切变模量实验报告

姓名：宋建宏 学号：PB21020677 班级：203 院 22 级 5 班

日期：2023 年 6 月 9 日

实验目的

理解切变模量的物理意义，学习根据不确定度分析设计实验的方法。

实验原理

对于一根金属丝，其形状类似于一个圆柱体，长度为 L、半径为 R. 固定一端，在材料弹性限度内，扭转另一端，则圆柱体各截面的体积元均发生切应变，其切应变 γ 与切应力 τ 比值为常数：

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

这个式子即为剪切胡克定律，G 即为材料的切变模量。

在本实验中我们采用扭转金属丝的方式对切变模量进行测量。金属丝扭转时，单位长度的转角满足 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}L} = \frac{\varphi}{L}$, 分析这细圆柱中长为的一小段, 其上截面为 A, 下截面为 B。发生切变时, 其下端 b 移动到 b', 其转角 γ 满足 $bb' = \gamma dl = R d\varphi$，即切应变满足 $\gamma = R\frac{d\varphi}{dl}$，这一小段钢丝内部离轴线距离为 p 的位置, 满足 $\gamma_\rho = \rho\frac{d\varphi}{dl}$，此处的切应力为

$$\tau_\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G\rho^3 \frac{d\varphi}{dl} \cdot d\rho$$

, 因此对其积分得到恢复力矩: $M = \int_0^R 2\pi G\rho^3 d\rho \cdot \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{\varphi}{l}$ 因此有切变模量

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4}$$

设盘的转动惯量为 I_0，得 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\varphi = 0$, 因此其周期满足 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$。由于扭摆底盘形状不规则, 因此可以通过尝试增加一个形状规则的辅助物体来间接得出则其转动惯量之和为 $\mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1$, 因此可以测出另一组周期 T_1, 其满足 $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_1}{D}}$, 因此可以得到

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m \left(r_{内}^2 + r_{外}^2\right)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$G = \frac{4\pi L m \left(r_{内}^2 + r_{外}^2\right)}{R^4 \left(T_1^2 - T_0^2\right)}$$

从而得到实验结果。

实验仪器

切变模量实验仪器一套（铁架台，固定装置，金属丝，托盘，金属圆环），电子秒表，卷尺，游标卡尺，螺旋测微器。

数据处理

金属丝的直径

直径平均值

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{10} D_i}{10} = 0.7765\,\mathrm{mm}$$

A 类标准不确定度

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(D_i - \bar{D})^2}{10(10-1)}} = 0.0012\,\mathrm{mm}$$

B 类标准不确定度

$$u_B = \frac{\sqrt{\Delta_{仪}^2 + \Delta_{估}^2}}{C} = \frac{\sqrt{0.004^2 + 0.005^2}}{3} = 0.002\,\mathrm{mm}$$

展伸不确定度

$$U_D = \sqrt{(t_P u_A)^2 + (k_P u_B)^2} = \sqrt{(2.26 \times 0.0012)^2 + (1.96 \times 0.002)^2} = 0.005\,\mathrm{mm} \quad (P = 0.95)$$

其他数据

金属丝的长度

由于测量时无法对准，估计误差约为 0.1 cm，B 类标准不确定度

$$u_B = \frac{\sqrt{\Delta_{仪}^2 + \Delta_{估}^2}}{C} = \frac{\sqrt{0.08^2 + 0.1^2}}{3} = 0.04\,\mathrm{cm}$$

展伸不确定度

$$U_L = k_p u_B = 1.96 \times 0.04 = 0.08\,\mathrm{cm} \quad (P = 0.95)$$

金属环内外径

展伸不确定度

$$U_d = k_p \frac{\sqrt{\Delta_{仪}^2 + \Delta_{估}^2}}{C} = 1.645 \times \frac{\sqrt{0.02^2 + 0.01^2}}{\sqrt{3}} = 0.02\,\mathrm{mm} \quad (P = 0.95)$$

扭摆周期

周期的主要误差来源为人的估计误差，测量值的展伸不确定度为

$$U_t = k_p \frac{\Delta}{C} = 1.96 \times \frac{0.2}{3} = 0.130\,\mathrm{s}$$

则周期测量值的不确定度为

$$U_{T_0} = \frac{U_t}{30} = 0.004\,\mathrm{s}$$

$$U_{T_1} = \frac{U_t}{50} = 0.003\,\mathrm{s}$$

最终计算

代入公式计算得

$$D = 5.570 \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m} \qquad G = 6.704 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa}$$

由不确定度传递公式

$$\frac{U_G}{G} = \sqrt{\left(\frac{U_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{U_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{4U_D}{D}\right)^2 + \frac{(2d_{内}U_d)^2 + (2d_{外}U_d)^2}{\left(d_{内}^2 + d_{外}^2\right)^2} + \frac{(2T_0U_{T_0})^2 + (2T_1U_{T_1})^2}{(T_0^2 - T_1^2)^2}}$$

$$\frac{U_D}{D} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{m}\right)^2 + \frac{(2d_{内}U_d)^2 + (2d_{外}U_d)^2}{\left(d_{内}^2 + d_{外}^2\right)^2} + \frac{(2T_0U_{T_0})^2 + (2T_1U_{T_1})^2}{(T_0^2 - T_1^2)^2}}$$

已知 $\frac{U_m}{m} = 0.00018$，计算得

$$\frac{U_G}{G} = 0.026 \qquad \frac{U_D}{D} = 0.003$$

因此

$$U_G = 0.17 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa} \qquad U_D = 0.017 \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m}$$

故最终测量结果为

$$切变模量: G = (6.70 \pm 0.17) \times 10^{10}\,\mathrm{Pa} \quad (P = 0.95)$$

$$扭转模量: D = (5.570 \pm 0.017) \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m} \quad (P = 0.95)$$

思考题

1. 本实验是否满足 $\gamma << 1$ 的条件？

   由于钢丝均匀形变, 有

   $$\gamma = R\frac{\varphi}{L}$$

   在实际实验中, 转动的角度 $\varphi < \pi$, 带入 R 和 L 的数据, 得 $\gamma < 3 \times 10^{-3}$ 实际操作中, 转角更小, 可以满足 $\gamma << 1$ 的条件。

2. 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

   为提高实验精度，首要的就是减小主要误差。本实验通过仪器的最大允差，结合粗测数据，从而选择了合适的仪器，并确定了金属丝的半（直）径的误差为实验的主要误差。因此，对于其他物理量，测量 1 次即可；对于金属丝的直径则测量了 10 组以减小误差。考虑到时间测量问题，需要根据要求，测量多个周期的总用时，从而减小这一项的实验误差。合成以后，本实验的实验误差就可以降低。