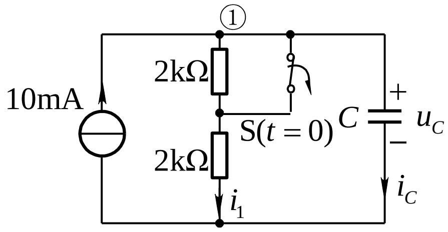
第 8 章 线性动态电路暂态过程的时域分析

8.1 图示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求初始值$u_C(0_+)$、$i_1(0_+)$和$i_C(0_+)$。

解：$t<0$时，电容处于开路，故

$$u_C(0_-)=10\text{mA}\times 2\text{k}\Omega=20\text{V}$$



题图8.1

由换路定律得：$u_C(0_+)=u_C(0_-)=20\text{V}$

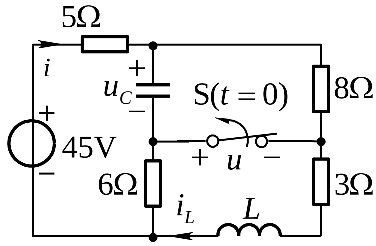
换路后一瞬间，两电阻为串联，总电压为$u_C(0_+)$。

所以 $i_1(0_+)=\dfrac{u_C(0_+)}{(2+2)\text{k}\Omega}=5\text{mA}$

再由节点①的 KCL 方程得：$i_C(0_+)=10\text{mA}-i_1(0_+)=(10-5)\text{mA}=5\text{mA}$

8.2 图示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求初始值$u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$及开关两端电压$u(0_+)$。

解：$t<0$时电容处于开路，电感处于短路，3Ω电阻与6Ω电阻相并联，所以



图题 8.2

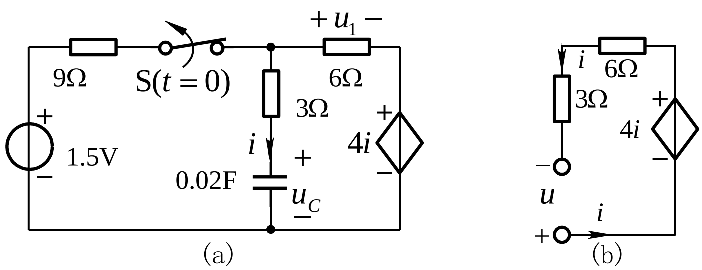
$$i(0_-)=\frac{45\text{V}}{(5+8+\frac{6\times 3}{6+3})\Omega}=3\text{A}\quad ,\quad i_L(0_-)=\frac{6}{6+3}\times i(0_-)=2\text{A}$$

$$u_C(0_-)=8\times i(0_-)=24\text{V}$$

由换路定律得：$u_C(0_+)=u_C(0_-)=24\text{V}$，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}$

由 KVL 得开关电压：$u(0_+)=-u_C(0_+)+8\times i_L(0_+)=(-24+8\times 2)\text{V}=-8\text{V}$

8.3 图(a)所示电路，开关原是接通的，并且处于稳态，$t=0$时开关断开。求$t>0$时u_1的变化规律。



图题 8.3

解：$t<0$时电容处于开路，$i=0$，受控源源电压$4i=0$，所以

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_1(0_-)=\frac{6\Omega}{(9+6)\Omega}\times1.5\text{V}=0.6\text{V}$$

$t>0$时，求等效电阻的电路如图(b)所示。

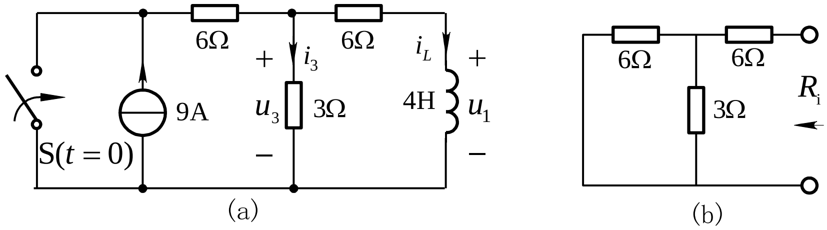
等效电阻　$R_\text{i}=\dfrac{u}{i}=\dfrac{-4i+(6+3)i}{i}=5\Omega$

时间常数　$\tau=R_\text{i}C=0.1\text{s}$

$t>0$后电路为零输入响应，故电容电压为：$u_C(t)=u_C(0_+)\text{e}^{-t/\tau}=0.6\text{e}^{-10t}\text{V}$

6Ω电阻电压为：$u_1(t)=-6\Omega\times i=-6\Omega\times(-C\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t})=0.72\text{e}^{-10t}\text{V}\ (t>0)$

8.4　图(a)所示电路，开关接通前处于稳态，$t=0$时开关接通。求$t>0$时的电压u_1及3Ω电阻消耗的能量。



图题 8.4

解：$t<0$时电感处于短路，故$i_L(0_-)=\dfrac{3}{6+3}\times9\text{A}=3\text{A}$，由换路定律得：

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3\text{A}$$

求等效电阻的电路如图(b)所示。

等效电阻$R_\text{i}=6+\dfrac{6\times3}{6+3}=8\Omega$，时间常数$\tau=L/R_\text{i}=0.5\text{s}$

$t>0$后电路为零输入响应，故电感电流为

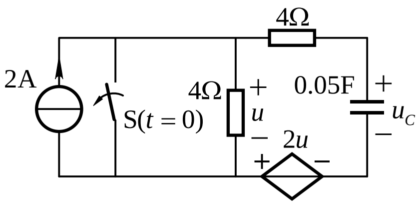
$$i_L(t)=i_L(0_+)\text{e}^{-t/\tau}=3\text{e}^{-2t}\text{A}\ (t\ge0)$$

电感电压　$u_1(t)=L\dfrac{\text{d}i_L}{\text{d}t}=-24\text{e}^{-2t}\text{V}\ (t>0)$

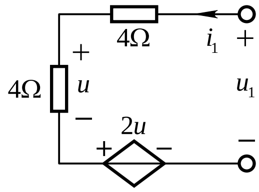
3Ω电阻电流为　$i_3=\dfrac{u_3}{3\Omega}=\dfrac{6\Omega\times i_L+u_1}{3\Omega}=-2\text{e}^{-2t}\text{A}$

3Ω电阻消耗的能量为：　$W_{3\Omega}=\int_0^\infty 3\Omega i_3^2\text{d}t=\int_0^\infty 12\text{e}^{-4t}\text{d}t=12[-0.25\text{e}^{-4t}]_0^\infty=3\text{J}$

8.5 图示电路，开关原是接通的，$t=0$ 时断开。求 $t>0$ 时的电压 u_C 。



图题 8.5



图(a)

解：$t<0$ 时，电流源处于短路，电容为零状态。

$$\text{故}\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

达到稳态时，电容相当于开路，$u(\infty)=4\Omega\times 2\text{A}=8\text{V}$

$$u_C(\infty)=u(\infty)+2u(\infty)=24\text{V}$$

求等效电阻的电路如图(a)所示，在图(a)中

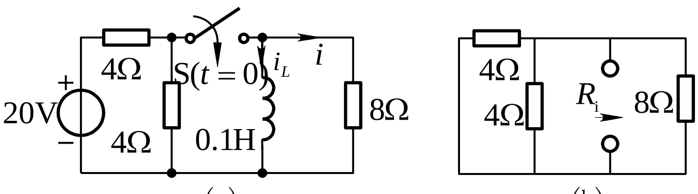
$$u=4\Omega\times i_1$$

$$u_1=4\Omega\times i_1+u+2u=16\Omega\times i_1$$

等效电阻 $R_\text{i}=u_1/i_1=16\Omega$，时间常数 $\tau=R_\text{i}C=16\times 0.05=0.8\text{s}$

所以 $u_C(t)=u_C(\infty)(1-\text{e}^{-t/\tau})=24(1-\text{e}^{-1.25t})\text{V},t\geq 0$

8.6 图(a)所示电路，开关原是断开的，$t=0$ 时接通。求 $t>0$ 时的电流 i 。



图题 8.6

解：由换路定律得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，达到稳态时电感处于短路，故

$$i_L(\infty)=20/4=5\text{A}$$

求等效电阻的电路如图(b)所示。

等效电阻　$R_\text{i}=(4//4)//8=1.6\Omega$

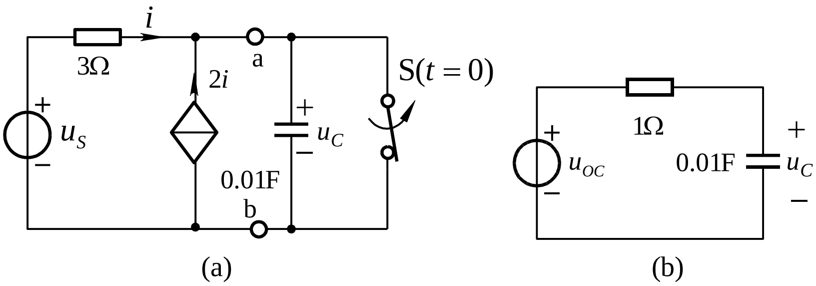
时间常数　$\tau = L/R_{\mathrm{i}} = (1/16)\mathrm{s}$

$t>0$ 后电路为零状态响应，故电感电流为：

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) = 5(1-\mathrm{e}^{-16t})\mathrm{A}\ (t \ge 0)$$

$$i(t) = \frac{u_L}{8\Omega} = (L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t})/8\Omega = \frac{0.1\times5\times16\times\mathrm{e}^{-16t}}{8} = \mathrm{e}^{-16t}\mathrm{A}\ (t>0)$$

8.7 图(a)所示电路，开关原是接通的，$t=0$ 时断开，已知 $u_{\mathrm{S}} = 10\sqrt{2}\cos(100t)\mathrm{V}$。求电压 u_C。



图题 8.7

解：$t<0$ 时电路为零状态，由换路定律得：$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

$t>0$ 时为简化计算，先将 ab 左边电路化为戴维南电路形式。

当 ab 端开路时，由 $i+2i=0$，得 $i=0$　所以开路电压 $u_{\mathrm{OC}} = u_{\mathrm{S}} = 10\sqrt{2}\cos(100t)\mathrm{V}$

当 ab 端短路时，$i_{\mathrm{SC}} = i+2i = 3i = 3\times\dfrac{u_{\mathrm{S}}}{3\Omega}$，故等效电阻 $R_{\mathrm{i}} = \dfrac{u_{\mathrm{OC}}}{i_{\mathrm{SC}}} = 1\Omega$，

$t>0$ 时等效电路如图(b)所示。电路时间常数为 $\tau = R_{\mathrm{i}}C = 0.01s$。

用相量法计算强制分量 $u_{C\mathrm{p}}$：

$$\dot{U}_{C\mathrm{p}} = \frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{1+1/(\mathrm{j}\omega C)}\times\dot{U}_{OC} = \frac{-\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\times10\angle0^\circ = 5\sqrt{2}\angle-45^\circ\mathrm{V}$$

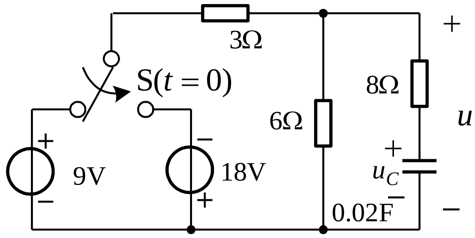
$$u_{C\mathrm{p}}(t) = 10\cos(100t-45^\circ)\mathrm{V}$$

$$u_{C\mathrm{p}}(0_+) = 10\cos(-45^\circ) = 5\sqrt{2}\mathrm{V}$$

由三要素公式得：

$$u_C(t) = u_{C\mathrm{p}}(t) + [u_C(0_+) - u_{C\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau} = [10\cos(100t-45^\circ) - 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-100t}]\mathrm{V}$$

8.8 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时换路。求 $t>0$ 时的电压 u。



图题 8.8

解：$t<0$ 时电容处于开路，由换路定律得：

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{6}{6+3}\times 9\text{V}=6\text{V},$$

$t\to\infty$ 电容又处于开路，

$$u_C(\infty)=\frac{6}{6+3}\times(-18\text{V})=-12\text{V}$$

等效电阻 $$R_\text{i}=(8+\frac{6\times 3}{6+3})\Omega=10\Omega$$

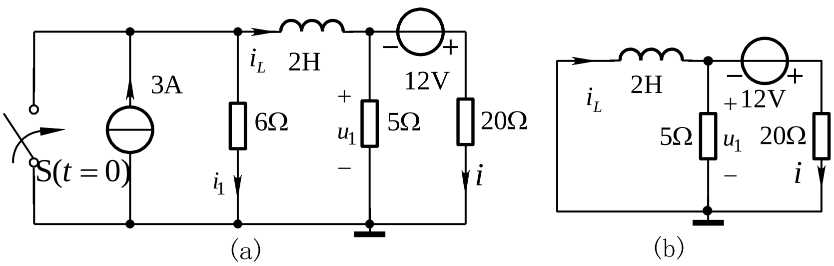
时间常数 $$\tau=R_\text{i}C=0.2\text{s}$$

由三要素公式得：$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(-12+18\text{e}^{-5t})\text{V}\ (t\geq 0)$

$$u(t)=8\Omega\times C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}+u_C=0.16\times(-90\text{e}^{-5t})+(-12+18\text{e}^{-5t})$$

所以 $$u(t)=[-12+3.6\text{e}^{-5t}]\ \text{V}\ (t>0)$$

8.9 图(a)示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时换路。求 $t>0$ 时的电流 i。



图题 8.9

解：当 $t<0$ 时，列写节点方程求原始值

$$(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20})u_1(0_-)=3-\frac{12}{20},\qquad \text{解得}\qquad u_1(0_-)=5.76\text{V}$$

由换路定律得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3\text{A}-i_1(0_-)=3\text{A}-\frac{u_1(0_-)}{6\Omega}=(3-5.76/6)\text{A}=2.04\text{A}$$

换路后的电路如图(b)所示。列写节点方程得：

$$(\frac{1}{5}+\frac{1}{20})u_1(0_+)=i_L(0_+)-\frac{12}{20}$$

解得　$u_1(0_+) = 5.76\text{V}$，$i(0_+) = \dfrac{12\text{V} + u_1(0_+)}{20\Omega} = 0.888\text{A}$

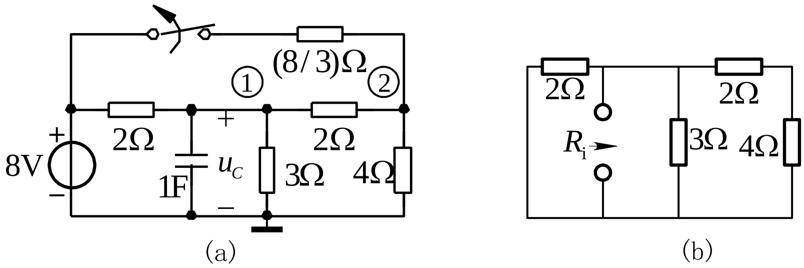
稳态时，电感处于短路，所以　$i(\infty) = \dfrac{12\text{V}}{20\Omega} = 0.6\text{A}$

等效电阻　$R_{\text{i}} = \dfrac{5 \times 20}{5 + 20} = 4\Omega$

时间常数　$\tau = L / R_{\text{i}} = 0.5\text{s}$

由三要素公式得：　$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]\text{e}^{-t/\tau} = (0.6 + 0.288\text{e}^{-2t})\ \ \text{A}$

8.10 图(a)所示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求$t>0$时的电压u_C。



图题 8.10

解：当$t<0$时，电容处于开路，列写节点电压方程求原始值

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n1}(0_-) - \frac{1}{2}u_{n2}(0_-) - \frac{1}{2}\times 8 = 0 \\ -\frac{1}{2}u_{n1}(0_-) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8})u_{n2}(0_-) - \frac{3}{8}\times 8 = 0 \end{cases}$$

解得$u_{n1}(0_-) = 4.8\text{V}$，由换路定律得：$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_{n1}(0_-) = 4.8\text{V}$

$t \to \infty$电容又处于开路，再列写节点电压方程如下：

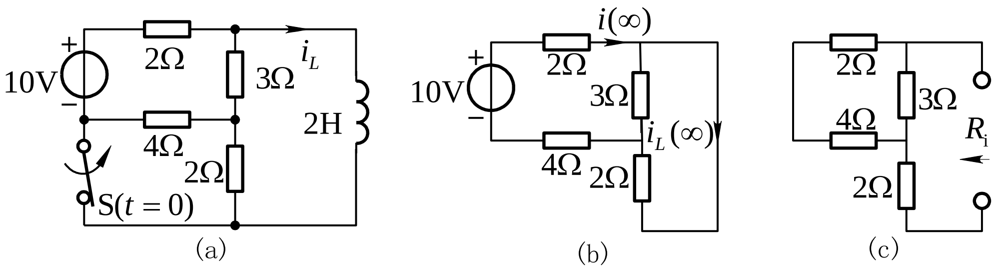
$$\begin{cases} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n1}(\infty) - \frac{1}{2}\times u_{n2}(\infty) - \frac{1}{2}\times 8 = 0 \\ -\frac{1}{2}\times u_{n1}(\infty) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4})u_{n2}(\infty) = 0 \end{cases}$$

解得：　$u_C(\infty) = u_{n1}(\infty) = 4\text{V}$

求等效电阻的电路如图(b)所示。$R_{\text{i}} = 2 // [3 // (2+4)] = 1\Omega$，时间常数$\tau = R_{\text{i}}C = 1\text{s}$

由三要素公式得：$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau} = (4 + 0.8\text{e}^{-t})\ \ \text{V}$

8.11 图(a)所示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求$t>0$时的电感电流i_L。



图题 8.11

解：由换路定律得：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{10\text{V}}{2\Omega}=5\text{A}$

求稳态值的电路如图(b)所示。

$$i_L(\infty)=\frac{3}{3+2}\times i(\infty)=\frac{3}{3+2}\times\frac{10\text{V}}{(2+4+3/\!/2)\Omega}=\frac{5}{6}\text{A}$$

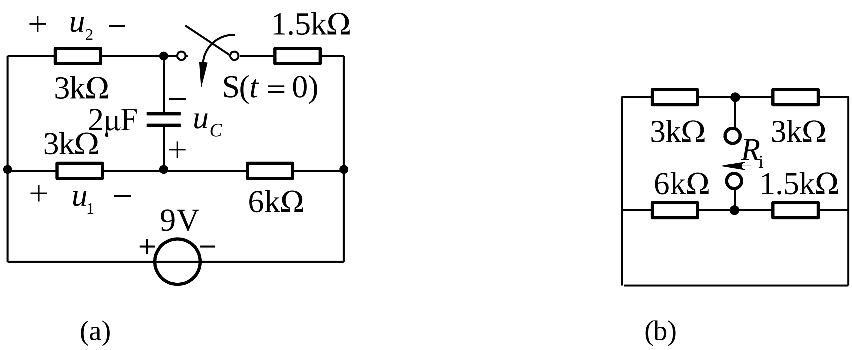
求等效电阻的电路如图(c)所示。

等效电阻　　$R_i=[2+\dfrac{3(2+4)}{3+2+4}]\Omega=4\Omega$

时间常数　　$\tau=L/R_i=2/4=0.5\text{s}$

由三要素公式得：　$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=\dfrac{5}{6}(1+5\mathrm{e}^{-2t})\text{A}$

8.12 图(a) 所示电路原处于稳态，$t=0$时开关接通。求t为何值时$u_C=0$。



图题 8.12

解：当$t<0$时，电容处于开路，由换路定律得：

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-u_1(0_-)=-\frac{3}{3+6}\times9\text{V}=-3\text{V}$$

$t\to\infty$电容又处于开路，$u_C(\infty)=u_2(\infty)-u_1(\infty)=\dfrac{3}{3+1.5}\times9\text{V}-\dfrac{3}{3+6}\times9\text{V}=3\text{V}$

求等效电阻的电路如图(b)所示。

等效电阻　　$R_i = (\frac{6\times3}{6+3}+\frac{3\times1.5}{3+1.5})\text{k}\Omega = 3\text{k}\Omega$

时间常数　　$\tau = 3\times10^3\,\Omega\times2\times10^{-6}\,\text{F} = 6\times10^{-3}\,\text{s}$

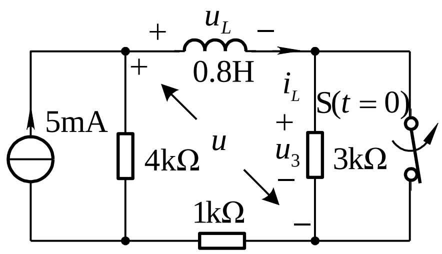
由三要素公式得 $u_C(t) = u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau} = (3-6\text{e}^{-\frac{10^3}{6}t})\text{V}$　　(1)

设 $t=t_1$ 时，$u_C=0$。由式(1)得：$3-6\text{e}^{-\frac{10^3}{6}t_1}=0$，　解得：　$t_1 = 6\times10^{-3}\ln2 = 4.16\times10^{-3}\text{s}$

8.13 图示电路原处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的电压 u。

解：初始值　$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{4}{4+1}\times5\text{mA} = 4\text{mA}$

稳态值　　$i_L(\infty) = \frac{4}{4+4}\times5 = 2.5\text{mA}$



等效电阻　$R_i = 4+1+3 = 8\text{k}\Omega$

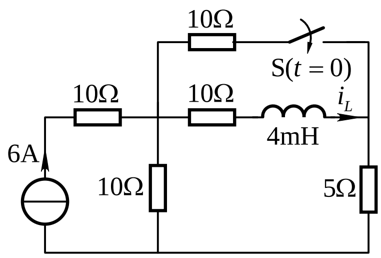
时间常数　$\tau = \frac{L}{R_i} = \frac{0.8}{8\times10^3} = 10^{-4}\text{s}$

由三要素公式得：$i_L(t) = [2.5+1.5e^{-10^4t}]\text{mA}\quad(t\ge0)$

图题 8.13

由 KVL 得：$u(t) = u_L+u_3 = L\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t}+3\text{k}\Omega\times i_L(t) = 7.5(1-\text{e}^{-10^4t})\text{V}\ (t>0)$

8.14 图示电路原处于稳态，$t=0$ 时开关接通，求 $t\ge0$ 时的 i_L。



图题 8.14

解：初始值　$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{10}{10+10+5}\times6\text{A} = 2.4\text{A}$

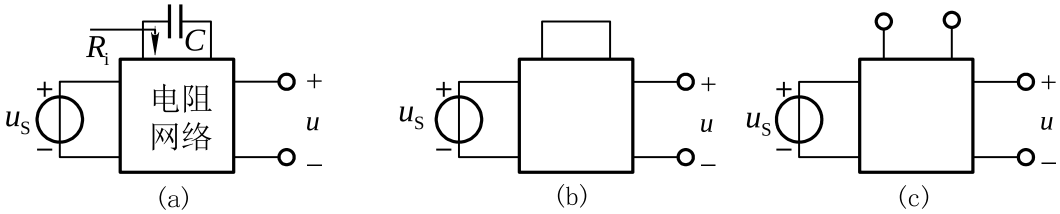
稳态值　　$i_L(\infty) = (\frac{10}{10+10\,||\,10+5}\times6)\times\frac{10}{10+10} = 1.5\text{A}$

等效电阻　$R_i = 10+\frac{(10+5)\times10}{10+5+10} = 16\Omega$

时间常数　$\tau=\dfrac{L}{R_{\mathrm{i}}}=\dfrac{4\times10^{-3}}{16}=2.5\times10^{-4}\mathrm{s}$

由三要素公式得：$i_L(t)=[1.5+0.9\mathrm{e}^{-4\times10^3 t}]\mathrm{A}\quad(t\ge0)$

8.15　图(a)所示电路，u_{S} 为阶跃电压。已知当 $C=0.01\mathrm{F}$ 时，零状态响应 $u=(10-5\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$。现把 C 换成 5H 电感，其它参数不变，再求零状态响应 u。



图题 8.15

解：由题接电容时的零状态响应，可得 $t=0_+$ 和 $t\to\infty$ 时的计算电路，分别如图(b)和(c)所示。由于电感对直流稳态相当于短路，零状态电感在换路瞬间相当于开路，故接电感在 $t=0_+$ 和 $t\to\infty$ 时的计算电路分别与接电容时 $t\to\infty$ 和 $t=0_+$ 时的情况相同。所以接 L 时，初始值 $u(0_+)=10\mathrm{V}$，　稳态值 $u(\infty)=5\mathrm{V}$。

由接电容时的响应得时间常数，$\tau_{\mathrm{C}}=0.5=R_{\mathrm{i}}C$，所以 $R_{\mathrm{i}}=\dfrac{\tau_C}{C}=50\Omega$

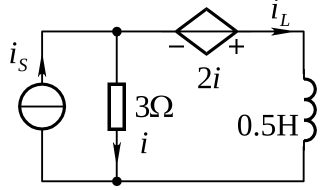
接电感后，R_{i} 不变，故时间常数 $\tau_L=\dfrac{L}{R_{\mathrm{i}}}=0.1\mathrm{s}$

将上述初始值、稳态值和时间常数代入三要素公式得

$$u(t)=[5+5\mathrm{e}^{-10t}]\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

8.16 图示电路，设 $i_L(0\_)=3\mathrm{A}, i_{\mathrm{S}}=5\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{A}(t\ge0)$。求 $t>0$ 时 i 的变化规律，指出其中的强制分量与自由分量。

解：由于 i_{S} 为指数函数，故须列写关于 i 的微分方程来计算 i 的强制分量。



图题 8.15

由换路定律得：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3\mathrm{A}$

$$i(0_+)=i_{\mathrm{S}}(0_+)-i_L(0_+)=5-3=2\mathrm{A}\quad(1)$$

根据 KVL　$L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}-3i-2i=0$

将$i_L = i_S - i$代入上式化简得　$L\dfrac{di}{dt} + 5i = L\dfrac{di_S}{dt} = -25e^{-10t}$

$$\frac{di}{dt} + 10i = -50e^{-10t} \qquad (2)$$

由式(1)中得时间常数$\tau = 1/10 = 0.1s$等于电流源衰减系数的倒数，故设强制分量为$i_p(t) = A_1 te^{-10t}$，代入式(2)解得$A_1 = -50$。

设齐次分量为$i_h(t) = A_2 e^{-10t}$，则电流i的完全解答为：

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = -50te^{-10t} + A_2 e^{-10t} \qquad (3)$$

由初始条件确定待求系数A_2。由式(3)及式(1)得$i(0_+) = A_2 = 2$，即$A_2 = 2$。

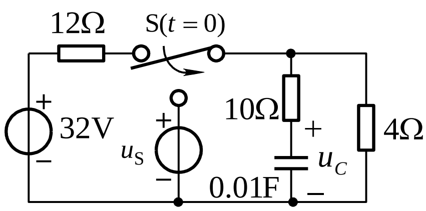
因此，$i(t) = [2e^{-10t} - 50te^{-10t}]$ A，强制分量为$-50te^{-10t}$，自由分量为$2e^{-10t}$。

8.17　图示电路，设$u_S = 10t$ V $(t \ge 0)$，$t < 0$时处于稳态。求$t > 0$时u_C的变化规律，指出其中的强制分量与自由分量。

解：由于u_S是多项式形式，故须列写关于u_C的微分方程来计算u_C的强制分量。

换路前，电容处于开路，12Ω和4Ω电阻串联。由换路定律和分压公式得：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{4}{12+4} \times 32V = 8V \qquad (1)$$



图题 8.17

换路后，根据 KVL 得：$10 \times C\dfrac{du_C}{dt} + u_C = u_S$

$$\frac{du_C}{dt} + 10u_C = 100t \qquad (2)$$

强制分量与激励源有相同的函数形式，故

设强制分量为：$u_{Cp}(t) = A_1 t + A_2$　代入式(2)得

$$A_1 + 10A_1 t + 10A_2 = 100t$$

比较系数得　　$A_1 = 10$，$A_2 = -1$

设齐次方程的解为：$u_{Ch}(t) = A_3 e^{-10t}$，则电压u_C的完全解答为：

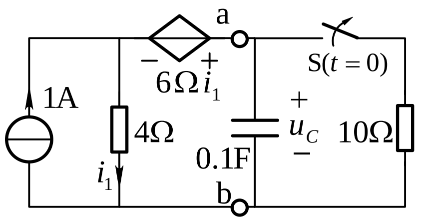
$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = (10t - 1) + A_3 e^{-10t} \qquad (3)$$

由初始条件确定待求系数A_3。由式(3)及(1)得

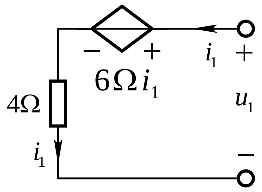
$$u_C(t)|_{t=0_+} = A_3 - 1 = 8V，\quad 即 \quad A_3 = 9V$$

所以，$u_C(t) = 10t - 1 + 9e^{-10t}$ V，强制分量为$10t - 1$，自由分量为$9e^{-10t}$。

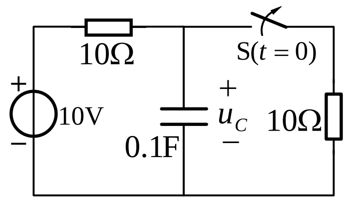
8.18 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关突然断开。求 $t>0$ 时的电压 u_C。



图题 8.18



图(a)



图(b)

解：首先求ab端左侧的戴维南等效电路。当ab端开路时：

$$i_1 = 1\text{A}$$

ab 端的开路电压 $U_{OC} = 6\Omega i_1 + 4\Omega \times i_1 = 10\text{V}$

求等效电阻的电路如图(a)所示，在图(a)中

$$u_1 = 6\Omega i_1 + 4\Omega \times i_1 = 10\Omega \times i_1$$

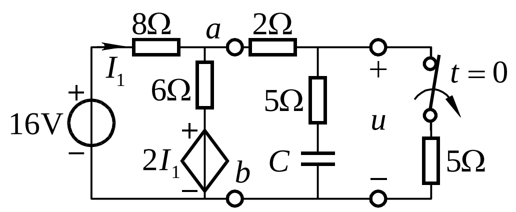
ab 端左侧的等效电阻 $R_i = u_1 / i_1 = 10\Omega$。等效后的电路如图(b)所示。

当 $t<0$ 时，电路处于稳态，电容开路。$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \dfrac{10}{10+10} \times 10 = 5\text{V}$

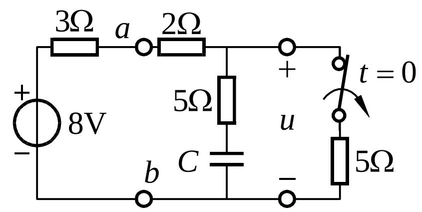
$u_C(\infty) = 10\text{V}$，时间常数 $\tau = R_i C = 10 \times 0.1 = 1\text{s}$

由三要素公式得：$u_C(t) = [10 - 5e^{-t}]\text{V}\ (t>0)$

8.19 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$C=0.01\text{F}$，$t=0$ 时开关断开，求 $t>0$ 时的电压 u。



图题 8.19



图(a)

解：首先求 ab 端左侧的戴维南等效电路。当 ab 端开路时：

$$8I_1 + 6I_1 + 2I_1 = 16，解得\ I_1 = 1\text{A}$$

ab 端的开路电压 $U_{OC} = 6I_1 + 2I_1 = 8\text{V}$

当 ab 端短路时，$I_1 = \dfrac{16}{8} = 2\text{A}$

$$ab\text{端短路电流}\ I_{SC}=I_1+\frac{2I_1}{6}=2+\frac{2\times2}{6}=\frac{8}{3}\text{A}$$

ab端左侧的等效电阻 $R_i=\dfrac{U_{OC}}{I_{SC}}=\dfrac{8}{8/3}=3\Omega$。等效后的电路如图(a)所示。在图(a)中

当$t<0$时，电路处于稳态，电容开路。$u_C(0_-)=\dfrac{5}{2+3+5}\times8=4\text{V}$

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=4\text{V}$，$u(0_+)=u_C(0_+)+\dfrac{8-u_C(0_+)}{3+2+5}\times5=6\text{V}$

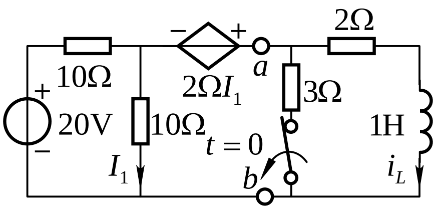
$u(\infty)=U_{OC}=8\text{V}$，时间常数$\tau=RC=10\times0.01=0.1\text{s}$

由三要素公式得：$u(t)=[8-2\text{e}^{-10t}]\text{V}\ (t>0)$

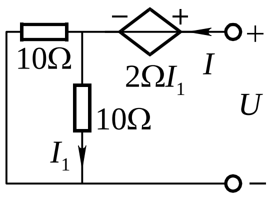
另外，也可以先求$u_C(t)$：$u_C(\infty)=U_{OC}=8\text{V}$，$u_C(t)=[8-4\text{e}^{-10t}]\text{V}$，

$u(t)=5\times C\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t}+u_C(t)=[8-2\text{e}^{-10t}]\text{V}\ (t>0)$

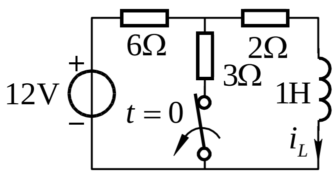
8.20 图示电路$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开，求$t>0$时的电流i_L。



图题 8.20



图(a)



图(b)

解：先求 ab 端左侧的戴维南等效电路。当 ab 端开路时

$I_1=\dfrac{20}{10+10}=1\text{A}$，$U_{\text{oc}}=2I_1+10I_1=12\text{V}$

求等效电阻的电路如图图(a)所示

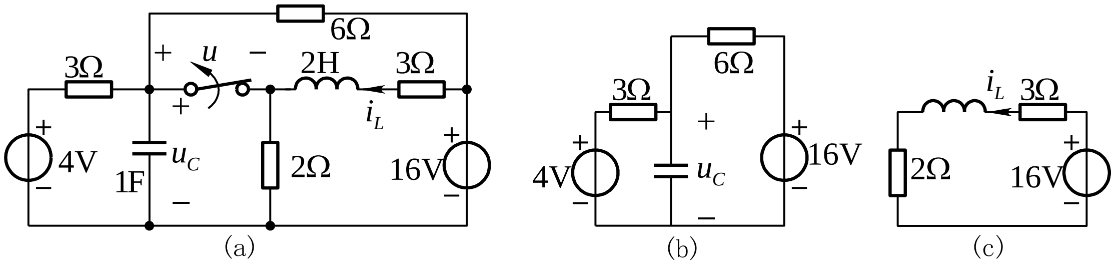
$U=2I_1+10I_1=12I_1=12\times0.5I=6I$，$R_i=U/I=6\Omega$ 等效电路如图(b)所示。图(b)中

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{12}{6+\dfrac{2\times3}{2+3}}\times\frac{3}{2+3}=1\text{A},\quad i_L(\infty)=\frac{12}{6+2}=1.5\text{A}$$

$$R=2+6=8\Omega,\quad \tau=L/R=1/8\text{s}$$

由三要素法得：$i_L(t)=[1.5-0.5\text{e}^{-8\text{t}}]\text{A}\quad t\ge0$

8.21 图(a)所示电路，$t<0$时处于稳态，$t=0$时开关断开。求$t>0$时的电压u。



图题 8.21

解：当$t<0$时，电容开路，电感短路，列写节点电压方程如下

$$(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3})u_C(0_-)-\frac{4}{3}-(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\times 16=0$$

解得 $$u_C(0_-)=7\text{V}$$

由换路定律得： $u_C(0_+)=u_C(0_-)=7\text{V}$，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3\text{A}$

换路后构成两个一阶电路，如图 (b) 和(c)所示。

在图(b) 电路中，稳态时电容开路，所以 $u_C(\infty)=\dfrac{16-4}{3+6}\times 3+4=8\text{V}$

等效电阻 $$R_\text{i}=\frac{3\times 6}{3+6}=2\Omega$$

时间常数 $$\tau_C=2\times 1=2\text{s}$$

由三要素公式得 $$u_C(t)=(8-\text{e}^{-0.5t})\text{V}$$

在图(c)电路中，稳态时电感短路，所以

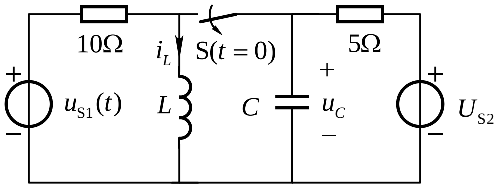
$$i_L(\infty)=\frac{16}{2+3}=3.2\text{A}$$

时间常数 $$\tau_L=\frac{2}{2+3}=0.4\text{s}，$$

由三要素公式得： $$i_L(t)=(3.2-0.2\text{e}^{-2.5t})\text{A}$$

开关电压 $$u(t)=u_C-2\Omega\times i_L=(1.6-\text{e}^{-0.5t}+0.4\text{e}^{-2.5t})\text{V}\ (t>0)$$

8.22 图所示电路原处于稳态，$u_{\text{S1}}=30\sqrt{2}\cos(100t+45°)\text{V}$，$U_{\text{S2}}=20\text{V}$，$C=10^{-3}\text{F}$，$L=0.1\text{H}$。$t=0$时开关由闭合突然断开，用三要素法求$t>0$时的电压$u_C(t)$和电流$i_L(t)$。



图题 8.22

解：　$t<0$ 时，当直流 U_{S2} 单独作用时，电感相当于短路，电容相当于开路。

$$I_{L(0)}=\frac{U_{S2}}{R_2}=\frac{20}{5}=4\text{A}\,,\ U_{C(0)}=0$$

当交流 u_{S1} 单独作用时，$\omega L=1/\omega C=10\Omega$，$L$ 和 C 发生并联谐振，相当于开路

$$\dot{U}_{C(1)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\dot{U}_{S1}=\frac{5}{10+5}\times30\angle45°=10\angle45°\text{V}$$

$$\dot{I}_{L(1)}=\frac{\dot{U}_{C(1)}}{\text{j}\omega L}=\frac{10\angle45°}{\text{j}10}=1\angle-45°\text{A}$$

所以 $t<0$ 时，$u_C(t)=10\sqrt{2}\cos(100t+45°)\text{V}$，$i_L(t)=4+\sqrt{2}\cos(100t-45°)\text{A}$

换路后，变为两个一阶电路，电感电流和电容电压不能跃变，即

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\sqrt{2}\cos45°=10\text{V}$，$i_L(0_+)=i_L(0_-)=4+\sqrt{2}\cos(-45°)=5\text{A}$

当换路后电路达到稳态时

$$u_C(\infty)=U_{S2}=20\text{V}$$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}_{S1}}{R_1+\text{j}\omega L}=\frac{30\angle45°}{10+\text{j}10}=1.5\sqrt{2}\angle0°\text{A}$$

特解 $i_{LP}(t)=3\cos100t\text{A}$，特解初值 $i_{LP}(0_+)=3\text{A}$

时间常数 $\tau_L=L/R_1=0.01\text{s}$，$\tau_C=R_2C=0.005\text{s}$

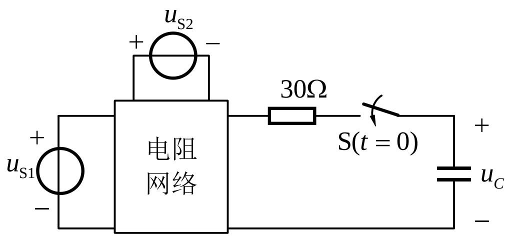
由三要素公式可得

$$u_C(t)=20-10\text{e}^{-200t}\ \text{V},\quad t\geq0,\quad i_L(t)=3\cos100t+2\text{e}^{-100t}\ \text{A},\quad t\geq0$$

8.23 图示电路，在 $t<0$ 时处于稳态。当 $u_{S1}=U_{S1}$，$u_{S2}=U_{S2}\text{e}^{-2t}\ (t>0)$ 时 u_C 的全响应为 $u_C(t)=(2+3\text{e}^{-2t}+5\text{e}^{-t})\text{V}\ (t>0)$，试求 $t>0$ 时

(1) u_C 的零输入响应分量 u_C'；

(2) 两独立源分别单独作用时的零状态响应 u_C'' 和 u_C'''。



图题 8.23

解：（1）由题给 u_C 的表达式可得

$$u_C(0_+) = 2+3+5 = 10\text{V}$$

将 u_C 写成 $u_C = u_{cp1} + u_{cp2} + u_{ch} = 2 + 3\text{e}^{-2t} + 5\text{e}^{-t}$，其中

$u_{cp1} = 2$ 是 $u_{S1} = U_{S1}$ 产生的强制分量，$u_{cp2} = 3\text{e}^{-2t}$ 是 $u_{S2} = U_{S2}\text{e}^{-2t}$ 产生的强制分量，

$u_{ch} = 5\text{e}^{-t}$ 为自由分量，所以时间常数为 $\tau = 1\text{s}$

u_C 的零输入响应分量为

$$u_C' = u_C(0_+)\text{e}^{-t/\tau} = 10\text{e}^{-t}\text{V} \quad t>0$$

（2）根据以上求得的 $u_{cp1} = 2$ 和 $u_{cp2} = 3\text{e}^{-2t}$，便可以求出两独立源分别单独作用时的零状态响应

$$u_C'' = u_{cp1} + [0 - u_{cp1}(0_+)]\text{e}^{-t/\tau} = 2(1-\text{e}^{-t})\text{V} \qquad t>0$$

$$u_C''' == u_{cp2} + [0 - u_{cp2}(0_+)]\text{e}^{-t/\tau} = (3\text{e}^{-2t} - 3\text{e}^{-t})\text{V} \quad t>0$$

8.24 图示电路，$t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的电压 u。

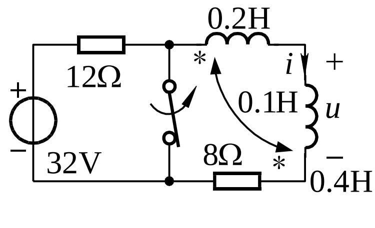
解：初始值：$i(0_+) = i(0_-) = 0$，稳态值 $i(\infty) = \dfrac{32}{12+8} = 1.6\text{ A}$

串联等效电感 $L = L_1 + L_2 - 2M = 0.2 + 0.4 - 2\times 0.1 = 0.4\text{H}$

等效电阻 $R = 12 + 8 = 20\,\Omega$，时间常数 $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{0.4}{20} = \dfrac{1}{50}\text{ s}$

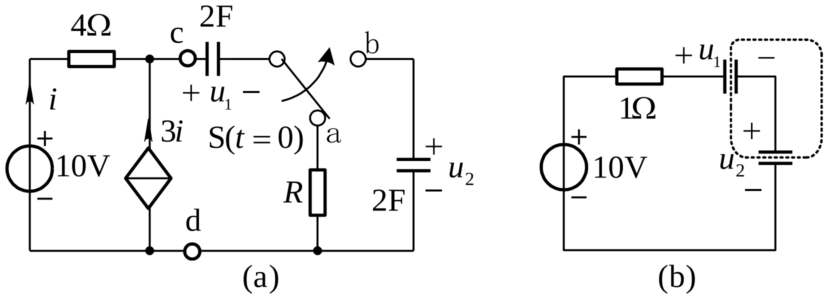
由三要素公式得：$i(t) = 1.6(1-\text{e}^{-50t})\text{ A} \qquad t \ge 0$

$$u(t) = (L_2 - M)\frac{\text{d}i}{\text{d}t} = 0.3\times 1.6\times 50\text{e}^{-50t} = 24\text{e}^{-50t}\text{ V} \quad (t>0)$$



图题 8.24

8.25 图(a)所示电路原处于稳态，已知 $u_2(0_-) = 2\text{V}, t=0$ 时开关由 a 倒向 b。求 $t>0$ 时的电压 u_2。



图题 8.25

解：先求 cd 端左侧的戴维南等效电路。当 cd 端开路时，

$$i+3i=0,\Rightarrow\ i=0 \qquad U_{\mathrm{OC}}=10\,\mathrm{V}$$

当 cd 端短路时，$I_{\mathrm{SC}}=i+3i=4\times\dfrac{10}{4}=10\,\mathrm{A}$，等效电阻 $R_{\mathrm{i}}=\dfrac{U_{\mathrm{OC}}}{I_{\mathrm{SC}}}=1\Omega$

换路后的等效电路如图(b)所示。

两电容串联，等效电容 $C=\dfrac{C_1\times C_2}{C_1+C_2}=1\mathrm{F}$，时间常数 $\tau=R_{\mathrm{i}}C=1\mathrm{s}$

由换路定律得：$u_1(0_+)=u_1(0_-)=U_{\mathrm{OC}}=10\,\mathrm{V}$ ，　$u_2(0_+)=u_2(0_-)=2\,\mathrm{V}$

由于两电容均有初值，稳态时，电容电压不是按与电容成反比分配电压，需按基尔霍夫电压定律及闭合面内电荷守恒求电容电压。由图(b)得：

$$\begin{cases}u_1(\infty)=u_2(\infty)=10\,\mathrm{V}\\ -2u_1(\infty)+2u_2(\infty)=-2u_1(0_+)+2u_2(0_-)=-16\mathrm{V}\end{cases}$$

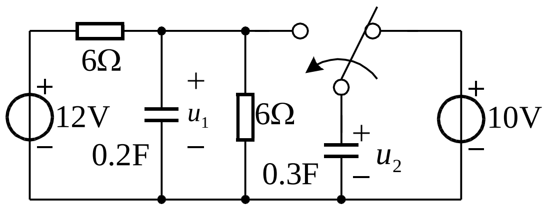
解得：　　$u_1(\infty)=9\mathrm{V}$，$u_2(\infty)=1\mathrm{V}$

由三要素公式得　　$u_2(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{V}\ \ (t\geq 0)$

8.26 图示电路原处于稳态，$t=0$ 时换路，求 $t>0$ 时的电压 u_2。

解：　$u_1(0_-)=6\mathrm{V}$，$u_2(0_-)=10\mathrm{V}$

t=0 时开关接通，两电压原始值不等的电容相并联，电容电压将发生跃变。利用两正极板电荷之和在开关动作前后瞬间相等来计算 $u_2(0_+)$：



图题 8.26

$$\begin{cases}0.2u_1(0_+)+0.3u_2(0_+)=0.2u_1(0_-)+0.3u_2(0_-)\\ u_1(0_+)=u_2(0_+)\end{cases}$$

解得　　$u_1(0_+)=u_2(0_+)=8.4\text{V}$

稳态值　　$u_2(\infty)=\dfrac{6}{6+6}\times 12\text{V}=6\text{V}$

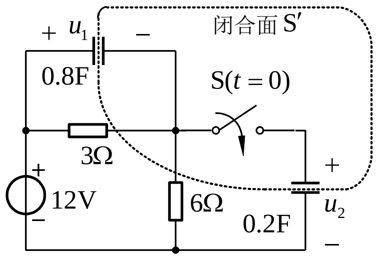
时间常数　$\tau=RC=(6/2)\times(0.2+0.3)=1.5\text{s}$

由三要素公式得：$u_2(t)=u_2(\infty)+[u_2(0_+)-u_2(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=(6+2.4\mathrm{e}^{-t/1.5})\ \text{V}\quad (t>0)$

8.27 图示电路$t<0$时处于稳态，并且$u_2(0_-)=0$。$t=0$时开关接通。求$t>0$时的电压u_1和u_2。

解：$u_1(0_-)=\dfrac{3}{3+6}\times 12=4\text{V}$　开关接通后，根据基尔霍夫电压定律，两电容电压相加等于电源电压 12V，电容电压发生跃变。根据闭合面S'内电荷在开关动作前后瞬间相等来求初始值：

$$\begin{cases}-0.8u_1(0_+)+0.2u_2(0_+)=-0.8u_1(0_-)\\ u_1(0_+)+u_2(0_+)=12\text{V}\end{cases}$$



图题8.27

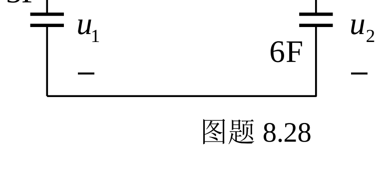
解得：$u_1(0_+)=5.6\text{V}$，$u_2(0_+)=6.4\text{V}$

稳态时　$u_1(0_-)=\dfrac{3}{3+6}\times 12\text{V}=4\text{V}$，$u_2(\infty)=12-4=8\text{V}$

时间常数　$\tau=RC=\dfrac{3\times 6}{3+6}\times(0.8+0.2)=2\text{s}$

由三要素公式得　$u_1(t)=4+1.6\mathrm{e}^{-0.5t}\ \text{V}$,　$u_2(t)=8-1.6\mathrm{e}^{-0.5t}\ \text{V}$

8.28 图示电路$t=0$时开关接通，设$u_1(0_-)=20\text{V}$，$u_2(0_-)=0$。求$t>0$时电压u_1和u_2的变化规律。



图题 8.28

解：$t>0$时，电容C_1通过电阻给电容C_2充电，$t\to\infty$时充电结束，$u_1=u_2$。

由换路定律得：$u_1(0_+)=u_1(0_-)=20\text{V}$，$u_2(0_+)=u_2(0_-)=0$

由电荷守恒及基尔霍夫电压定律得：

$$\begin{cases}C_1u_1(\infty)+C_2u_2(\infty)=C_1u_1(0_-)+C_2u_2(0_-)=3\times 20\\ u_1(\infty)=u_2(\infty)\end{cases}$$

解得：$$u_1(\infty)=u_2(\infty)=\frac{20}{3}\text{V}$$

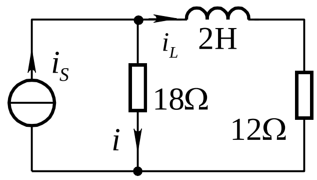
等效电容 $$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=2\text{F}$$

时间常数 $$\tau=RC=20\text{s}$$

由三要素公式得

$$u_1(t)=\frac{20}{3}+\frac{40}{3}\text{e}^{-t/20}\text{V},\qquad u_2(t)=\frac{20}{3}(1-\text{e}^{-t/20})\text{V}$$

8.29 图示电路，已知$i_S=30\varepsilon(t)\text{mA}$，求电流$i$。



图题 8.29

解：由换路定律得：　$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

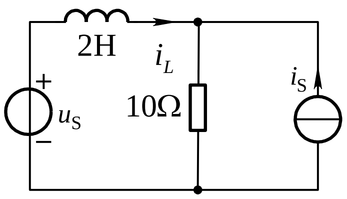
初始值：　$i(0_+)=i_S(0_+)-i_L(0_+)=30\text{mA}$

稳态值：　$i(\infty)=\dfrac{12}{12+18}\times 30=12\text{mA}$

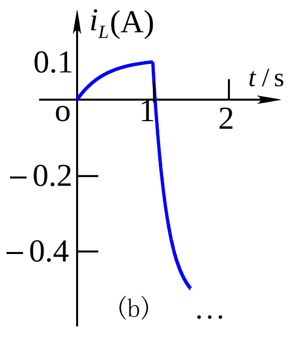
时间常数：$\tau=\dfrac{2}{18+12}=\dfrac{1}{15}\text{s}$

由三要素公式得　$i(t)=i(\infty)+[i(0_+)-i(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=[12+18\text{e}^{-15t}]\text{mA}$

8.30 图(a)所示电路，设$u_S=\varepsilon(t)\text{V}$　$i_S=\varepsilon(t-1)\text{A}$。求电流$i_L$，并画出波形图。



(a)



(b)

图题 8.30

解：时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{2}{10}=0.2\text{s}$

当u_S单独作用时，稳态值$i'_L(\infty)=\dfrac{1\text{V}}{10\Omega}=0.1\text{A}$，电路为零状态响应，故

$$i'_L(t)=0.1(1-\mathrm{e}^{-5t})\varepsilon(t)\text{A}$$

当i_S单独作用时，稳态值$i''_L(\infty)=-i_S=-1\text{A}$，故

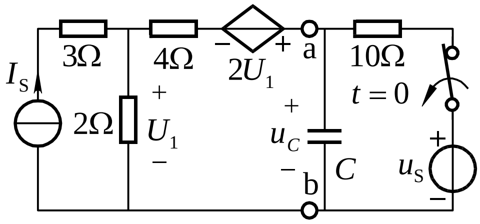
$$i''_L(t)=-(1-\mathrm{e}^{-5(t-1)})\varepsilon(t-1)\text{A}$$

由叠加定理得：

$$i_L(t)=i'_L(t)+i''_L(t)=[0.1(1-\mathrm{e}^{-5t})\varepsilon(t)-(1-\mathrm{e}^{-5(t-1)})\varepsilon(t-1)]\text{A}$$

波形图如图(b)所示。

8.31 图示电路原处于稳态，$I_S=1\text{A}$，$u_S=20\cos(10t)\text{V}$，$C=0.02\text{F}$。$t=0$时开由闭合突然断开，用三要素法求$t>0$时的电压$u_C(t)$。



图题 8.31

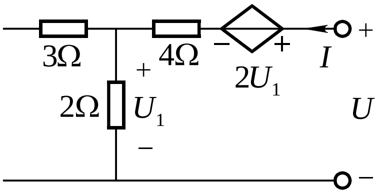
解：先求ab端左侧的戴维南等效电路。当 ab端开路时，

$U_1=2\Omega\times I_S=2\text{V}$，开路电压$U_{OC}=2U_1+U_1=6\text{V}$

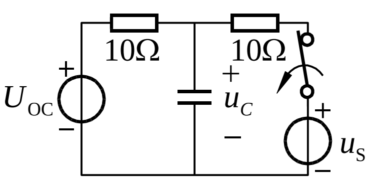
求等效电阻的电路如图（a）所示。

$$U_1=2\Omega\times I,\quad U=2U_1+4\Omega I+U_1=10\Omega I$$

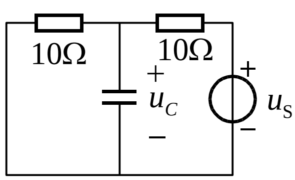
所以，等效电阻$R_i=\dfrac{U}{I}=10\Omega$。所示电路的等效电路如图(b)所示。



图(a)



图(b)



图(c)

当$t<0$，直流单独作用时，$U_{C(0)}=\dfrac{10}{10+10}\times U_{\mathrm{OC}}=3\mathrm{V}$

当$t<0$，交流$u_{\mathrm{S}}=20\cos(10t)\mathrm{V}$单独作用时，等效电路如图（c）所示。列写节点方程

$$(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\mathrm{j}0.2)\dot{U}_{C(1)}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{10}=\frac{10\sqrt{2}\angle 0^\circ}{10}$$

解得$\dot{U}_{C(1)}=5\angle-45^\circ\mathrm{V}$

所以在$t<0$电容电压的瞬时值表达式为$u_C=[3+5\sqrt{2}\cos(10t-45^\circ)]\mathrm{V}$

$$u_C(0_-)=3+5\sqrt{2}\cos(-45^\circ)=8\mathrm{V}$$

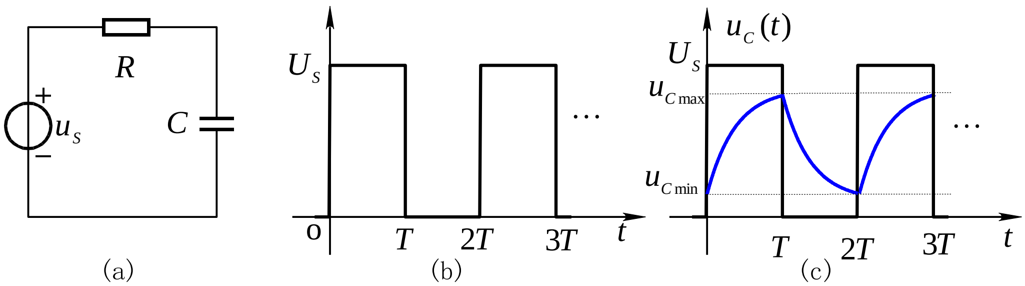
当$t\to\infty$时，稳态值$u_C(\infty)=U_{OC}=6\mathrm{V}$

时间常数$\tau=R_{\mathrm{i}}C=10\times0.02=0.2\mathrm{s}$

由三要素公式得：$u_C(t)=[6+2\mathrm{e}^{-5t}]\mathrm{V}\quad t\ge0$

8.32 电路及输入电压波形如图(a)和(b)所示。求证在稳态时电容电压的最大和最小值分别为

$$u_{C\max}=\frac{U_S}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}},\quad u_{C\min}=\frac{U_S\mathrm{e}^{-T/\tau}}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}}\qquad 其中\ \tau=RC。$$



图题 8.32

解：达到稳定后开始计时，在$0\le t\le T$内，电容从最小值$u_{C\min}$开始充电，在$t=T$时刻达到最大值。初始值$u_C(0_+)=u_{C\min}$，特解$u_{C\mathrm{p}}(t)=U_S$，$u_{C\mathrm{p}}(0_+)=U_S$，时间常数$\tau=RC$。由三要素公式得：

$$u_C(t)=U_S+(u_{C\min}-U_S)\mathrm{e}^{-t/\tau}\qquad 0\le t\le T \tag{1}$$

在$T\le t\le 2T$内，电容由最大值$u_{C\max}$开始放电，在$t=2T$时达到最小值。波形如

图(c)所示。此时间电路为零输入响应，电容电压为：

$$u_C(t)=u_{C\max}\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau}\qquad T\le t\le 2T \tag{2}$$

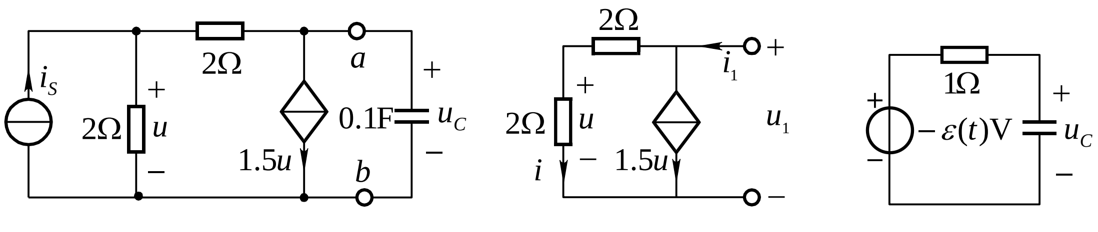
由式(1)得：
$$u_C(T)=U_S+(u_{C\min}-U_S)\mathrm{e}^{-T/\tau}=u_{C\max} \tag{3}$$

由式(2)得：
$$u_C(2T)=u_{C\max}\mathrm{e}^{-T/\tau}=u_{C\min} \tag{4}$$

通过联立求解式(3)和(4)便可证得

$$u_{C\max}=\frac{U_S}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}},\quad u_{C\min}=\frac{U_S\mathrm{e}^{-T/\tau}}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}}$$

8.33 电路如图(a)所示。(1)求 u_C 的单位阶跃特性。(2)求 u_C 的单位冲激特性。



图题 8.33

解：(1)当 $i_S=\varepsilon(t)$A 时，先求 ab 两端的戴维南等效电路。ab 端开路时，根据图(a)电路，由 KCL 得：

$$\frac{u}{2}+1.5u=i_S=\varepsilon(t)\quad\Rightarrow\quad u=0.5\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

开路电压
$$u_{OC}=u-2\times1.5u=-2\times u=-1\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

求等效电阻的电路如图 10.29(b)所示。

$$u_1=(2+2)i=(2+2)\times\frac{u}{2}=2u$$

$$i_1=i+1.5u=\frac{1}{2}u+1.5u=2u$$

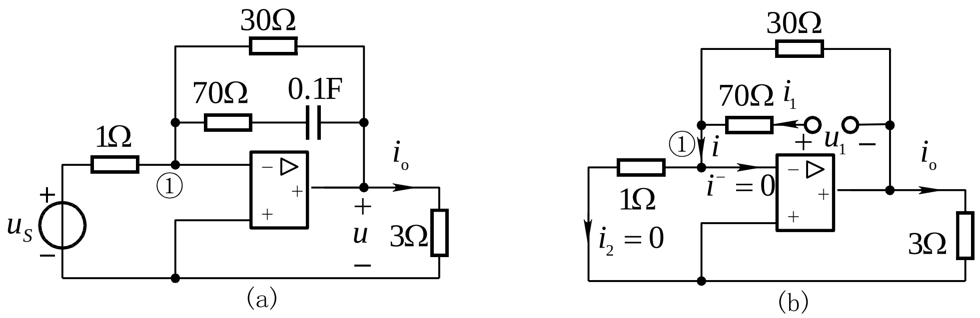
等效电阻
$$R_\mathrm{i}=\frac{u_1}{i_1}=1\Omega$$

戴维南等效电路如图 (c)所示。时间常数 $\tau=R_iC=0.1\mathrm{s}$ 。

根据三要素公式得 u_C 的单位阶跃特性为： $s(t)=-1(1-\mathrm{e}^{-10t})\varepsilon(t)\ \Omega$

(2)单位冲激特性为： $h(t)=\dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-10\mathrm{e}^{-10t}\varepsilon(t)\ \Omega/\mathrm{s}$

8.34 图(a)所示含运算放大器电路，$u_S=\varepsilon(t)\,\text{V}$，求阶跃响应$i_o$。



图题 8.34

解：当$t=0_+$时，电容电压为零，相当于短路。对节点①列写 KCL 方程得：

$$\frac{u(0_+)}{30}+\frac{u(0_+)}{70}+\frac{1}{1}=0\text{，解得：}u(0_+)=-21\text{V}$$

因此
$$i_o(0_+)=\frac{u(0_+)}{3}=-7\text{A}$$

当$t\to\infty$时，电容开路。再对节点①列写 KCL 方程得：

$$\frac{u(\infty)}{30}+\frac{1}{1}=0\text{，}\qquad\text{解得}\quad u(\infty)=-30\text{V}$$

稳态值
$$i_o(\infty)=\frac{u(\infty)}{3}=-10\text{A}$$

求等效电阻的电路如图 (b)所示。去掉独立源后，由理想运放的特性得：

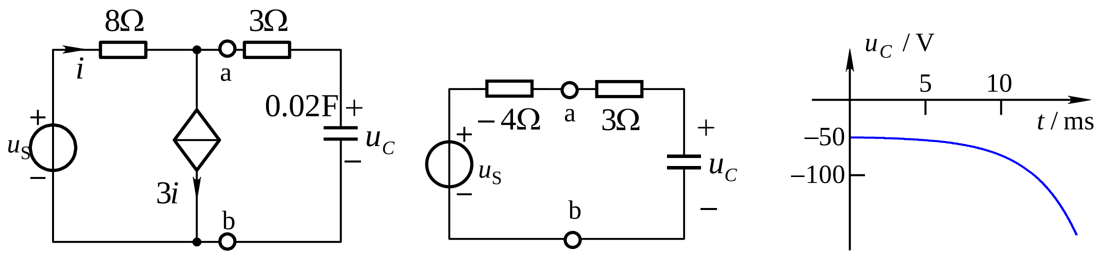
$$u_{n1}=0\text{，}\ i_2=u_{n1}/1\Omega=0\text{，}\ i=i_2+i^-=0$$

等效电阻　　$R=(30+70)\Omega=100\,\Omega$

时间常数　　$\tau=RC=10\,\text{s}$

由三要素公式得：　$i_o(t)=i_o(\infty)+[i_o(0_+)-i_o(\infty)]\text{e}^{-t/t}=(-10+3\text{e}^{-0.1t})\varepsilon(t)\,\text{A}$

8.35 图示电路，已知$u_S=1\text{Wb}\times\delta(t)$，求冲激响应$u_C$，并画出其波形。



图题 8.35

解：电压源为单位冲激函数，不能直接求其响应，而应先求单位阶跃响应，再对其求导得到单位冲激响应。为此先求 ab 端左侧的戴维南等效电路。当 ab 端开路时，

$$i = 3i \quad \Rightarrow \quad i = 0 \quad \text{，开路电压} \quad u_{\mathrm{OC}} = u_{\mathrm{S}}$$

当 ab 端短路时，短路电流 $i_{\mathrm{SC}} = i - 3i = -2i = -2 \times \dfrac{u_{\mathrm{S}}}{8\Omega}$

等效电阻 $$R_{\mathrm{i}} = \frac{u_{\mathrm{OC}}}{i_{\mathrm{SC}}} = -4\,\Omega$$

图(a)的等效电路如图(b)所示。时间常数

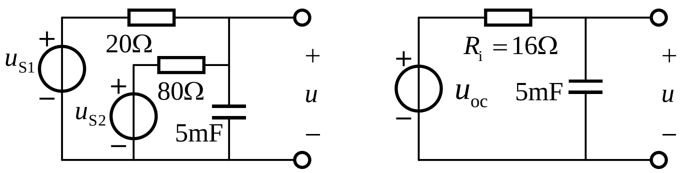
$$\tau = (3-4)\times 0.02 = -0.02\,\mathrm{s}$$

由三要素公式得 u_C 的单位阶跃特性为： $s(t) = (1-\mathrm{e}^{50t})\varepsilon(t)$

u_C 的单位冲激响应为：$u_C(t) = 1\mathrm{Wb}\times h(t) = \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -50\mathrm{e}^{50t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$

其波形如图 (c) 所示。

8.36 图示电路，已知 $u_{\mathrm{S1}} = 10\mathrm{e}^{-5t}\ \varepsilon(t)\mathrm{V}$， $u_{\mathrm{S2}} = 5(1-\mathrm{e}^{-5t})\ \varepsilon(t)\mathrm{V}$ 。试用卷积积分计算 $t>0$ 时输出电压 u 的变化规律。



图题 8.36　　　　(a)

解：先求端口的戴维宁等效电路，如图(a)所示。其中

$$R_{\mathrm{i}} = \frac{20\times 80}{20+80} = 16\Omega$$

$$u_{\mathrm{oc}} = \frac{80}{20+80}\times u_{\mathrm{S1}} + \frac{20}{20+80}\times u_{\mathrm{S2}} = (1+7\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{V} \qquad （1）$$

设图(a)中 u_{oc} 为单位冲激函数，求得单位冲激特性为：

$$h(t) = \frac{1}{R_{\mathrm{i}}C}\mathrm{e}^{-t/R_{\mathrm{i}}C} = 12.5\mathrm{e}^{-12.5t}$$

当激励为表达式（1）时，由卷积积分公式得所求电压为

$$u(t) = \int_0^t u_{\mathrm{oc}}(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t (1+7\mathrm{e}^{-5\tau})\times 12.5\mathrm{e}^{-12.5(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = (1+11.667\mathrm{e}^{-5t} - 12.667\mathrm{e}^{-12.5t})\mathrm{V}$$

8.37 图示电路，$t=0$时开关突然接通。

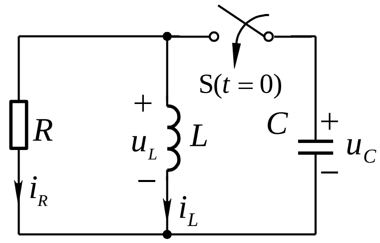
(1)求电路为振荡、非振荡暂态过程时电阻 R 应满足的条件。

(2)设 $R=5\Omega, L=0.1\text{H}, C=0.001\text{F}, i_L(0_-)=0, u_C(0_-)=20\text{V}$。求零输入响应 i_L。

解：(1) $t>0$时，由 KCL 得 $i_R+i_L+i_C=0$　　(1)

将 $i_R=\dfrac{u_C}{R}$，$i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$，$u_C=u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ 代入式(1)并整理成关于 i_L 的二阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i_L=0 \qquad (2)$$



图题8.37

该文分方程的特征方程为：$p^2+\dfrac{1}{RC}p+\dfrac{1}{LC}=0$

判别式　$\Delta=(\dfrac{1}{RC})^2-\dfrac{4}{LC}$

当$\Delta>0$即 $R<\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时为非振荡，当$\Delta<0$即 $R>\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时振荡。

(2)将给定 R、L、C 数值代入微分方程(2)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+10^4\times i_L=0$$

由换路定律得 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，$L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0_+}=u_L(0_+)=u_C(0_+)=u_C(0_-)=20\text{V}$，即

$$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+}=200$$

特征方程的判别式　$\Delta=200^2-4\times 10000=0$

特征根 $p_{1,2}=\dfrac{-200}{2}=-100$，　存在二重根，

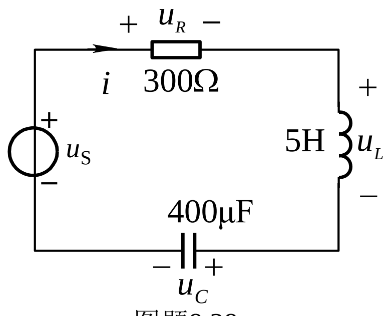
令齐次方程通解为 $i_L(t)=(A_1+A_2 t)\mathrm{e}^{-100t}$　　(3)

根据初始条件，在式(3)中令 $t=0_+$ 得：$i(0_+)=A_1=0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\mathrm{e}^{-100t}[A_2-100A_1-100A_2 t]_{t=0_+}=200\text{，}\qquad \text{解得 } A_2=200\text{。}$$

所以　　$i_L(t)=200t\mathrm{e}^{-100t}\text{A}$。

8.38 求图示电路u_C的单位阶跃特性$s(t)$及单位冲激特性$h(t)$。



图题8.38

解：根据 KVL 有　$u_R + u_L + u_C = u_S$　　(1)

将$u_R = Ri$，$u_L = L\dfrac{di}{dt}$，$i = C\dfrac{du_C}{dt}$代入式(1)并整理成关于u_C的二阶微分方程：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S \qquad (2)$$

将 R、L、C 数值代入式(2)得

$$0.002\frac{d^2u_C}{dt^2} + 0.12\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S \qquad (3)$$

初始条件为　$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$，$\dfrac{du_C}{dt}\Big|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}i(0_+) = 0$　　(4)

式(3)的特征方程为 $0.002p^2 + 0.12p + 1 = 0$　解得 $p_1 = -10$，　$p_2 = -50$

特征方程存在两个不相等的实根，当激励源为阶跃电压时，响应u_C的一般形式为：

$$u_C = A_3 + A_1e^{-10t} + A_2e^{-50t}$$

稳态时$u_C = u_S = 1$(对单位阶跃电压源)　即$A_3 = 1$。

由初始条件(3)得

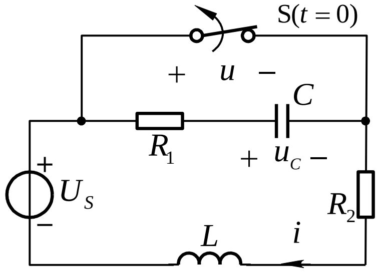
$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 + 1 = 0 \\ \dfrac{du_C}{dt}\Big|_{t=0_+} = -10A_1 - 50A_2 = 0 \end{cases}$$

解得　$A_1 = -1.25$　$A_2 = 0.25$

所以单位阶跃特性　$s(t) = \dfrac{u_C(t)}{1V} = (1 - 1.25e^{-10t} + 0.25e^{-50t})\varepsilon(t)$

单位冲激特性　$h(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} = (12.5e^{-10t} - 12.5e^{-50t})\varepsilon(t)/s$

8.39 图示电路原处于稳态，$t = 0$时开关打开。要求在$t > 0$时满足$u = U_S$，求电路参数应满足的关系。



解：　$i(0_+) = i(0_-) = \dfrac{U_S}{R_2}$，　$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

根据 KVL，列写方程如下：

$$R_1 C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u=U_{\mathrm{S}} \qquad (1)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+R_2 i=U_{\mathrm{S}}-u=0 \qquad (2)$$

由式(1)解得 $u_C(t)=U_{\mathrm{S}}(1-\mathrm{e}^{-t/R_1C})$ (3)　　图题 8.39

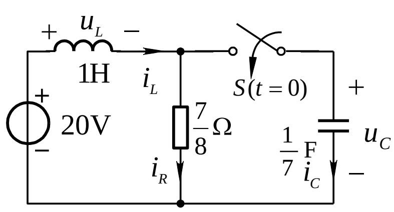
$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_1}\mathrm{e}^{-t/R_1C} \qquad (4)$$

由式(2)又解得 $i(t)=\dfrac{U_{\mathrm{S}}}{R_2}\mathrm{e}^{-\frac{R_2}{L}t}$ (5)

由式(4)和式(5)相等解得 $R_1=R_2=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

8.40 图示电路原处于稳态，$u_C(0_-)=10\mathrm{V}$，$t=0$ 时开关接通。求 $t>0$ 时的全响应 u_C。

解：由 KVL 得：$u_L+u_C=L\dfrac{di_L}{dt}+u_C=20\mathrm{V}$ (1)



图题8.40

由 KCL 得：$-i_L+i_R+i_C=-i_L+\dfrac{8}{7}u_C+\dfrac{1}{7}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$ (2)

方程(2)对 t 求导，再将方程(1)代入，经整理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+8\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+7u_C=140 \qquad (3)$$

因为 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{20\mathrm{V}}{7/8\Omega}=\dfrac{160}{7}\mathrm{A}$

所以 u_C 及其导数的初始条件为

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=10\mathrm{V} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}[i_L(0_+)-\dfrac{u_C(0_+)}{7/8}]=80 \end{cases} \qquad (4)$$

微分方程(3)的特征方程为：$p^2+8p+7=0$，解得 $p_1=-1$，$p_2=-7$

稳态时，$u_C(\infty)=20\mathrm{V}$，所以特解 $u_{Ch}(t)=20$

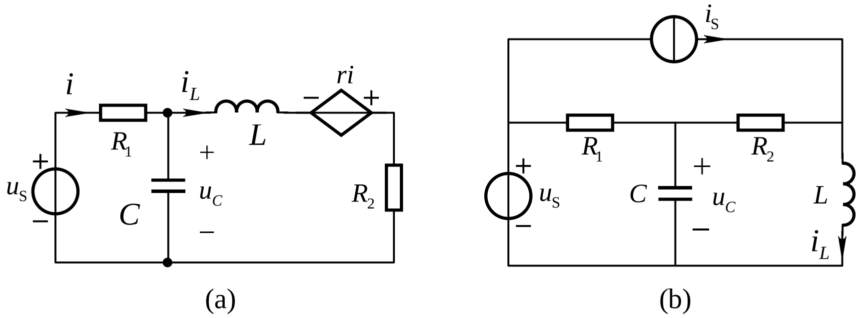
设其完全解答为：$u_C(t)=20+A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-7t}$ (5)

由初始条件(4)得
$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 + 20 = 10 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0+} = -A_1 - 7A_2 = 80 \end{cases}$$

解得
$$A_1 = 1.67\text{，}\quad A_2 = -11.67$$

所以将 A_1、A_2 代入(5)得： $u_C(t) = [20 + 1.67\mathrm{e}^{-t} - 11.67\mathrm{e}^{-7t}]\mathrm{V}$

8.41 列出图示电路的标准形式状态方程。



图题 8.41

解：（a） $\dot{u}_C = (i - i_L)/C = (\dfrac{u_S - u_C}{R_1} - i_L)/C = -\dfrac{1}{R_1C}u_C - \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{R_1C}u_S$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L}(u_C + ri - R_2 i_L) = \frac{1}{L}(u_C - R_2 i_L + r\frac{u_S - u_C}{R_1}) = \frac{1}{L}(1 - \frac{r}{R_1})u_C - \frac{R_2}{L}i_L + \frac{r}{R_1L}u_S$$

所以 $\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L}(1 - \dfrac{r}{R_1}) & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C} \\ \dfrac{r}{R_1L} \end{bmatrix}[u_S]$

(b) 对含电容的节点①列 KCL 方程：

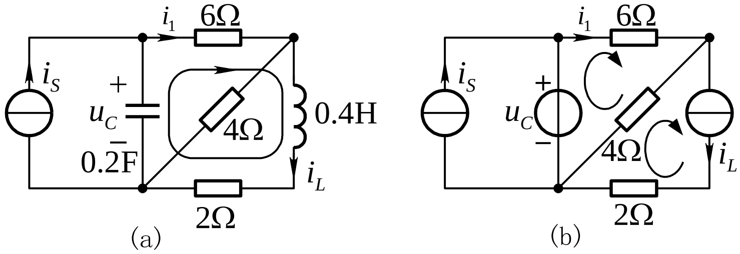
$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{u_S - u_C}{R_1} - (i_L - i_S)$$

对含电感的回路 l 列 KVL 方程： $L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_C - R_2(i_L - i_S)$

整理得 $\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C} & \dfrac{1}{C} \\ 0 & \dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$

8.42 图(a)所示电路$i_S=\varepsilon(t)\mathrm{A}$。

(1)列出电路的状态方程。(2)由状态方程求i_L所满足的微分方程。



图题 8.42

解：(1)对节点①列 KCL 方程：　$$0.2\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_S-i_1 \quad (1)$$

对回路l列 KVL 方程：　$$0.4\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C-6i_1-2i_L \quad (2)$$

为消去非状态变量i_1，将u_C及i_L分别用电压源和电流源置换，如图(b)所示。列回路电流方程得：

$$(6+4)i_1-4i_L=u_C\text{，解得：}\quad i_1=0.1u_C+0.4i_L \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)和(2)化简得电路的状态方程：

$$\begin{cases}\dot{u}_C=-0.5u_C-2i_L+5\varepsilon(t) & (4)\\ \dot{i}_L=u_C-11i_L & (5)\end{cases}$$

(2) 对状态方程(5)两端同时求导得：$$\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}-11\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \quad (6)$$

式(4)、(5)联立解得：$\dot{u}_C=-0.5(\dot{i}_L+11i_L)-2i_L+5\varepsilon(t)$　(7),　代入式(6)化简得i_L所满足的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+11.5\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+7.5i_L=5\varepsilon(t)$$

由式(5)有：　$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=u_C(0_+)-11i_L(0_+)=0$$

所以初始条件为：　$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=0$