09.09

第一章课后习题：7、16、21、22、38、39

7、$P(A)=a>0$ 且 $P(B)=b>0$，求 $P(AB)$ 范围。

解：首先，由概率的单调性我们可以知道，$0\leqslant P(AB)\leqslant \min\{P(A),P(B)\}=\min\{a,b\}$ 以及 $P(A\cup B)\leqslant 1$；然后，利用公式 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ 可得 $P(AB)\geqslant \max\{a+b-1,0\}$。

综上所述，$P(AB)$ 的范围为 $[\max\{a+b-1,0\},\min\{a,b\}]$。

16、从一个给定的 $2n+1$ 边的正多边形的顶点中，随机 (即等可能) 地选择 3 个不同的顶点, 求该正多边形的中心恰好位于这三个顶点所确定的三角形内部的概率.

解：不妨设以时钟 12 点方向的顶点为点 $2n+1$，顺时针方向的下一个点为点 1，则以时钟 12 点和 6 点连线为轴，左右两边各有 n 个点。记 A_n 为 {正 2n+1 边形的中心恰好位于这三个顶点所确定的三角形内部}.

设中心位于三角形内部的三角形个数为 M_n，一共可构成三角形个数为 $N_n=C_{2n+1}^3=(2n+1)n(2n-1)/3$。

假设第一个点取的就是点 $2n+1$，则剩下的两点必然在轴线的一左一右，

对于第二个点取的是点 1，第三个点只能取点 $n+1$，有 1 种，

对于第二个点取的是点 2，第三个点能取点 $n+1$、点$n+2$，有 2 种，

......,

对于第二个点取的是点 m，第三个点能取点 $n+1$、点 $n+2$ ... 点 $n+m$，有 m 种，

......,

对于第二个点取的是点n，第三个点能取点 $n+1$，点$n+2$ ... 点 $2n$，有 n 种，

一共 $1+2+...+n=(n+1)n/2$ 种，

对于第二个点取的是点 $n+1$ 到点 $2n$，可视为上述情况中的第三个点，

所以 $M_n=(n+1)n/2\times(2n+1)/3=(2n+1)(n+1)n/6$，

故有 $P\{A_n\}=M_n/N_n=(n+1)/(4n-2)$。

21、考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$, 其中 B,C 分别是将一枚均匀骰子连掷两次先后出现的点数. 求该方程有实根的概率和有重根的概率.

解：{方程有实根} $=\{B^2-4C\geqslant 0\}$，{方程有重根} $=\{B^2-4C=0\}$。我们记 $\#M$ 为事件 M 包含的基本事件数。

$\#\{B^2-4C\geqslant 0\}=\#\{(B,C)|(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),\cdots,(5,6),(6,1),\cdots,(6,6)\}=19$,

$\#\{B^2-4C=0\}=\#\{(B,C)|(2,1),(4,4)\}=2.$

(B,C) 所有可能的组合有 36 种.

故依古典概型概率计算公式：

$P\{$方程有实根$\} = 19/36$，$P\{$方程有重根$\} = 1/18$。

22、某路公共汽车共有 11 个停车站，由始发站开车时车上共有 8 名乘客.假设每人在各站 (始发站除外) 下车的概率相同.试求下列各事件发生的概率：

(1) 8 人在不同的车站下车；

(2) 8 人在同一车站下车；

(3) 8 人中恰有 3 人在终点站下车.

解：我们这里不把始发站视作停车站（将始发站视作停车站计算方式同理，只不过是对应的数字减一即可），那么所有可能的下车组合数为 11^8。

记 A_1 为 $\{$8 人在不同的车站下车$\}$，A_2 为 $\{$ 8 人在同一车站下车$\}$，A_3 为 $\{$8 人中恰有 3 人在终点站下车$\}$，记 $\#A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 为事件 A_i 的可能发生的情况数。

(1) $\#A_1 = A_{11}^8$，故 $P\{A_1\} = A_{11}^8/11^8$；

(2) $\#A_2 = 11$，故 $P\{A_2\} = 1/11^7$；

(3) $\#A_3 = C_8^3 A_{10}^5$，故 $P\{A_3\} = C_8^3 A_{10}^5/11^8$。

38、对同一目标进行三次独立射击，第一、二、三次射击的命中率分别为 0.5, 0.6 和 0.8, 试求：

(1) 在这三次射击中，恰好有一次射中的概率；

(2) 在这三次射击中，至少射中一次的概率.

解：(1) 分别设第 i 次命中的事件为 $A_i(i = 1, 2, 3)$，所以根据题干的独立性条件得：

$$\begin{aligned}
P\{\text{恰好有一次射中}\} &= P\{A_1A_2^cA_3^c \cup A_1^cA_2A_3^c \cup A_1^cA_2^cA_3\} \\
&= P\{A_1A_2^cA_3^c\} + P\{A_1^cA_2A_3^c\} + P\{A_1^cA_2^cA_3\} \\
&= P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.2 + 0.5 \times 0.6 \times 0.2 + 0.5 \times 0.4 \times 0.8 = 0.26;
\end{aligned}$$

(2)$P\{$恰好有一次射中$\} = 1 - P\{$一次都没有射中$\} = 1 - P\{A_1^cA_2^cA_3^c\} = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) = 0.96$。

39、求下列五种电路图系统能正常工作的概率，其中框图中的字母代表元件，字母相同但下标不同的都是同一种元件，只是装配在不同的位置上，元件 A, B, C, D 能正常工作的概率分别为 P_a, P_b, P_c, P_d （图在下一页）.

解：记 M_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 为 $\{$第 (i) 个电路图系统可以正常工作$\}$；为方便起见，直接用 A, B, C, D 代表元件 A, B, C, D 正常工作以及用 A_i, B_i, C_i, D_i 代表元件 A_i, B_i, C_i, D_i 正常工作。

注意本题题干的描述暗含了各元件能否正常工作是相互独立的。

(1) $P\{M_1\} = P\{ABC\} = P\{A\}P\{B\}P\{C\} = P_aP_bP_c$；

(2) $P\{M_2\} = 1 - P\{M_2^c\} = 1 - P\{A^cB^cC^c\} = 1 - P\{A^c\}P\{B^c\}P\{C^c\} = 1 - (1 - P_a)(1 - P_b)(1 - P_c)$；

(3) 该电路图将 (2) 中的单个元件替换为同类型两个元件的串联，同理可得

$$
\begin{aligned}
P\{M_3\} = 1 - P\{M_3^c\} &= 1 - P\{(A_1A_2)^c(B_1B_2)^c(C_1C_2)^c\} \\
&= 1 - P\{(A_1A_2)^c\}P\{(B_1B_2)^c\}P\{(C_1C_2)^c\} \\
&= 1 - (1 - P(A_1)P(A_2))(1 - P(B_1)P(B_2))(1 - P(C_1)P(C_2)) \\
&= 1 - (1 - P_a^2)(1 - P_b^2)(1 - P_c^2)
\end{aligned}
$$

(4) 该电路图将 (1) 中的元件 A, C 替换为元件 D，将元件 B 替换为系统 (2)，易得

$$
P\{M_4\} = P\{M_2\}P_d^2 = P_d^2\left[1 - (1 - P_a^2)(1 - P_b^2)(1 - P_c^2)\right];
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
P\{M_5\} &= P\{M_5C\} + P\{M_5C^c\} \\
&= P\{(A_1 \cup A_2)C(B_1 \cup B_2)\} + P\{C^c[(A_1B_1) \cup (A_2B_2)]\} \\
&= P_cP\{(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)\} + (1 - P_c)P\{(A_1B_1) \cup (A_2B_2)\} \\
&= P_c(1 - (1 - P_a)^2)(1 - (1 - P_b)^2) + (1 - P_c)(1 - (1 - P_aP_b)^2)
\end{aligned}
$$