关于“任意”和“存在”

在实数和极限的讨论中, 经常用到两个逻辑量词：**全称量词**（简称“任意”, 常用符号 $\forall$ 表示）与 **存在量词**（简称“存在”, 常用符号 $\exists$ 表示）. 这里对它们的使用规则再作介绍.

使用全称量词的命题称为全称命题：对任意（或所有）$x \in U$, $A(x)$ 成立.

这里U是给定的集合（范围）, 因此“任意”是在一定范围内的“任意”.

使用存在量词的命题称为存在命题：存在（至少有一个） $x \in U$ 使得 $A(x)$ 成立, 因此“存在”也是在一定范围内的“存在”.

例1: 下列等式

$$2+1=1+2,\ 2+2=2+2,\ 2+3=3+2,\ 2+4=4+2,\ \cdots,$$

可以表述为一个全称命题:

对任意正整数 n, $2+n=n+2$.

这里任意的范围是正整数集合.

例2： 数集$X \subset \mathbb{R}$ 有界（或数列 $\{a_n\}$ 有界）:

存在一个正实数 M, 使得对任意的 $x \in X$, 有 $|x| \le M$（对或对任意的 n, 有 $|a_n| \le M$.）(“存在–任意”的命题).

例3： 对任意整数a, 存在整数b, 满足$b=a+1$. (“任意-存在”命题),

如果改变顺序, 则原命题就会变成“存在整数 b, 对任意的整数 a, 满足 $b=a+1$”. 这显然是错误的命题.

否定一个全称命题只需要证明存在一个反例:

命题“对任意$x \in U$, $A(x)$”的否定, 等价于“存在 $x \in U$ 使得非$A(x)$”.

否定一个存在命题则需要说明所有的情形都不成立:

命题“存在 $x \in U$ 使得 $A(x)$”的否定为全称命题“对任意 $x \in U$, 非$A(x)$”.

对一个含有不同类型量词的命题来说,它的否命题可以通过改变量词的顺序（或者说是改变量词的类型）得到.

例3： 数集 $X \subset \mathbb{R}$ 有界（或 $\{a_n\}$ 有界）的否命题：数集 X（或 $\{a_n\}$）无界: 对 $\forall M>0$, $\exists x \in X$, 使得 $|x| \ge M$（ $\exists n$ 使得 $|a_n| \ge M$）.

数集有界的“存在–任意”以及最后陈述“ $|x| < M$”的命题的否命题变成了“任意–存在”并且用“ $|x| \geq M$”否定最后陈述的命题.

最后让我们再次回顾

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

的定义：

对对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意大于 N 的正整数 n （或者说“当 $n > N$ 时”）,有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

这是一个“任意–存在–任意”命题.

对上述命题的否定（即数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限）的表述如下：

存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的正整数 N, 都存在 $n > N$ 使得

$$|a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$