

中国科学技术大学

2022—2023学年第二学期随堂测试

一、判断题与填空题(30分, 每题5分)

1. $\{X_n\}$ 是 Markov 链, i 是常返态, 且 $i \leftrightarrow j$, 则 j 为常返态. ()
2. 宽平稳过程不一定是严平稳过程, 严平稳过程一定是宽平稳过程. ()
3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 X 的矩母函数为_____;
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链, 状态空间为 I , 初始概率 $p_i = \mathbf{P}(X_0 = i)$, 绝对概率 $p_j(n) = \mathbf{P}(X_n = j)$, n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$, 三者之间的关系为_____;
5. 状态 i 常返的充要条件为 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{ii}^{(n)} = \infty$ _____;
6. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\{Y_k, k = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立同分布随机变量, 且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 令 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0$, 若 $\mathbf{E}Y_1^2 < \infty$, 则 $\mathbf{E}[X(t)] = \lambda t$.

二、(15分) 设某路段发生交通事故的次数 $N(t)$ 为一Poisson过程, 且平均每月发生交通事故 2 次, $t = 0$ 表示去年12月底, 试求:

- (1) 到今年3月底为止未发生交通事故的概率是多少?
- (2) 若已知到今年3月底已发生了4次交通事故, 问到6月底至少发生7次交通事故的概率是多少?
- (3) 若每次事故造成的经济损失 Y (单位: 万元) 服从参数为0.1的指数分布, 且各次损失相互独立, 试求到6月底为止因交通事故而造成的总损失的期望值.

三、(20分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求质点由 k 出发而被0吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 $\nu_k, k = 1, 2, 3$.

四、(20分) 考虑状态空间为 $S = \{0, 1, 2, 3\}$ 的离散时间Markov链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (1) 判断四个状态的常返性, 瞬过性及周期性;

(2) 试求出其平稳分布 $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$;

(3) 记 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = (a_{ij})_{4 \times 4}$, 求 A .

五、(15分) 设 $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, ω 是常数, A 与 B 为相互独立的随机变量, 且 $A \sim N(0, 1)$, $B \sim N(0, 1)$. 验证 $X(t)$ 是否为宽平稳过程.