江市

答题时不要

中国科学技术大学2011 - 2012 学年第一学期《单变量微积分》期中考试试卷

题号	_	 =	四	五	六	总分
得分						
复评人						

得分	评卷人		

一、求下列极限(每题6分,共24分)

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

(2)
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

(3)
$$\exists \exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) \tan x}{e^{2x} - 1} = 3$$
, $\exists \lim_{x \to 0} f(x)$

(4) 设函数f(x)在a点处二阶可导,求

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 3f(a) + 2f(a-h)}{h^2}.$$

(4')
$$\exists \vdash \downarrow \downarrow lim \frac{C_2 f(a+c_1h) + c_1 f(a-c_2h) - (c_1+c_2) f(a)}{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{2}f''(\alpha)$$

二、(本题16分)

$$f(x) = \left\{ egin{array}{ll} x^{lpha}\sinrac{1}{x^2}, & x>0, \ 0, & x\leq 0, \end{array}
ight.$$

其中参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 。对以下两种不同情形,分别讨论 α 的范围:

- (1) f(x)在 ℝ上连续;
- (2) f(x)在 R上可导,但其导函数 f'(x)在 x=0不连续。

答题时不要超过此线

得分	评卷人		

三、(每题6分,共12分)

(1) 设f(x)具有二阶连续导数,且f'(1) = 0, $\lim_{x \to 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = 1$,问f(1)是f(x)极值吗?如果是,是极小值还是极大值?请证明你的结论。

(2) 设f(x)在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导,满足f(0)=0,f''(x)<0,证明当b>x>a>0时,bf(x)>xf(b)成立。

得分	评卷人

四、(本题20分)

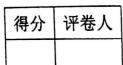
设函数
$$y = y(x)$$
由方程组
$$\begin{cases} x = e^{t} + 2t + 3 \\ e^{y} \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$$
 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}$ 及 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}|_{t=0}$.

得分	评卷人		

五、(本题13分)

设f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导, $f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{3})=1$,证明:

- (1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{3}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;
- (2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) f(\eta) + \eta = 1$.



六、(本题15分)

设函数f(x)在区间[a,b]上二阶连续可微,且满足f(a)<0,f(b)>0,对任意的 $x\in[a,b],\ f'(x)>0,f''(x)>0$,

- (1) 证明方程f(x) = 0在区间(a,b)有且仅有一个根 ξ ;
- (2) 取 $x_0 = b$, 由递推公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

得到数列 $\{x_n\}$,证明该数列在区间[a,b]严格单调减;

(3) 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,月 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$