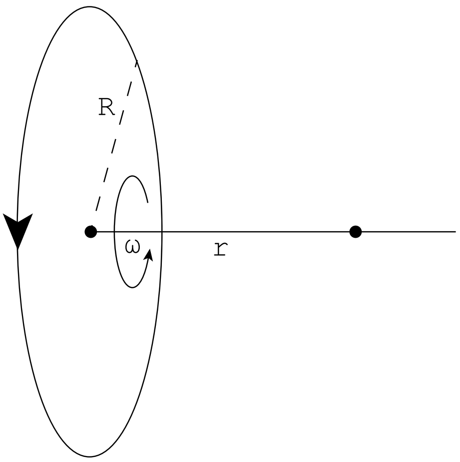
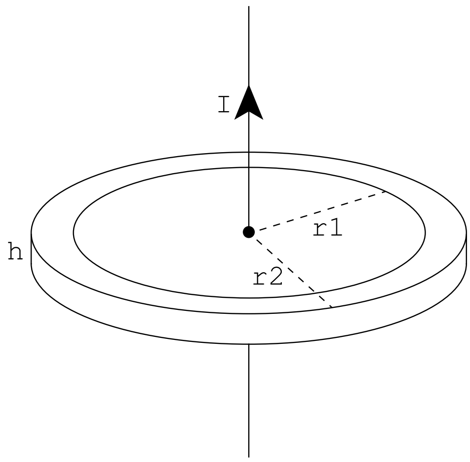
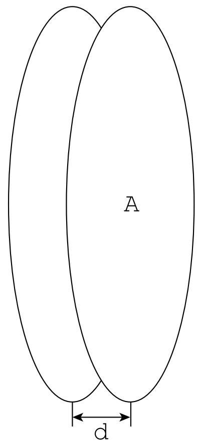
2022年秋季学期电磁学C期末试卷

一、【共 10 分】默写 Maxwell 方程组，并且证明它同时应证了电荷守恒定律。







二、【共 15 分】

如左边的图所示，电子做圆周运动，其角速度为 ω，半径为 R，电子的电荷量为 $-e$。

(1) 求在轴线上，距离圆心为 r 处的磁感应强度。

(2) 求电子做圆周运动对应的磁矩 $\mathbf{m}$。

(3) 令电子做圆周运动对应的角动量「以圆心为参考点」为 $\mathbf{L}$，证明 $\mathbf{m} = -\dfrac{e}{2m_e}\mathbf{L}$，其中 m_e 是电子的质量。

三、【共 15 分】

如中间的图所示，环形螺线管的高度为 h，内半径与外半径分别为 r_1, r_2，上面绕有 N 匝线圈「图中未画出」。环形螺线管的轴线处有一根无限长直导线，通过的电流强度为 I。

(1) 求环形螺线管内部的磁感应强度。

(2) 求环形螺线管与无限长直导线之间的互感系数。

(3) 求环形螺线管内部的磁场能量。

四、【共 15 分】

如右边的图所示，电容器由两块圆形导体板构成，两块导体板的面积均为 A，它们之间的距离为 d，现在让左边的导体板带上 $q = q_0 \sin \omega t$ 的电荷量，其中 q_0, ω 是常数。

(1) 求两块导体板之间的位移电流 $\mathbf{J}_D$。

(2) 求两块导体板之间的磁感应强度。

(3) 求流入电容器的功率。

五、【共 15 分】

「原题目有表述问题，无法作答，我修改了一下题目」

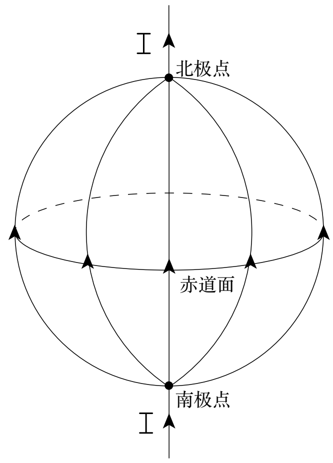
在真空中，可能存在磁场满足 $\operatorname{curl} \mathbf{B}(x,y,z,t) = a\mathbf{B}(x,y,z,t)$，$\mathbf{B}(x,y,z,t)$ 是在时刻 t 时 $\mathbf{r} = (x,y,z)$ 处的磁感应强度，$a > 0$。

(1) 证明这样的磁场满足 Maxwell 方程组。

(2) 「无法作答」请在平面直角坐标系中，构建出一种满足题目情况的磁场。

六、【共 15 分】

如图所示，导体球壳的半径为 R，北极点与南极点均连接一根无限长直导线，电流从南极点连接的无限长直导线流入，从北极点连接的无限长直导线流出。



(1) 求球壳上任意一点的电流密度。

(2) 求赤道面上任意一点附近的磁感应强度。

(3) 已知球内部的磁感应强度处处为 0。根据边界条件，求球面上任意一点附近的磁感应强度。

七、【共 15 分】

圆盘的半径为 a，厚度为 d。部分区域有磁场分布，方向垂直于圆盘，大小为

$$B = \begin{cases} B_0 + \lambda t, & 0 \le r < R, \\ 0, & R \le r \le a, \end{cases}$$

其中 r 是圆盘上的任意一点与圆心之间的距离，R 是常数，$R < a$。

(1) 如果圆盘是导体，求圆盘上任意一点的电场强度。

(2) 如果圆盘是导体，电导率为 σ，求圆盘耗散的焦耳热总功率。

(3) 如果圆盘是绝缘体，并均匀分布电荷，其中电荷密度为 ρ，圆盘的质量为 m，求圆盘在任意时刻 t_0 的角速度。

答案

一、【共 10 分】「你就算记不住你女朋友的生日也请务必把这个记住」

$$
\begin{cases}
\text{div } \mathbf{D} = \rho, & (1)\\
\text{div } \mathbf{B} \equiv 0, & (2)\\
\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (3)\\
\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & (4)
\end{cases}
$$

「如果没有明确说明，最好写上电磁介质中的 Maxwell 方程组」

因为 $\text{div} \circ \text{curl} \equiv 0$，对 (4) 的两边求散度可得

$$0 = \text{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial(\text{div } \mathbf{D})}{\partial t},$$

根据 (1) 可得

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

应证了电荷守恒定律。

二、【共 15 分】

(1)

电子运动等效的电流强度为

$$I = \frac{-e}{T} = -\frac{e}{2\pi/\omega} = -\frac{e\omega}{2\pi},$$

因此，在轴线上，距离圆心为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 e \omega R^2}{4\pi (R^2 + r^2)^{3/2}}.$$

(2)

电子做圆周运动对应的磁矩为

$$m = I\pi R^2 = -\frac{1}{2} e\omega R^2.$$

(3)
电子做圆周运动对应的角动量「以圆心为参考点」为

$$L = m_e \omega R^2,$$

因此

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}.$$

三、【共 15 分】

(1)
选取半径为 $r(r_1 < r < r_2)$ 的环路，根据磁场的环路定理可得

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I,$$

因此

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

(2)
环形螺线管横截面的磁通量为

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B(r) h \, dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1},$$

互感系数为

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

(3)
环形螺线管内部的磁能密度为

$$u_m(r) = \frac{B(r)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2},$$

环形螺线管内部的磁场能量为

$$W = \int_{r_1}^{r_2} u_m(r) 2\pi r h \, dr = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

四、【共 15 分】

(1)
电容器内部的电场强度为

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q_0}{\epsilon_0 A}\sin\omega t,$$

位移电流为

$$J_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{q_0\omega}{A}\cos\omega t\,.$$

(2)
选取半径为 $r(r < \sqrt{A/\pi})$ 的环路，根据 Maxwell 方程组可得

$$B(r)2\pi r = \mu_0 J_D \pi r^2,$$

因此

$$B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 J_D r = \frac{\mu_0 q_0 \omega r}{2A}\cos\omega t,$$

(3)
电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d},$$

电容器储存的能量为

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2 d}{2\epsilon_0 A}\sin^2\omega t,$$

流入电容器的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{q_0^2 d\omega}{2\epsilon_0 A}\sin 2\omega t\,.$$

五、【共 15 分】

(1)
因为 $\mathrm{div} \circ \mathrm{curl} \equiv 0$，对 $\mathrm{curl}\ \mathbf{B} = a\mathbf{B}$ 的两边求散度可得

$$a\,\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0,$$

因此

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0.$$

(2)
根据 Maxwell 方程组

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

「在真空中，电流密度 $\mathbf{J} \equiv 0$」

因此

$$a\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

两边求旋度得

$$a\,\mathrm{curl}\ \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathrm{curl}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\mathrm{curl}\ \mathbf{E})}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

因此

$$a^2\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

令 $\mathbf{B}(x,y,z,t)=\mathbf{F}(x,y,z)g(t)$，其中 $\mathbf{F}(x,y,z)\neq 0$，可得

$$a^2\mathbf{F}(x,y,z)g(t)=-\frac{1}{c^2}\mathbf{F}(x,y,z)g''(t),$$

$$g''(t)+(ac)^2g(t)=0,$$

$$g(t)=C_1e^{iact}+C_2e^{-iact},$$

其中 C_1,C_2 均为常数。

令

$$g(t)=e^{-iact},$$

因为 $\text{curl }\mathbf{B}=a\mathbf{B},\text{div }\mathbf{B}=0$，所以

$$\text{curl }\mathbf{F}=a\mathbf{F},$$

$$\text{div }\mathbf{F}=0,$$

而 $\text{curl}\circ\text{curl}=\text{grad}\circ\text{div}-\Delta$，对 $\text{curl }\mathbf{F}=a\mathbf{F}$ 的两边求旋度可得

$$\text{grad}\circ\text{div }\mathbf{F}-\Delta\mathbf{F}=a\,\text{curl }\mathbf{F},$$

因此

$$-\Delta\mathbf{F}=a\,\text{curl }\mathbf{F}=a^2\mathbf{F},$$

$$\Delta\mathbf{F}+a^2\mathbf{F}=0,$$

令 $\mathbf{F}=(F_1,F_2,F_3)$，可得

$$\begin{cases}\Delta F_1+a^2F_1=0,\\ \Delta F_2+a^2F_2=0,\\ \Delta F_3+a^2F_3=0,\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}F_1=F_{10}e^{ia_{11}x}e^{ia_{12}y}e^{ia_{13}z},\\ F_2=F_{20}e^{ia_{21}x}e^{ia_{22}y}e^{ia_{23}z},\\ F_3=F_{30}e^{ia_{31}x}e^{ia_{32}y}e^{ia_{33}z},\end{cases}$$

其中 $F_{10}, F_{20}, F_{30}, a_{11}, \ldots, a_{33}$ 均为常数，并且满足

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = a^2, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a^2, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a^2, \end{cases}$$

代入 curl $\mathbf{F} = a\mathbf{F}$，可得

$$\begin{cases} a_{11} = a_{21} = a_{31}, \\ a_{12} = a_{22} = a_{32}, \\ a_{13} = a_{23} = a_{33}, \end{cases}$$

否则指数项无法抵消。令这三行分别等于 a_1, a_2, a_3，因此

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2,$$

F_1, F_2, F_3 可以化为

$$\begin{cases} F_1 = F_{10} e^{ia_1 x} e^{ia_2 y} e^{ia_3 z}, \\ F_2 = F_{20} e^{ia_1 x} e^{ia_2 y} e^{ia_3 z}, \\ F_3 = F_{30} e^{ia_1 x} e^{ia_2 y} e^{ia_3 z}, \end{cases}$$

代入 curl $\mathbf{F} = a\mathbf{F}$，可得

$$\begin{cases} i(a_2 F_{30} - a_3 F_{20}) = aF_{10}, \\ i(a_3 F_{10} - a_1 F_{30}) = aF_{20}, \\ i(a_1 F_{20} - a_2 F_{10}) = aF_{30}, \end{cases}$$

为了简化计算，令

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

可得

$$\begin{cases} i(F_{30} - F_{20}) = \sqrt{3} F_{10}, \\ i(F_{10} - F_{30}) = \sqrt{3} F_{20}, \\ i(F_{20} - F_{10}) = \sqrt{3} F_{30}, \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} F_{10} = A, \\ F_{20} = Ae^{2\pi i/3}, \\ F_{30} = Ae^{4\pi i/3}, \end{cases}$$

其中 A 是一个常数。因此

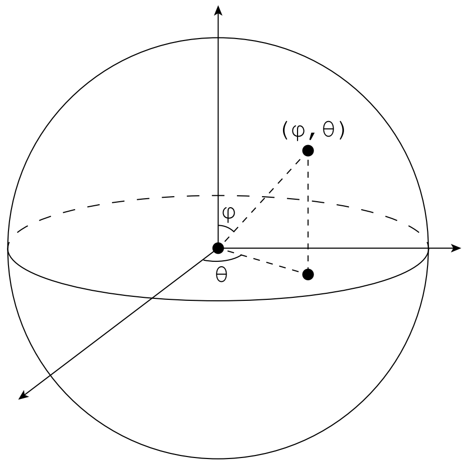
$$\begin{cases} F_1 = A e^{ia(x+y+z)/\sqrt{3}}, \\ F_2 = A e^{2\pi i/3} e^{ia(x+y+z)/\sqrt{3}}, \\ F_3 = A e^{4\pi i/3} e^{ia(x+y+z)/\sqrt{3}}, \end{cases}$$

代入 $\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{F}(x, y, z) g(t)$，可得

$$\begin{cases} B_1 = A e^{ia((x+y+z)/\sqrt{3}-ct)}, \\ B_2 = A e^{2\pi i/3} e^{ia((x+y+z)/\sqrt{3}-ct)}, \\ B_3 = A e^{4\pi i/3} e^{ia((x+y+z)/\sqrt{3}-ct)}, \end{cases}$$

这个是方程 $\mathrm{curl}\ \mathbf{B} = a\mathbf{B}$ 其中一个解。

六、【共 15 分】



令 $U = (0,\pi) \times (0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$，定义映射 $X : U \to \mathbb{R}^3$ 满足

$$X(\phi, \theta) = R(\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi),$$

X 是浸入。

因此，球上的任意一点都可以用两个变量 (ϕ, θ) 表示，如图所示。

(1)
选取区域

$$A = \left\{(\phi, \theta) : \phi \equiv \phi_0, \theta \in (0,2\pi)\right\} \subseteq U,$$

$X(A)$ 的长度为

$$L(A) = 2\pi R \sin\phi_0,$$

因此，$X(\phi_0, \theta)$ 的电流密度为

$$J(\phi_0, \theta) = \frac{I}{L(A)} = \frac{I}{2\pi R \sin\phi_0}.$$

(2)
根据我的第六感，赤道面附近的磁感应强度是没有 z 方向分量的，根据环路定理

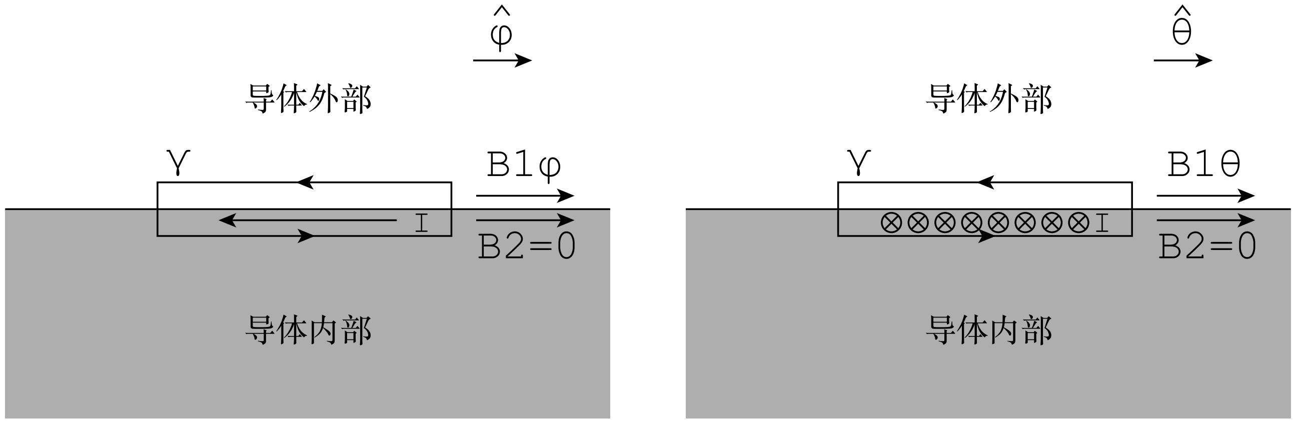
$$B\,2\pi R = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

(3)
定义 $\hat{\phi}$ 方向为 ϕ 增大的方向，$\hat{\theta}$ 方向为 θ 增大的方向，1 记为导体外部，2 记为导体内部。

因为 $\operatorname{div}\mathbf{B}\equiv 0$，所以在边界两侧，$B_1^{\perp}=B_2^{\perp}$，所以 $B_1^{\perp}\equiv 0$，只需要考虑平行于球面的分量。

因为 $\operatorname{curl}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$「此题与位移电流无关」，所以在边界两侧，$B_1^{\top}-B_2^{\top}=\mu_0 J$，其中 J 是面电流密度垂直于纸面的分量，所以 $B_1^{\top}=\mu_0 J$。



「图片标注有误，应该是“球壳外部”“球壳内部”」

如左图所示，因为面电流密度垂直于纸面的分量为 0，可以得出在导体外部，磁感应强度在 $\hat{\phi}$ 方向的分量为 0，即

$$B_1^{\phi}\equiv 0,$$

如右图所示，因为面电流密度垂直于纸面的分量为 $J=\dfrac{I}{2\pi R\sin\phi}$，可以得出在导体外部，磁感应强度在 $\hat{\theta}$ 方向的分量为 $\mu_0 J$，即

$$B_1^{\theta}=\mu_0 J=\frac{\mu_0 I}{2\pi R\sin\phi},$$

因此，$X(\phi,\theta)$ 附近的磁感应强度为

$$B(\phi,\theta)=\sqrt{(B_1^{\phi})^2+(B_1^{\theta})^2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R\sin\phi}\,.$$

七、【共 15 分】

(1)
根据电磁感应定律可得

I. 当 $0 \le r < R$ 时

$$E(r)2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2,$$

$$E(r) = -\frac{r}{2}\lambda,$$

II. 当 $R \le r \le a$ 时

$$E(r)2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi R^2,$$

$$E(r) = -\frac{R^2}{2r}\lambda\,.$$

(2)
焦耳热功率密度为

$$p = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2,$$

圆盘耗散的焦耳热总功率为

$$P = \int_0^a p(2\pi r d)dr = 2\pi\lambda^2\sigma d\left(\int_0^R\left(-\frac{r}{2}\right)^2 r dr + \int_R^a\left(-\frac{R^2}{2r}\right)^2 r dr\right) = \frac{1}{8}\pi\lambda^2\sigma R^4 d\left(1 + 4\log\frac{a}{R}\right).$$

(3)
内半径与外半径分别为 $r, r + dr$ 的圆环带电量为

$$dq = \rho(2\pi r d)dr,$$

受到的电场力力矩为

$$d\tau = rEdq = \begin{cases} -(\pi\rho\lambda d)r^3 dr, & 0 \le r < R, \\ -(\pi\rho\lambda R^2 d)r dr, & R \le r \le a, \end{cases}$$

圆盘受到的总力矩为

$$\tau = \int_0^R -(\pi\rho\lambda d)r^3 dr + \int_R^a -(\pi\rho\lambda d R^2)r dr = -\frac{1}{4}\pi\rho\lambda R^2 d(2a^2 - R^2),$$

圆盘的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2} m a^2,$$

因此，圆盘的角加速度为

$$\dot{\omega} = \frac{\tau}{I} = \left(\frac{R^2}{2a^2} - 1 \right) \frac{\pi \rho \lambda R^2 d}{m},$$

圆盘在任意时刻 t_0 的角速度为

$$\omega = \dot{\omega} t_0 = \left(\frac{R^2}{2a^2} - 1 \right) \frac{\pi \rho \lambda R^2 d t_0}{m}.$$