复变函数 · 历年真题集

说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学复变函数 (A/B)、复分析考试题.

2. 按照复变函数 (A)、复变函数 (B)、复分析进行排序，其次为时间先后.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用，越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案，希望读者自行思考，同时熟悉题目类型. 建议助教在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大 60 周年校庆，亦为少年班成立 40 周年之际，谨以此真题集锦，献礼科大，也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程.

6. 感谢杨光灿烂同学提供往年题目！感谢王昌煜助教录入题目！再次祝愿科大数学教育越办越好！

2018-2019 秋季学期复变函数 (A) 助教

15 级少年班学院 理科试验 1 班 吴天

2018 年 12 月于合肥

欢迎拜访我的主页：http://home.ustc.edu.cn/~wt1997

再版说明

1. 本版增添了 2018-2019、2019-2020 年的复变函数试题，供同学们参考.

2. 感谢吴天助教曾经在复变函数课程中给予我的帮助！希望能有更多的同学未来也能担任助教，帮助更多学弟学妹（划掉)！

3. 感谢 17 级李明哲助教和 18 级刘炜昊助教提供和录入题目！

4. （话说有一点参考答案了来着）

2020-2021 秋季学期复变函数 (A) 助教

17 级少年班学院 少年班 杨光灿烂

2020 年 10 月于合肥

更新说明

1. 本版增添了 2020-2021、2021-2022、2022-2023 年的复变函数 A 试题，供同学们参考.
2. 进行了重新的排版，修正部分数学格式，使得本版更加适合打印或在电子设备上书写.
3. 新增目录，方便检索和电子版跳转.
4. 更正了一些错误.

21 级 少年班学院 施耀炜
2023 年 12 月 于合肥

试卷投稿、纠错、意见反馈欢迎联系我: ywshi.mail@qq.com

更新说明

1. 本版增添了 2023-2024、2024-2025 年年复变函数 A，2024-2025 年的复变函数 B 试题，供同学们参考.

2. 删除了复分析往年试题，有关数学学院专业课程往年真题欢迎访问：章俊彦学长的主页-USTC 学习资料.

3. 修正部分数学格式，更正了一些错误，标记了一道错题.

23 级 物理学院 于洪飞
2024 年 12 月 于合肥

试卷纠错、意见反馈欢迎联系我: yuhongfei@mail.ustc.edu.cn
我的 GitHub ：Phiyu　个人主页：Yu 的本科资料库
最后修改日期: 2024 年 12 月 29 日

目录

2005-2006 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (20 分 =5 分 +5 分 +10 分) 计算.

   (1) 设 $f(z) = \oint_{|t|=3} \dfrac{2t^2+5t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t$, 计算 $f'(2+\mathrm{i})$.

   (2) $\oint_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^5+1}$.

   (3) $\oint_{\gamma} \dfrac{e^{\pi+z}}{z(1-z)^2}\,\mathrm{d}z$, 其中 γ 为不经过 0, 1 的简单闭曲线.

2. (8 分) 已知 $A>1$, 试求 Laurent 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A^{-n}(z-1)^n$ 的收敛区域.

3. 求 $\dfrac{1}{1+z}$ 在 $z_0=\mathrm{i}$ 处的 Taylor 展开式及其收敛半径.

4. (8 分) 试将 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$ 在 $4<|z-3|<+\infty$ 展成 Laurent 级数.

5. (8 分) 试求方程 $4z^4+2z+9=0$ 在圆环 $1<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内根的个数.（附: 如果把 $2z$ 改成 2^z 呢?）

6. (20 分 =10 分 ×2) 用留数定理计算实积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\sin ax\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

   (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}\ (a>1)$.

7. (10 分) 用拉氏变换解微分积分方程 $\begin{cases} y'(t)-e^t = \displaystyle\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$

8. (10 分) 求一保形变换 $w=f(z)$ 将圆盘区域 $|z|<1$ 映为角形域 $\dfrac{\pi}{3}<\arg w<\dfrac{2}{3}\pi$

9. (6 分) 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析, 且 $u+v=2x^2-4xy+x-y-2y^2$. 试求 $f(z)$.

10. (7 分) 设 $f(z)$ 是一个整函数, 并且假定存在着一个正整数 n, 以及两个正数 R 及 M, 使得当 $|z|\geqslant R$ 时, $|f(z)|\leqslant M|z|^n$, 试证: $f(z)$ 是个至多 n 次多项式或一常数.

2006-2007 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (10 分) 求 $\dfrac{1}{z}$ 和 $\dfrac{1}{z^2}$ 在 $z=-1$ 处的 Taylor 展式, 并指出收敛半径.

2. (10 分) 设在 $0<r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2<1$ 内有:

$$f(z)=\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}-\oint_{|\zeta-\mathrm{i}|=r_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-\mathrm{i})(\zeta^2-\zeta z)}$$

求 $f(z)$ 在 $r_1<|z-\mathrm{i}|<r_2$ 内的解析表达式及其 Laurent 展开式.

3. (10 分) 计算 $I=\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}$

4. (10 分) 试求方程 $z^6-3z^4+z^3-az=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内按重数计算的根个数, 其中 $0<|a|<1$.

5. (20 分 =10 分 ×2) 用留数定理计算实积分 (任选两题).

   (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$

   (2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ $(0<b<a)$

   (3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\tan(\theta+\mathrm{i}a)d\theta$ (a 是实数且 $a\neq 0$)

6. (10 分) 用拉氏变换解积分方程 $y(t)-e^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau$.

7. (10 分)

   (1) 问 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 将有割痕 $(-\infty,-1]$ 的单位圆外域映成了什么?

   (2) 求保形变换 $w=f(z)$ 将有割痕 $(0,1]$ 的右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 映为带形域 $-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi$, $\mathrm{Re}(z)>0$.

8. (10 分) 设解析函数 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)$, 其中 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. 试证明: $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta},\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}$.

9. (5 分) 假设 $f(z)=\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$ 在 $(-1,1)$ 的上边沿为正, 试求 $f(\mathrm{i})$ 和 $f(-\mathrm{i})$.

10. (5 分) 设 $f(z)$ 在扩充平面上除去非本性奇点 $z=z_0$ 外是单叶解析的, 则 $f(z)$ 必是分式线性变换.

2007-2008 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (25 分 =5 分 ×5) 简答题.

   (1) 试在复平面上画出满足 $|z| < 1 - \mathrm{Re}z$ 的点集的图形.

   (2) 设 $f(z) = xy^2 + \mathrm{i}x^2y$, 问: 复变函数 $f(z)$ 在何处满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程.

   (3) 求下列值: (a) Ln i； (b) i^{i}.

   (4) 求下列函数 $f(z)$ 的奇点 (不包含 ∞) 且指出其类型. 如果是极点, 给出它的阶数:

   (a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - \pi}$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(\mathrm{e}^{z^3} - 1)}$

   (2) 求下列值: (a) Ln i； (b) i^{i}.

   (5) 设 D 是一个以正三角形为边界的有界区域, 而 G 为一个以椭圆为边界的有界区域, 问: 是否存在单叶解析函数 $w = f(z)$ 将 D 映满 G. (回答“存在”或“不存在”, 并且简要地给出理由.)

2. (10 分) 求一个解析函数 $f(z)$, 使其实部为 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$, 且满足 $f(\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$.

3. (10 分) 设 $0 < a < b$, 求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在域 $D : a < |z| < b$ 内的罗朗 (Laurent) 展开.

4. (25 分 =5 分 ×5) 计算题.

   (1) $\displaystyle\int_{|z+3\mathrm{i}|=1} \frac{\cos z}{z + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$

   (2) $\displaystyle\int_{|z+\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{1 + z^2}\,\mathrm{d}z$

   (3) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{3}} \sin\frac{1004}{z}\,\mathrm{d}z$

   (4) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^{2007}}{z^{2008} - 1}\,\mathrm{d}z$

   (5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2 + a^2)^2}\,\mathrm{d}x, \quad (m > 0, a > 0)$

5. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程: $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0\ y'(0) = 1. \end{cases}$

6. (7 分) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将半带域 $D : -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0$ 映射为上半平面 $\mathrm{Im}\, w > 0$.

7. (7 分) 求方程 $kz^4 = \sin z$ $(k > 2)$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数.

8. (6 分) 设 $f(z)$ 是在有界域 D 上解析的非常值函数, 并且在有界闭域 $D+C$ 上连续, 其中 C 为 D 的边界. 如果存在实数 a 使得 $|f(z)| = a$, $\forall z \in C$, 证明: 在 D 内至少存在一个点 z_0 使得 $f(z_0) = 0$.

2008-2009 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (24 分 =4 分 +8 分 +6 分 +6 分) 填空题.

   (1) 若幂函数 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=1$ 的分支, 则 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z^2}{1-\sqrt{z}},1\right]=$ ____________.

   (2) 设 $\sqrt[3]{z(1-z)^2}$ 在去掉线段 [0,1] 的区域内的某一单值分支为 $f(z)$. 若 f 在 $\dfrac{1}{2}$ 的上边沿的值是 $\dfrac{1}{2}$, 则 $f(2)=$ ____________, $f'(2)=$ ____________.

   (3) 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|t|=3}\frac{t^2+t+1}{t-z}\,\mathrm{d}t$, 则 $f'(2+\mathrm{i})=$ ____________.

   (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1.5}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z-2)^2}=$ ____________.

2. (8 分) 设 u 和 v 是解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部, 且 $u+v=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+3xy$, 其中 $z=x+y\mathrm{i}$, $f(0)=0$. 试求 $f(z)$.

3. (8 分) 试将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 展开成 Laurent 级数, 其中 $|a|<|b|$, a,b 都是复数. 圆环域为

   (1) $0<|a|<|z|<|b|$;

   (2) $|z|>|b|$.

4. (8 分) 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}$, 试指出它的不解析点的类型.

5. (8 分) 试求方程 $2z^6-3z^3+2=0$ 在各个象限内根的个数.

6. (20 分 =10 分 ×2) 计算积分.

   (1) $\displaystyle\oint_{0<|z|=r\neq 1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z-1}$.

   (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$.

7. (8 分) 用拉普拉斯变换解方程.

$$\begin{cases} y'(t)-e^t=\displaystyle\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

8. (8 分) 求一分式线性变换 $w=f(z)$ 将圆盘区域 $|z-2\mathrm{i}|<2$ 映为圆盘区域 $|w-2|<1$, 且满足条件 $f(\mathrm{i})=2$, $\arg f'(\mathrm{i})=0$.

9. (8 分) 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是不可约有理真分式函数, $a_k(k=1,\cdots,m)$ 是 $Q(z)$ 的全部零点, 且其阶数为 n_k. 试证明 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-a_k)^s}$, 其中 A_{ks} 为复常数.

2019-2020 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (39 分) 填空题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 设 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 那么 $z^{2019}+z^{2020}=$ ______________.

(2) $1^{\sqrt{3}}=$ ______________.

(3) 若函数 $f(z)=x^2+2xy-y^2+\mathrm{i}(y^2+axy-x^2)$ 是复平面上的解析函数, 那么实常数 $a=$ ______________.

(4) 设 $f(z)=\dfrac{\sin(z-5)}{z^3(z-5)^2}+e^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}}$, 给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞）, 并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）: ____________________________________.

(5) $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1-\cos z}{z^5},0\right)=$ ______________ ; $\mathrm{Res}\left(z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}},\mathrm{i}\right)=$ ______________.

(6) 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析, 并且 $f(0)=1, f'(0)=2$, 那么 $\displaystyle\int_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=$ ______________.

(7) 设函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\cos z}$ 在 0 处的泰勒（Taylor）展开式为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 那么幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径 $R=$ ______________.

(8) 设函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{1-z}$, 那么 $f(z)$ 在区域 $0<|z-1|<+\infty$ 内的罗朗（Laurent）展开式为 ______________.

(9) 设 $z_0\in\mathbb{C}$, 函数 $|\mathrm{e}^z|$ 在闭圆盘 $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le 1\}$ 上的最大值为______________.

(10) 设 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 那么在右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,(z)>0\}$ 解析并以 $u(x,y)$ 为它的实部的函数为 $f(z)=$ ______________.

(11) 对函数 $f(t)$, 记 $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换, 并且记 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(p)]$.

(a) 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t)-2f'(t)+f(t)=t-\sin t \\ f(0)=f'(0)=0 \end{cases}$, 那么 $F(p)=$ ______________.

(b) $\mathrm{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2-p)(p-2)}\right]=$ ______________.

2. (30 分) 计算题 (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n$的和函数, 并且计算$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

(2) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z+\bar{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z$.

(3) 计算积分 $\displaystyle\int_C\frac{z\cos^2\frac{1}{z}}{1-z}\,\mathrm{d}z$,其中$C:\left|z-\dfrac{1}{2}\right|+\left|z+\dfrac{1}{2}\right|=3$.

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4}\right|\,\mathrm{d}\theta$.

(5) 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{(x^2+4)(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

3. (31 分) 综合题

(1) (5 分) 设 $f(z)$ 为定义在上半平面内的解析函数, 则 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 为定义在下半平面上的复变函数, 请问: $g(z)$ 在下半平面上是否为解析函数? 给出你的答案, 如果 "是", 给出证明; "否", 举个反例.

(2) (5 分) 设 $f(z)$ 为在区域 D 内解析的非常数值复变函数, C 为 D 内的一条简单闭曲线, 它的内部包含在 D 内. 证明: 对于任何复数 A, $f(z)=A$ 在 C 的内部只有有限个解.

(3) (6 分) 设 $f(z)=\dfrac{z\,(\sin z-z)}{(z^3+1)(z+1)^3}$, 设 $C:|z|=R>0$ 为圆周, 方向取正向, 其中 $R\neq 1$, 试计算 $\Delta_C \arg f(z)$. 被标记为错题!(2024,于许雷叶老师班)

(4) (8 分) 求保形变换 $w=f(z)$, 将区域 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>1,|z-\sqrt{3}i|<2\right\}$ 映为区域 $\Omega=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$, 并且满足条件 $f(\sqrt{3}\mathrm{i})=0, f'(\sqrt{3}\mathrm{i})>0$. (请画出必要的示意图)

(5) (7 分) 设 $P_n(z)=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}$, A_n 表示 $P_n(z)$ 的 n 个零点模的最小值, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n=+\infty.$$

2020-2021 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (30 分) 填空题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 设方程为 $e^{z}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，那么方程的全部根为：________.

(2) 若函数 $f(z)=x^3-3xy^2+i\left(ax^2y-y^3-1\right)$ 是复平面上的解析函数,那么实常数 $a=$________.

(3) 设函数 $f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 是平面上的调和函数，其中 a,b,c,d 为是实数常数. 那么实常数 a,b,c,d 应满足下面条件：________.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi+2t}\left(e^{-z}-\cos\frac{z}{2}\right)dz=$________.

(5) 设 $f(z)=\dfrac{z^2e^{\frac{1}{z-1}}}{(e^{2z}-1)\sin z}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：________.

(6) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(z-1)^{2021}}\right),1\right)=$________,
$\operatorname{Res}\left(z^2\sin\dfrac{1}{z-i},i\right)=$________.

(7) 对函数 $f(t)$，记 $F(p)=L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换，并且记 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$：

i. 设 $f(t)$ 满足 $\begin{cases} f''(t)-f(t)=4\sin t+5\cos 2t \\ f(0)=-1, f'(0)=-2 \end{cases}$，那么 $F(p)=$________;

ii. $L^{-1}\left[\dfrac{3p+7}{p^2+2p+2}\right]=$________

(8) 方程 $z^5+13z^2+15=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 和圆环 $2<|z|<3$ 内根的个数分别为________ 和 ________.

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 求函数 $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开前 5 项（即展开到 z^4 为止），并且给出所得幂级数的收敛半径.

(2) 将函数 $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<+\infty\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

(3) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin(z-1)}{(z^2-z)\sin z}dz.$

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z(1-\cos 2z)\sin 3z}{(1-e^{3z})^5}dz.$

(5) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$，$(0<b<a)$.

(6) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\sin 2x}{x}dx.$

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) (7 分) 设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在有界区域 $C+D$ 上连续, 这里 C 为 D 的边界. 证明: 如果函数 $f(z)$ 没有零点, 并且对于 $z\in C$ 有 $|f(z)|=M(M>0$ 为常数 $)$, 那么存在实数 α 使得 $f(z)=Me^{\mathrm{i}\alpha}$.

(2) (7 分) 计算积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=R}\dfrac{z+a}{z-a}\dfrac{\mathrm{d}z}{z}, (|a|<R)$, 并且由此证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta=1.$$

(3) (7 分) 函数 $w=f(z)=\dfrac{3z-\mathrm{i}}{3\mathrm{i}z-1}$ 把下半平面 $\operatorname{Im} z<0$ 变成复平面中的什么区域? (给出你的答案和论证过程)

(4) (9 分) 设 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$0<r<1$. 证明:

i. $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\overline{f(z)}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z=0,\quad (n\geq 1).$

ii. 设 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则 $a_n=\dfrac{1}{\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\dfrac{u(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z, (n\geq 1).$

iii. $\overline{f(0)}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=r}\dfrac{\overline{f(z)}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$，其中 $|z_0|<r$.

2021-2022 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. (30 分) 填空题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) $\mathrm{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}=$________________

(2) 曲线 $|z-1|=1$ 在函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 下的像为（写出表达式）________________

(3) 若函数 $f(z)=my^3+nx^2y+\mathrm{i}\left(x^3+lxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，那么实数常数 m,n,l 值分别为____________

(4) 如果函数 $f: D\to G$ 是区域 D 到区域 $G=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,w>0\}$ 的解析函数，那么函数 $\arg f(z)$ ____（填写“是”或“否”）为调和函数.

(5) 设 $u(x,y)=y^2-x^2+2021y$，那么它的共轭调和函数 $v(x,y)$ 为________________

(6) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 R, 那么级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-1\right)a_nz^n$ 的收敛半径为________________

(7) 设 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{z-2}}}{z\left(1-\mathrm{e}^{-z}\right)}$，给出 $f(z)$ 的全体奇点（不包括 ∞），并且指出每个奇点的类型（极点指出阶数）：

____

____

(8) $\mathrm{Res}\left(z^3\cos\dfrac{1}{z-2},2\right)=$________________

设 n 为正整数，那么 $\mathrm{Res}\left(z^n\sin\dfrac{1}{z},0\right)=$________________

(9) 方程 $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ 在区域 $|z|<1$ 内根的个数为________________

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ 在 $z=0$ 处泰勒（Taylor）展开，并且给出所得幂级数的收敛半径.

(2) 将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)\left(z^2+1\right)}$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$ 内展成罗朗（Laurent）级数.

(3) 设 $D=\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,z>-\dfrac{1}{2}\right\}$，设 γ 为区域 D 内从 0 到 1 的不经过 i 任意简单曲线，计算积分 $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$，其中 C 为不过点 0 和 1 的简单闭曲线.

(5) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cot(x+1-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}x$.

(6) 利用留数计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 利用拉氏（Laplace）变换求解微分方程：

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) + 4\displaystyle\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 为区域 D 内的解析函数，γ 为 D 内简单闭曲线，其内部包含于 D. 设 a 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 n 阶零点，b 为 $f(z)$ 在 γ 内部的 m 阶极点，$f(z)$ 在 γ 内除了 b 外没有其它奇点，在 γ 上没有零点和奇点. 证明：

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \sin z\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(n\sin a - m\sin b).$$

(3) 求一保形变换 $w = f(z)$，将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z| < 2\}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$，并且满足 $f(-1) = 0$.（请画出必要的示意图）

(4) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内解析，且满足 $\left|f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi;\ \left|f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \le 3,\ \pi \le \theta \le 2\pi$. 证明：

$$|f(0)| \le \sqrt{6}$$

2022-2023 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (30 分) 基础知识

(1) 求下列值：(a) $\ln(2+2\mathrm{i})$ (b) $\cos(3+\mathrm{i})$

(2) 已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 解析，虚部 $v(x,y)=x^2-y^2+2x, f(0)=22$，求实部 $u(x,y)$.

(3) 求积分：$\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+2\mathrm{i}z+\mathrm{i}\mathrm{e}^{z})\,\mathrm{d}z$

(4) $f(z)=\sin z+\dfrac{3z}{(1-z)^2}$，把 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 展成 z 的幂级数.

(5) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$，把 $f(z)$ 在区域 $0<|z-2|<1$ 展开为罗朗级数.

(6) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$，指出 $f(z)$ 的所有奇点 (不包含 ∞)，并指出每个奇点的类型 (极点指出阶数).

2. (36 分) 计算积分（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) $\displaystyle\int_{|z|=5}\frac{\mathrm{e}^{5z}}{2z}\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=3}\left(\frac{5}{z-1}+z^2+2z^2\sin\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos 2z}{z^3\left(1+\mathrm{e}^{z}\right)}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z\left(\mathrm{e}^{7z}-1\right)}.$

(5) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin 3x}{\left(x^2-2x+4\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

(6) $\displaystyle\int_{|z-2|=1}\frac{z+3}{|z|^4}\,\mathrm{d}z.$

3. (34 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) (6 分) 确定方程 $z^{2021}+e^{2022z}=2023$ 在左半平面的根的个数，并说明理由.

(2) (10 分) 求一保形变换 $w=w(z)$，将半圆区域 $D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,|z|<2\}$ 变为单位圆内 $|w|<1$, 使得 $w(1)=\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$.（请画出必要的示意图）

(3) (10 分) 利用 Laplace 变换求解方程组：

$$\begin{cases} 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=1 \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t\mathrm{e}^{2t} \\ x(0)=2, y(0)=0 \end{cases}$$

(4) (8 分) 当 $|z|\le 1$ 时，函数 $f(z)$ 解析，且 $|f(z)|\le 1$, 又已知 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 3 级零点，求证：在 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 满足不等式

$$|f(z)|\le|z|^3$$

2023-2024 学年第一学期复变函数（A）期末试题

1. ($5\times 6=30$ 分) 基础知识

   (1) 求下列值：

   (a) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$ (b) $\ln\mathrm{i}+\sin 2\mathrm{i}$

   (2) 已知解析函数 $f(z)$ 的导数为 $f'(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，虚部 $v(x,y)=x^2-y^2+2xy, f'(0)=f(0)=0$，求 $f(z)$.

   (3) 求积分：$\displaystyle\int_C |z|^2\,\mathrm{d}z$，其中曲线 C 是从 $z=\mathrm{i}$ 到 $z=1$ 的有向线段.

   (4) 求积分：$\displaystyle\int_0^{\pi}(1+z\cos(\mathrm{i}z))\,\mathrm{d}z$

   (5) $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)^2}{z(z-2)(\sin z)^3}+\mathrm{e}^{z+\frac{1}{z-1}}$，指出 $f(z)$ 的所有奇点 (不包含 ∞)，并指出每个奇点的类型 (极点指出阶数).

   (6) $f(z)=\mathrm{e}^{2z}$，求 $f(z)$ 的模在闭圆 $|z|\leqslant 3$ 中的最大值.

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

   (1)（8 分）求函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}+\mathrm{e}^z$ 在 $z=3$ 处的泰勒 (Taylor) 展开，并且给出所得幂级数的收敛半径.

   (2)（8 分）将函数 $f(z)=\ln\left(1+\dfrac{2}{1-z}\right)$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}:2023<|z|<\infty\}$ 内展成罗朗 (Laurent) 级数.

   (3)（6 分）计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-3)^2(z^5-1)}$.

   (4)（6 分）计算积分 $\displaystyle\int_{|z-3\mathrm{i}|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{\operatorname{Im}z}$.

   (5)（6 分）计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{(z-1)\overline{\sin z}}\,\mathrm{d}z$.

   (6)（6 分）利用留数计算积分 V.P.$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\mathrm{e}x)}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

   (1)（8 分）利用 Laplace 变换求解方程组：

$$\begin{cases} x'(t)+2x(t)+6\displaystyle\int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t=-2 \\ x'(t)+y'(t)+y(t)=0 \\ x(0)=-5,\quad y(0)=6 \end{cases}$$

(2) (7 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n!}$ 的和函数.

(3) (8 分) 求保形变换 $w = w(z)$，将区域 $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}, |z-1| < 1\right\}$ 映为区域 $G = \left\{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < \frac{\pi}{4}\right\}$.

(4) (7 分) 设 $0 < r < 1$，证明：当 n 充分大时，多项式

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

在 $|z| < r$ 中没有零点.

2024-2025 学年第一学期复变函数 (A) 期末试题

1. (30 分) 填空题

(1) 求方程 $\ln z = 2 - \dfrac{\pi}{6}\mathrm{i}$ 的解.

(2) 设 $z = x + y\mathrm{i}$，函数 $f(z) = x^2 - kx - y^2 + 1 + \mathrm{i}(kxy - ky)$ 解析，求实数 k 的值.

(3) 已知 C 是从 π 到 $\pi\mathrm{i}$ 的有向线段，求积分 $\displaystyle\int_C (\sin(2z) + \mathrm{e}^{\frac{z}{\pi}})\,\mathrm{d}z$.

(4) 已知函数 $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$，求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 满足 $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

(5) $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{x^2(\sin z + \cos z)} + \sin\left(\dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}\right)$，指出 $f(z)$ 的所有奇点 (不包含 ∞)，并指出每个奇点的类型 (极点指出阶数).

(6) 求方程 $z^{2024} - 2023z^8 + 10\cos z - 9\sin z + 8 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 内的解的个数.

2. (40 分) 计算题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 写出函数 $f(z) = \ln(1 + \mathrm{e}^z)$ 在 $z = 0$ 处的泰勒 (Taylor) 展开的前 5 项，并求出幂级数的收敛半径.

(2) 求函数 $f(z = \dfrac{z^2\mathrm{e}^{3z}}{(z-1)^3}$ 在区域 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < \infty\}$ 内的罗朗 (Laurent) 展开.

(3) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z \cos z}{(z - 2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$.

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^4 \sin^2(2z)}{(1 - \mathrm{e}^z)^7}\,\mathrm{d}z$.

(5) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{(1 - \cos z)^2}\,\mathrm{d}z$.

(6) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z - 3)(z^5 - 1)}\,\mathrm{d}z$.

(7) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{a\cos x} \sin(a \sin x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x$，其中 $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(8) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 9)}\,\mathrm{d}x$

3. (30 分) 综合题（本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向）

(1) 利用 Laplace 变换解方程组

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) - 2y(t) = 1 \\ 2x(t) + y'(t) - y(t) = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 求保形变换 $w = f(z)$ 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2, \operatorname{Re} z < 0\}$ 变为 $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 1\}$.（请画出必要的示意图）

(3) i. 计算积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{z+a}{z-a}\frac{\mathrm{d}z}{z}$, $(|a|<R)$，并由此证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|a|^2}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-a|^2}\,\mathrm{d}\theta=1$$

ii. 已知 $P_n(z)$ 是 n 次多项式，其中 $n\geqslant 1$ 为自然数. 已知当 $|z|\leqslant 1$ 时，$|P_n(z)|\leqslant M$. 设 $R>1$，试证明：当 $|z|\leqslant R$ 时，

$$|P_n(z)|\leqslant MR^n$$

iii. 在问题 ii. 的条件下，即 $P_n(z)$ 是 n 次多项式，其中 $n\geqslant 1$ 为自然数. 已知当 $|z|\leqslant 1$ 时，$|P_n(z)|\leqslant M$. 设 $R>1$，试证明：当 $|z|\leqslant 1$ 时

$$|P_n'(z)|\leqslant\frac{MR^{n+1}}{R^2-1}$$

2003-2004 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (20 分) 填空.

(1) 设方程 $z^3=\overline{z}$, 则 $z=$ ____________.

(2) 求复对数的单值解析分支 ____________, 使得 $\ln(-\mathrm{i})=\dfrac{3\pi}{2}\mathrm{i}$, 其辐角主值是 ____________.

(3) 设复函数 $f(z)=x^4+\mathrm{i}y^2$, 则 $f(z)$ 的可微点是 ____________. $f(z)$ 的解析点是 ____________.

(4) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1,\mathrm{Im}z\geqslant 0}\overline{z}dz=$ ____________. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{(z+1)^3}dz=$ ____________.

(5) $\mathrm{Res}\Big(z^{-2}\sin^3\dfrac{1}{z},0\Big)=$ ____________. $\mathrm{Res}\Big(\dfrac{1-\cos 7z}{z^3},0\Big)=$ ____________.

2. (20 分)

(1) 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $x+y$, 且 $f(1)=\mathrm{i}$, 求 $f(z)$.

(2) 判别方程 $z^5-6z^3+2z^2+7=0$ 在圆环 $2<|z|<3$ 内有多少个根.

3. (20 分)

(1) 已知 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$, 求 $f(z)$ 在 $|z-1|<1$ 及 $0<|z|<2$ 内的级数展开式.

(2) 设 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析, $f(z)$ 在 a 点附近不恒为 0, 而 $f(a)=0$. 证明 $z=a$ 为 $f(z)$ 在 a 点的某个邻域内的唯一零点.

4. (20 分) 计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\cos^2\theta}$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$

5. (20 分) 用拉氏变换解方程.

(1) $\begin{cases} y''(t)-y(t)=4\sin t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\cos t \\ y'(t)-y(t)+x(t)=0 \\ x(0)=0,\ y(0)=1 \end{cases}$

2006-2007 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (16 分 =2 分 ×8) 填空题. (写出复数的标准式 $a+b\mathrm{i}$ 或指数表示 $r\mathrm{e}^{i\theta}$ 均可)

(1) $(1+\mathrm{i})^2 =$ ____________

(2) $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})^2} =$ ____________

(3) $\sin(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(4) $\mathrm{ch}(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(5) $\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) =$ ____________

(6) $(1+\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} =$ ____________

(7) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} =$ ____________

(8) $\sinh^{-1}\ \mathrm{i} =$ ____________

2. (25 分 =5 分 ×5) 设 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)^4}$，试求:

(1) $f(z)$ 在环域 $0<|z|<1$ 内的罗朗级数展开式.

(2) $f(z)$ 在环域 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗级数展开式.

(3) $f(z)$ 在环域 $|z|>1$ 内的罗朗级数展开式.

(4) $f(z)$ 在 $z=4$ 处的罗朗级数展开式.

(5) 求 $\mathrm{Res}[f(z),0]$, $\mathrm{Res}[f(z),1]$, $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$.

3. (36 分 =6 分 ×6)(1-4 小题的闭路积分方向均沿逆时针).

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \overline{z}\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-\overline{z})}\,\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{\overline{z}}{2}}\,\mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=10} \frac{\cos z}{\sin z}\,\mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{5-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$

4. (8 分) 解析函数 $f(z)$ 的实部为 $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2+y^2+2x+y$, 且 $f(0)=0$, 求 $\mathrm{Im}\, f(z)$, 并求 $f'(1+\mathrm{i})$.

5. (5 分) 若在 $|z|\leqslant 1$ 上 $f(z)$ 解析, 且在 $|z|=1$ 上 $|f(z)|<1$, 求证: 在 $|z|<1$ 内存在唯一的点 z_0, 使得 $f(z_0)=z_0$.

6. (10 分) 利用拉普拉斯变换求初值问题.

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-2y(t)=1\ (t>0) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1 \end{cases}$$

2007-2008 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (12 分) 求解下列方程:

   (1) $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

   (2) $e^z = 3 + 4\mathrm{i}$

   (3) $\cos(2 + z) = 3$

2. (12 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 实部 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y + 1$, 且 $f(0) = 1$, 求虚部 $v(x, y)$ 和 $f'(0)$.

3. (15 分 =5 分 ×3) 已知 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 4}$.

   (1) 在 $|z| < 1$ 内把 $f(z)$ 展为 z 的幂级数.

   (2) 在 $0 < |z - 1| < 3$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

   (3) 在 $1 < |z| < 4$ 上把 $f(z)$ 展为罗朗级数.

4. (36 分 =6 分 ×6) 求下列积分 (其中凡闭路积分沿逆时针方向)

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z,\ C : |z| = 3.$

   (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + 2\sin^2\theta}.$

   (3) $\displaystyle\oint_C \frac{z - \sin z}{z^6}\,\mathrm{d}z,\ C : |z| = 1.$

   (4) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^7 - 2z^4},\ C : |z| = 1.$

   (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 16}.$

   (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 2x + 5)}\,\mathrm{d}x.$

5. (12 分) 用 Laplace 变换的方法求解处值问题:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

6. (6 分) 求方程 $z^4 + 7z + 1 = 0$ 在圆环 $\dfrac{3}{2} < |z| < 2$ 的根的个数, 并说明理由.

7. (7 分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 区域 D 内解析, $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是 D 内的一个点列, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in D$, 如果对于任意的 k, 都有 $f(a_k) = g(a_k)$, 求证: 在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$ 成立.

2009-2010 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (6 分 =3 分 ×2)

   (1) 若 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$, 其中 a,b 为实数, 请求出 a,b 的值.

   (2) 若 $1+\sin 2\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$, 其中 c,d 为实数, 请求出 c,d 的值.

2. (9 分 =3 分 ×3) 求解以下复方程:

   (1) $z^4+2=0$　　(2) $e^z=\mathrm{i}$

3. (9 分) 已知复变函数 $f(z)$ 解析, 其实部 $u(x,y)=x^2-y^2+2y$, 且 $f(0)=\mathrm{i}$, 求其虚部 $u(x,y)$, 并求 $f'(0)$.

4. (16 分 =6 分 +5 分 +5 分)

   (1) 设 $f_1(z)=\dfrac{1}{1-3z}, f_2(z)=\dfrac{z}{(1-3z)^2}$. 请把 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在区域 $|z|<\dfrac{1}{3}$ 展成 z 的幂级数.

   (2) 设函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z-6)}$. 在环域 $3<|z|<6$ 内把 $f(z)$ 展成 z 的罗朗级数.

   (3) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$. 在区域 $0<|z-2|<2$ 内把 $f(z)$ 展为 $z-2$ 的罗朗级数.

5. (21 分 =5 分 ×3+6 分) 计算复积分.

   (1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$

   (2) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^2(1+e^{\frac{1}{z}})\,\mathrm{d}z$

   (3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z-5)}$

   (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^5(2-z)}$

6. (18 分 =6 分 ×3) 计算定积分.

   (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}$

   (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

   (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

7. (16 分 =8 分 ×2) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

   (1) $\begin{cases} y''(t)+y'(t)=2 \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} y''(t)-2y'(t)+y(t)=t\mathrm{e}^{2t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$

8. (5 分) 记 $C=\left\{z\middle||z|<R, R>0\right\}, H=\left\{z\middle||z|<R, 0<\alpha<\arg z<\beta<\dfrac{1}{2}\pi\right\}$, 这样 H 为圆域 C 内的一个扇形区域, 设有复变函数 $f(z)$ 在 C 内解析, 且在 H 内为常数. 求证: $f(z)$ 在 C 内必为常数.

2017-2018 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (30 分) 基础知识.

(1) 求解以下复方程:

(a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 2017$　　(b) $(z-3)^4 = 1$

(2) 已知调和函数 $v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数 a，并求出以 $v(x,y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

(3) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nz^{n-1}}{2^n}$，求收敛半径 R，并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

(4) 已知 $f(z) = z^3\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$，把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 展成 Laurent 级数

(5) 求 $z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 的根的个数，并说明理由.

2. (30 分) 计算以下复积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{3\mathrm{i}} (2z + 3z^2)\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2}\,\mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(\frac{1}{z-1})}{z^4}\,\mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2}|\,\mathrm{d}z|$

3. (14 分) 计算以下定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(5-4\cos\theta)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4+1)}\,\mathrm{d}x$

4. (10 分) 利用 Laplace 变换解微分方程初值问题: $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = t\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 2017. \end{cases}$

5. (6 分) 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及内部解析，$g(z)$ 在围道 C 上没有零点，在 C 内 $g(z)$ 有唯一的零点 a. 已知 $f(a) = p_1 \neq 0$, $f'(a) = p_2$, $f''(a) = p_3$. 而 $g'(a) = 0$, $g''(a) = q_1 \neq 0$, $g'''(a) = q_2$, $g''''(a) = q_3$. 计算积分: $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z$.

6. (10 分) 设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $(a_0 \neq 0)$ 的收敛半径 $R > 0$.

(1) 记 $M(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r} |f(z)|$ $(0 < r < R)$，利用 Cauchy 积分公式证明: $|f^{(n)}(0)| \leqslant \dfrac{n!M(r)}{r^n}$.

(1) 证明: 当 $|z| < \dfrac{|a_0|r}{|a_0| + M(r)}$ 时，函数 $f(z)$ 无零点. (其中 $r < R$)

2019-2020 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 求解以下复方程:

(1) $z^3 = -3\bar{z}(z \neq 0)$

(2) $\sin z = 3$

2. (7 分) 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = e^{\alpha y}\cos 3x + 3x$，其中 $\alpha > 0$ 且 $f(0) = 1$，求常数 α，并求出解析函数 $f(z)$.（请用 z 表示函数 $f(z)$）

3. (10 分)

(1) 把 $f(z) = z^5 e^z$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数，并指出收敛区域.

(2) 把 $g(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0 < |z-2| < 2$ 展开成洛朗级数.

4. (36 分 =6 分 ×6) 计算复积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi i} \left(2019z^2 - \cos z\right) \mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=6} \left(2019z^2 - \cos z\right) \mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2 - 8z + 5}{z^3(z+2)(z-3)^2}\mathrm{d}z$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)}{4-z}\mathrm{d}z$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z+5}{1-\cos(z-2)}\mathrm{d}z$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-i|^4}$

5. (14 分 =7 分 ×2) 求以下定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{3 - 2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 4x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

6. (5 分) 判断方程 $z^9 = 8z^3 + 2z^2 + z + 2$ 在 $1 < |z| < 5$ 的根的个数，并说明理由.

7. (10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos 2t, \\ y(0) = 4, y'(0) = 0. \end{cases}$$

8. (8 分) 已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析，函数 $g(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 解析，且存在常数 M，使得在 $|z| > 1$ 时，$|g(z)| < M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - a} - \frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)}\right)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(a)\ , & \text{当}|a| < 1, \\ g(a)\ , & \text{当}|a| > 1. \end{cases}$$

2019-2020 学年第一学期复变函数（B）期末试题（补考）

1. (12 分) 求解以下复方程:

(1) $z^2-2019z+2018=0$ (2) $e^z=5+i$

2. (12 分) 利用柯西-黎曼方程求以下函数的可微点:

(1) $f(z)=xy+iy$ (2) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$

3. (30 分 =10 分 ×3) 计算复积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2i}(2019e^z-4\cos 4z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{\sin z}{(z-1)(z-8)^2}\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=9}\frac{e^z}{16+z^2}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{(z^4+1)\sin^2 z}\,\mathrm{d}z.$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^z|\mathrm{d}z|}{|z-1|^4}.$

4. (14 分) 求以下定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2i}\frac{1}{(10-8\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}\mathrm{d}x.$

5. (8 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases}y''-2y'+2y=te^t,\\ y(0)=1,y'(0)=2.\end{cases}$$

6. (24 分 =10 分 +7 分 +7 分)

(1) 设 $f(z)=\dfrac{1}{\cos 2z}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\cdots$，请求出 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4，并计算积分

$$\int_{|z-1|=2}\frac{2019}{z^5\cos 2z}\mathrm{d}z.$$

(2) 计算积分方程

$$f(t)=\sin 2t+\int_0^t\sin 2(t-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

(3) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ 收敛，$|\arg c_n|\le\dfrac{\pi}{3}$，求证：$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|$ 收敛.

2020-2021 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数，并指出其收敛半径.

2. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z}$ 在 $1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

3. (5 分) 计算 $(2020+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$.

4. (5 分) 计算 $\arccos 2$.

5. (10 分) 求 a 使得 $v(x,y)=ax^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

6. (30 分 =6 分 ×5) 求积分 (所有路径均为逆时针)

   (1) $\displaystyle\int_C (e^z+3z^2+1)\,\mathrm{d}z, C:|z|=2, \operatorname{Re} z<0$

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}, C:|z|=3$

   (1) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z(z+6)(z-5)}, C:|z|=4$

   (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

   (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$

7. (10 分) 求方程 $z^8+e^z+6z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 中根的个数, 并说明理由.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=te^t, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z|>r>0$ 上的解析函数. 证明：若对于 $|a|>R>r$, $\lim\limits_{z->\infty} f(z)=f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz=0$$

.

2024-2025 学年第一学期复变函数 (B) 期末试题

1. (每小题 7 分，共 35 分) 简答题：

(1) 计算：1) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$；2) $\mathrm{Ln}(\pi \mathrm{i})$.

(2) 解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，并且 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$，$f(0)=1$，求 f 的表达式.

(3) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin z$ 在 $z=1$ 处的泰勒展开并求收敛半径.

(4) 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-6z+8}$ 在 $z=3$ 处的洛朗展开.

(5) 求 $z^{2024}-2024z^3+\sin z$ 在 $1<|z|<2$ 内的根的个数.

2. (每小题 7 分，共 49 分) 积分计算：

(1) $\displaystyle\int_C (\bar{z}+|z|z)\,\mathrm{d}z$，其中 C 是从 0 到 $1+\mathrm{i}$ 的有向线段并上从 $1+\mathrm{i}$ 到 $\sqrt{2}\mathrm{i}$ 沿着逆时针方向以 $\sqrt{2}$ 为半径的八分之一圆周.

(2) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{\sin^3 z}\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{1-\cos z}{z^2(z^2-7z+10)}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z.$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z-1|^2}.$

(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{3+2\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(x+\mathrm{i})^4}\,\mathrm{d}x.$

3. (8 分) 微分方程求解：

$$\begin{cases} x'(t)-2y(t)=2\sinh(2t) \\ 2x(t)-y'(t)=\cosh(2t) \\ x(0)=1,\ y(0)=0 \end{cases}$$

4. (8 分) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且满足 $|f'(z)|\leqslant\dfrac{1}{1-|z|}$，证明：泰勒展开 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 的系数 a_n 满足 $|a_n|\leqslant \mathrm{e},\ n\geqslant 1$.