第一次作业

2-1 自相关函数为 $R_x(\tau)=2e^{-4|\tau|}$ 的随机信号 $\{x(t)\}$ 通过冲激响应为 $h(t)=3e^{-3t}u(t)$ 的线性系统，输出为 $\{y(t)\}$，求：

（1）$\{y(t)\}$ 的自相关函数 $R_y(\tau)$；

（2）$\{x(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$ 及其在 $\tau=0$、$\tau=1$ 时的值。

解：

1） Q $y(t)=x(t)*h(t)$，且 $x(t)$ 为平稳随机信号

所以可得输出 $y(t)$ 的功率谱密度函数

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)|H(j\omega)|^2$$

又有 $S_x(\omega)=\dfrac{16}{\omega^2+16}$，$H(j\omega)=\dfrac{3}{j\omega+3}$

所以 $S_y(\omega)=S_x(\omega)|H(j\omega)|^2=\dfrac{16}{\omega^2+16}\cdot\dfrac{9}{\omega^2+9}=\dfrac{144}{7}(\dfrac{1}{\omega^2+9}-\dfrac{1}{\omega^2+16})$

$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\dfrac{24}{7}e^{-3|\tau|}-\dfrac{18}{7}e^{-4|\tau|}$

2)
$$S_{xy}(\omega)=S_x(\omega)H(-j\omega)=\frac{16}{\omega^2+16}\cdot\frac{3}{-j\omega+3}$$

$$S_{yx}(\omega)=S_x(\omega)H(j\omega)=\frac{16}{\omega^2+16}\cdot\frac{3}{j\omega+3}$$

令 $s=j\omega$

$$S_{xy}(s)=\frac{16}{-s^2+16}\cdot\frac{3}{-s+3}=\frac{6}{7}\frac{1}{s+4}+\frac{48}{7}\frac{1}{-s+3}-\frac{6}{-s+4}$$
$$S_{yx}(s)=\frac{16}{-s^2+16}\cdot\frac{3}{s+3}=\frac{6}{7}\frac{1}{-s+4}+\frac{48}{7}\frac{1}{s+3}-\frac{6}{s+4}$$

∴作拉普拉斯反变换后可得，

$$R_{xy}(\tau)=\frac{6}{7}e^{-4\tau}u(\tau)+\frac{48}{7}e^{3\tau}u(-\tau)-6e^{4\tau}u(-\tau)$$
$$R_{yx}(\tau)=\frac{6}{7}e^{4\tau}u(-\tau)+\frac{48}{7}e^{-3\tau}u(\tau)-6e^{-4\tau}u(\tau)$$

代入 $\tau=0$ ， $\tau=1$ 即可得解。

2-3 积分器是一个线性系统，其冲激响应为$h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(u)du, 0\le t\le T$，功率密度函数为$S_x(f)$的随机信号$\{x(t)\}$通过该系统后的输出为$y(t)=\int_{t-T}^{t}x(u)du$，求$\{y(t)\}$的功率谱密度函数$S_y(f)$以及$\{x(t)\}$与$\{y(t)\}$的互功率谱密度函数$S_{yx}(f)$.

解：$h(t)=\int_{t-T}^{t}\delta(u)du=\int_{t-T}^{t}dU(u)=U(t)-U(t-T)=g_T(t-\frac{T}{2})$

$$g_T(t)\leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2})\therefore h(t)=g_T(t-\frac{T}{2})\leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2})e^{-jwT/2}=H(jw)$$

$$H(jf)=TSa(T2\pi f/2)e^{-j2\pi fT/2}$$

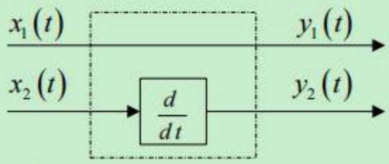
$$S_y(f)=|H(jf)|^2S_x(f)=T^2Sa^2(\pi Tf)S_x(f)$$

$$S_{yx}(f)=H(jf)S_x(f)=TSa(\pi Tf)S_x(f)e^{-j\pi fT}$$

2-7 假设线性系统如图 2.11 所示：输入端$\{x_1(t)\}$与$\{x_2(t)\}$为联合广义平稳随机过程，输出分别为$\{y_1(t)\}$和$\{y_2(t)\}$。

（1）求输出端互相关函数$R_{y_1y_2}(\tau)$与输入端互相关函数$R_{x_1x_2}(\tau)$的关系式；

（2）若$\{x(t)=x_1(t)+x_2(t)\}$，作用到冲激响应为$h(t)$的线性时不变系统，输出为$\{y(t)\}$，求$\{y(t)\}$的均值，自相关函数以及功率谱密度。



解:（1）输出端自相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_{y_1y_2}(\tau) &= E\{y_1(t_1)y_2(t_2)\} = E\{x_1(t_1)\frac{d}{dt}x_2(t_2)\} \\
&= E\{x_1(t_1)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_2(t_2+\Delta t)-x_2(t_2)}{\Delta t}\} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{E\{x_1(t_1)x_2(t_2+\Delta t)-x_1(t_1)x_2(t_2)\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R_{x_1x_2}(\tau-\Delta t)-R_{x_1x_2}(\tau)}{\Delta t} \\
&= -\frac{d}{dt}R_{x_1x_2}(\tau)
\end{aligned}
$$

（2）输出 $y(t)=x(t)*h(t)=x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$

均值

$$
\begin{aligned}
m_y(t) = E\{y(t)\} &= E\{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\}+E\{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)m_{x_1}(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)m_{x_2}(t-\tau)d\tau \\
&= h(\tau)*[m_{x_1}(t)+m_{x_2}(t)]
\end{aligned}
$$

因为 $x_1(t),x_2(t)$ 为联合广义平稳随机过程，则

$$
m_y(t)=(m_{x_1}+m_{x_2})\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=(m_{x_1}+m_{x_2})H(0)
$$

自相关函数

$$
\begin{aligned}
&R_y(t_1,t_2)=E\{y(t_1)y(t_2)\} \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)R_x(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)[R_{x_1}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_2}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_2x_1}(\tau-\tau_1+\tau_2)+R_{x_1x_2}(\tau-\tau_1+\tau_2)]d\tau_1d\tau_2
\end{aligned}
$$

功率谱密度函数

$$
S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2S_x(\omega)
$$

又，$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=S_{x_1}(\omega)+S_{x_1x_2}(\omega)+S_{x_2x_1}(\omega)+S_{x_2}(\omega)$

则 $S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2S_x(\omega)=|H(j\omega)|^2[S_{x_1}(\omega)+S_{x_1x_2}(\omega)+S_{x_2x_1}(\omega)+S_{x_2}(\omega)]$

2-11 均值为零、方差为 ${\sigma_x}^2$ 的白噪声序列 $\{x(n)\}$ 通过图 2.12 的离散系统，其中 $h_1(n)=a^nu(n)$， $h_2(n)=b^nu(n)$ 且 $|a|<1$ 和 $|b|<1$，输出为 $\{z(n)\}$，求：

（1）$\{z(n)\}$ 的自相关函数；

（2）$\{z(n)\}$ 的功率谱密度。

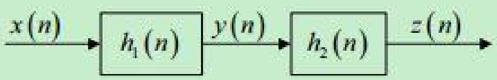


图 2.12

解：

1） 由 $h_1(n)=a^n u(n) \Rightarrow y(n)=ay(n-1)+x(n)$，

以及 $h_2(n)=b^n u(n) \Rightarrow z(n)=bz(n-1)+y(n)$，

得 $z(n)-(a+b)z(n-1)+abz(n-2)=x(n)$，

$$H(j\Omega)=\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}}=\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})(1-be^{-j\Omega})}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ae^{-j\Omega}}-\frac{b}{1-be^{-j\Omega}}\right)$$

则可知 $h(n)=\frac{a}{a-b}a^n u(n)-\frac{b}{a-b}b^n u(n)$，又此系统属于 AR 模型，则 $R_z(m)$ 满足递推条件：$R_z(m)=\sigma_x^2 h(-m)+(a+b)R_z(m-1)-abR_z(m-2)$，由递推条件以及对称关系 $R_z(m)=R_z(-m)$ 可得 $R_z(m)$ 的显式表示，方法同上题。

2） 由 $S_x(\Omega)=\sigma_x^2$ 及 $H(j\Omega)=\frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}}$，可得 $\{z(n)\}$ 的功率谱密度函数为 $S_z(\Omega)=|H(j\Omega)|^2 S_x(\Omega)=\frac{\sigma_x^2}{\left|1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}\right|^2}$。

2.16 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为 $y(n)=x(n)+b_1y(n-1)+b_2y(n-2)$，这是一个二阶 AR 模型，$\{x(n)\}$ 是零均值、方差为 σ_x^2 的白噪声序列。

（1）求使 $\{y(n)\}$ 平稳的条件；

（2）证明 $\{y(n)\}$ 的功率谱密度为：

$$S_y(\omega)=\sigma_x^2\left[1+b_1^2+b_2^2-2b_1(1-b_2)\cos\omega-2b_2\cos 2\omega\right]^{-1}$$

（3）求 $\{y(n)\}$ 的自相关函数。

解：（1） $y(n)$ 平稳，则需系统为因果稳定的。

系统的传输函数：

$$H(z)=\frac{1}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}=\frac{1}{(1-\alpha_1z^{-1})(1-\alpha_2z^{-1})}$$

极点为：

$$\alpha_{1,2}=\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}$$

为使系统平稳，则需 $|\alpha_{1,2}|<1$。

（2）输出的功率谱密度函数 $S_x(\omega)=\sigma_x^2$

系统传输函数 $H(j\omega)=\dfrac{1}{1-b_1e^{-j\omega}-b_2z^{-j2\omega}}$

$$|H(j\omega)|^2=\frac{1}{(1+b_1^2+b_2^2-2b_1\cos\omega-2b_2\cos2\omega+2b_1b_2\cos\omega)}$$

输出的功率谱密度函数：

$$S_y(\omega)=|H(j\omega)|^2S_x(\omega)=\frac{\sigma_x^2}{(1+b_1^2+b_2^2-2b_1\cos\omega-2b_2\cos2\omega+2b_1b_2\cos\omega)}$$

（3）冲激函数

$$h(n)=\begin{cases}b_1h(n-1)+b_2h(n-2)+\delta(n), & n\geq0\\ 0 & ,n<0\end{cases}$$

则输出的自相关函数

$$R_y(n)=\sigma_x^2h(-n)+b_1R_y(n-1)+b_2R_y(n-2)$$

2-17 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)$，这是一个二阶 MA 模型，若 $\{x(n)\}$ 的功率谱密度函数为 $S_x(\omega)=\sigma_x{}^2$，求 $\{y(n)\}$ 的自相关函数和功率谱密度。

解：

由 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)$

有 $Y(z)=X(z)+a_1z^{-1}X(z)+a_2z^{-2}X(z)$

则系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$

系统冲激响应为 $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)$

又 $S_x(w)=\sigma_x^{\ 2}$ 则 $R_x(\tau)=\sigma_x^{\ 2}\delta(\tau)$，则

$$
\begin{aligned}
R_y(n_1,n_2)&=\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}h(k_1)h(k_2)R_x(n_1-k_1,n_2-k_2)\\
&=\sum_{k_1=0}^{q}\sum_{k_2=0}^{q}\left[\delta(k_1)+a_1\delta(k_1-1)+a_2\delta(k_1-2)\right]\left[\delta(k_2)+a_1\delta(k_2-1)+a_2\delta(k_2-2)\right]\cdot\sigma_x^{\ 2}\delta(n_1-k_1-n_2+k_2)\\
&=\sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}\left[\delta(k_2)+a_1\delta(k_2-1)+a_2\delta(k_2-2)\right]\cdot\sigma_x^{\ 2}\delta(n_1-n_2-k_1+k_2)\\
&\underline{\underline{\tau=n_1-n_2}}\,(1+a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2})\sigma_x^{\ 2}\delta(\tau)+a_1(1+a_2)\sigma_x^{\ 2}\left[\delta(\tau-1)+\delta(\tau+1)\right]+a_2\sigma_x^{\ 2}\left[\delta(\tau-2)+\delta(\tau+2)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow R_y(\tau)=\begin{cases}1+a_1^2+a_2^2 & \tau=0\\ a_1+a_1a_2 & \tau=\pm1\\ a_2 & \tau=\pm2\end{cases}
$$

由于 $H(z)=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}$，则

$$
\begin{aligned}
H(\Omega)&=1+a_1e^{-j\Omega}+a_2e^{-2j\Omega}=1+a_1\cos\Omega-ja_1\sin\Omega+a_2\cos2\Omega-ja_2\sin2\Omega\\
&=(1+a_1\cos\Omega+a_2\cos2\Omega)-j(a_1\sin\Omega+a_2\sin2\Omega)
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
|H(j\Omega)|^2&=(1+a_1\cos\Omega+a_2\cos2\Omega)^2+(a_1\sin\Omega+a_2\sin2\Omega)^2\\
&=1+a_1^2+a_2^2+2a_1(1+a_2)\cos\Omega+2a_2\cos2\Omega
\end{aligned}
$$

又 $S_x(\Omega)=\sigma_x^{\ 2}$ ，故

$$
S_x(\Omega)=\sigma_x^{\ 2}S_y(\Omega)=|H(j\Omega)|^2S_x(\Omega)=\sigma_x^{\ 2}\left[1+a_1^2+a_2^{\ 2}+2a_1(1+a_2)\cos\Omega+2a_2\cos2\Omega\right]
$$

第二次作业

3-1 二元假设如下：

$$H_0: x = n$$
$$H_1: x = s + n$$

其中 s 与 n 是统计独立的随机变量，它们的概率密度函数分别是

$$f_s(s) = \frac{1}{2}e^{-|s|}$$
$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2/2}$$

（1） 求似然比统计量；

（2） 若采用最小平均错误概率准则，求检测器的门限与假设先验概率之间的关系；

（3） 若采用纽曼-皮尔逊准则，求检测门限与虚警概率的函数关系.

解：（1）最大似然函数为：

$$H_0: f(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$
$$H_1: f(x|H_1) = f_s(x) * f_n(x)$$

$$\begin{aligned} H_1: f(x|H_1) &= f_s(x) * f_n(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x-n) f_n(n) dn \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-n|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2/2}dn \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x+n-n^2/2}dn + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-n+x-n^2/2}dn \\ &= \frac{1}{2}e^{-x+\frac{1}{2}}\Phi(x-1) + \frac{1}{2}e^{x+\frac{1}{2}}[1-\Phi(x+1)] \end{aligned}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}}\Phi(x-1) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}}[1-\Phi(x+1)]$$

（2）假设先验概率分别为 $P(H_0), P(H_1)$，则检测门限为

$$th = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

（3）设虚警概率为 α，则

$$\alpha = P(D_1|H_0) = \int_{th'}^{+\infty} f(x|H_0)dx = \int_{th'}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = 1-\Phi(th')$$

其中 th' 为检测门限。

3-4 观测样本 x 在两种假设下分别服从均值不同的高斯分布

$$H_0: \quad x \sim N(0, \sigma^2)$$
$$H_1: \quad x \sim N(1, \sigma^2)$$

已知 $P(H_i) = 1/2 \ (i = 0,1)$。将样本 x 通过一个平方器，它的输出与输入之间满

足 $y=ax^2$。采用最小错误概率判决对 y 进行判决，求判决规则。

解：由 $y=ax^2$，可以求得 y 的概率密度函数表达式为：

$$f(y)=\frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}}\left[f_x(\sqrt{\frac{y}{a}})+f_x(-\sqrt{\frac{y}{a}})\right]$$

可得：$f(y\,|\,H_0)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2ay\pi}}e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}}$

$$f(y\,|\,H_1)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2ay\pi}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(-\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

判决准则为：

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=1$$

化简得到判决规则为：

$$\ln(e^{\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}}+e^{-\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}})\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln 2+\frac{1}{2\sigma^2}$$

3-5 二元通信系统观测模型为

$$H_0: x=-1+n$$
$$H_1: x=1+n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\sigma_n^{\ 2}=0.5$ 的高斯白噪声，若两种假设的先验概率相等，判决风险函数为

$$C_{00}=1, C_{11}=1, C_{10}=5, C_{01}=5$$

求贝叶斯判决规则和平均风险。

解：H_0 假设下 $x\sim N(-1,0.5)$

H_1 假设下 $x\sim N(1,0.5)$

H_0 假设下 $x\sim N(-1,0.5)$

$$\frac{f(x\,|\,H_1)}{f(x\,|\,H_0)}=\exp(\frac{2x}{\sigma_n^2})\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{p(H_1)(C_{01}-C_{11})}$$

$$e^{4x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 = th \Rightarrow x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 = th'$$

$$P(D_0 | H_0) = \int_{-\infty}^{0} f(x | H_0) dx = \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1 | H_0) = 1 - P(P(D_0 | H_0) = 1 - \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_0 | H_1) = \int_{0}^{+\infty} f(x | H_1) dx = 1 - \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1 | H_1) = 1 - P(P(D_0 | H_1) = \Phi(\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{C} = P(H_0)[C_{00}P(D_0 | H_0) + C_{10}P(D_1 | H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0 | H_1) + C_{11}P(D_1 | H_1)]$$

$$= 5 - 4\Phi(\sqrt{2}) = 1.3148$$

3-8 在实际情况中，我们得到的两种假设下观测值的概率密度函数是离散的。如果在概率密度函数中使用冲激函数，同样可以推导似然比检验。假定在二元假设下得到的观测值服从泊松分布：

$$\begin{cases} P(x=n|H_0)=\dfrac{m_0^x}{x!}\exp(-m_0) \\ P(x=n|H_1)=\dfrac{m_1^x}{x!}\exp(-m_1) \end{cases} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

若 $m_1>m_0, P(H_0)=P(H_1)$，试证明：

（1） 似然判决规则是 $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}$；

（2） 虚警概率为 $\alpha=1-\exp(-m_0)\sum_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_0)^n}{n!}$，漏警概率 $\beta=\exp(-m_1)\sum_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_1)^n}{n!}$，其中

$n_0=\left\lceil\dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}\right\rceil$ 表示对 $\dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}$ 向上取整数。

证明：（1） $\lambda(x)=\dfrac{P(x=n|H_1)}{P(x=n|H_0)}=\dfrac{\dfrac{m_1^x}{x!}\exp(-m_1)}{\dfrac{m_0^x}{x!}\exp(-m_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)}=1$

$$(\frac{m_1}{m_0})^x \exp(m_0-m_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\exp[x(\ln m_1-\ln m_0)] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \exp(m_1-m_0)$$

$$\therefore x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}$$

（2）

$$\alpha=1-P(D_0|H_0)=1-P(x=n<n_0|H_0)=1-\sum_{n=0}^{n_0-1}P(x=n|H_0)$$

$$=1-\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{m_0^n}{n!}\exp(-m_0)=1-\exp(-m_0)\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{(m_0)^n}{n!}$$

$$\beta=P(D_0|H_1)=P(x=n<n_0|H_1)=\sum_{n=0}^{n_0-1}P(x=n|H_1)$$

$$=\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{m_1^n}{n!}\exp(-m_1)=\exp(-m_1)\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{(m_1)^n}{n!}$$

其中 $n_0=\left\lceil\dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1-\ln m_0}\right\rceil$

3-9 设有如下二元假设

$$\begin{array}{ll} H_0: & x_i=n_i \\ H_1: & x_i=1+n_i \end{array} \quad i=1,2,\text{L} ,10$$

n_i 是均值为 0，方差为 0.09 的高斯白噪声。现令虚警概率 $\alpha=10^{-8}$，如判决规则

定为

$$G=\sum_{i=1}^{10}x_i \mathop{\gtrless}_{H_0}^{H_1} G_T$$

试求 G_T 的值以及相应的检测概率。

解：由条件得：$G|H_0\sim N(0,0.9)$，　$G|H_1\sim N(10,0.9)$

$$p_{fa}=p(G|H_0)=\int_{G_T}^{+\infty}f(G|H_0)dG=1-\Phi\left(\frac{G_T}{\sqrt{0.9}}\right)=10^{-8}$$

求得：$G_T=5.3241$

从而可求：

$$p_D=p(G|H_1)=\int_{G_T}^{+\infty}f(G|H_1)dG=1-\Phi(\frac{G_T-10}{\sqrt{0.9}})=1-4.135\times10^{-7}$$

第三次作业

3-13 二元假设如下：

$$H_0:\ f\left(x_i|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right)$$
$$H_1:\ f\left(x_i|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_i-1)^2}{2}\right],\quad i=1,2.....$$

已知 $\alpha=\beta=0.1$，$P(H_i)=1/2\ (i=0,1)$。

（1）求序贯检测的判决规则。

（2）求序贯检测所需的平均样本数。

（3）若采用固定样本数的检测器，求满足性能要求所需的样本数。

解：（1）观测样本为 i 时的似然比函数为：

$$\lambda(\vec{x}_i)=\prod_{j=1}^{i}\frac{f(\vec{x}_i|H_1)}{f(\vec{x}_i|H_0)}=\frac{\exp[-\sum_{j=1}^{i}\frac{(x_j-1)^2}{2}]}{\exp[-\sum_{j=1}^{i}\frac{x_j^2}{2}]}=\exp[\sum_{j=1}^{i}x_j-\frac{i}{2}]$$

取对数：$\ln\lambda(\vec{x_i})=\sum_{j=1}^{i}x_j-\frac{i}{2}$

$th_1=\frac{1-\beta}{\alpha}=9$，$th_0=\frac{1-\alpha}{\beta}=\frac{1}{9}$

$\ln th_0=-2.197$，$\ln th_1=2.197$

对数似然比判决规则为：

$$\begin{cases}\ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right)\geq 2.197 & \text{判为}H_1\\ \ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right)\leq -2.197 & \text{判为}H_0\\ -2.197<\ln\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_i\right)<2.197 & \text{接收下一个数据}\end{cases}$$

（2）$\ln\lambda(x)=x-\frac{1}{2}$

$E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\mid H_0\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\lambda(x)f(x\mid H_0)dx=-\frac{1}{2}$

$E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\mid H_1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\ln\lambda(x)f(x\mid H_1)dx=\frac{1}{2}$

$$E\left\{N\left|H_1\right.\right\}\approx\frac{(1-\beta)\ln th_1+\alpha\ln th_0}{E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\left|H_1\right.\right\}}=3.515$$

$$E\left\{N\left|H_0\right.\right\}\approx\frac{\alpha\ln th_1+(1-\alpha)\ln th_0}{E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\left|H_0\right.\right\}}=3.515$$

$$E\left\{N\right\}=\frac{\alpha\ln th_1+(1-\alpha)\ln th_0}{E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\left|H_0\right.\right\}}P\left(H_0\right)+\frac{(1-\beta)\ln th_1+\alpha\ln th_0}{E\left\{\ln\lambda\left(x\right)\left|H_1\right.\right\}}P\left(H_1\right)=3.515$$

所以 N=4

（3）假设固定样本数为 N，似然比判决准则为：

$$\lambda\left(\vec{\mathbf{x}}_N\right)=\frac{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_i\left|H_1\right.\right)}{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_i\left|H_0\right.\right)}=\prod_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\left|H_1\right.\right)}{f\left(x_j\left|H_0\right.\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

$$\ln\lambda(\vec{x_N})=\sum_{j=1}^{N}x_j-\frac{N}{2}$$

判决规则为：

$$G=\ln\lambda(\vec{x_N})=\sum_{j=1}^{N}x_j-\frac{N}{2}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0$$

化简后有 $\bar{x}=\frac{\sum_{j=1}^{N}x_j}{N}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{2}$

新变量 $\bar{x}$ 的分布为 $f(\bar{x}|H_1)$: $N(1,\frac{1}{N})$， $f(\bar{x}|H_0)$: $N(0,\frac{1}{N})$。

由虚警和漏警条件：

$$p(D_1|H_0)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(\bar{x}|H_0)d\bar{x}\le 0.1$$

$$p(D_0|H_1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(\bar{x}|H_1)d\bar{x}\le 0.1$$

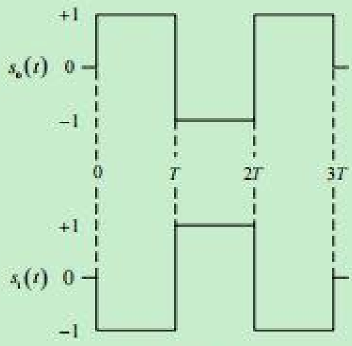
经查表得 $N\ge 6.656$

故 N=7。

3-18 二元通信系统如下：

$$\begin{aligned}H_0:&\ x(t)=s_0(t)+n(t)\\H_1:&\ x(t)=s_1(t)+n(t)\end{aligned}\quad 0\le t\le 3T$$

其中信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 如图 3.34 所示，$n(t)$ 是功率为 $N_0/2$ 的加性高斯白噪声。假设两种假设的先验概率相等，求最小错误概率准则下的判决规则。若 $E/N_0=4$，求错误判决概率。



信号波形

解： $f(x(t)\,|\,H_0)=F\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^{3T}\left[x(t)-s_0(t)\right]^2dt\right\}$

$$f(x(t)\,|\,H_1)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^{3T}\left[x(t)-s_1(t)\right]^2dt\right\}$$

判决准则为：

$$\ln\lambda(x(t))=\ln\frac{f(x(t)\,|\,H_1)}{f(x(t)\,|\,H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=th'$$

因为 $s_0(t)=-s_1(t)$

可得判决规则为： $\int_0^{3T}x(t)s_1(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0$

或 $\int_0^{3T}x(t)s_0(t)dt\underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}}0$

（2）因为 $s_0(t)=-s_1(t)$ ，所以 $\rho=-1$

$$p_e=1-\Phi(\sqrt{(1-\rho)\frac{E}{N_0}})=1-\Phi(\sqrt{8})=0.0023$$

3-21 二元频移键控系统如下：

$$H_0 : x(t) = s_0(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$
$$H_1 : x(t) = s_1(t) + n(t)$$

式中，信号分别为 $s_0(t) = A\cos\left[\left(w_0 - \Delta w/2\right)t\right]$ 和 $s_1(t) = A\cos\left[\left(w_0 + \Delta w/2\right)t\right]$，

$w_0 >> \Delta w$ $w_0 T = k\pi$，（k 为整数），$n(t)$ 是均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

（1） 证明信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 之间的相关系数为 $\rho = \dfrac{\sin \Delta w T}{\Delta w T}$；

（2） 求使 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交的最小的 Δw 的值；

（3） 求使平均错判概率为最小的 Δw 的值；

（4） 比较 2）和 3）两种情况下接收机的平均错误概率。

解：（1）由题意得：

$$\rho = \frac{1}{E}\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt$$
$$E = \frac{1}{2}\left(E_0 + E_1\right)$$
$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t)dt = A^2\int_0^T \cos^2\left[\left(w_0 - \Delta w/2\right)t\right]dt$$

Q $w_0 >> \Delta w$

$$\therefore E_0 = \frac{A^2}{2}\int_0^T \left[\cos 2w_0 t + 1\right]dt = \frac{A^2}{2}T$$

对于二元频移键控系统

$w_0 - w_1 = \dfrac{n\pi}{T}, w_0 + w_1 = \dfrac{m\pi}{T}, m,n$ 均为整数

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = A^2\int_0^T \cos\left[(w_0-\Delta w/2)t\right]\cos\left[(w_0+\Delta w/2)t\right]dt$$
$$= \frac{A^2}{2}\int_0^T \left[\cos(w_0+w_1)t+\cos\Delta wt\right]dt$$
$$= \frac{A^2\sin\Delta wT}{2\Delta w}$$
$$\therefore \rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$$

（2） $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交 $\rho=0$ ，则 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT} = 0 \Rightarrow \Delta wT = \pi \Rightarrow \Delta w = \frac{\pi}{T}$

（3）二元通信系统的平均错误判决概率：

$$P_e = \int_{\alpha/2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dt = 1-\Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E/N_0}\right)$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial\Delta w} = \frac{\cos\Delta wT\cdot\Delta wT^2-\sin\Delta wT\cdot T}{(\Delta wT)^2}=0$$
$$\Rightarrow \Delta wT = \tan\Delta wT$$

要使 P_e 最小，则 ρ 应去相应的最小值 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$

$$-1\le\sin\Delta wT\le 0$$
$$\text{Q}\ \Delta wT = \tan\Delta wT$$
$$\therefore \Delta wT = 1.4302\pi$$
$$\Delta w = \frac{4.4931}{T}$$

（4）

可得（2）中的接收机的平均错误概率 $\overline{P_e} = 1-\Phi\left(\sqrt{E/N_0}\right)$，（3）中的接收机的平均错误概率 $\overline{P_e} = 1-\Phi\left(\sqrt{1.1275E/N_0}\right)$

3-24 三元通信系统：

$$H_0:\ x(t)=n(t)$$
$$H_1:\ x(t)=\sin\omega_0 t+n(t)$$
$$H_2:\ x(t)=2\sin\omega_0 t+n(t) \qquad 0\le t\le T$$

式中，$\{n(t)\}$ 是功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，ω_0 都是常数；已知 $P(H_i)=1/3\ (i=0,1,2)$。

（1）求最小错误概率准则下的判决规则。
（2）求三种假设下的条件正确判决概率。

解：

（1）令 $s_0(t)=0$，$s_1(t)=\sin\omega_0 t$，$s_2(t)=2\sin\omega_0 t$，$0\le t\le T$，

又有 $f(x(t)|H_i)=F\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T(x(t)-s_i(t))^2dt\right)$，则可得

$$\lambda_{ij}(x(t))=\frac{\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_i(t)\right]^2dt\right)}{\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_j(t)\right]^2dt\right)},i\ne j，\quad th=\frac{P(H_j)}{P(H_i)}=1，$$取对数可得

$G_{ij}=\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]x(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]^2dt$ 大于等于 0 时判为 H_i，否则判为 H_j。

由于 $s_0(t)=0, s_2(t)=2s_1(t)$，可设 $G=\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt$，

若判决为 H_0，则应有 $\begin{cases} G_{01}\ge 0 \\ G_{02}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G\le \frac{T}{4} \\ G\le \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow G\le \frac{T}{4}$，

若判决为 H_1，则应有 $\begin{cases} G_{10}\ge 0 \\ G_{12}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G\ge \frac{T}{4} \\ G\le \frac{3T}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{T}{4}\le G\le \frac{3T}{4}$，

若判决为 H_2，则应有 $\begin{cases} G_{20}\ge 0 \\ G_{21}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G\ge \frac{T}{2} \\ G\ge \frac{3T}{4} \end{cases} \Rightarrow G\ge \frac{3T}{4}$。

（2）$E(G|H_0)=E\left\{\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right\}=0$，$Var(G|H_0)=E\left\{\left[\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2\right\}=\frac{N_0 T}{4}$；

同理可得 $E(G|H_1)=\frac{T}{2}$，$Var(G|H_1)=\frac{N_0 T}{4}$，$E(G|H_2)=T$，$Var(G|H_2)=\frac{N_0 T}{4}$。

同时又可得 $f(G|H_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}Var(G|H_i)}\exp\left(-\frac{\left(G-E(G|H_i)\right)^2}{2Var^2(G|H_i)}\right)$，则三种假设下的条件正确判决概率为

$$P(D_0|H_0)=\int_{-\infty}^{\frac{T}{4}} f(G|H_0)dG=\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)；$$

$$P(D_1|H_1)=\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} f(G|H_1)dG=2\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)-1；$$

$$P(D_2|H_2)=\int_{\frac{3T}{4}}^{+\infty} f(G|H_2)dG=\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)。$$

3-27 已知白噪声背景下的确知信号

$$s(t)=\begin{cases} A & 0\le t\le T \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

（1）匹配滤波器的输出峰值信噪比。

（2）若不用匹配滤波器，而用一个简化的线性滤波器

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & 0\le t\le T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，以及使输出峰值信噪比最大所对应的α 值，并与（1）的匹配滤波器的性能作比较。

（3）若采用如下滤波器

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，并证明此时的信噪比总是小于等于（2）中的信噪比。

（4）若采用高斯滤波器

$$h(t)=\frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{(t-t_0)^2}{2\beta}\right\},\quad -\infty<t<\infty,\ t_0>0$$

（注意到当t_0 ? β时，上面的系统可以近似看作物理可实现的。）给出输出信噪比的表达式，并说明何时信噪比达到最大。

解：（1）$SNR_0=\frac{2E}{N_0}, E=A^2T$

$\therefore SNR_0=\frac{2A^2T}{N_0}$

（2）$SNR_0=\frac{\left|s_0(t_0)^2\right|}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(jw)\right|^2 dw}$

$$\begin{aligned} s_0(t)&=s(t)*h(t) \\ &=\int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &=\begin{cases} \frac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right), 0\le t\le T \\ \frac{A}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-T)}-e^{-\alpha T}\right), T<t\le 2T \end{cases} \end{aligned}$$

当$t=T$时，$s_0(t)$取得最大值$\frac{A}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T}\right)$。

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(jw)\right|^2 dw=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi h^2(t)dt=\frac{N_0}{4\alpha}\left(1-e^{-2\alpha T}\right)$

$\therefore SNR_0=\frac{4A^2}{\alpha N_0}g\frac{1-e^{-\alpha T}}{1+e^{-\alpha T}}$

由$\frac{dSNR_0}{d\alpha}=0$得$\alpha=0$。SNR_0取得最大值。

$$\lim_{\alpha \to 0} SNR_0 = \frac{2A^2T}{N_0}$$

当$\alpha = 0$时，与（1）输出的最大信噪比相等。
当$\alpha > 0$时，性能比（1）差。

（3）由（2）易得，$s_0(t)_{\max} = s_0(T) = \frac{A}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\left|H(jw)\right|^2 dw = \frac{N_0}{4\alpha}$$

$$\therefore SNR_{0\max} = \frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2$$

$$Q\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2 \le \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 + e^{-\alpha T}}$$

$$\therefore \frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2 \le \frac{4A^2}{\alpha N_0} g \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 + e^{-\alpha T}}$$

（4）由题意知

$$s_0(t) = \int_0^T A \frac{1}{\beta} e^{-\frac{(t-\tau-t_0)}{2\beta}} d\tau = A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[\Phi\left(\frac{t - t_0}{\sqrt{\beta}}\right) - \Phi\left(\frac{t - T - t_0}{\sqrt{\beta}}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^2} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\beta}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$s_0(t)_{\max} = s_0\left(\frac{T + 2t_0}{2}\right) = A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right) - 1\right]$$

$\therefore$当$t = t_0 + \frac{T}{2}$时，信噪比达到最大，为

$$SNR_0 = \frac{4A^2}{N_0}\sqrt{\pi\beta}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right) - 1\right]^2$$

第四次作业

3-30 考虑信号 $x(t)=1-\cos\omega_0 t \quad \left(0\le t\le \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 及功率谱密度为 $S_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$ 的噪声，

（1）设 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，用预白化方法求广义匹配滤波器。

（2）求最大输出信噪比。

解：

（1）对于 $S_n(\omega)=\frac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$， $S_n^+(\omega)=\frac{\omega_1}{\omega_1+j\omega}$， $S_n^-(\omega)=\frac{\omega_1}{\omega_1-j\omega}$，则预白化系统函数为

$H_1(\omega)=\frac{1}{S_n^+(\omega)}=\frac{\omega_1+j\omega}{\omega_1}$，匹配滤波器传输函数为 $H_2(\omega)=\frac{X^*(\omega)}{S_n^-(\omega)}e^{-j\omega T}$，则广义匹配滤波器的传输函数为 $H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)=\frac{X^*(\omega)}{S_n(\omega)}e^{-j\omega T}=\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)X^*(\omega)e^{-j\omega T}$，则

$$h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}+\frac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{\omega^2X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$$

$$=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}-\frac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{(j\omega)^2X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$$

$$=x^*(T-t)-\frac{1}{\omega_1^2}\frac{d^2}{d^2t}x^*(T-t)$$

$$=1-\cos\omega_0(T-t)-\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(T-t)$$

$$=1-\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0\left(\frac{2\pi}{\omega_0}-t\right)=1-\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(t)。$$

（2）广义匹配滤波器输出最大信噪比为 $SNR_{\max}=\frac{s_o^2(t)}{E\{n_o^2(t)\}}$，

又 $x(t)=1-\cos\omega_0 t$，则 $X(\omega)=2\pi\delta(\omega)-\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，可得

$$SNR_{o\max}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(\omega)|^2}{S_n(\omega)}d\omega=2\pi+\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}+\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}=\frac{\pi(3\omega_1^2+\omega_0^2)}{\omega_1^2}。$$

注：应改为接收时间为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为佳。

3-32 二元假设如下：

$$\begin{aligned} &H_0: \ x(t)=n(t) \\ &H_1: \ x(t)=s(t)+n(t) \end{aligned} \qquad 0\le t\le T$$

式中，$s(t)$是确知信号；$\{n(t)\}$是零均值，$R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，若采用纽曼−皮尔逊准则及 K−L 展开最佳检测，求：最佳检测器检测性能计算公式。

解：

由$R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，可得$S_n(\omega)=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\omega^2+\alpha^2}$，求解该有理核与本征函数$f_k(t)$的过程参考教材 P148 的例 3.6。

求解方程$\begin{cases} \dfrac{\gamma_k T}{2}\tan\dfrac{\gamma_k T}{2}=\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为偶数} \\ \dfrac{\gamma_k T}{2}\cot\dfrac{\gamma_k T}{2}=-\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为奇数} \end{cases}$，$k=1,2,\mathrm{L}$，可得$\gamma_k$的值，则$\lambda_k=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\gamma_k^2+\alpha^2}$。

由γ_k求解$\begin{cases} \alpha a_k-\gamma_k b_k=0 \\ a_k\sigma_0^2(\gamma_k\sin\gamma_k T-\alpha\cos\gamma_k T)-b_k\sigma_0^2(\alpha\sin\gamma_k T+\gamma_k\cos\gamma_k T)=0 \end{cases}$可得$a_k$与$b_k$的值，

从而由$f_k(t)=a_k\cos\gamma_k t+b_k\sin\gamma_k t$求得本征函数。

$x(t)$由 K−L 展开可得$x(t)=\sum\limits_k x_k f_k(t)$，系数$x_k=\int_0^T x(t)f_k^*(t)dt$，由本题的接收信号模型：

$s_0(t)=0$，$s_1(t)=s(t)$，则令$\eta_i(t)=\int_0^T s_i(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)d\tau$，显见$\eta_0(t)=0$。

判决检验统计量为$G=\int_0^T\left(x(t)-\frac{1}{2}s_1(t)\right)\eta_1(t)dt-\int_0^T\left(x(t)-\frac{1}{2}s_0(t)\right)\eta_0(t)dt$

$=\int_0^T\left(x(t)-\frac{1}{2}s(t)\right)\eta_1(t)dt$。

$$\begin{cases} E\{G|H_1\}=\frac{1}{2}\int_0^T s_1(t)\eta_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T[2s_1(t)-s_0(t)]\eta_0(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt \\ E\{G|H_0\}=-\frac{1}{2}\int_0^T s_0(t)\eta_0(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^T[2s_0(t)-s_1(t)]\eta_1(t)dt=-\frac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt \end{cases}$$

令$\sigma_G^2=\int_0^T\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]R_n^{-1}(t-x)[s_1(x)-s_0(x)]dtdx=\int_0^T\int_0^T s(t)R_n^{-1}(t-x)s(x)dtdx$，

可得$E\{G|H_1\}=\frac{1}{2}\sigma_G^2$，$E\{G|H_0\}=-\frac{1}{2}\sigma_G^2$，$Var\{G|H_1\}=Var\{G|H_0\}=\sigma_G^2$。

因此，G 的条件概率密度分别为

$$f(G|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G-\frac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right] \quad f(G|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G+\frac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right]$$

第一类错误概率

$$P(D_1|H_0)=\int_0^\infty f(G|H_0)dG=\int_{\frac{\sigma_G}{2}}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

第二类错误概率

$$P(D_0 \mid H_1)=\int_{\infty}^{0} f(G|H_1)dG=\int_{-\infty}^{-\frac{\sigma_G}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

综上，平均错误概率为

$$\bar{P}_e=\frac{1}{2}\left[P(D_1 \mid H_0)+P(D_0 \mid H_1)\right]=\int_{\frac{\sigma_G}{2}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$=1-\Phi\left(\frac{\sigma_G}{2}\right)$$

注：加条件 $P(H_0)=P(H_1)=\frac{1}{2}$。

3-33 在高斯白噪声中检测随机相位相位信号是经常遇到的一类问题。在雷达系统中，信号模型可以表示为

$$\begin{aligned} H_0: &\quad x(t)=n(t) \\ H_1: &\quad x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t) \end{aligned},\quad 0\le t\le T$$

其中 A 为接收信号的振幅；频率 ω_0 已知，且满足 $\omega_0 T=2n\pi$，n 为整数；θ 是 $[0,2\pi)$ 上均匀分布的随机相位；噪声 $n(t)$ 是零均值、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

（1）如果我们在对接收信号 $x(t)$ 作相关运算时，把信号的相位 θ 作为零来处理，那么实际接收信号中的相位不为零，求作为相位 θ 函数的检测概率 $P_D(\theta)$。并把结果同相位确实为零的结果进行比较。

（2）证明：无论信噪比多大，检测概率都有可能小于虚警概率，这取决于 θ 的实际取值。如果信号的相位 θ 不是随机的，而是非零未知的，甚至是非零已知的，把它作为零来处理，是否同样存在检测概率可能小于虚警概率的问题？

解：

（1）当把信号的相位 θ 作为零来处理时有：

$$\lambda(x(t))=\frac{f(x(t)\mid H_1)}{f(x(t)\mid H_0)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

即

$$\lambda(x(t))=\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left(A^2\sin^2 w_0 t-2Ax(t)\sin w_0 t\right)dt\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

化简得

$$G=\int_0^T Ax(t)\sin w_0 t dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th'=\frac{N_0}{2}\ln th+\frac{A^2T}{4}$$

当θ不为零时，为某一定值时，有

$$E(G|\theta,H_1)=E\left\{\int_0^T A\sin w_0 t\left[A\sin(w_0 t+\theta)+n(t)\right]dt\right\}=\frac{A^2T}{2}\cos\theta$$

$$\mathrm{var}(G|\theta,H_1)=\frac{A^2N_0T}{4}$$

检验统计量G在H_1假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$\therefore f(G|\theta,H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2N_0T}{4}}}\exp\left\{-\frac{\left(G-\frac{A^2T\cos\theta}{2}\right)^2}{2\times\frac{A^2N_0T}{4}}\right\}$$

$$\therefore P_D(\theta)=1-\int_{-\infty}^{th'}f(G|\theta,H_1)dG$$

$$=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2T}{2}-A^2T\cos\theta}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$$

$\theta=0$时，$P_D(\theta)$达到最大值，$\therefore P_D(\theta)=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th-\frac{A^2T}{2}}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$

$$\therefore P_D(\theta)\le P_D(0)$$

（2） $E(G|\theta,H_0)=0$

$$\mathrm{var}(G|\theta,H_0)=\frac{A^2N_0T}{4}$$

检验统计量G在H_0假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$(G|\theta,H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2N_0T}{4}}}\exp\left\{-\frac{G^2}{2\times\frac{A^2N_0T}{4}}\right\}$$

虚警概率为

$$P_{fa}=\int_{th'}^{\infty}f(G|\theta,H_0)dG=1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2T}{2}}{\sqrt{A^2N_0T}}\right)$$

$\therefore$当$\cos\theta<0$时，$P_{fa}>P_D(\theta)$

3-35 M元非相干频移键控问题。

$$H_0: x(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\theta_0)+n(t)$$
$$H_1: x(t)=A_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+n(t)$$
$$\vdots$$
$$H_{M-1}: x(t)=A_{M-1}\sin(\omega_{M-1} t+\theta_{M-1})+n(t)$$

若每种假设的先验概率和代价函数相等，相位服从$[0,2\pi)$上的均匀分布，$n(t)$是均值为零功率谱为$\frac{N_0}{2}$高斯白噪声。

（1）若振幅相等，即 $A_i = A_0 \quad i = 1,2\ldots,M-1$，以最小错误概率准则设计接收机。

（2）如果接收机中滤波器的输出是统计独立的，求错误概率。

解：

（1）条件概率密度函数 $f\left(x(t)\,|\,\theta, H_i\right) = F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right)\right]^2 dt\right\}$，

且最小错误概率准则下的判决规则为：$\frac{f\left(x(t)\,|\,H_i\right)}{f\left(x(t)\,|\,H_j\right)} \ge 1, j = 1,2,\mathrm{L}\; M-1, j \ne i$时，判为

H_i。

则

$$\frac{f\left(x(t)\,|\,H_i\right)}{f\left(x(t)\,|\,H_j\right)} = \frac{\int_0^{2\pi} f\left(x(t)\,|\,\theta, H_i\right) f\left(\theta_i\right) d\theta_i}{\int_0^{2\pi} f\left(x(t)\,|\,\theta, H_j\right) f\left(\theta_j\right) d\theta_j} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right)\right]^2 dt\right\} d\theta_i}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_j\sin\left(\omega_j t+\theta_j\right)\right]^2 dt\right\} d\theta_j}$$

由于 $A_i = A_0, i = 1,2,\mathrm{L}\; M-1$，且由于 $2\pi/\omega_c = T, \int_0^T \sin^2\left(\omega_c+\theta\right) dt \approx T/2$，统计量为

$$\frac{f\left(x(t)\,|\,H_i\right)}{f\left(x(t)\,|\,H_j\right)} = \frac{e^{-\frac{A_0^2 T}{2N_0}}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right) dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{e^{-\frac{A_0^2 T}{2N_0}}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_j t+\theta\right) dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right) dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_j t+\theta\right) dt\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}$$

将上式中的指数项中的正弦函数展开，

$$\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t+\theta\right) dt = \int_0^T x(t)\left[\sin\omega_i t\cos\theta + \cos\omega_i t\sin\theta\right] = \cos\theta\int_0^T x(t)\sin\omega_i t dt + \sin\theta\int_0^T x(t)\cos\omega_i t dt$$

令
$$\begin{cases} a_i = q_i\sin\theta_{0i} = \int_0^T x(t)\sin\left(\omega_i t\right) dt \\ b_i = q_i\cos\theta_{0i} = \int_0^T x(t)\cos\left(\omega_i t\right) dt \end{cases}$$

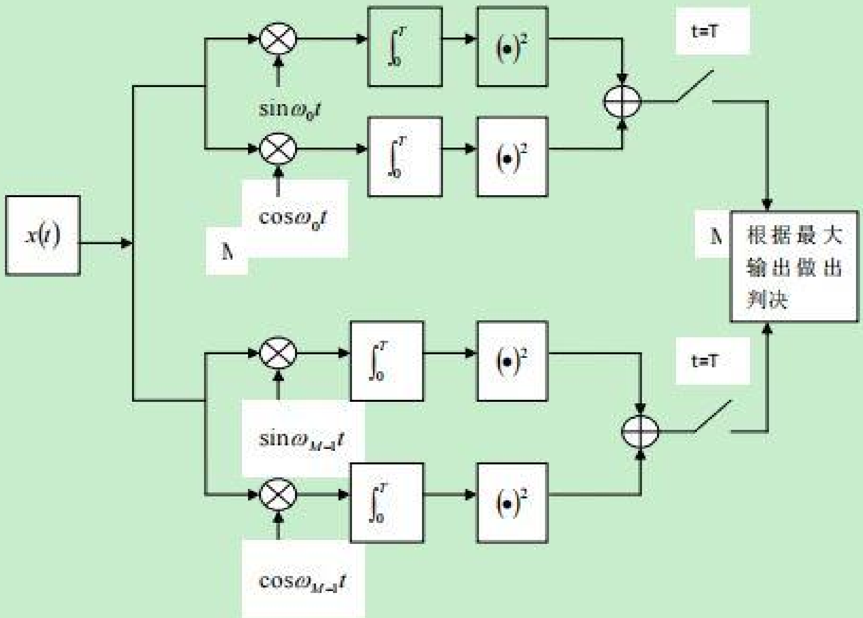
于是 $q_i^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_i t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_i t dt\right]^2 \ge 0$

检验统计量变为

$$\lambda_{ij} = \frac{f\left(x(t)\,|\,H_i\right)}{f\left(x(t)\,|\,H_j\right)} = \frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0 q_i}{N_0}\cos\left(\theta-\theta_{0i}\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0 q_j}{N_0}\cos\left(\theta-\theta_{0j}\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}} = \frac{I_0\left(\frac{2A_0 q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\frac{2A_0 q_j}{N_0}\right)}$$

由前述的判决规则，$\lambda_{ij} \geq 1, j = 1,2,\cdots M-1, j \neq i$，

可得 $I_0\left(\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\right) \geq I_0\left(\dfrac{2A_0 q_j}{N_0}\right)$，$j = 1,2,\cdots M-1, j \neq i$，又由于 $I_0(\bullet)$ 为单调递增的，所以最终的判决规则为 $q_i \geq q_j, j = 1,2,\cdots M-1, j \neq i$



（2）参考教材 P158-P161，可求得 $f(q_i \mid H_i)$ 与 $f(q_j \mid H_i)$，$i \neq j$，则有

$$P(D_i \mid q_i = g, H_i) = P(q_0 < g, q_1 < g, \cdots, q_{i-1} < g, q_{i+1} < g, \cdots, q_{M-1} < g \mid q_i = g, H_i)$$

$$= \left[P(q_j < g \mid q_i = g, H_i)\right]^{M-1}$$

$$= \left[\int_0^g f(q_j \mid H_i) dq_j\right]^{M-1}, (j \neq i)$$

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} P(D_i \mid H_i) P(H_i)$$

$$= 1 - P(D_i \mid H_i)$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} P(D_i \mid q_i = g, H_i) f(q_i = g \mid H_i) dg$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^g f(q_j \mid H_i) dq_j\right]^{M-1} f(q_i = g \mid H_i) dg, (j \neq i)$$

3-39 M 元假设如下：

$$H_i：\ x(t)=A_0\cos(\omega_i t+\theta_i)+n(t),0\le t\le T,i=1,2,\cdots,M$$

已知 $P(H_i)=1/M,i=1,2,\cdots,M$；$\theta_i,i=1,2,\cdots,M$ 是均匀分布统计独立随机变量；

$A_0,\omega_i,i=1,2,\cdots,M$ 是确定量。若采用最小错误概率准则，求判决规则。

解：$f(x(t)/H_i,\theta_i)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\cos(w_i t+\theta_i)\right]^2dt\right\}$

$\lambda(x(t))=\dfrac{\int_0^{2\pi}f(x(t)/H_i,\theta_i)\frac{d\theta_i}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}f(x(t)/H_j,\theta_j)\frac{d\theta_j}{2\pi}}\ge\dfrac{P(H_j)}{P(H_i)}=1$ 对 $\forall j\ne i$ 成立，则判为 H_i

$$\int_0^{2\pi}f(x(t)/H_i,\theta_i)\frac{d\theta_i}{2\pi}=F\exp\left\{-\frac{A_0^2T}{2N_0}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt\right\}\frac{d\theta_i}{2\pi}$$

其中最后一项中 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt=\cos\theta_i\int_0^T x(t)\cos w_i tdt-\sin\theta_i\int_0^T x(t)\sin w_i tdt$

令 $\begin{cases}\int_0^T x(t)\cos w_i tdt=q_i\cos\theta\\-\int_0^T x(t)\sin w_i tdt=q_i\sin\theta\end{cases}$ 则 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt=q_i\cos(\theta-\theta_i)$

其中 $q_i^2=\left[\int_0^T x(t)\cos w_i tdt\right]^2+\left[\int_0^T x(t)\sin w_i tdt\right]^2$

故 $\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t+\theta_i)dt\right\}\frac{d\theta_i}{2\pi}=I_0\left(\frac{2A_0q_i}{N_0}\right)$

则 $\lambda(x(t))=\dfrac{I_0\left(\frac{2A_0q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\frac{2A_0q_j}{N_0}\right)}\ge1$ 时判为 H_i

又 $I_0(x)$ 为单调递增函数，故判决规则可化为 $q_i\ge q_j$ 对 $\forall j\ne i$ 成立，判为 i。

第五次作业

5-2 若观测方程为 $x_i=s+n_i\ (i=1,2,\cdots,N)$，其中信号 $s\sim N(0,\sigma_s^2)$，噪声 $n_i\sim N(0,\sigma_n^2)(i=1,2,\cdots,N)$ 独立同分布，且信号与噪声满足 $E\{sn_i\}=0$。求 s 的最

大后验概率估计 $\hat{s}_{MAP}$。

解：

依题意，以信号 s 为条件的观测样本的概率密度函数为

$$f(x_1, \cdots, x_N \mid s) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

信号 s 的概率密度函数为 $f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)$

则由上面两式可得

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln f(x_1, \cdots, x_N \mid s) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln f(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} - \frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right]$$

$$= -\frac{s}{\sigma_s^2}$$

最大后验概率准则为 $\hat{\theta}_{MAP} = \max_{\theta} f(\theta \mid \mathbf{x})$，即 $\left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta \mid \mathbf{x})\right]\Big|_{\theta = \hat{\theta}_{MAP}} = 0$，又可表示为 $\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\mathbf{x} \mid \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\theta)\right]\Big|_{\theta = \hat{\theta}_{MAP}} = 0$，将之前结果带入其中可得 $\hat{s}_{MAP} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_s^2} \sum_{i=1}^{N} x_i$。

5-4 已知观测信号 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$ $(0 \le t \le T)$，式子中 $n(t)$ 是零均值，功率谱为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，θ 是在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，求 A 的最大似

然估计和估计量的均方误差。

解：

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$

$x(t)$的似然函数为：

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$

$$f(x \mid A,\theta) = F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 dt\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)A\cos(\omega_0 t + \theta)dt + A^2\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \theta)dt]\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt + \frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t + \theta)dt - \frac{A^2 T}{2N_0}\right\}$$

因为 $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}$， $0 \le \theta \le 2\pi$

所以

$$f(x \mid A) = \int_0^{2\pi} f(x \mid A,\theta) f(\theta) d\theta$$

$$= F \cdot \exp\{-\frac{A^2 T}{2N_0}\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt\right\} I_0(\frac{2Aq}{N_0})$$

其中

$$q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t dt\right]^2$$

$$\ln f(x \mid A) = \ln F - \frac{A^2 T}{2N_0} - \frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt + \ln I_0(\frac{2Aq}{N_0})$$

令 $\frac{\partial \ln f(x \mid A)}{\partial A} = 0 \Rightarrow -\frac{AT}{N_0} + \frac{\partial}{\partial A} I_0(\frac{2Aq}{N_0}) + 0$ （1）

假设 SNR, 即 $\frac{2Aq}{N_0}$ 足够大，则 $I_0(\frac{2Aq}{N_0}) \approx \frac{2Aq}{N_0}$

$(1) \Rightarrow -\frac{AT}{N_0} + \frac{2q}{N_0} = 0 \Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{2q}{T}$

由 $q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t dt\right]^2$

知 $f(q) = \frac{q}{\sigma_T^2}\exp(-\frac{1}{2\sigma_T^2}(q^2 + \frac{A^2 T^2}{4}))I_0(\frac{qAT}{2\sigma_T^2})$

所以 $E_q = \int_0^{+\infty} qf(q)dq$； $AT\left(\int_0^{+\infty}\frac{q^3}{\sigma_T^4}e^{-\frac{q^2}{2\sigma_T^2}}dq\right)e \xrightleftharpoons{x=\frac{q}{\sigma_T}} AT\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}AT$

所以 $E(\hat{A}_{ML}) = \frac{2}{T}E(q) = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{2}AT = A$ （无偏估计）

$\mathrm{var}(q) = \sigma_T^2 = \frac{N_0 T}{4}$， $\mathrm{var}(\hat{A}_{ML}) = \frac{4}{T^2}g\frac{N_0 T}{4} = \frac{N_0}{T}$

5-11. 假定已知信号

$$s_1(t) = a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \ldots + a_p\cos p\omega t$$

$$s_2(t) = b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \ldots + b_p\sin p\omega t$$

观测信号 $x(t) = s_1(t) + s_2(t) + n(t)$， $n(t)$ 是均值为 0、均方差为 1 的高斯白噪声。

1) 对 $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots b_p$ 作最小二乘估计。

2) 求 $\tilde{\theta}_{LS}$ 的概率密度函数

解：（1）

$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, \ldots b_p]^T$

$\mathbf{h}(t) = [\cos wt, \cos 2wt, \ldots \cos pwt, \sin wt, \ldots, \sin pwt]$

对于连续信号，

$\xi(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^T [x(t) - \mathbf{h}(t)\boldsymbol{\theta}]^2 dt$

假设观察时间为一个周期 $T = 2\pi / w$，则

$\dfrac{\partial \xi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \int_0^T -2\mathbf{h}^T(t)[x(t) - \mathbf{h}(t)\boldsymbol{\theta}]dt$

令 $\dfrac{\partial \xi(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$，得 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt = \int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$

又 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt = diag(\dfrac{\pi}{w}, \dfrac{\pi}{w}, \ldots, \dfrac{\pi}{w})$

$\therefore \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} = \dfrac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt$

（2）由于 $x(t) = \mathbf{h}(t) \cdot \boldsymbol{\theta} + n(t)$， $n(t)$ 服从高斯分布，而 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 是 $\mathbf{h}^T(t)x(t)$ 的积分，

故 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 服从多维高斯分布。

由于

$$E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = E[\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt] = E[\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta} + n(t))dt]$$

$$= \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}dt + \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)E(n(t))dt$$

$$= \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt\cdot\boldsymbol{\theta}$$

$$= \boldsymbol{\theta}$$

故$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$是无偏估计，$n(t)$项与$\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}$相互独立，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$的协方差矩阵为

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})^T]$$

$$= E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}^T] - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= E\{\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta} + n(t))dt\cdot\frac{w}{\pi}\int_0^T (\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta} + n(t))^T\mathbf{h}(t)dt\} - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 E[\int_0^T \mathbf{h}^T(t)n^2(t)\mathbf{h}(t)dt]$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 \int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)E(n^2(t))dt$$

由$\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt = diag(\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},\ldots,\frac{\pi}{w})$，可得

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = diag(\frac{w}{\pi},\frac{w}{\pi},\ldots,\frac{w}{\pi}), C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1} = (\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},\ldots,\frac{\pi}{w})$$

则

$$f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = \frac{1}{(2\pi)^p(w/\pi)^p}\exp[-\frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})^T C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} - \boldsymbol{\theta})}{2}]$$

5-12 在乘性噪声和加性噪声中观测随机参数s为

$$x = \alpha_1 s + \alpha_2$$

其中

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left\{-\frac{(s - m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\}$$

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(\alpha_2 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(\alpha_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

求 s 的线性最小均方误差估计，并把结果推广到 N 次独立观测样本。

解：（1）对单次观察样本

$$\hat{s}_{LMS}=E\{s\}+\operatorname{cov}\{s,x\}\operatorname{cov}^{-1}\{x,x\}\left[x-E\{x\}\right]$$

其中，

$$E\{s\}=m_s,E\{x\}=E\{\alpha_1 s+\alpha_2\}=m_1m_s+m_2$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\{s,x\}&=E\{(s-E\{s\})(x-E\{x\})\}\\&=E\{sx\}-E\{s\}E\{x\}=m_1\sigma_s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\{x,x\}&=E\{x^2\}-E^2\{x\}\\&=m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2\end{aligned}$$

所以，得到

$$\hat{s}_{LMS}=m_s+\frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}\left(x-m_1m_s-m_2\right);$$

（2） 对 N 次独立观察样本

$$\hat{s}_{LMS}=E\{s\}+\operatorname{cov}\{s,\mathbf{x}\}\operatorname{cov}^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}\left[\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right],\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_N\right]^T$$

其中，

$$E\{s\}=m_s,E\{\mathbf{x}\}=(m_1m_s+m_2)[1,1,\cdots,1]^T$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\{s,\mathbf{x}\}&=E\left\{(s-E\{s\})(\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\})^T\right\}\\&=E\{s\mathbf{x}^T\}-E\{s\}E\{\mathbf{x}^T\}=m_1\sigma_s^2[1,1,\cdots,1]\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}=E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}-E\{\mathbf{x}\}E^T\{\mathbf{x}\}=(c_{ij})_{N\times N}$$

$$c_{ij}=\begin{cases}m_s^2\sigma_1^2+m_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2, & i=j\\ m_1^2\sigma_s^2, & i\neq j\end{cases}$$

所以，有

$$\begin{aligned}\hat{s}_{LMS}&=m_s+m_1\sigma_s^2[1,1,\cdots,1]\cdot(c_{ij})_{N\times N}^{-1}\cdot\left[\mathbf{x}-(m_1m_s+m_2)[1,1,\cdots,1]^T\right]\\&=m_s-\frac{Nm_1\sigma_s^2(m_1m_s+m_2)}{m_s^2\sigma_1^2+Nm_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}+\frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2+Nm_1^2\sigma_s^2+\sigma_1^2\sigma_s^2+\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{N}x_i\end{aligned}$$

5-18 若观测方程为

$$x_i = s + n_i,\quad i = 1,2,\ldots,N$$

已知 n_i，$i = 1,2,\ldots,N$ 是均值为零，方差为 σ_n^2 的彼此独立高斯噪声，s 是均值为 0，方差为 σ_s^2 的高斯随机变量。

（1） 证明 $\hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS} = \dfrac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$；

（2） 判断估计量是否为无偏估计量

（3） 求估计的方差，判断估计量是否为有效估计量

解：

（1）$\hat{s}_{MAP}$ 和 $\hat{s}_{MS}$ 的求法分别见 P228 和 P230，可得

$$\hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS} = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

（2）由于 $E(\hat{s}) = \dfrac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}\left[\dfrac{1}{N}E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\right] = 0$

而 s 的均值也为零，故有 $E(\hat{s}) = E(s) = 0$，所以（1）中估计量为无偏估计量。

（3）依据 Cramer-Rao 规则，克拉美罗界给出了无偏估计的均方误差下界，而对随机单参量 s 而言，只需满足如下公式即可：

$$\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x}, s)}{\partial s} = K(\hat{s} - s),\quad \hat{s} = \hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS}$$

而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x}, s)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\ln f(x_1,\cdots,x_N \mid s) + \frac{\partial}{\partial s}\ln f(s) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{(2\pi\sigma_s^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right\}\right]\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{(2\pi\sigma_s^2)^{1/2}} - \frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)}{\sigma_n^2} - \frac{s}{\sigma_s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sigma_n^2} - \frac{N\sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2\sigma_s^2}s
\end{aligned}$$

$$\hat{s} - s = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) - s = \frac{\sigma_S^2}{N\sigma_S^2 + \sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N} x_i - s$$

所以 $\dfrac{\partial \ln f(\boldsymbol{x}, s)}{\partial s} = \dfrac{N\sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2}(\hat{s} - s)$，为有效估计。

第六次作业

6－1 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的自相关函数分别为 $R_s(\tau)=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$ 和 $R_n(\tau)=\delta(\tau)$．求对 $s(t)$ 进行估计的非因果维纳滤波器，并计算最小均方误差．

6-1 $S_s(s)=\frac{1}{1-s^2}$ $S_n(s)=1$ $S_x(s)=S_s(s)+S_n(s)=\frac{2-s^2}{1-s^2}$

$H(s)=\frac{S_s(s)}{S_x(s)} \Rightarrow H(s)=\frac{1}{2-s^2}$

6－2 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中 $x(t)$ 仅在 $-\infty$ 到当前时刻有值，信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的功率谱密度函数分别为 $S_s(\omega)=\frac{2a}{-\omega^2+a^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$．求对 $s(t+\alpha)(\alpha>0)$ 进行估计的维纳滤波器．

6-2. 因果. $S_x(\omega)=S_s(\omega)+S_n(\omega)=\frac{a^2+2a-s^2}{a^2-s^2}=\frac{(\sqrt{2a+a^2}+s)(\sqrt{2a+a^2}-s)}{(a+s)(a-s)}=\frac{\sqrt{2a+a^2}+s}{a+s}\cdot\frac{\sqrt{2a+a^2}-s}{a-s}$

$\frac{S_{sx}(s)}{S_x^-(s)}=\frac{2a}{(a+s)(a-s)}\cdot\frac{a-s}{\sqrt{2a+a^2}-s}=\frac{2a}{(a+s)(\sqrt{2a+a^2}-s)}=\frac{A}{a+s}+\frac{B}{\sqrt{2a+a^2}-s}$ $\left(A=B=\frac{2a}{a+\sqrt{a^2+2a}}\right)$

$H(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}\left[\frac{S_{sx}(s)e^{\alpha s}}{S_x^-(s)}\right]^+$

代入得. $H(s)=\frac{a+s}{\sqrt{2a+a^2}+s}\cdot\frac{A}{a+s}e^{\alpha s}=\frac{2a\cdot e^{\alpha s}}{(a+\sqrt{a^2+2a})(\sqrt{a^2+2a}+s)}$

6－3 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关且均值均为0，它们的自相关函数分别为 $R_s(\tau)=e^{-\alpha\tau}(\alpha>0)$ 和 $R_n(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(t)$．求对 $s(t)$ 进行最优估计的物理不可实现滤波器的冲激响应和估计的均方误差．

解：物理不可实现（非因果）的连续维纳滤波器的频率响应为（6.3.15）式

$$H(j\omega)=\frac{S_s(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_s(\omega)+S_n(\omega)}$$

根据傅里叶变换对 $e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{\omega^2+a^2}$，可以计算出

$$S_s(\omega)=\frac{2a}{\omega^2+a^2},\quad S_n(\omega)=\frac{N_0}{2}$$

所以

$$H(j\omega)=\frac{\frac{2a}{\omega^2+a^2}}{\frac{2a}{\omega^2+a^2}+\frac{N_0}{2}}=\frac{4a}{N_0\omega^2+N_0a^2+4a}=\frac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}}\frac{2\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}}{\omega^2+a^2+\frac{4a}{N_0}}\leftrightarrow\frac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}}e^{-\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}|t|}$$

作傅里叶反变换得到单位冲激响应

$$h(\tau)=\frac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}}e^{-\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}|\tau|}$$

最小均方误差为

$$E\{e^2(t)\}_{\min}=R_s(0)-\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_s(\lambda)d\lambda$$

6-5 观测信号为$x(t)=s(t)+n(t)$，$x(t)$仅在负无穷到当前时刻有值，

（1）若信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的功率谱密度分别为 $S_S(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$和$S_n(\omega)=1$. 求对$\dfrac{ds(t)}{dt}$进行估计的维纳滤波器。

（2）请问，$\dfrac{ds(t)}{dt}=\dfrac{d\hat{s}(t)}{dt}$是否成立？

解：（1）由题意知，$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$，$h(t)$为物理可实现维纳滤波器

$$H(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^+$$

由于$g(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$

$$\begin{aligned}R_{gx}(t_1-t_2)&=E\left[g(t_1)x(t_2)\right]\\&=\frac{d}{dt_1}E\left[s(t_1)x(t_2)\right]\\&=\frac{d}{dt_1}E\left[s(t_1)s(t_2)+s(t_1)n(t_2)\right]\\&=\frac{d}{dt_1}R_s(t_1-t_2)\\&=\frac{d}{d\tau}R_s(\tau)\end{aligned}$$

做拉氏变换得：

$$S_{gx}(s)=sS_s(s)=\frac{s}{1-s^2}$$

$$S_x(s)=\frac{1}{1-s^2}+1=\frac{(\sqrt{2}-s)(\sqrt{2}+s)}{1-s^2}$$

$$\text{令}H_1(s)=\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}=\frac{s}{(\sqrt{2}-s)(s+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{\sqrt{2}-s}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{s+1}$$

$$\text{则}H_1^+(s)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{s+1}$$

$$\text{又}\because S_x^+(s)=\frac{(\sqrt{2}+s)}{(1+s)}$$

$$\therefore H(s)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$

$$h(t)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}U(t)$$

(2)由于$G(s)=sS(s),\hat{G}(s)=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\dfrac{1}{s+\sqrt{2}}X(s)$, $X(s)$中包含噪声频谱,故其应该是一个随机变量,而$\dfrac{ds(t)}{dt}$应该为一确定波形,故两者不能完全相同.

6-9 考虑离散情况下的维纳滤波.已知观测信号为$x(k)=s(k)+n(k)$,信号$s(k)$及噪声$n(k)$均为广义平稳序列，且$s(k)$和$n(k)$互不相关，它们的离散功率谱密度函数分别为$P_s(z)=\dfrac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$和$P_n(z)=1$・求物理可突现及物理不可实现的维纳滤波器.

解:（不用计算最小均方误差）

$$P_x(z)=P_s(z)+P_n(z)=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}+1$$
$$=\frac{1.6\times(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

（1） 对于物理可实现维纳滤波器

$$P_x^+(z)=\frac{1.6\times(1-0.5z^{-1})}{1-0.8z^{-1}},\quad P_x^-(z)=\frac{1-0.5z}{1-0.8z}$$

$$\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}=\frac{P_s(z)}{P_x^-(z)}=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}=\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}+\frac{0.6}{(1-0.5z)}$$

可得$\left[\dfrac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+=\dfrac{0.6}{1-0.8z^{-1}}$，得到

$$H(z)=\frac{1}{P_x^+(z)}\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6\times(1-0.5z^{-1})}\times\frac{0.6}{1-0.8z^{-1}}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

（2） 对于物理不可实现维纳滤波器

$$H(z)=\frac{P_{gx}(z)}{P_s(z)+P_n(z)}=\frac{P_s(z)}{P_s(z)+P_n(z)}$$
$$=\frac{\dfrac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}}{\dfrac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}+1}=\frac{0.225}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$