

# 谓词演算 范式

## P76 命题 1

若  $x$  不在  $p$  中自由出现

$$1^\circ \vdash \forall x (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x q)$$

$$2^\circ \vdash \exists x (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow \exists x q)$$

若  $x$  不在  $q$  中自由出现

$$3^\circ \vdash \forall x (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\exists x p \rightarrow q)$$

$$4^\circ \vdash \exists x (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\forall x p \rightarrow q)$$

## P77 命题 2

1' 若  $y$  不在  $p(x)$  中出现

$$\vdash \exists x p(x) \leftrightarrow \exists y p(y)$$

2' 若  $x$  不在  $p$  中自由出现

$$\vdash (p \rightarrow \exists x q) \leftrightarrow \exists x (p \rightarrow q)$$

若  $x$  不在  $q$  中自由出现

$$\vdash (\exists x p \rightarrow q) \leftrightarrow \exists^* x (p \rightarrow q)$$

$$3^\circ \vdash \neg \exists x p \leftrightarrow \exists^* x \neg p$$

## P78 命题 3

$$1^\circ \vdash (\forall x p \wedge \forall x q) \leftrightarrow \forall x (p \wedge q)$$

$$2^\circ \vdash (\exists x p \vee \exists x q) \leftrightarrow \exists x (p \vee q)$$

若  $x$  不在  $p$  中自由出现

$$3^\circ \vdash (p \vee \exists x q) \leftrightarrow \exists x (p \vee q)$$

$$4^\circ \vdash (p \wedge \exists x q) \leftrightarrow \exists x (p \wedge q)$$

$$K1 \quad p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$K2 \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$K3 \quad (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$K4 \quad \forall x p(x) \rightarrow p(t) \quad t \text{ 对 } p(x) \text{ 中 } x \text{ 自由}$$

$$K5 \quad \forall x (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \forall x q) \quad x \text{ 不在 } p \text{ 中自由出现}$$

$$MP \quad \{p_i, p_i \rightarrow p_j\} \vdash p_j$$

$$Gen \quad \{p_j\} \vdash \forall x p_j$$

$$\exists_1 \quad \text{设 } t \text{ 对 } p(x) \text{ 中 } x \text{ 自由} \quad \vdash p(t) \rightarrow \exists x p(x)$$

$$\exists_2 \quad \Gamma \cup \{p\} \vdash q \quad Gen \quad \text{若 } x \text{ 不在 } p \text{ 中自由出现且 } x \text{ 不在 } q \text{ 中自由出现} \quad \Gamma \cup \{\exists x p\} \vdash q$$

$$P70 \quad \vdash \forall x (p \rightarrow q) \rightarrow (\exists x p \rightarrow \exists x q)$$

$$\text{命题 8} \\ P73 \vdash \neg \forall x p \leftrightarrow \exists x \neg p$$

$$\vdash \neg \exists x p \leftrightarrow \forall x \neg p$$

—



演绎定理 1° 若  $\Gamma \vdash p \rightarrow q$  则  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

2° 若  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$  且证明中 Gen 变元不在  $p$  中自由出现

则  $\Gamma \vdash p \rightarrow q$

反证律 若  $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$  及  $\neg q$  且 Gen 变元不在  $p$  中自由出现

则  $\Gamma \vdash p$

归谬律 若  $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$  且  $\neg q$  且 Gen 变元不在  $p$  中自由出现

则  $\Gamma \vdash \neg p$

$$\forall x G(x) \vee \forall x H(x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (G(x) \vee H(y))$$

$$\exists x G(x) \wedge \exists x H(x) \Leftrightarrow \exists x \exists y (G(x) \wedge H(y))$$

$$\forall x \forall y p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x, y)$$

$$\exists x \exists y p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y)$$

