计算题 1

一地面雷达观察者正从屏幕上监视从远处投来的一抛射体. 某时刻, 他得到的信息显示: 抛射体达到了最高点且具有水平速度 $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{v}$ 的方向线与观察者、抛射体位于同一竖直平面; 抛射体与观察者之间的距离为 l ; 观察者到抛射体连线与水平面的夹角为 θ .

(1) 预测抛射体落地点与观察者之间的水平距离 d ;

(2) 预测抛射体能否越过观察者的头顶.

解　本题涉及内容可处理为在离地

$$h = l \sin\theta \tag{1}$$

高处, 以水平速度 $\boldsymbol{v}$ 出射的平抛运动问题. 落地时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{2}$$

水平抛落点与落地点水平距离为

$$s = vt. \tag{3}$$

(1) 由上述三式, 可得

$$s = v\sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}}, \tag{4}$$

$$d = |s - l\cos\theta| = \left| v\sqrt{\frac{2l\sin\theta}{g}} - l\cos\theta \right|. \tag{5}$$

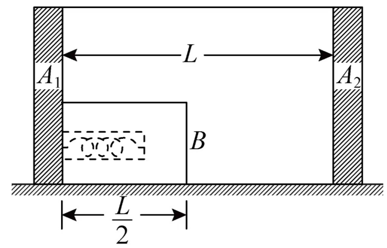
(2) 仅当

$$v > \sqrt{\frac{gl}{2\sin\theta}}\cos\theta \tag{6}$$

时, 抛射体方会越过观察者头顶.

计算题 2

如图所示，滑块 A_1 和 A_2 由轻杆连接成一个整体, 其质量为 M , 轻杆长 L , 滑块 B 的质量为 m , 长为 $L/2$, 其左边有一小槽, 槽内装有轻质弹簧. 开始时 B 紧贴着 A_1 , 弹簧处于压缩状态, 今突然松开弹簧, 整个系统获得动能 E_k . 弹簧松开后不再起任何作用, 以后 B 将在 A_1 , A_2 之间发生弹性碰撞. 假定整个系统都放在光滑水平面上, 试求滑块 B 的运动周期 T .



解 开始时 A 的左行速度记为 v_A , B 的右行速度记为 v_B , 由方程组

$$Mv_A = mv_B, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = E_k, \tag{8}$$

解得

$$v_A = \sqrt{\frac{2mE_k}{M(M+m)}}, \tag{9}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2ME_k}{m(M+m)}}, \tag{10}$$

两者相对速度大小为

$$u = v_A + v_B = \sqrt{\frac{2(M+m)E_k}{Mm}}. \tag{11}$$

A 与 B 在以后的弹性碰撞中, 碰撞后分离速度大小恒等于碰撞前接近速度大小, 故 B 相对 A 的速度大小始终为上述 u 值. B 的运动周期等于 B 相对于 A 的左、右往返各碰撞一次的合计时间, 即有

$$T = \frac{L}{u} = L\sqrt{\frac{Mm}{2(M+m)E_k}}. \tag{12}$$

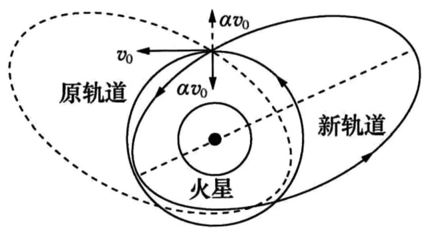
计算题 3

宇宙飞船在距火星表面 H 高度处作匀速圆周运动, 火星半径记为 R . 设飞船在极短时间内向外侧点火喷气, 使其获得一径向速度, 大小为原速度 α 倍, α 很小, 飞船新轨道不会与火星表面交会, 飞船喷气质量可略.

(1) 计算飞船新轨道近火星点高度 h_1 和远火星点高度 h_2 ;

(2) 设飞船原来的运行速度大小为 v_0 , 计算新轨道运行周期 T.

解 向外侧点火, 新轨道如图所示, 若改向内侧点火, 新轨道将如图中虚椭圆所示. 两个椭圆对称, h_1 , h_2 , T 都相同.



(1) 近火星点或远火星点状态与点火喷气后瞬间状态间的能量守恒和面积定律关联如下:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m[v_0^2 + (\alpha v_0)^2] - G\frac{Mm}{r_0}, \tag{13}$$

$$vr = v_0 r_0, \tag{14}$$

各量意义按照常规理解, 再补充原轨道向心力公式:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}. \tag{15}$$

由(13)(14)两式消去 v , 再由(15)式消去 m , 两式联立, 再消去 GM, 可得

$$(1-\alpha^2)r^2 - 2r_0 r + r_0^2 = 0, \tag{16}$$

解得

$$r_1 = \frac{r_0}{1+\alpha}, \tag{17}$$

$$r_2 = \frac{r_0}{1-\alpha}, \tag{18}$$

其中 r_1 为近火星点, r_2 为远火星点, 将 $r_0 = R + H$ 代入, 得

$$h_1 = r_1 - R = \frac{H - \alpha R}{1+\alpha}, \tag{19}$$

$$h_2 = r_2 - R = \frac{H + \alpha R}{1 - \alpha}. \tag{20}$$

(2) 原轨道周期

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}, \tag{21}$$

新轨道半长轴

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{r_0}{1 - \alpha^2}, \tag{22}$$

由周期定律, 得

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}, \tag{23}$$

可解得

$$T = \frac{2\pi(R + H)}{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} v_0}. \tag{24}$$