

单摆法测重力加速度

作者：XXX，学号：XXXXXXXXXX

摘要：

本文采用单摆法测量了合肥的重力加速度，在 1% 的测量精度要求下利用不确定度分析对实验方案进行了设计，通过对周期的累积放大提高了测量精度。最终测得合肥的重力加速度为 9.804 m/s^2 ，其标准不确定度为 0.028 m/s^2 ，满足实验的测量精度要求。调节单摆的摆长，测量了周期 T 随摆长 l 的变化，对 l 与 T^2 的关系进行了线性拟合，求得了重力加速度。还通过视频追踪分析了大摆角情况下单摆的运动轨迹，研究了摆角和空气阻力对单摆周期的影响。

关键词：

单摆、重力加速度、不确定度分析、累积放大、视频追踪

1. 引言^[1]

单摆实验是一个经典实验，许多著名的物理学家如伽利略、牛顿、惠更斯等都对单摆实验进行过细致的研究。伽利略发现了摆的等时性原理，指出摆的周期与摆长的平方根成正比，而与摆的质量和材料无关，为后来摆钟的设计与制造奠定了基础。1673 年荷兰科学家惠更斯制造的惠更斯摆钟就运用了摆的等时性原理。摆的等时性原理应用于时钟上，作为稳定的“定时器”，使机械钟能够指示出“秒”，从而将计时精度提高了近 100 倍。

理想的单摆，是一根没有质量、没有弹性的线，系住一个没有体积的质点，在真空中由于重力作用而在与地面垂直的平面内做摆角趋于零的自由振动。这种理想的单摆，实际上是不存在的。在实际的单摆实验中，悬线是一根有质量（弹性很小）的线，摆球是有质量有体积的刚性小球，摆角不为零，摆球的运动还受到空气的影响。

单摆的周期公式为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right]}$$

式中 T 是单摆的周期， l 、 m_0 是单摆摆线的长度和质量， d 、 m 、 ρ 是摆球的直径、质量和密度， ρ_0 是空气密度， θ 是摆角。一般情况下，摆球几何形状、摆线的质量、空气浮力、摆角（ $\theta < 5^\circ$ ）对 T 的修正都小于 10^{-3} 。若实验精度要求在 10^{-3} 以内，则这些修正项都可以忽略不计，反之，则这些因素不可忽略。

在一级近似下，单摆周期公式为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

通过测量周期 T 、摆长 l 可求出重力加速度 g 。

2. 实验内容与设计

2.1 实验仪器

钢卷尺、电子秒表、单摆（带标尺、平面镜；摆线长度可调，其可调的上限约为 100 cm）、智能手机（自备）。

2.2 实验方案设计

由单摆的周期公式可以得到测量重力加速度的公式为：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

写出重力加速度的不确定度合成公式：

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u_T\right)^2}$$

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_T}{T}\right)^2}$$

已知单摆的摆长约为 70 cm，摆长测量的不确定度 Δl 约为 0.2 cm，用秒表测量时间的不确定度 Δt 约为 0.2 s。要求重力加速度测量的不确定度要优于 1% ($\Delta g/g < 1\%$)。

通过单摆周期公式可以得到摆长为 70 cm 时，单摆的周期约为 1.68 s。如果测量单个周期则测量的相对不确定度为： $0.2/1.68 = 12\%$ ，远大于 1% 的精度要求，故必须测量多个周期的累积时间才能满足测量精度的要求。

将已知条件带入不确定度合成公式后有：

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_t}{nT}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.2/3}{70}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0.2/3}{n \times 1.68}\right)^2} < \frac{1\%}{3}$$

可以计算出 $n > 26$ ，所以在实验中应该测量 30 个周期的累积时间 $30T$ 。

2.3 实验内容

1) 根据所设计的方案测量单摆的摆长和周期，要求摆长和周期分别重复测量 6 次。计算当地的重力加速度及其标准不确定度。

2) 调节单摆的摆长，测量摆长 l 与周期 T 之间的关系。要求测量 6 个不同的摆长。做出 l

与 T^2 之间的关系图，并用最小二乘法拟合斜率，求出重力加速度。

3) 利用智能手机录制单摆视频。用视频追踪技术 (Tracker) 获取单摆的运动轨迹，研究大摆角 ($> 5^\circ$) 条件下单摆的运动规律。对运动轨迹数据进行拟合分析。

3. 实验结果与讨论

3.1 测量摆长和周期求重力加速度

表 1. 单摆摆长和周期的测量数据

	摆长 l/cm	$30T/\text{s}$	周期 T
1	76.38	52.58	1.7527
2	76.37	52.61	1.7537
3	76.35	52.62	1.7540
4	76.41	52.63	1.7543
5	76.37	52.66	1.7553
6	76.42	52.68	1.7560
平均值	76.383	52.615	1.7538

根据理想单摆周期公式可得到重力加速度 g 的测量模型，将测量得到的周期和摆长估计值代入后计算得：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4 \times (3.1416)^2 \times 0.76383}{(1.7538)^2} = 9.8039 \text{ m/s}^2$$

3.1.1 摆长的不确定度评定

实验中是使用卷尺直接测量摆长 l ，摆长 l 的测量模型为：

$$l = l_0 + l_1 + l_2$$

其中 l_0 为卷尺直接读出的长度， l_1 为卷尺仪器误差对测量结果的影响， l_2 为使用卷尺测量摆长时难以完全对齐对测量结果的影响，考虑到测量精度要求，测量模型中忽略了其他因素的影响。

对于 l_0 ，用 A 类方法来评定其不确定度，其标准不确定度 u_{l_0} 为：

$$u_{l_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = 9.9 \times 10^{-5} \text{ m}$$

对于 l_1 ，可用 B 类方法来评定不确定度，实验中用 2 m 量程钢卷尺的最大允差为 0.0012 m，则其标准不确定度 u_{l_1} 为：

$$u_{l_1} = \frac{0.0012}{3} = 0.4 \times 10^{-3} m$$

对于 l_2 ，可用 B 类方法来评定其不确定度，实验中由于未对齐产生的偏差经验上最大为 0.2 cm，可认为该偏差符合正态分布，则其标准不确定度为：

$$u_{l_2} = \frac{0.002}{3} = 6.7 \times 10^{-4} m$$

故摆长的标准不确定度为：

$$u_l = \sqrt{u_{l_0}^2 + u_{l_1}^2 + u_{l_2}^2} = 7.8 \times 10^{-4} m$$

3.1.2 周期的不确定度分析

实验中使用秒表每次测量 30 个周期的时长，摆动周期 T 的测量模型为：

$$T = \frac{1}{30}(t_0 + t_1 + t_2)$$

其中 t_0 为秒表上显示的时间， t_1 为秒表仪器误差对测量的影响， t_2 为使用秒表计时人的反应时间对测量的影响，考虑到测量精度要求，测量模型中忽略了其他因素的影响。

对于 t_0 ，用 A 类方法来评定其不确定度，其标准不确定度 u_{t_0} 为：

$$u_{t_0} = \sqrt{\frac{\sum_i^n (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}} = 0.013 s$$

对于 t_1 ，可用 B 类方法来评定其不确定度，秒表的最大允差为 0.05 s，遵循正态分布，则其标准不确定度 u_{t_1} 为：

$$u_{t_1} = \frac{0.05}{3} = 0.017 s$$

对于 t_2 ，可用 B 类方法来评定其不确定度，根据统计数据，由于人启停秒表的反应时间带来的测量误差一般不超过 0.2 s，可认为该偏差符合正态分布，则其标准不确定度为：

$$u_{t_2} = \frac{0.2}{3} = 0.067 s$$

周期 T 的标准不确定度为：

$$u_T = \sqrt{\left(\frac{1}{30}\right)^2 u_{t_0}^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2 u_{t_1}^2 + \left(\frac{1}{30}\right)^2 u_{t_2}^2} = 0.0023 s$$

3.1.3 重力加速度 g 的标准不确定度

重力加速度 g 的测量模型：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

由此可写出其不确定度合成公式为：

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u_l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u_T\right)^2}$$

可以得到重力加速度 g 的标准不确定度为：

$$u_g = g \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2u_T}{T}\right)^2} = 0.028 \text{ m/s}^2$$

即重力加速度的测量结果可表示为：

$$g = 9.804(28) \text{ m/s}^2$$

3.2 改变摆长测重力加速度

表 2. 改变摆长测重力加速度实验数据

摆长 l (m)	计时时长 40 T (s)	周期 T (s)	T^2 (s ²)
0.513	57.58	1.4395	2.0722
0.611	62.84	1.5710	2.4680
0.711	67.65	1.6912	2.8602
0.814	72.56	1.8140	3.2906
0.921	77.15	1.9288	3.7203
1.010	80.70	2.0175	4.0703

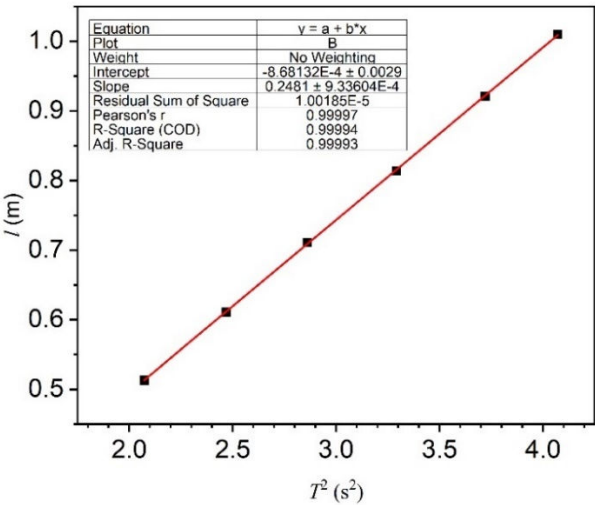


图 1. 单摆摆长 l 与周期平方 T^2 的关系图

实验中测得的单摆摆长和 40 个周期时长列在表 2 中，计算得到的单摆周期 T 和周期平方 T^2 的数值也列在该表中。摆长 l 与周期平方 T^2 的关系如图 1 所示，对实验数据进行了线性拟合，得到斜率 k 的数值为 0.2481 m/s^2 ，其标准不确定度 u_k （标准差）为 0.0009 m/s^2 。

单摆周期公式可以改写成以下形式：

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

由此可得重力加速度 $g = 4\pi^2 \times k = 4 \times (3.1416)^2 \times 0.2481 \text{ m/s}^2 = 9.795 \text{ m/s}^2$ ，

其标准不确定度为： $u_g = 4\pi^2 \times u_k = 4 \times (3.14)^2 \times 0.009 \text{ m/s}^2 = 0.035 \text{ m/s}^2$ 。

3.3 使用 Tracker 研究大摆角的单摆

将手机固定在实验室提供的手机支架上，录制了一段帧率为 120 FPS 的大角度单摆（摆角约为 10° ）视频，并使用 tracker 软件进行自动追踪分析。Tracker 从该视频中获取有效数据点 3023 个，并导入 origin 进行正弦三角函数拟合。

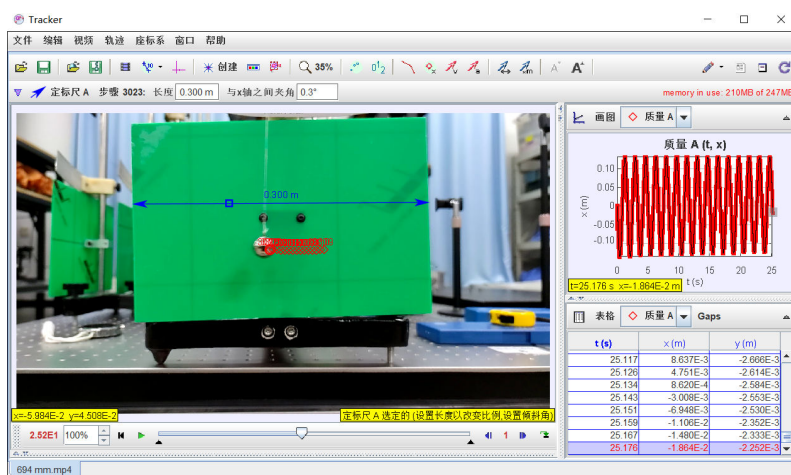


图 2. Tracker 软件对单摆视频进行自动追踪分析。

图 3 中黑色的点为追踪所获取到的轨迹数据点，红线为拟合后的正弦函数曲线。拟合结果给出单摆的摆动周期 T 为 1.6749 s。利用卷尺测得的单摆摆长为 0.694 m。带入未修正的单摆测重力加速度的公式可得：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 9.766 \text{ m/s}^2$$

如果考虑大摆角的修正，则重力加速度为：

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2 = 9.803 \text{ m/s}^2$$

可以看到修正后的结果与合肥的重力加速度参考值 9.795 m/s^2 更加接近。

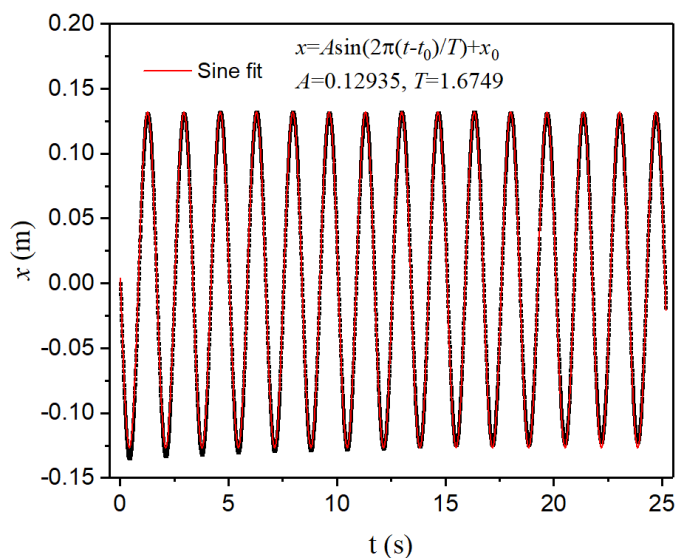


图 3. 单摆水平方向运动轨迹数据及拟合结果

3.4 空气阻力修正^[2, 3]

在阻尼振动的过程中，其振动周期与阻尼系数有关。即 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ 。其中， $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 为无阻尼时的角频率， $\gamma = \frac{k}{2mL^2}$ 为表征阻尼的一个参数。此时，振幅随时间的变化 $A = A_0 e^{-\gamma t}$ 。

实验拍摄了较长时间的单摆摆动视频，使用 **tracker** 软件追踪轨迹，再编写程序得出了振幅随时间的变化数据 $A = A(t)$ ，对实验数据进行了指数拟合，得到 γ 的值。

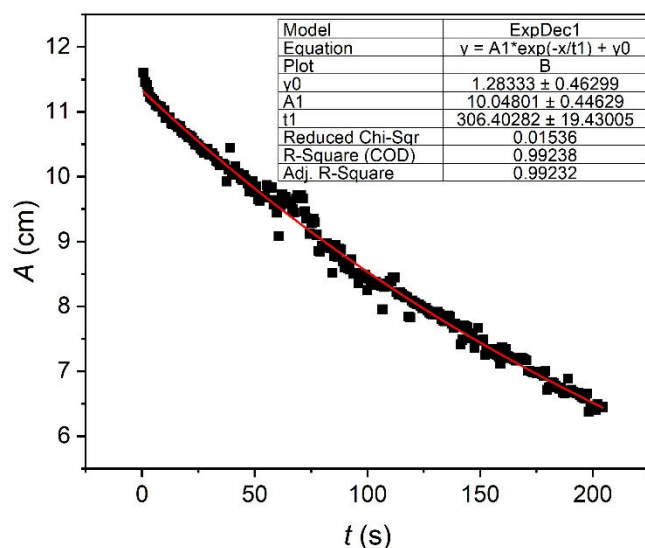


图 4. 单摆振幅随时间的衰减

拟合得到 $\gamma = \frac{1}{306} \text{ s}^{-1} = 0.00327 \text{ s}^{-1}$ 。

二阶近似, 得出修正后的单摆周期 $T^* = T \left(1 - \frac{\gamma^2 T^2}{4\pi^2} \right) \approx T(1 - 8 \times 10^{-7})$ 。可以看到摆幅的衰减对周期的修正大约在 10^{-7} 在量级, 因此在 1%的精度要求下该项修正完全可以忽略。

4. 结论

本文基于单摆实验装置利用三种不同的方案测量了合肥的重力加速度, 测量结果分别为: 9.804 m/s^2 、 9.795 m/s^2 和 9.803 m/s^2 , 与参考值 9.795 m/s^2 的偏差均小于 1%。在 10° 的大摆角情况下研究了摆角和空气阻力对单摆周期的影响, 结果表明考虑摆角修正后测得的重力加速度更接近参考值, 修正对测量结果的影响约为 0.4%; 而阻力对单摆周期的修正约为 10^{-6} , 远小于 1%。因此, 小角度摆动条件下在实验测量精度的范围内完全可以忽略相关因素对测量结果的影响。

参考文献:

- [1]. 单摆法测重力加速度. 实验讲义. 2024
- [2]. 舒幼生. 力学[M]. 北京: 北京大学, 2005.
- [3]. 邵云. 单摆周期的系统误差分析[J]. 大学物理, 2022, 41(01): 32-38.

附录：老师签字的原始数据

姓名 学号

1. 测量摆长和周期求重力加速度。

摆长 l (cm)	30T (s)
76.38	52.58
76.37	52.61
76.35	52.62
76.41	52.63
76.37	52.66
76.42	52.68

2. 改变摆长 l ，测量周期 T 与 l 的关系。

摆长 l (cm)	40T (s)
51.3	57.58
61.1	62.84
71.1	67.65
81.4	72.56
92.1	77.15
101.0	80.70

3. 录制大摆角单摆视频。

摆长 l (cm) 69.4
帧率: 120 FPS
摆角: 10° 左右

2024.3.5