1.随机试验E其样本空间Ω以及参数集T,若$\forall\omega\in\Omega$都可确定一个关于T的函数$X(t,\omega)$则称$X(t,\omega)$为**随机过程**$\{X(t),t\in T\}$.

固定一次实验取$\omega_0\in\Omega,X(t,\omega_0)$是$t$的函数 一条样本路径

固定时间$t=t_0,X(t_0,\omega)$是随机变量 随随机试验结果变化

随机过程在t取的值称状态 状态全体称状态空间

2.随机过程$\{X(t),t\in T\}$ **一维**分布$F_t(x)=P\{X(t)\le x\}$ 均值函数$\mu_X(t)=E[X(t)]$ 方差函数$Var[X(t)]$; **二维**联合$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2\}$ 自相关函数$r_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$ 协方差函数$R_X(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))=E\{(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))\}$ 显然自相关和协方差函数都**对称且非负定**

$$Var\left(\sum_{j=1}^n b_jX(t_j)\right)=Cov\left(\sum_{i=1}^n b_iX(t_i),\sum_{j=1}^n b_jX(t_j)\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_ib_jR_X(t_i,t_j)\ge 0$$

有限维分布$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\dots,X(t_n)\le x_n\}$

对称性(与变量$X(t_1),\dots,X(t_n)$排序无关)

相容性$F_{t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_n}(x_1,\dots,x_m,\infty,\dots,\infty)=F_{t_1,\dots,t_m}(x_1,\dots,x_m)$

相容性基本定理(一族给定的分布函数有对称性和相容性保证存在对应的随机过程)

3.**独立增量过程**:$X(t_2)-X(t_1),X(t_3)-X(t_2),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立

4.**条件期望** $E(X|Y=y)=\int xf(x|y)dx=\int xdF(x|y)$与$y$有关

若X和Y独立 $E(X|Y)=EX$; $EX=\int E(X|Y)dF_Y(y)=E[E(X|Y)]$; $E[\phi(X,Y)|Y]=E[\phi(X,y)|Y=y]$

5.**矩母函数**$g(t)=E(\exp\{tX\})=\int\exp\{tx\}dF(x)$存在则确定分布$E[X^n]=g^{(n)}(0),n\ge1$; $g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)$;**生成函数**$\phi_X(s)=E(s^X)$,若$P(X=k)=p_k,\phi_X(s)=\sum_{k=0}^\infty p_ks^k$是幂级数 $p_k=\frac{d^k}{k!ds^k}\phi_X(s)|_{s=0}$, $E\{X(X-1)\dots(X-r+1)\}=\frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)|_{s=1}$, $\phi_{X+Y}(s)=\phi_X(s)\phi_Y(s)$

6.$\{X_n,n\ge1\}$ $\exists X$ $\forall\epsilon>0$ 若$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\ge\epsilon)=0$ 则**依概率**收敛$X_n\xrightarrow{p}X$; 若$P\left(\lim_{n\to\infty}(X_n-X)=0\right)=1$ 则**几乎必然**收敛 $X_n\to X,a.s.$; 若$\lim_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$ 则**均方**收敛 $X_n\xrightarrow{L_2}X$

7.**Poisson 过程**: Def1 整数值随机过程$\{N(t),t\ge0\}$是独立增量过程$N(0)=0$ 且$\forall t>0,s\ge0,N(s+t)-N(s)\sim P(\lambda t)$即

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k\exp\{-\lambda t\}}{k!},k=0,1,\dots$$

$EN(t)=Var[N(t)]=\lambda t$ 平稳独立增量性;Def2 $\forall n=1,2,\dots$ $0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n$ $N(t_1)-N(t_0)$, $N(t_2)-N(t_1),\dots,N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立;$\forall t,h>0$ $N(t+h)-N(t)\sim h$与t无关;$\exists\lambda>0,h\downarrow0,P\{N(t+h)-N(t)\ge1\}=\lambda h+o(h)$;$h\downarrow0,P\{N(t+h)-N(t)\ge2\}=o(h)$

·第$n-1$次与第n次事件**间隔时间**$X_n,n=1,2,\dots\sim Exp(\lambda)$,i.i.d. $W_n=\sum_{i=1}^nX_i$为第n次事件的**到达/等待时间**$\sim\Gamma(n,\lambda)$,$\{W_n\le t\}=\{N(t)\ge n\}$ ($\Gamma(\alpha,\lambda)$密度函数$f(x;\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I(x\ge0)$)

·$N(t)=n$下 $f_{W_1,\dots,W_n|N(t)=n}(w_1,\dots,w_n|n)=n!/t^n,0<w_1<\dots<w_n\le t$与$(0,t]$上**均匀分布随机样本$U_i$的次序统计量**$U_{(i)}$的联合密度一样,其中$W_k/t|N(t)=n\sim Beta(k,n-k+1)$

·**非齐次 Poisson 过程**即$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$, 则

$$P\{N(t+h)-N(t)=k\}=\frac{\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k\exp\left(-\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)}{k!},k=0,1,\dots$$

·**更新过程** $N(t)=\max\{n:W_n\le t\},W_0=0,W_n=\sum X_i,X_i,i.i.d.,F(x)$有$P\{N(t)=n\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t),EN(t)=\sum_{n=1}^\infty F^{(n)}(t)$,$n$重卷积

8.**Markov 性**:$\forall i_0,i_1,\dots,i_{n-1},i,j;n>0,\{X_n,n\ge0\}$有

$$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$$

·**一步转移概率**$P_{ij}^{n,n+1}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$若与$n$无关称该马氏链有**平稳转移概率**$P_{ij}$,**是时齐 Markov 链**,总有$P_{ij}\ge0,\sum_jP_{ij}=1$ 可列出$\boldsymbol{P}=(P_{ij})$为**转移概率矩阵,**第$i+1$行对应$P_{i\cdot}$ 行和为 1

·马氏链由初始状态/初始的概率分布和转移概率矩阵完全确定,因为$P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\dots,X_n=i_n\}=P\{X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}P_{i_{n-1},i_n}=p_{i_0}P_{i_0,i_1}\dots P_{i_{n-1},i_n}$

·n步转移概率$P_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j|X_m=i\}$对应$\boldsymbol{P}^{(n)}=\left(P_{ij}^{(n)}\right)=\boldsymbol{P}^n$即$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}P_{kj}^{(n-1)}$约定$P_{ii}^{(0)}=1,j\ne0$时有$P_{ij}^{(0)}=0$;一般地,$\boldsymbol{P}^{(m+n)}=\boldsymbol{P}^{(n)}\boldsymbol{P}^{(m)}$且$P_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=0}^\infty P_{ik}^{(n)}P_{kj}^{(m)}$

·若$P_{ij}^{(n)}>0$则j是从i**可达**的,$i\to j$;**互达**是等价关系$i\leftrightarrow j$;若不互达则三选一:①$\forall n\ge0,P_{ij}^{(n)}=0$②$\forall n\ge0,P_{ji}^{(n)}=0$③前两种都成立

·两状态互达则处同一类中,马氏链所有状态由互达分割成**等价类**且两类要么互不相交要么完全重合,如果在此意义下一个马氏链所有状态都是同一类称**不可约**,即不可约的过程每个状态互达

·使$P_{ii}^{(n)}>0$的所有$n(\ge1)$的最大公约数称状态i的**周期**$d(i)$ 若$\forall n\ge1,P_{ii}^{(n)}=0$约定$d(i)=\infty$;$d(i)=1$时称状态$i$为**非周期**的;因此若$d(i)\nmid n$必有$P_{ii}^{(n)}=0$

·若$i\leftrightarrow j$有$d(i)=d(j)$;若$d(i)$存在则$\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,P_{ii}^{(nd(i))}>0$;若$P_{ji}^{(m)}>0$则$\exists N\in\mathbb{N},\forall n\ge N,P_{ji}^{(m+nd(i))}>0$

·若$\boldsymbol{P}$为不可约非周期有限状态马氏链的转移概率阵则$\exists N,\forall n\ge N,\boldsymbol{P}^{(n)}$所有元素都非零 称正则的,$\pi_j=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}$总存在,注意与$i$无关且构成一概率分布满足$\pi_j>0,\sum_j\pi_j=1$

·$f_{ij}^{(n)}=P\{$从i出发第n步转移首次到达$j\}$ $f_{ij}^{(0)}=0$ $f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\ne j,k=1,\dots,n-1|X_0=i\}$ 约定$f_{ii}^{(0)}=0$ 记$f_{ij}=\sum_{n=1}^\infty f_{ij}^{(n)}$ $i\ne j$时$i\to j\Leftrightarrow f_{ij}>0$

·若$f_{ii}=1$称i**常返** 非常返称**瞬过**;i常返$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}=\infty$ i瞬过$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}<\infty$;$i$常返且$i\leftrightarrow j$则$j$常返

·常返时$T_i=\min\{n\ge1:X_n=i\}$ $P\{T_i=n|X_0=i\}=f_{ii}^{(n)}P,n=1,2,\dots$ **平均常返时**$\mu_i=ET_i=\sum_{n=1}^\infty nf_{ii}^{(n)}$ $\mu_i=\infty$**零常返** $\mu_i<\infty$**正常返 仅在可列无穷多个状态才可能有零常返的状态,有限多个状态时$\boldsymbol{\mu_i}$总有限**

·记$\boldsymbol{Q}=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^{(n)}=\left(\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}\right)$ 若$\pi=\{\pi_i=\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)},i=1,2,\dots\}$存在且$\sum_i\pi_iP_{ij}=1$则称为平稳分布 且有$\pi_i=1/\mu_i$

·若i瞬过或零常返$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=0$ 若i常返且$d(i)=d$,$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(nd)}=d/\mu_i$ 非周期正常返(遍历)$d=1,\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=1/\mu_i$

·若i遍历则$\forall j\to i,\lim_{n\to\infty}P_{ji}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=1/\mu_i$

·**平稳分布存在定理** C^+为马氏链中全体正常返状态的集合 平稳分布不存在$\Leftrightarrow C^+=\Phi$,平稳分布唯一存在$\Leftrightarrow$基本正常返闭集唯一即C^+,有限状态马氏链总存在平稳分布,有限不可约非周期马氏链存在唯一平稳分布

9. **严格平稳**:$(X(t_1+h),\dots,X(t_n+h))\stackrel{d}{=}(X(t_1),\dots,X(t_n))$

宽平稳:①二阶矩存在②$EX(t)=m$③$R_X(t,s)\propto t-s$

互不包含 严平稳不一定有二阶矩 但若二阶矩存在则必宽平稳

对 **Gauss 过程**($G(t),\forall k\in\mathbb{N},t_1\le t_2\le\dots\le t_k,(G(t_1),\dots,G(t_k))$联合分布为$k$维正态分布)两种平稳定义等价 因分布完全由协方差矩阵和均值向量确定且仅与二阶矩有关

对(宽)**平稳过程**$X(t)$若$\exists\kappa>0,X(t+\kappa)=X(t)$称**周期平稳过程**其协方差函数是周期函数$R(\tau+\kappa)=E(X(t+\tau+\kappa)-m)(X(t)-m)=E(X(t+\tau)-m)(X(t)-m)=R(\tau)$

宽平稳过程$X(t)\in\mathbb{C}$称复平稳过程,协方差函数$E(X(t)-m)\overline{(X(s)-m)}$

·**均值遍历性** 平稳过程$X(t)$; 平稳序列$X(k)$

Def $\bar{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\overset{L_2}{=}m$, $\bar{X}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)\overset{L_2}{=}m$

Thm1 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau=0$, $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0$

Thm2 $\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty$, $R(\tau)\to 0(\tau\to\infty)$

·**协方差函数遍历性**

Def $\hat{R}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt\overset{L_2}{=}R(\tau)$

$\hat{R}(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(X(k+\tau)-\hat{m}_N)(X(k)-\hat{m}_N)\overset{L_2}{=}R(\tau)$ $\hat{m}_N=\sum X(k)/(2N+1)$

Thm $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-R^2(\tau))d\tau_1=0, B(\tau_1)=EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)$

Gauss 过程$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0$

·平稳过程协方差函数$R(\tau)$有①对称$R(-\tau)=R(\tau)$(复平稳$R(-\tau)=-R(\tau)$) ②有界$|R(\tau)|\le R(0)$ ③非负定$\forall t_n,a_n,n=1,\dots,N,\sum_n^N\sum_m^N a_n a_m R(t_n-t_m)\ge 0$ ④定义$X'(t)$:若$\exists Y(t),\lim_{h\to 0}E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2=0,X'(t)=Y(t)$

其存在⇔$\lim_{h\to 0,k\to 0}\frac{R(0)-R(h)-R(k)+R(h-k)}{hk}$存在有限;

$Cov\left(X^{(n)}(t),X^{(n)}(t+\tau)\right)=(-1)^n R^{(2n)}(\tau)$

·假定$EX(t)=0,\int|R(\tau)|d\tau<\infty$有**功率谱密度**$S(\omega)=\int R(\tau)e^{-j} d\tau,R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$;$S(\omega)=2\int_0^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$;序列$S(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}R(\tau),R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$

例 时刻t时易感人群大小$X(t)$ 时刻$t-1$到t期间感染人数$Y(t)$ 假定易感人群被传染的概率为p 则有$X(t)=X(t+1)+Y(t+1)$且在$j\le i$有$P(X(t+1)=j|X(t)=i)=C_i^{i-j}p^{i-j}(1-p)^j$

例 **随机和** 记$X_1,X_2,\dots$为一串独立同分布的随机变量 N为非负整数值随机变量且与X序列独立 Y为随机和$\sum_{i=1}^{N}X_i$ 矩母函数$g_Y(t)=E\{E[\exp\{tY\}|N]\}=E[(g_X(t))^N]$(即$g_N(t)$中$e^t$替换为$g_X(t)$)则求导有$EY=ENEX,EY^2=ENVarX+EN^2E^2X,VarY=ENVarX+E^2XVarN$,

生成函数$\phi_Y(s)=E\{E[s^Y|N]\}=E\left\{(\phi_X(s))^N\right\}=\phi_N(\phi_X(s))$

例 顾客依速率为λ的 Poisson 过程到达车站 若火车在时刻t离站 有每个顾客到达时间W_i等待时间$t-W_i$共$N(t)$个顾客在$(0,t]$内顾客的平均总等待时间是 $E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)]=E\{E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-W_i)|N(t)=n]\}=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{\lambda t^2}{2}$

例 $p,q,r>0,p+q+r=1$三状态的马氏链$\{X_n\}$有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0\\p&q&r\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求从状态1开始被0(或2)吸收的概率和平均被吸收的时间. 令$T=\{$进入吸收态的时间$\}=\min\{n\ge 0|X_n=0$或$X_n=2\}$,$u=P\{X_T=0|X_0=1\},v=E\{T|X_0=1\}$ 利用全概率公式 $u=\sum_{k=0}^{2}P\{X_T=0|X_0=1,X_1=k\}P\{X_1=k|X_0=1\}=p+qu$ $v=\sum_{k=0}^{2}E\{T|X_0=1,X_1=k\}P(X_1=k|X_0=1\}=p+(1+v)q+r$, 得 $u=\frac{p}{p+r},v=\frac{1}{1-q}$

例 已知$S(\omega)=\frac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+4}$,由公式$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$及留数定理分别对$\tau\ge 0,\tau<0$得$R(\tau)=\frac{1}{6}(e^{-|\tau|}+e^{-2|\tau|})$

例 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega=\delta(\tau),\int\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=1,\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\tau=2\pi\delta(\omega)$

例 $N(t),t\ge 0$是参数λ的 Poisson 过程 C_i独立同分布 且与$N(t)$独立 则$E[\sum_{i=1}^{N(t)}C_i e^{-\alpha W_i}|N(t)=n]=E(C_i)E(\sum_i^n e^{-\alpha U_i})$

例 某种粒子按强度为λ的 Poisson 过程 每个粒子使计数器关闭时间r 若一个粒子到达计数器未关闭则被记录 $(t,t+r]$中记录一个粒子的概率

$P=E(\int_0^r P(A,W_{N(t)+1}=t+x)f_{W_{N(t)+1}}(t+x)dx|N(t)=n)=\int_0^r\sum_{n=0}^{\infty}Pfdx,P=P(X_{n+1}\ge r),f\sim\Gamma(n+1,\lambda),P=\lambda re^{-\lambda}$

附 常用随机变量的分布、矩母函数、均值、方差

二项分布$B(n,p),0\le p\le 1$ $P(X=x)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x},x=0,1,\dots,n$ $g(t)=(1-p+pe^t)^n$ $EX=np$ $Var(X)=np(1-p)$

Poisson 分布 $P(\lambda),\lambda>0$ $P(X=x)=e^{-\lambda}\lambda^x/x!,x=0,1,\dots$ $g(t)=\exp\{\lambda(e^t-1)\}$ $EX=\lambda$ $Var(X)=\lambda$

几何分布$Ge(p),0\le p\le 1$ $P(X=x)=p(1-p)^{x-1},x=1,2,\dots$ $g(t)=pe^t/(1-(1-p)e^t)$ $EX=1/p$ $Var(X)=(1-p)/p^2$

负二项分布$NB(r,p),0\le p\le 1$ $P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r},x=r,r+1,\dots$ $g(t)=\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ $EX=\frac{r}{p}$ $Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

广义二项式定理$(x+y)^\alpha=\sum_n^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n y^{\alpha-n}$

均匀分布$U(a,b)$ $f(x)=1/(b-a)I(a,b)$ $g(t)=(e^{ta}-e^{tb})/(t(a-b))$ $EX=(a+b)/2$ $Var(X)=(b-a)^2/12$

指数分布$Exp(\lambda),\lambda>0$ $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}I[0,\infty)$ $g(t)=\lambda/(\lambda-t)$ $EX=1/\lambda$ $Var(X)=1/\lambda^2$

Gamma 分布$\Gamma(n,\lambda),\lambda>0$ $f(x)=\lambda e^{-x}(\lambda x)^{n-1}/(n-1)!\,I[0,\infty)$ $g(t)=(\lambda/(\lambda-t))^n$ $EX=n/\lambda$ $Var(X)=n/\lambda^2$

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $g(t)=\exp\{\mu t+\sigma^2t^2/2\}$ $EX=\mu$ $Var(X)=\sigma^2$

Beta 分布$B(a,b),a,b>0$ $f(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}I(0,1)/B(a,b)$ $EX=a/(a+b)$ $Var(X)=ab/((a+b)^2(a+b+1))$

$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$

$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ $\Gamma(n)=(n-1)!$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$Res[f(x),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)$$