使得上式对 $n+1$ 也成立.

令 E 是按上述步骤得到的数

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n},\ n=0,1,2.\cdots,$$

所组成的集合. 因此, x 是 E 在 $\mathbb{R}$ 中的一个上界, 因此 E 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界. 下面要说明 $x=\sup E$.

若不然, 令 $x'=\sup E<x$, 那么

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\leq x'<x<a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}$$

$$\Longrightarrow 0<x-x'<\frac{1}{10^n},\ n=1,2,\cdots,$$

这是不可能的. 因此 $x = \sup E$.

反之, 对任何无限小数

$$a_0.a_1a_2.\cdots.a_n\cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

其中 $0 \leq a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \leq 9$.

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < a_0 + \frac{10}{10} + \frac{10}{10^2} + \cdots + \frac{10}{10^n} < a_0 + 2$$

有界, 所以有上确界 x, 记

$$x = a_0.a_1a_2.\cdots.a_n\cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

在十进制小数中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是介于 0 和 9 之间的非负整数. 这就产生了三种可能.

1° **有限小数**

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中只有有限项非零, 不妨设 $a_j = 0, j > m$, 则

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_m = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_m}{10^m}.$$

通分后有限的小数表示成分数形式 $x = \dfrac{p}{q}$, 其中 $q = 10^m$.

反之不然. 例如 $\frac{5}{11}$ 是不能表示为有限小数的. 这是因为假如

$$\frac{5}{11} = \frac{b}{10^n}$$

则 $5 \cdot 10^n = 11 \cdot b$, 推出 11 能整除 10^n. 这显然是不可能的.

2° **无限循环小数**

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中出现无限循环情况, 记为

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}$$

那么

$$10^n(x - a_0.a_1a_2\cdots a_n) = 0.\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}$$

所以

$$\begin{aligned}10^{n+k}(x - a_0.a_1a_2\cdots a_n) &= a_{n+1}\cdots a_{n+k} + 0.\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}\\ &= a_{n+1}\cdots a_{n+k} + 10^n(x - a_0.a_1a_2\cdots a_n)\end{aligned}$$

解得

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{a_{n+1}\cdots a_{n+k}}{10^{n+k}-10^n}$$

所以无限循环小数也是有理数.

反之,任意有理数, 如果不是有限小数, 则一定是无限循环小数. 例如, $\frac{5}{11} = 0.\dot{4}\dot{5}$.

一般情况下, 设 $\frac{q}{p}$ 是有理数,其中 $0 < q < p$, $(q,p) = 1$, 用 q 除以 p, 则余数 q_1 满足 $0 \le q_1 < p$, 继续除以p, 得余数 q_2, 一直下去. 的余数 $0 \le q_1, q_2, \cdots, q_r, \cdots < p$.

若某个余数为零 $q_r = 0$, 则除法终止, $\frac{q}{p}$ 是有限小数, 若不存在为零的余数, 则必有两个余数相等, 因此随后的除法余数出现重复, 出现无限循环小数.

3° **无限不循环小数**

除了前两种情况之外, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中既不是有限个非零, 也不出现循环, 因此称为无限不循环小数, 它正是我们构造的无理数.

五、绝对值和区间: 实数的绝对值定义为, 对任意的 $a \in \mathbb{R}$,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \ge 0; \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

绝对值满足

1° $|a| \ge 0$, 等号成立当且仅当 $a = 0$, 即正定性;

2° $|a-b| = |b-a|$, 即对称性;

3° $|a+b| \le |a| + |b|$, 即三角不等式.

因此两个数差的绝对值给出对应数轴上点的距离.

区间是一种特殊的实数集.

开区间: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

闭区间: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$

其他区间:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}.$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \quad (-\infty,\ a] \ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad [a,\ +\infty) \ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}.$$

邻域或"附近": $(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$ 表示 a 的邻域,
$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 表示去心邻域,有时也称"点 a 的**附近**".

设 I 是区间（闭、开或半开半闭）, $x_0 \in I$, 若存在x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \in I$, 则称$x_0$ 是I 的**内点**, 区间的端点也称**边界点**.

六、几个常用不等式

1、Bernoulii **不等式** 设 $x \geqslant -1$, $n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \text{ 归纳法可证}$$

该式一个推广形式为：若 $A \geq 0,\ A+B \geq 0$, 则

$$(A+B)^n \geqslant A^n + nA^{n-1}B.$$

不妨设 $A > 0$ (否则结论显然成立), 因此

$$(A+B)^n = A^n\left(1+\frac{B}{A}\right)^n \geq A^n\left(1+n\frac{B}{A}\right) = A^n + nA^{n-1}B.$$

2、**平均不等式** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数, 则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明（归纳法）当 $n=2$ 显然成立, 若 n 时成立, 则当 $n+1$ 时, 不妨设 a_{n+1} 是 $a_1, \cdots, a_{n+1}$ 中最大者. 因此

$$na_{n+1} \geq a_1 + \cdots + a_n = S,$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{S}{n}+\frac{na_{n+1}-S}{n(n+1)}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{S}{n}\right)^{n+1} + (n+1)\left(\frac{S}{n}\right)^n\frac{na_{n+1}-S}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{S}{n}\right)^n a_{n+1} \geq a_1\cdots a_n a_{n+1}.\end{aligned}$$

3、 Cauchy **不等式** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

证明 对任意实数 λ 有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^n (x_i\lambda+y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\lambda + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

右边这个关于 λ 的一元二次式总非负, 因此其判别式非正, 从而可得 Cauchy 不等式.