МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. С. Гусева, И.-Х. Д. Хишектуева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ЧАСТЬ 1

Рекомендовано учебно-методическим советом БГУ в качестве учебного пособия для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 01.03.01 Математика

Улан-Удэ
2016

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
Г 962

Утверждено к печати редакционно-издательским советом
Бурятского государственного университета

Рецензенты

Д. Ш. Ширапов

д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. электронно-вычислительных систем ФГБОУ ВО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления»

Т. Г. Дармаев

канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. лаб. вычислительных и геоинформационных технологий НОИЦ СИА ИМИ ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет»

Текст печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка И. С. Гусевой, И.-Х. Д. Хишектуевой

Г 962 Гусева И. С., Хишектуева И.-Х. Д. **Численные методы. Часть 1** : учебное пособие. — Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2016. — 115 с. ISBN 978-5-9793-0917-0

В учебном пособии изложены основные численные методы решения задач алгебры: методы решения нелинейных уравнений и систем, систем линейных алгебраических уравнений, частичной и полной проблемы собственных значений.

Пособие предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 01.03.01 Математика

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

ISBN 978-5-9793-0917-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время вычислительная математика представляет собой основной инструмент для решения разнообразных прикладных задач, возникающих на практике. Численный анализ соответствующих математических моделей, основанный на применении современной вычислительной техники и программировании, позволяет эффективно исследовать прикладную проблему и находить ее приближенно оптимальное решение. При этом основой для проведения научных и инженерных расчетов служат численные методы и алгоритмы решения математических задач. Поэтому изучение дисциплины «Численные методы» играет важную роль при подготовке студентов-бакалавров математических направлений.

Настоящее учебное издание представляет собой учебное пособие для дисциплины «Численные методы» в рамках реализации образовательной программы высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 01.03.01 Математика очной формы обучения и подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Дисциплина «Численные методы» относится к обязательным дисциплинам базовой части Блока 1 в структуре ОП для направлений 01.03.02, 02.03.01; к обязательным дисциплинам вариативной части Блока 1 в структуре ОП для направления 01.03.01; к дисциплинам по выбору вариативной части Блока 1 в структуре ОП для направления 02.03.03.

Изучение дисциплины направлено на формирование общепрофессиональных/ профессиональных компетенций:

для направления 01.03.02:

ПК-2 способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат;

для направления 02.03.03:

ПК-3 готовность к разработке моделирующих алгоритмов и реализации их на базе языков и пакетов прикладных программ моделирования;

для направления 02.03.01:

ОПК-1 готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности;

ОПК-4 способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем;

для направления 01.03.01:

ОПК-4 способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

– основные понятия численных методов;

– алгоритмы, обоснованность численных методов решения нелинейных уравнений, линейных и нелинейных систем;

– методы интерполяции и приближения;

– численное дифференцирование, интегрирование;

– многошаговые методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и методы решения краевых задач для ОДУ.

Уметь:

– применять и сравнивать численные методы, а также оценить степень применимости этих методов;

– разрабатывать алгоритмы вычислительных программ, использующих численные методы;

– использовать пакеты математических прикладных программ для решения задач вычислительной математики.

Владеть:

– основами, техниками и методами математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений и языков программирования высокого уровня.

Основной задачей настоящего учебного пособия является изложение в рамках дисциплины «Численные методы» основных численных методов решения задач алгебры, поскольку его объем рассчитан на первый семестр изучения дисциплины «Численные методы». В нем отражены методы решения нелинейных уравнений и систем, систем линейных алгебраических уравнений, частичной и полной проблемы собственных значений. В каждой главе пособия помимо теоретической справки приводятся алгоритмы методов решения задач, разобраны наглядные примеры, а также подобраны задания для самостоятельного выполнения и лабораторных работ.

Пособие состоит из предисловия, четырех глав, ответов и списка литературы. Первая глава посвящена численным методам решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Вторая глава — методам решения систем линейных алгебраических уравнений. В третьей главе рассматриваются методы решения задач на собственные значения, а в четвертой — методы решения нелинейных систем уравнений, возникающих при решении многих прикладных задач.

ГЛАВА 1
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе рассматриваются численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным [1–3, 5, 6, 9–12].

1.1. Постановка задачи

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция аргумента x.

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (1.1) обращается в тождество, называется *решением этого уравнения*, а каждое значение x из этой совокупности — *корнем уравнения*. Корни уравнения также называются *нулями функции* $f(x)$.

В зависимости от вида функции $f(x)$ нелинейные уравнения можно разделить на два класса — алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). Уравнения, содержащие другие функции, не являющиеся алгебраическими (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются *трансцендентными*.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые (аналитические, точные) и итерационные. *Прямые методы* позволяют записать решение в виде некоторого соотношения (формулы). При этом значения корней могут быть вычислены по этой формуле за конечное число арифметических операций. Однако многие нелинейные уравнения не удается решить прямыми методами, то есть они не имеют аналитических решений. К таким, например, относятся большинство трансцендентных уравнений. Также доказано, что для алгебраического уравнения выше четвертой степени не удается получить аналитического решения в виде формулы с конечным числом арифметических действий. В таких случаях для решения уравнений используются *итерационные методы*, позволяющие получить приближенные значения корней с заданной степенью точности.

При численном подходе решение уравнения (1.1) осуществляется в два этапа:

1. *отделение (локализация) корней*, то есть нахождение достаточно малых промежутков, в которых содержится один и только один корень данного уравнения;

2. *уточнение приближенных корней*, то есть нахождение корней с заданной точностью.

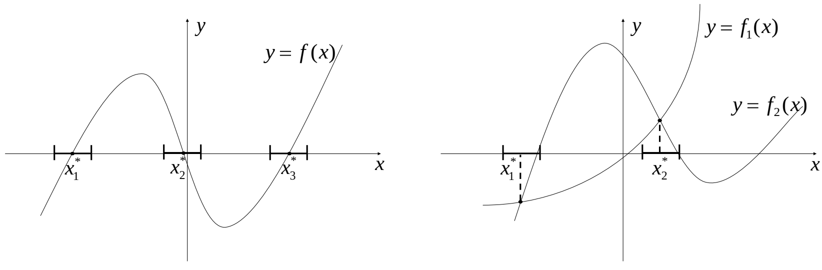
1.2. Отделение корней

Процедуру отделения корней можно проводить различными способами. Рассмотрим наиболее используемые из них.

Графический метод

Этот метод основан на построении графика функции $y = f(x)$ и приближенном определении промежутков, в которых находятся корни уравнения. Понятно, что искомыми будут отрезки оси абсцисс, содержащие точки пересечения графика с осью (рис. 1.1 а).

Иногда бывает удобно заменить функцию $f(x)$ разностью двух более простых функций, то есть $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ и строить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. В этом случае корнями уравнения будут абсциссы точек пересечения этих графиков (рис. 1.1 б).



а) б)

Рис. 1.1. Отделение корней

Пример 1.2.1. Отделить корни уравнения $x + 5 - \sin(0.38 \cdot x) = 0$ графическим методом.

Функция в левой части уравнения имеет вид разности двух более простых функций $f_1(x) = x + 5$, $f_2(x) = \sin(0.38 \cdot x)$. Построим их графики и определим промежутки, в которых находятся корни (рис. 1.2).

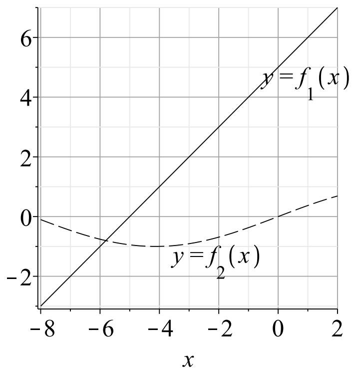


Рис. 1.2. Графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

По графику видно, что уравнение имеет единственный корень $x^* \in [-6; -5]$.

Аналитический (табличный) метод

Для отделения корней используется теорема:

Теорема 1.2.1. *Если функция $f(x)$, определяющая уравнение $f(x) = 0$, на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то есть $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения.*

Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a, b]$, то на $[a, b]$ содержится единственный корень уравнения.

Если исходное уравнение имеет близкие корни или функция $f(x)$ сложная, то для отделения промежутков, в которых находятся корни уравнения, можно воспользоваться табличным методом (методом деления отрезка на части).

Сначала определяются знаки функции в граничных точках области. Затем отрезок разбивается с помощью промежуточных точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k \in N$, в которых также вычисляются значения функции $f(x)$. Если окажется, что в двух соседних точках x_i и x_{i+1}, $1 \leq i \leq k$ функция $f(x)$ принимает разные знаки, то можно утверждать, что на этом отрезке содержится по крайней мере один корень. Затем нужно убедиться, что на выбранном промежутке находится единственный корень. Для этого можно проверить, меняет ли знак первая производная функции $f(x)$ на этом отрезке.

Пример 1.2.2. Отделить корни уравнения $x + 5 - \sin(0.38 \cdot x) = 0$ табличным методом.

Построим таблицу значений аргумента и функции:

x	-7	-6	-5	-4	-3
$f(x)$	-1.54	-0.24	0.95	2.00	2.91

Таблица 1.1. Значения функции $f(x) = x + 5 - \sin(0.38 \cdot x)$

Из таблицы значений видно, что функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[-6; -5]$, поэтому корень содержится в этом промежутке.

Таким образом, после отделения корней уравнения, осуществляется переход ко второму этапу — уточнению корней, на котором рассматривается задача: требуется найти решение x^* уравнения

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \tag{1.2}$$

с заданной точностью $\varepsilon > 0$ (рис. 1.3).

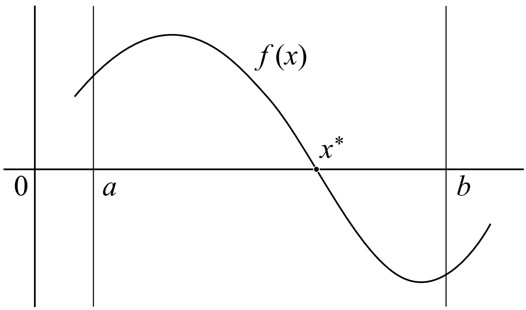


Рис. 1.3. График функции $f(x)$

Очевидно, если $f(a) = 0$ ($f(b) = 0$), то корень находится в т. a (b).

1.3. Метод половинного деления

Решение задачи

Ищется середина отрезка $[a, b]$: $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c) = 0$, то т. c — решение уравнения (1.2). Иначе проверяется знак выражения $f(a) \cdot f(c)$:

- если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то корень находится в отрезке (a, c): отрезок (c, b) исключаем из рассмотрения, там корня нет, т. b сдвигаем в т. c, $b = c$ (рис. 1.4);

- если $f(a) \cdot f(c) > 0$, то корень находится в отрезке (c, b): т. a сдвигаем в т. c (рис. 1.5).

В результате определяется новый отрезок $[a, b]$. Расчеты повторяются. Итерации продолжаются до тех пор, пока отрезок $[a, b]$ достаточно велик; критерий остановки итераций: $|b - a| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число. В качестве приближенного решения берется середина отрезка последней итерации $\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$.

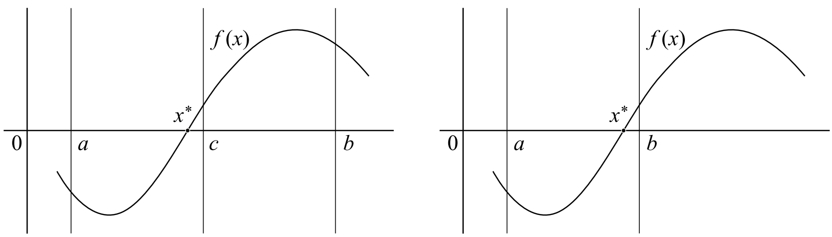


Рис. 1.4. Случай $f(a) \cdot f(c) < 0$

Алгоритм

Дано: $f(x), a, b, \varepsilon$.

0) находится середина отрезка $[a, b]$: $c = \frac{a+b}{2}$;

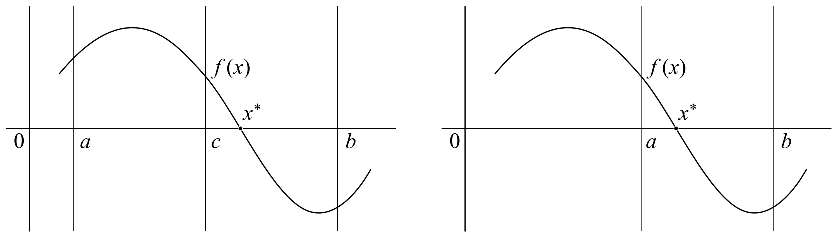


Рис. 1.5. Случай $f(a) \cdot f(c) > 0$

1) если $f(c) = 0$, то $\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$, процесс итерация закончен, иначе, если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то $b = c$, а если $f(a) \cdot f(c) > 0$, то $a = c$;

2) если $|b-a| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения (1.2) $\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$, иначе (если $|b - a| \geq \varepsilon$) возвращаемся к пункту 0.

Пример 1.3.1. Найти решение уравнения $x^2 - 10x + 4 = 0$ на отрезке $[-3, 3]$ с точностью 0.01 методом половинного деления.

Здесь $f(x) = x^2 - 10x + 4$, $a = -3$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.01$. Точное решение на заданном отрезке вычислить достаточно просто: $x^* = 5 - \sqrt{21} \approx 0.4174$. График функции изображен на рис. 1.6.

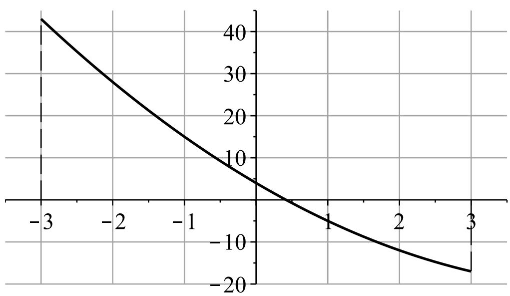


Рис. 1.6. График функции $f(x) = x^2 - 10x + 4$ на отрезке $[-3, 3]$

Итерация 1. Находим середину отрезка $c = (-3 + 3)/2 = 0$.

Проверяем $f(c) = f(0) = 0^2 - 10 \cdot 0 + 4 = 4 \neq 0$, тогда проверяем знак произведения $f(a) \cdot f(c)$: $f(-3) \cdot f(0) = ((-3)^2 - 10 \cdot (-3) + 4) \cdot (0^2 - 10 \cdot 0 + 4) = 172 > 0 \Rightarrow a = c = 0$. Получили новый отрезок $[0, 3]$; $|3 - 0| = 3 > \varepsilon$, запускаем новый шаг.

Итерация 2. $c = (0 + 3)/2 = 1.5$; $f(a) \cdot f(c) = f(0) \cdot f(1.5) = (0^2 - 10 \cdot 0 + 4) \cdot ((1.5)^2 - 10 \cdot 1.5 + 4) \approx -15 < 0 \Rightarrow b = c = 1.5$. Новый отрезок $[0, 1.5]$; $|1.5 - 0| = 1.5 > \varepsilon$, запускаем новый шаг, и т.д.

Результаты вычислений по шагам представлены в таблице 1.2.

Номер итерации	a	b	$\|b - a\|$
0	-3	3	$6 > \varepsilon$
1	0	3	$3 > \varepsilon$
2	0	1.5	$1.5 > \varepsilon$
3	0	0.75	$0.75 > \varepsilon$
4	0.375	0.75	$0.375 > \varepsilon$
5	0.375	0.5625	$0.1875 > \varepsilon$
6	0.375	0.46875	$0.09375 > \varepsilon$
7	0.375	0.42188	$0.04688 > \varepsilon$
8	0.39844	0.42188	$0.02344 > \varepsilon$
9	0.41016	0.42188	$0.01172 > \varepsilon$
10	0.41602	0.42188	$0.00586 < \varepsilon$

Таблица 1.2. Результаты вычислений

За приближенное решение берем середину отрезка $[a, b]$ восьмой итерации: $\tilde{x} = (0.42188 + 0.41602)/2 = 0.41895$. Проверим значение функции в этой точке: $f(\tilde{x}) \approx -0.014$. Очевидно, значение $f(\tilde{x})$ стремится к нулю с заданной точностью ε.

Задания для самостоятельного решения

Найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ методом половинного деления с точностью 0.001.

1. $f(x) = x^3 - x + 1, \quad a = -2, \quad b = -1.$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 1, \quad a = 4, \quad b = 7.$
3. $f(x) = 5^x - 6x - 3, \quad a = 1, \quad b = 2.$
4. $f(x) = x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.5, \quad a = -1, \quad b = 0.$
5. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7, \quad a = -4, \quad b = -1.$
6. $f(x) = 2x + \lg(2x + 3) - 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$
7. $f(x) = x - \cos x - 1, \quad a = 0, \quad b = 2.$
8. $f(x) = x + \ln x, \quad a = 0.1, \quad b = 3.$
9. $f(x) = 5 + x - 2x^2, \quad a = -5, \quad b = 0.$
10. $f(x) = -x + \sin^3 x - \ln x, \quad a = 0.1, \quad b = 1.$
11. $f(x) = x^2 - 8x + \frac{6}{x}, \quad a = 0.5, \quad b = 2.$
12. $f(x) = \frac{6}{\log_2 x} - 4, \quad a = 1.5, \quad b = 5.$
13. $f(x) = \cos(x^2 - 3x), \quad a = 1, \quad b = 3.$
14. $f(x) = \sin(5x^2 + 4), \quad a = 0, \quad b = 1.$
15. $f(x) = \cos(x^2 - 3) + x, \quad a = 0, \quad b = 2.$
16. $f(x) = \sin(2x^2 - 3) - 4x, \quad a = -1, \quad b = 1.$
17. $f(x) = \mathrm{tg}(x^2) - x, \quad a = 0.1, \quad b = 1.$
18. $f(x) = \mathrm{tg}(x^2 - 3) + x, \quad a = -0.5, \quad b = 0.5.$
19. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x, \quad a = 4, \quad b = 8.$
20. $f(x) = \sqrt{2x^3 + 4} - 5, \quad a = 0, \quad b = 3.$

1.4. Метод хорд

Идея метода хорд состоит в том, что на промежутке $[a, b]$ дуга кривой $y = f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс (рис. 1.7).

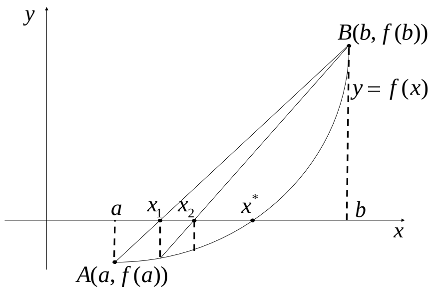


Рис. 1.7. Графическая иллюстрация метода хорд

Уравнение хорды имеет вид:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Полагая $x = x_1$ и $y = 0$, получаем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Предположим, что вторая производная $f''(x)$ сохраняет постоянный знак, и рассмотрим два случая: а) $f(a) > 0,\ f''(x) > 0$ и б) $f(a) < 0,\ f''(x) > 0$.

Каждому из них соответствуют итерационные формулы:

а)

$$\begin{gathered} x_0 = b, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(a)}(x_k - a), \quad k = 0, 1, 2, ... \end{gathered} \tag{1.3}$$

б)

$$\begin{gathered} x_0 = a, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b)-f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 0, 1, 2, ... \end{gathered} \tag{1.4}$$

В случае а) остается неподвижным конец a (рис. 1.8 а), а в случае б) — конец b (рис. 1.8 б).

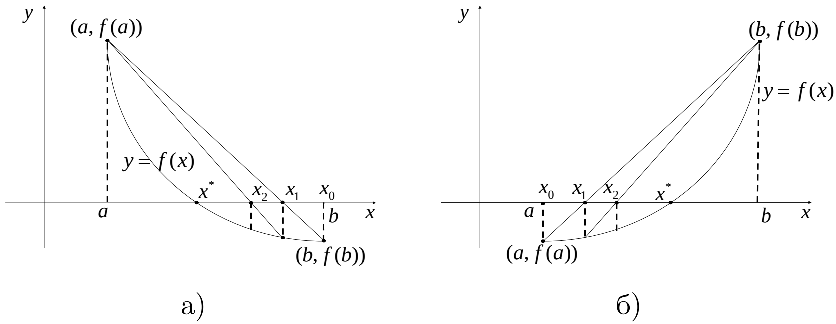


Рис. 1.8. Возможные случаи неподвижных концов

В качестве неподвижной рекомендуется выбирать ту точку, в которой выполняется соотношение

$$f(x) \cdot f''(x) > 0.$$

Если $f(a) \cdot f''(x) > 0$, то неподвижным концом будет a, и для итерационного алгоритма используются формулы (1.3). Если $f(b) \cdot f''(x) > 0$, то неподвижным концом будет b, и для итерационного алгоритма используются формулы (1.4).

В качестве критерия остановки выбирается условие $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. За приближенное решение принимается $(k+1)$-ое приближение: $\tilde{x} = x_{k+1}$.

Алгоритм

Дано: $f(x),\ a,\ b,\ \varepsilon$.

0) вычислить вторую производную $f''(x)$, задать произвольную точку $c \in [a, b]$, например, можно взять середину отрезка $c = \frac{a+b}{2}$;

1) если $f(a) \cdot f''(c) > 0$, то

1.1 $x_0 = b$;

1.2 положить $k = 0$;

1.3 вычислить x_{k+1} по формуле (1.3);

1.4 если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения $\tilde{x} = x_{k+1}$, иначе полагаем $k = k + 1$ и переходим к пункту 1.3;

2) если $f(b) \cdot f''(c) > 0$, то

2.1 $x_0 = a$;

2.2 положить $k = 0$;

2.3 вычислить x_{k+1} по формуле (1.4);

2.4 если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения $\tilde{x} = x_{k+1}$, иначе полагаем $k = k + 1$ и переходим к пункту 2.3.

Пример 1.4.1. Рассмотрим предыдущий пример 1.3.1, для решения которого применим метод хорд.

Здесь $f(x) = x^2 - 10x + 4$, $a = -3$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.01$.

Заметим, вторая производная функции $f''(x) = 2$ сохраняет постоянный знак на всей области определения функции. Проверив условие $f(a) \cdot f''(x) > 0$, определяем неподвижный конец — точка a. Отсюда, для вычисления очередного приближения будем использовать формулы (1.3).

Итерация 1. $x_0 = b = 3$, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)}(x_0 - a) = 1.3$. Проверим выполнение критерия остановки: $|x_1 - x_0| = 1.7 > \varepsilon$. Значит, итерации продолжаются.

Итерация 2. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a) = 0.6752$. Проверим выполнение критерия остановки: $|x_2 - x_1| = 0.6248 > \varepsilon$, и т.д.

Результаты вычислений по шагам представлены в таблице 1.3

Номер итерации k	x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	3	—
1	1.3	$\lvert x_1-x_0\rvert = 1.7 > \varepsilon$
2	0.6752	$\lvert x_2-x_1\rvert = 0.6248 > \varepsilon$
3	0.4889	$\lvert x_3-x_2\rvert = 0.1863 > \varepsilon$
4	0.4369	$\lvert x_4-x_3\rvert = 0.052 > \varepsilon$
5	0.4227	$\lvert x_5-x_4\rvert = 0.0142 > \varepsilon$
6	0.4189	$\lvert x_6-x_5\rvert = 0.0038 < \varepsilon$

Таблица 1.3. Результаты вычислений

За приближенное решение берем $\tilde{x} = x_{k+1} = 0.4189$. Проверим значение функции в этой точке: $f(\tilde{x}) = -0.01352$.

Задания для самостоятельного решения

Найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ методом хорд с точностью 0.001.

1. $f(x) = 3x^2 + \sin(2x) - 5.6, \quad a = 0.5, \quad b = 2.5.$
2. $f(x) = 3x^3 - x + 5, \quad a = -2, \quad b = -1.$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \cos(0.5x), \quad a = 0, \quad b = 1.$
4. $f(x) = \lg x - \frac{1}{3x-8}, \quad a = 0.5, \quad b = 1.5.$
5. $f(x) = 7x^2 - e^{-2x}, \quad a = 0, \quad b = 1.$
6. $f(x) = x^2 - 3\sin(0.2x), \quad a = -0.5, \quad b = 0.5.$
7. $f(x) = e^x + x - 3, \quad a = 0, \quad b = 1.$
8. $f(x) = \cos(0.3x) + x^2 - 5, \quad a = -3, \quad b = -1.$
9. $f(x) = \frac{1}{x} - 5x + 6, \quad a = 1, \quad b = 2.$
10. $f(x) = \sin(3x + 5) - x^2, \quad a = 0.6, \quad b = 1.6.$
11. $f(x) = 4x^2 - 6.2 - \cos(0.6x), \quad a = 1, \quad b = 2.$
12. $f(x) = \mathrm{e}^x - (x + 1)^3, \quad a = -0.2, \quad b = 1.$

13. $f(x) = 4\cos x + 0.3x, \quad a = 1, \quad b = 2.$
14. $f(x) = 4\cos{(x+1)^2} - 2x + 1, \quad a = 1, \quad b = 1.6.$
15. $f(x) = 5\sin{(2x)} - \sqrt{1-x}, \quad a = 0, \quad b = 1.$
16. $f(x) = x^2\cos{(2x-1)} - 1, \quad a = 2.5, \quad b = 3.5.$
17. $f(x) = (0.2x)^3 - \cos x, \quad a = 1, \quad b = 2.$
18. $f(x) = x^2 + \lg{(x+0.5)} - 1, \quad a = 0, \quad b = 2.$
19. $f(x) = x - 10\sin x, \quad a = 2, \quad b = 3.$
20. $f(x) = \mathrm{tg}(x+2.7) - 3x^3 + 1 - x^2, \quad a = 0, \quad b = 1.$

1.5. Метод простых итераций

Решение задачи

Исходное уравнение (1.2) необходимо привести к виду

$$x = \varphi(x) \tag{1.5}$$

так, чтобы выполнялось условие сходимости

$$|\varphi'(x)| < 1 \tag{1.6}$$

в окрестности заданного начального приближения $x_0 \in [a, b]$. Если x_0 не задано, то принимается равным $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Последующие приближения к искомому решению x^* находятся по формуле:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Итерационный процесс (1.7) заканчивается при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. При правильном выборе функции $\varphi(x)$ последовательность $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$, определяемая по формуле (1.7), сходится к корню уравнения (1.2). В качестве приближенного решения принимается результат последней итерации $\tilde{x} = x_{k+1}$.

Алгоритм

Дано: $f(x)$, x_0 (если не задано, то $x_0 = \frac{a+b}{2}$), ε.

0) преобразовать уравнение вида (1.2) к виду (1.5);

1) принять $k = 0$;

2) вычислить $x_{k+1} = \varphi(x_k)$;

3) если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения (1.2) $\tilde{x} = x_{k+1}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 1.5.1. Рассматривается пример 1.3.1, который необходимо решить методом простых итераций. Так как в примере даны значения a и b, то начальное приближение принимается равным середине отрезка $[a, b]$: $x_0 = (3 + (-3))/2 = 0$.

Предварительно преобразуем уравнение $x^2 - 10x + 4 = 0$ к виду (1.5). Простейшим вариантом преобразования является выражение x из второго слагаемого:

$$x = \frac{x^2 + 4}{10},$$

$$x = 0.1x^2 + 0.4.$$

Т.е. $\varphi(x) = 0.1x^2 + 0.4$.

Проверим выполнение условия сходимости (1.6) в окрестности начального приближения x_0.

$$\varphi'(x) = 0.2x;$$

$$|\varphi'(x_0)| = |0.2 \cdot 0| = 0 < 1.$$

Выполняется. Запускаем процесс итераций.

Итерация 1. $x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = 0.1 \cdot (0)^2 + 0.4 = 0.4$. Проверим условие выхода из цикла: $|x_1 - x_0| = |0.4 - 0| = 0.4 > \varepsilon$, следовательно, итерации продолжаются.

Итерация 2. $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0.4) = 0.1 \cdot (0.4)^2 + 0.4 = 0.416$. Проверим условие: $|x_2 - x_1| = |0.416 - 0.4| = 0.016 > \varepsilon$, следовательно, запускаем новый шаг, и т.д.

Результаты вычислений по шагам представлены в таблице 1.4.

Номер итерации k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0	—
1	0.4	$\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.4 > \varepsilon$
2	0.416	$\lvert x_2 - x_1\rvert = 0.016 > \varepsilon$
3	0.4173	$\lvert x_3 - x_2\rvert = 0.0013 < \varepsilon$

Таблица 1.4. Результаты вычислений

За приближенное решение берем x_k последней итерации: $\tilde{x} = 0.4173$. Проверим значение функции в этой точке: $f(\tilde{x}) \approx 0.0011$. Значение $f(\tilde{x})$, как и в методе половинного деления, стремится к нулю с заданной точностью ε.

Пример 1.5.2. Найти решение уравнения $5^x - 6x - 3 = 0$ на отрезке $[1, 2]$ с точностью 0.01 методом простых итераций.

Здесь $f(x) = 5^x - 6x - 3$, $a = 1$, $b = 2$, $\varepsilon = 0.01$. График функции изображен на рис. 1.9.

Начальное приближение принимается равным середине отрезка $[1, 2]$: $x_0 = 1.5$. Преобразуем уравнение $5^x - 6x - 3 = 0$ к виду (1.5). Выразим x из второго слагаемого:

$$x = \varphi(x) = \frac{5^x - 3}{6}.$$

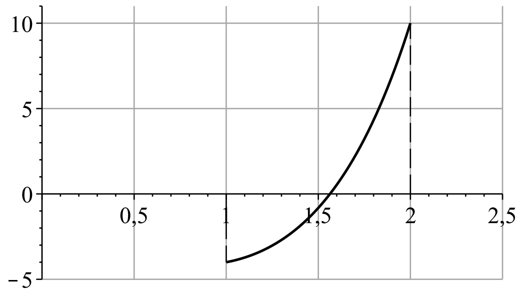


Рис. 1.9. График функции $f(x) = 5^x - 6x - 3$ на отрезке $[1, 2]$

Проверим выполнение условия сходимости (1.6) в окрестности начального приближения x_0:

$$\varphi'(x) = \frac{5^x \ln 5}{6} \approx 0.268 \cdot 5^x.$$

Очевидно, что при любом $x \in [1, 2]$ условие сходимости не выполняется.

Тогда выразим x из первого слагаемого исходного уравнения:

$$x = \varphi(x) = \log_5 (6x + 3).$$

Проверим выполнение условия сходимости:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{6x + 3} \cdot \frac{6}{\ln 5},$$

$$|\varphi'(1.5)| = \left| \frac{1}{6 \cdot 1.5 + 3} \cdot \frac{6}{\ln 5} \right| = 0.31 < 1.$$

Выполняется. Запускаем процесс итераций, представленный в таблице 1.5. Приближенное решение $\tilde{x} = 1.56156$, $f(\tilde{x}) \approx -0.02456$.

Общий алгоритм перехода от уравнения $f(x) = 0$ к уравнению вида $x = \varphi(x)$. Умножим левую и правую части уравнения $f(x) = 0$ на произвольную константу $C \neq 0$

Номер итерации k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1.5	—
1	1.54396	$\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.04396 > \varepsilon$
2	1.55747	$\lvert x_2 - x_1\rvert = 0.01351 > \varepsilon$
3	1.56156	$\lvert x_3 - x_2\rvert = 0.00409 < \varepsilon$

Таблица 1.5. Результаты вычислений

и добавим к обеим частям неизвестное x. При этом корни уравнения не изменятся:

$$x + C \cdot f(x) = x + C \cdot 0,$$

$$x = \varphi(x) = x + Cf(x).$$

Произвольный выбор константы C позволяет обеспечить выполнение условия сходимости (1.6):

$$|\varphi'(x)| = |1 + Cf'(x)| < 1.$$

В примере 1.5.2 такой произвольной константой может быть $C = -0.1$:

$$x = \varphi(x) = x - 0.1 \cdot (5^x - 6x - 3),$$

$$\varphi'(x) = 1 - 0.1 \cdot (5^x \cdot \ln 5 - 6) = 1.6 - 0.1 \cdot 5^x \cdot \ln 5,$$

$$|\varphi'(1.5)| = |1.6 - 0.1 \cdot 5^{1.5} \cdot \ln 5| \approx 0.2 < 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $x \in [a, b]$ методом простых итераций с точностью 0.00001, где $x_0 = (a+b)/2$.

1. $f(x) = 3.8 - 3\sin\sqrt{x} - 0.35x, \quad a = 2, \quad b = 3.$
2. $f(x) = \frac{1}{x} - 3 - \sin(3.6x), \quad a = 0, \quad b = 1.$
3. $f(x) = \arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3}, \quad a = 0, \quad b = 1.$

4. $f(x) = \arcsin x - \sqrt{1 - 0.4x^2}, \quad a = 0, \quad b = 1.$
5. $f(x) = 3x - 2 + 0.25x^3, \quad a = 0, \quad b = 2.$
6. $f(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad a = 2, \quad b = 3.$
7. $f(x) = 4\ln x + 5 - 3x, \quad a = 2, \quad b = 4.$
8. $f(x) = e^x - e^{-x} - 2, \quad a = 0, \quad b = 1.$
9. $f(x) = \sqrt{1.2 - \cos x} - 2x, \quad a = 0, \quad b = 1.$
10. $f(x) = 25x - x^3 + \ln(x), \quad a = 0.1, \quad b = 1.$
11. $f(x) = \sin x - (x-1)^2, \quad a = 1, \quad b = 2.$
12. $f(x) = -x + 3\sin x - 1, \quad a = 1, \quad b = 2.$
13. $f(x) = 2x\cos x - 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$
14. $f(x) = \sin x - \frac{1}{3x}, \quad a = 0.2, \quad b = 0.8.$
15. $f(x) = 5\cos^2 x - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad a = 0.1, \quad b = 0.7.$
16. $f(x) = \ln x - x + 2, \quad a = 1, \quad b = 4.$
17. $f(x) = \ln x - (x-3)^2, \quad a = 1, \quad b = 3.$
18. $f(x) = 4\cos x - \ln x, \quad a = 1, \quad b = 3.$
19. $f(x) = \sin x - \ln^2 x, \quad a = 0, \quad b = 1.$
20. $f(x) = \sin x - x^2, \quad a = 0, \quad b = 2.$

1.6. Метод Ньютона

Решение задачи

Идея метода состоит в построении касательной к графику функции $f(x)$ в точке начального приближения x_0 ($x_0 \in [a, b]$ при предположении, что в этом отрезке содержится единственный корень уравнения (1.2)), для которой находится пересечение с осью абсцисс. Эта точка берётся в качестве следующего приближения x_1. И так далее, пока не будет достигнута необходимая точность (см. рис. 1.10 а).

Выведем в общем случае формулу для нахождения $k+1$-го приближения x_{k+1}. Рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный прямой $x = x_k$, касательной к графику функции в т. x_k и осью абсцисс (рис. 1.10 б).

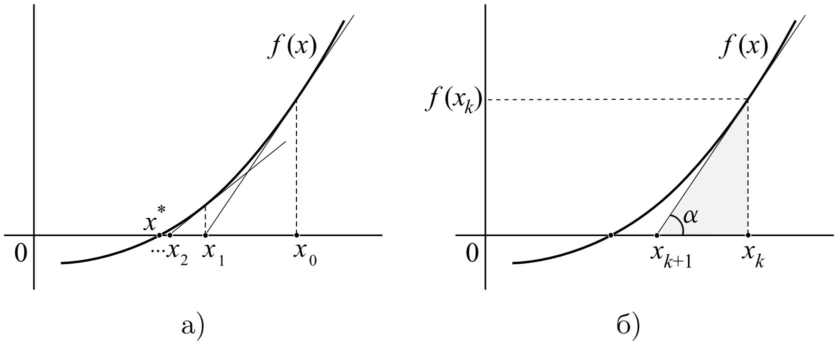


Рис. 1.10. Иллюстрация метода Ньютона

Исходя из геометрического смысла, производная функции $f(x)$ в точке x_k равна тангенсу угла α наклона касательной к графику этой функции в этой точке:

$$f'(x_k) = \mathrm{tg}\alpha = \frac{f(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}},$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.8}$$

Формула (1.8) является расчетной формулой нахождения последовательности приближений $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$, сходящейся к искомому решению x^*. Итерационный процесс вычисления x_{k+1} заканчивается при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Теорема 1.6.1 (О сходимости). *Если:*

1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2) $f'(x), f''(x)$ *отличны от нуля (сохраняют определенные знаки при* $x \in [a, b]$);

3) $f(x_0)f''(x_0) > 0, x_0 \in [a,b]$,

то $x_k \to x^*$, *причем скорость сходимости определяется неравенством*

$$|x_k - x^*| \le \frac{M}{2m}(x_{k-1} - x^*)^2.$$

Здесь $m = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Если $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то можно не прийти к $x = x^*$, если x_0 не очень хорошее.

Алгоритм

Дано: $f(x)$, x_0, ε.

0) принять $k = 0$;

1) вычислить $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;

2) если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения (1.2) $\tilde{x} = x_{k+1}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 1.

Пример 1.6.1. Найти решение уравнения

$$1 - x + \sin x - \ln(1 + x) = 0$$

с точностью 0.001 методом Ньютона, приняв $x_0 = 1$.

Здесь $f(x) = 1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$, $\varepsilon = 0.01$. График функции изображен на рис. 1.11.

Начальное приближение $x_0 = 1$. Найдем производную функции $f(x)$: $f'(x) = -1 + \cos x - \frac{1}{1+x}$. Запускаем процесс итераций.

Итерация 1. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{1-1+\sin 1 - \ln(1+1)}{-1+\cos 1 - \frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{\sin 1 - \ln 2}{-1.5 + \cos 1} \approx 1.15455$ Проверим условие выхода из цикла: $|x_1 - x_0| = |1.15455 - 1| = 0.15455 > \varepsilon$; итерации продолжаются.

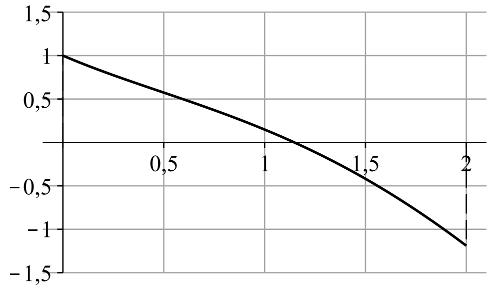


Рис. 1.11. График функции $f(x) = 1 - x + \sin x - \ln(1 + x)$ на отрезке $[0, 2]$

Итерация 2. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.14746$ Проверим условие: $|x_2 - x_1| = |1.14746 - 1.15455| = 0.00709 > \varepsilon$.

Итерация 3. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1.14744$ Проверим условие: $|x_3 - x_2| = |1.14744 - 1.14746| = 0.00002 < \varepsilon$. Процесс итераций закончен.

Таким образом, приближенное решение: $\tilde{x} = 1.14744$. Проверим значение функции в этой точке: $f(\tilde{x}) \approx -0.0000012$.

Задания для самостоятельного решения

Найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $x \in [a, b]$ методом Ньютона с точностью 10^{-8}, где $x_0 = (a + b)/2$.

1. $f(x) = \sin x + x^3 - 2, \quad a = 0, \quad b = \pi.$
2. $f(x) = x - \sin x - 0.25, \quad a = 1, \quad b = 2.$
3. $f(x) = x^2 + 1 - \arccos x, \quad a = 0, \quad b = 1.$
4. $f(x) = (x + 3)\cos x - 1, \quad a = 1, \quad b = 2.$
5. $f(x) = x \ln(x + 1) - 1, \quad a = 1, \quad b = 5.$
6. $f(x) = 2^x(x - 1)^2 - 2, \quad a = 1.6, \quad b = 2.$
7. $f(x) = x^2 - \sin 2x - 1, \quad a = 1, \quad b = 2.$
8. $f(x) = x - \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0.3, \quad b = 0.4.$

9. $f(x) = xe^x - 1, \quad a = 0.4, \quad b = 1.$
10. $f(x) = x^2e^{2x} - 1, \quad a = 0.4, \quad b = 0.8.$
11. $f(x) = x - \sin x - 1, \quad a = 0, \quad b = 3.$
12. $f(x) = (x - 3)\cos(x + 2) - 1, \quad a = 0, \quad b = 3.$
13. $f(x) = 3x - \cos x + 2, \quad a = -1, \quad b = 1.$
14. $f(x) = \ln x + (x + 1)^3, \quad a = 0, \quad b = 1.$
15. $f(x) = x^3 - 4\sin x + 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$
16. $f(x) = x\cos(x + 2) - x^2 + 3x - 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$
17. $f(x) = e^x - 6x - 3, \quad a = -1, \quad b = 1.$
18. $f(x) = \mathrm{tg}(0.2 + x) - x^3 - 3, \quad a = 0.7, \quad b = 1.3.$
19. $f(x) = 3x - \cos x - 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$
20. $f(x) = 2x - \lg(x + 3) - 7, \quad a = 4, \quad b = 6.$

1.7. Метод секущих

Решение задачи

Метод секущих получается из метода Ньютона заменой производной $f'(x_k)$ конечно-разностным приближением:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона касательной к графику функции в т. x_k ($\mathrm{tg}\alpha$, см. рис. 1.10 б) приближенно заменяется тангенсом острого угла β при т. $(x_k, f(x_k))$ в прямоугольном треугольнике, образованном точками $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ (рис. 1.12).

Расчетная формула метода секущих нахождения последовательности приближений $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$, сходящейся к искомому решению x^*, записывается следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.9)$$

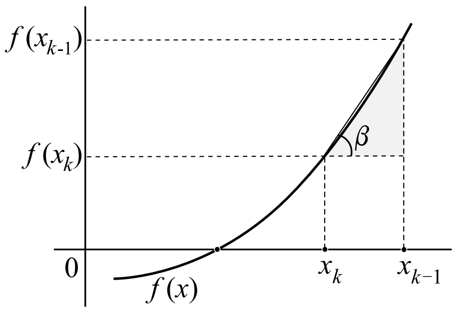


Рис. 1.12. Иллюстрация метода секущих

Как видно, для вычисления x_{k+1} необходимо знать два предыдущих значения x_k, x_{k-1}, т.е. на входе метода необходимо задать два значения: x_0 и x_1 (если x_1 не задано, достаточно взять его достаточно близким к x_0: $x_1 = x_0 + 2\varepsilon$). Итерационный процесс вычислений x_{k+1} заканчивается при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Алгоритм

Дано: $f(x)$, x_0, x_1, ε.

0) принять $k = 1$;

1) вычислить $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$;

2) если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение уравнения (1.2) $\bar{x} = x_{k+1}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 1.

Пример 1.7.1. Методом секущих найти решение уравнения из примера 1.4 $1 - x + \sin x - \ln(1 + x) = 0$ с точностью 0.001, начальное приближение $x_0 = 1$.

По условию $x_0 = 1$. Также зададим $x_1 = x_0 + 2\varepsilon = 1.002$.

Итерация 1. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1 - x_0) \approx 1.15451$ Проверим условие выхода из цикла: $|x_2 - x_1| = |1.15451 - 1.002| = 0.15251 > \varepsilon$;

Итерация 2. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}(x_2 - x_1) \approx 1.14710$ Проверим условие: $|x_3 - x_2| = |1.14710 - 1.15451| = 0.00741 > \varepsilon$;

Итерация 3. $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3)-f(x_2)}(x_3 - x_2) \approx 1.14744$ Проверим условие: $|x_4 - x_3| = |1.14744 - 1.14710| = 0.00034 < \varepsilon$. Процесс итераций закончен. Приближенное решение: $\tilde{x} = 1.14744$; $f(\tilde{x}) \approx -0.0000012$.

Задания для самостоятельного решения

Методом секущих найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $x \in [a, b]$ с точностью 10^{-8}, где $x_0 = (a+b)/2$. Варианты заданий взять из п. 1.6. Сравнить результат с решением того же варианта методом Ньютона.

1.8. Лабораторная работа № 1

Найти решение уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $x \in [a, b]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методами половинного деления, хорд, простых итераций, Ньютона и секущих. Если x_0 не задано, принять $x_0 = (a + b)/2$. Результаты вычислений представить в виде сравнительной таблицы.

Варианты заданий:

1. $f(x) = x\ln(x) - 1, \quad a = 0.5, \quad b = 3.$
2. $f(x) = \ln(x) + (x+1)^2, \quad a = 0.1, \quad b = 1.$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}, \quad a = 0.5, \quad b = 2.$
4. $f(x) = 3x - e^x, \quad a = 0, \quad b = 1.$
5. $f(x) = \ln(x) - \frac{7}{2x+6}, \quad a = 0.5, \quad b = 3.$
6. $f(x) = 3x - \cos(x) - 1, \quad a = 0, \quad b = 2.$
7. $f(x) = e^{-x} - 2\sin(x), \quad a = 0, \quad b = 1.$
8. $f(x) = 5x - 8\ln(x) - 8, \quad a = 0.1, \quad b = 1.$

№ итерации	0	1	2	…	k	…	Результат
м. половинного деления	$a,\ b$	c	c	…	c	…	$\tilde{x},\ f(\tilde{x})$
м. хорд	$x_0 = a$	$x_1 = b$	x_2	…	x_k	…	$\tilde{x},\ f(\tilde{x})$
м. простых итераций	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	x_1	x_2	…	x_k	…	$\tilde{x},\ f(\tilde{x})$
м. Ньютона	$x_0 = \frac{a+b}{2}$	x_1	x_2	…	x_k	…	$\tilde{x},\ f(\tilde{x})$
м. секущих	$x_0 = a$	$x_1 = a + \varepsilon$	x_2	…	x_k	…	$\tilde{x},\ f(\tilde{x})$

9. $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2, \quad a = 3, \quad b = 4.$
10. $f(x) = \tan(0.5x + 0.2) - x^2, \quad a = 0.5, \quad b = 1.5.$
11. $f(x) = x^2 + 4\sin x + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$
12. $f(x) = -2^{x-1} - x, \quad a = -1, \quad b = 1.$
13. $f(x) = e^{2x+1} + 3x + 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$
14. $f(x) = e^x + x^2 - 2, \quad a = 0, \quad b = 1.$
15. $f(x) = (1-x)e^{3x-1} - 0.5, \quad a = 0, \quad b = 0.8.$
16. $f(x) = x^3 + 1.2 - e^x, \quad a = 0, \quad b = 1.$
17. $f(x) = \cos(x + 0.5) - x^3, \quad a = 0.2, \quad b = 1.$
18. $f(x) = \ln x + x - 5, \quad a = 1, \quad b = 5.$
19. $f(x) = 3^x - 1.5 - x, \quad a = 0.2, \quad b = 1.4.$
20. $f(x) = 2x^2 - 5 - 2^x, \quad a = 1, \quad b = 4.$

1.9. Контрольные вопросы

1. Что называется корнем уравнения?
2. Что значит решить уравнение?
3. Из каких этапов состоит решение нелинейного уравнения

с одной переменной?

4. Объясните суть процедуры отделения корней.

5. Какие существуют методы решения уравнения с одной переменной?

6. Суть метода половинного деления. В чем заключается геометрический смысл метода половинного деления?

7. Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода.

8. Какое условие можно использовать для определения неподвижного конца в методе хорд?

9. Суть метода простых итераций. Графическая интерпретация метода.

10. К какому виду нужно преобразовать уравнение для метода простых итераций?

11. Каковы достаточные условия сходимости метода простых итераций?

12. Как выбирается начальное приближение в методе Ньютона?

13. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода.

14. Какие критерии остановки используются в приближенных методах решения нелинейных уравнений?

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В данной главе рассматриваются методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [3, 5, 6, 8–12].

2.1. Постановка задачи

Система линейных алгебраических уравнение в канонической форме записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — матрица коэффициентов, $b = (b_1, \dots, b_n)$ — вектор правых частей, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор неизвестных. Тогда система (2.1) представляется в векторно-матричной форме

$$Ax = b. \tag{2.2}$$

Пусть требуется найти решение системы (2.2). Задача поставлена корректно, если выполняются условия:

1. решение задачи существует;
2. решение единственно;
3. решение непрерывно зависит от входных данных. Отметим, что входными данными для рассматриваемой задачи является матрица A и вектор b, а выходными — вектор x.

Из линейной алгебры известно, что решение задачи (2.2) существует и единственно, если определитель матрицы отличен от нуля, то есть $\det A = |A| \neq 0$. В этом случае, матрицу A называют невырожденной (неособой).

Точность получаемого решения во многом зависит от ее обусловленности, являющейся важным математическим понятием, влияющим на выбор метода решения задачи.

Обусловленность характеризуется числом обусловленности

$$\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Если число $\nu(A)$ относительно мало, то матрица A является хорошо обусловленной. Если число $\nu(A)$ относительно велико, то матрица A является плохо обусловленной.

Число $\nu(A)$ для произвольной квадратной матрицы A удовлетворяет условию

$$\nu(A) \geq \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|} \geq 1, \tag{2.3}$$

где λ_A — собственное число матрицы A.

Число $\nu(A)$ для симметричной матрицы удовлетворяет условию

$$\nu(A) = \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|}.$$

Чем больше число $\nu(A)$, тем хуже обусловленность системы. При $\nu(A) \approx 10^3 - 10^4$ система уже плохо обусловлена. На практике однако ограничиваются проверкой условия $\det A \approx 0$.

Пример 2.1.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1.0000 & -3.0001 \\ 1.0000 & -3.0000 \end{pmatrix}$.

Для оценки обусловленности матрицы A найдем ее собственные значения, решив уравнение $\det |A - \lambda E| = 0$. Оно принимает вид $\lambda^2 + 2\lambda + 0.0001 = 0$. Отсюда, получим

$\lambda_1 = -0.00005$, $\lambda_2 = -1.99995$. Значит, $\nu(A) \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 39999 \approx 4\cdot 10^4$. Следовательно, матрица A плохо обусловленная.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на две группы: прямые (точные) и итерационные.

Прямые методы позволяют найти точное решение системы за конечное число арифметических операций. Сравнение различных прямых методов между собой обычно проводится по числу арифметических действий, необходимых для получения решения в системе из n уравнений.

Итерационные методы — это методы последовательных приближений $x^{(0)}$, $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ к точному решению x^*. Итерационный метод сходится, если $x^k \to x^*$ при $k \to \infty$. Сходящиеся итерационные методы сравниваются между собой по скорости сходимости.

2.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

2.2.1. Метод Гаусса

Рассмотрим классический метод Гаусса. Его идея состоит в приведении исходной системы к треугольному виду с помощью последовательного исключения неизвестных. Существует несколько модификаций этого метода.

Рассмотрим невырожденную линейную систему в развернутой форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Шаг 1. Пусть $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то меняем местами первое и второе уравнения в (2.4); если $a_{21} = 0$, то меняем местами первое и третье уравнения и т.д. Все a_{i1} не могут равняться нулю, т.к. $\det A \neq 0$. Разделив первое уравнение на $a_{11} \neq 0$, получим

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \tag{2.5}$$

где

$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = \overline{2, n}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

С использованием уравнения (2.5) можно исключить x_1 из всех оставшихся уравнений системы (2.4). В результате получим:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Формулы преобразования коэффициентов при переходе от (2.4) к (2.6) имеют вид:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\alpha_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}\beta_1, \quad i, j = \overline{2, n}.$$

На этом шаг 1 процесса исключения заканчивается. Индекс (1) в коэффициентах $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ показывает номер первого шага.

Шаг 2. Полагая, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$, разделим второе уравнение в (2.6) на $a_{22}^{(1)}$, тогда получим:

$$x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \tag{2.7}$$

где

$$\alpha_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad j = \overline{3, n}, \quad \beta_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

С помощью уравнения (2.7) описанным выше способом можно исключить x_2 из оставшихся уравнений. В итоге получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Формулы преобразования коэффициентов при переходе от (2.6) к (2.8) имеют вид:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\alpha_{2j}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)}\beta_2, \quad i, j = \overline{3, n}.$$

Продолжая таким образом, на k-том шаге будем иметь уравнение

$$x_k + \alpha_{k\,k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k,$$

где

$$\alpha_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad \beta_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}. \tag{2.9}$$

Формулы преобразования коэффициентов имеют вид:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}\alpha_{kj}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}\beta_k, \quad i, j = \overline{k+1, n}. \tag{2.10}$$

После $(n-1)$-ого шага получим систему уравнений с верхней треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Решение полученной системы от x_n к x_1 завершает реализацию метода Гаусса. При этом неизвестные x_i определяются по формуле:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad i = n, n-1, \ldots, 1. \tag{2.12}$$

Переход от системы (2.4) к треугольной системе (2.11) представляет собой *прямой ход* метода Гаусса. Процесс последовательного вычисления компонент из системы (2.11) называется *обратным ходом* метода.

Коэффициенты a_{11}, $a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$, на которые производится деление в процессе преобразований системы, называются *ведущими элементами* метода.

Алгоритм

Алгоритм решения СЛАУ классическим методом Гаусса:

1. *Прямой ход.* По формулам (2.9), (2.10) вычисляют коэффициенты α_{ij} и β_i $(i, j = \overline{1, n})$.

2. *Обратный ход.* Определяют неизвестные x_i по формуле (2.12).

2.2.2. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Описанный выше классический метод Гаусса имеет свои недостатки. Во-первых, ведущие элементы могут оказаться нулевыми, даже если матрица A является невырожденной ($\det A \neq 0$). Во-вторых, они могут оказаться достаточно малыми числами, что может привести к получению неверных результатов. Поскольку при численных вычислениях на компьютере деление на малое число снижает точность решения системы из-за ошибок округления.

Для того, чтобы избежать указанных недостатков применяют метод Гаусса с выбором главного элемента. Метод дает единственное решение, если определитель системы отличен от нуля. Уменьшение вычислительной погрешности в методе Гаусса с выбором главного элемента производится путем перестановки строк и столбцов матрицы A так, чтобы ведущий элемент на k-том шаге исключения был наибольшим по модулю из всех элементов матрицы A, участвующих в дальнейшем исключении. Этот метод называют *методом Гаусса с полным упорядочением.* Такой способ решения требует большой дополнительной вычислительной работы. Поэтому на практике используют *метод исключения с частичным упорядочением по строкам или столбцам.*

Рассмотрим *метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.* Перед исключением x_1 выбирается максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A: $\max\limits_{i}|a_{i1}|$. Пусть это будет $a_{i_1 1}$. Если $i_1 > 1$, то переставляем уравнения с номерами $1, i_1$ и реализуем первый шаг классического метода Гаусса. Отметим, что в результате такого выбора все множители первого шага по модулю не больше 1. Затем перед исключением из оставшихся уравнений отыскиваем максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы $a_{ij}^{(1)}$, $i, j = \overline{2, n}$: $\max\limits_{2 \leq i \leq n}|a_{i2}^{(1)}|$. Пусть это будет $a_{i_2 2}^{(1)}$. Если $i_2 > 2$, то переставляем уравнения с номерами $2, i_2$ и реализуем второй шаг метода Гаусса. И так далее... Отметим, что в данной схеме порядок исключения неизвестных сохраняется: $1, 2, \ldots, n$.

Аналогичным образом выглядит *метод Гаусса с выбором главного элемента по строкам.* В этом случае переставляются столбцы матрицы A, т.е. изменяется порядок исключения неизвестных.

Пример 2.2.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений классическим методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Согласно прямому ходу приведем систему к треугольному виду.

Исключим переменную x_1 из всех уравнений, кроме первого. Поменяем местами первое и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое, умноженное на 3:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_2 - 5x_3 = -6, \\ x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Исключим переменную x_2 из третьего уравнения, для этого вычтем из него второе уравнение:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Система приведена к треугольному виду. Переходим к обратному ходу метода. Начинаем с последнего уравнения, из которого получим:

$$x_3 = 1.$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$x_2 = 5x_3 - 6 = -1.$$

Наконец, из первого уравнения имеем:

$$x_1 = 3 - x_3 = 2.$$

Таким образом, найдено решение системы: $x^* = (2, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

2.2.3. Метод прогонки

Метод прогонки применим в случае, когда матрица A — трехдиагональная.

Общая постановка задачи имеет следующий вид. Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей A. Развернутая запись этой системы имеет вид:

$$\begin{gathered} \alpha_i x_{i-1} - \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i, \\ \alpha_1 = \gamma_n = 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{2.13}$$

которому соответствует расширенная матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & \alpha_3 & -\beta_3 & \gamma_3 & \dots & 0 & 0 & \delta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & -\beta_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Здесь первое и последнее уравнения, содержащие по два слагаемых, могут рассматриваться как краевые условия. Знак «–» при коэффициентах β_i взят для более удобного представления расчетных формул метода.

Требуется найти решение $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ системы (2.13) методом исключения Гаусса.

Если к (2.13) применить алгоритм прямого хода метода Гаусса, то вместо A_1 получится $\hat{A}_1$:

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -P_1 & 0 & 0 & \dots & Q_1 \\ 0 & 1 & -P_2 & 0 & \dots & Q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -P_3 & \dots & Q_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$$

Учитывая, что последний столбец в этой матрице соответствует правой части, и переходя к системе, включающей неизвестные, получаем рекуррентную формулу

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2.14}$$

Соотношение (2.14) есть формула для обратного хода, а формулы для коэффициентов P_i, Q_i, которые называются прогоночными, определяются из (2.13), (2.14).

Запишем (2.14) для индекса $i-1$:

$$x_{i-1} = P_{i-1} x_i + Q_{i-1},$$

и подставим в (2.13). Получим:

$$\alpha_i (P_{i-1} x_i + Q_{i-1}) - \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i.$$

Приведем формулу к виду (2.14):

$$(\alpha_i P_{i-1} - \beta_i) x_i + \alpha_i Q_{i-1} + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i,$$

$$(\alpha_i P_{i-1} - \beta_i) x_i = -\gamma_i x_{i+1} + \delta_i - \alpha_i Q_{i-1},$$

$$x_i = \frac{-\gamma_i x_{i+1}}{\alpha_i P_{i-1} - \beta_i} + \frac{\delta_i - \alpha_i Q_{i-1}}{\alpha_i P_{i-1} - \beta_i},$$

$$x_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}} x_{i+1} + \frac{\alpha_i Q_{i-1} - \delta_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}.$$

Отсюда, получаем рекуррентные соотношения для $P_i,\ Q_i$:

$$P_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{\alpha_i Q_{i-1} - \delta_i}{\beta_i - \alpha_i P_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{2.15}$$

Определение прогоночных коэффициентов по формулам (2.15) соответствует *прямому ходу метода прогонки.*

Обратный ход метода прогонки начинается с вычисления x_n. Для этого используется последнее уравнение, коэффициенты которого определены в прямом ходе, и последнее уравнение исходной системы:

$$x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1},$$
$$\alpha_n x_{n-1} - \beta_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} = \delta_n.$$

Тогда определяется x_n:

$$x_n = \frac{\alpha_n Q_{n-1} - \delta_n}{\beta_n - \alpha_n P_{n-1}} = Q_n \ \Rightarrow\ x_n = Q_n. \tag{2.16}$$

Остальные значения неизвестных находятся рекуррентно по формуле (2.14). Все соотношения для выполнения вычислений получены.

Алгоритм

Прямой ход.

1. Вычислить $P_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1}$, $Q_1 = -\frac{\delta_1}{\beta_1}$ (в (2.15) подставить $\alpha_1 = 0$).
2. Вычислить прогоночные коэффициенты $P_i,\ Q_i,\ i = \overline{2, n-1}$ по формулам (2.15).

Обратный ход.

1. Найти $x_n = \dfrac{\alpha_n Q_{n-1} - \delta_n}{\beta_n - \alpha_n P_{n-1}}$.

2. Значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ определить по формуле (2.14):

$$
\begin{gathered}
x_{n-1} = P_{n-1}x_n + Q_{n-1}, \\
x_{n-2} = P_{n-2}x_{n-1} + Q_{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_1 = P_1 x_2 + Q_1.
\end{gathered}
$$

Замечание 2.2.1. Алгоритм метода прогонки называется *корректным*, если для всех $i = \overline{1, n}$, $\beta_i - \alpha_i P_{i-1} \neq 0$, то есть если в формулах (2.15), (2.16) нет деления на нуль, и называется *устойчивым*, если $|P_i| < 1$, $i = \overline{1, n-1}$.

Замечание 2.2.2. *Достаточное условие устойчивости метода прогонки* — это условие преобладания диагональных элементов в матрице A_1, в которой $\alpha_i \neq 0$ и $\beta_i \neq 0$, $(i = \overline{2, n-1})$:

$$|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i|.$$

Замечание 2.2.3. Алгоритм метода прогонки является очень экономичным и требует для своей реализации количество операций, пропорциональное n.

Замечание 2.2.4. Рассмотренный здесь вариант метода прогонки называется *правой прогонкой.* Название метода следует из того, что при обратном ходе неизвестные x_i вычисляются справа налево, то есть сначала x_n, x_{n-1} и т.д.

Существует метод *левой прогонки*, в котором неизвестные x_i вычисляются слева направо, т.е. сначала x_1, x_2 и т.д.

Комбинация левой и правой прогонок дает метод *встречных прогонок.*

Пример 2.2.2. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом прогонки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Выпишем коэффициенты матрицы:

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_1 = -1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = -1,$$

$$\gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 1,\ \gamma_3 = 1,\ \gamma_4 = 0,$$

$$\delta_1 = 5,\ \delta_2 = 3,\ \delta_3 = 3,\ \delta_4 = 7.$$

Прямой ход метода прогонки:

1. вычислим $P_1 = \dfrac{\gamma_1}{\beta_1} = \dfrac{2}{-1} = -2$, $Q_1 = -\dfrac{\delta_1}{\beta_1} = \dfrac{-5}{-1} = 5$;
2. вычислим прогоночные коэффициенты $P_i,\ Q_i$ по формулам (2.15):
$$P_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_2 - \alpha_2 P_1} = \frac{1}{1 - 2 \cdot (-2)} = 0.2,$$
$$Q_2 = \frac{\alpha_2 Q_1 - \delta_2}{\beta_2 - \alpha_2 P_1} = \frac{2 \cdot 5 - 3}{1 - 2 \cdot (-2)} = 1.4,$$
$$P_3 = \frac{\gamma_3}{\beta_3 - \alpha_3 P_2} = \frac{1}{1 - 1 \cdot 0.2} = 1.25,$$
$$Q_3 = \frac{\alpha_3 Q_2 - \delta_3}{\beta_3 - \alpha_3 P_2} = \frac{1 \cdot 1.4 - 3}{1 - 1 \cdot 0.2} = -2.$$

Обратный ход метода прогонки:

1. вычислим $x_4 = \dfrac{\alpha_4 Q_3 - \delta_4}{\beta_4 - \alpha_4 P_3} = \dfrac{1 \cdot (-2) - 7}{-1 - 1 \cdot 1.25} = 4$;

2. остальные значения x_3, x_2 и x_1 вычислим по формуле (2.14)

$$x_3 = P_3 x_4 + Q_3 = 1.25 \cdot 4 + (-2) = 3,$$

$$x_2 = P_2 x_3 + Q_2 = 0.2 \cdot 3 + 1.4 = 2,$$

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 = (-2) \cdot 2 + 5 = 1.$$

Таким образом, найден ответ задачи: $x^* = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

2.3. Лабораторная работа № 2

Задание 1. Найти решение СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента [7].

Варианты заданий:

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

5. $$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

6. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

8. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & -2 & -1 \\ 10 & 3 & -3 & -2 \\ 8 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

9. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

10. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 40 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$

Задание 2. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки.

Варианты заданий:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ -40 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

12. $$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

13. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

14. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.4. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

2.4.1. Метод простых итераций

Для описания метода систему (2.2) преобразуем к эквивалентному виду

$$x = \alpha x + \beta \tag{2.17}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \tag{2.18}$$

Эту преобразованную систему будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближения принимается столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$, далее последовательные приближения находятся по формуле

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.19}$$

Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon,$$

или

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$$

Преобразование (2.17) можно провести несколькими способами, но для обеспечения сходимости необходимо выполнение достаточного условия сходимости. Имеет место теорема

Теорема 2.4.1 (О сходимости). *Последовательность векторов x^k для линейной системы* (2.17) *сходится к единственному решению x^*, если какая-нибудь каноническая форма матрицы α меньше единицы, т.е. для итерационного процесса $\{x^k\}$ достаточное условие сходимости есть*

$$\|\alpha\| < 1.$$

Способ 1.

Пусть все $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем выполняется условие

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i, j = \overline{1, n},$$

иначе путем перестановки строк добьемся выполнения данного условия. Тогда из каждого i-того уравнения системы (2.1) выразим x_i:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}}, \\ \ldots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \cdots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Т.е. в системе (2.18) $\alpha_{ii} = 0$, $\alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ $(i \neq j)$, $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

Способ 2.

К каждому i-тому уравнению (2.1) прибавим и вычтем x_i:

$$\begin{cases} x_1 = -(a_{11} - 1) x_1 - a_{12} x_2 - \cdots - a_{1n} x_n + b_1, \\ x_2 = -a_{11} x_1 - (a_{22} - 1) x_2 - \cdots - a_{2n} x_n + b_2, \\ \ldots \\ x_n = -a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \cdots - (a_{nn} - 1) x_n + b_n. \end{cases}$$

Т.е. в системе (2.18) $\alpha_{ii} = -(a_{ii} - 1)$, $\alpha_{ij} = -a_{ij}$ $(i \neq j)$, $\beta_i = b_i$.

Алгоритм

Дано: A, b, ε.

0) преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ одним из описанных способов;

1) положить $x^{(0)} = \beta$ и $k = 0$;

2) вычислить последующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$;

3) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, то процесс итераций завершен, приближенное решение системы линейных уравнений $\tilde{x} = x^{(k+1)}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 2.4.1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{cases} -2.8x_1 + x_2 + 4x_3 = 60, \\ 10x_1 - x_2 + 8x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0.6x_3 = 20. \end{cases}$$

Приведем систему к виду (2.17) способом 1. Очевидно, что условие сходимости не выполнено: $|a_{11}| = 2.8 \not> |1| + |4|$, $|a_{22}| = 1 \not> |10| + |8|$, $|a_{33}| = 0.6 \not> |-1| + |2|$, но с помощью перестановки уравнений можно добиться выполнения условия сходимости:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 8x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0.6x_3 = 20, \\ -2.8x_1 + x_2 + 4x_3 = 60 \end{cases}$$

$$|a_{11}| = 10 > |-1| + |8|, \quad |a_{22}| = 2 > |-1| + |-0.6|,$$

$$|a_{33}| = 4 > |-2.8| + |1|,$$

т.е. диагональные элементы преобладают.

Выразим x_1 из первого уравнения, x_2 — из второго, а x_3 — из третьего, получаем систему вида (2.17):

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 - 0.8x_3 + 1, \\ x_2 = 0.5x_1 + 0.3x_3 + 10, \\ x_3 = 0.7x_1 - 0.25x_2 + 15, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & -0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & -0.25 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Причем $\|\alpha\| = \max\{0.9, 0.8, 0.95\} = 0.95 < 1$, т.е. условие теоремы о сходимости выполнено.

Итерация 0. $x^{(0)} = (1, 10, 15)^{\mathrm{T}}$.

Итерация 1.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.1x_2^{(0)} - 0.8x_3^{(0)} + 1 = -10, \\ x_2^{(1)} = 0.5x_1^{(0)} + 0.3x_3^{(0)} + 10 = 15, \\ x_3^{(1)} = 0.7x_1^{(0)} - 0.25x_2^{(0)} + 15 = 13.2 \end{cases}$$

$\max\limits_i\{|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|\} = \max\{11, 5, 1.8\} = 11 > \varepsilon$. Условие окончания процесса итераций не выполнено, значит начинаем новую итерацию.

Итерация 2.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.1x_2^{(1)} - 0.8x_3^{(1)} + 1 = -8.06, \\ x_2^{(2)} = 0.5x_1^{(1)} + 0.3x_3^{(1)} + 10 = 8.96, \\ x_3^{(2)} = 0.7x_1^{(1)} - 0.25x_2^{(1)} + 15 = 4.25 \end{cases}$$

$\max\limits_i\{|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|\} = \max\{1.94, 6.04, 8.95\} = 8.95 > \varepsilon$. Условие окончания процесса итераций не выполнено, значит начинаем новую итерацию и т.д.

На 31-й итерации найдется приближенное решение СЛАУ с заданной погрешностью ε: $\tilde{x} = (-5.111, 10.119, 8.897)^{\mathrm{T}}$.

2.4.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией выше рассмотренного метода простых итерации для решения СЛАУ, в ряде случаев приводящий к более быстрой сходимости последовательных приближений $\{x^{(k)}\}$ к искомому решению.

Итерации данного метода отличаются от (2.19) тем, что при нахождении i-той компоненты $(k+1)$-го приближения используются уже найденные компоненты $(k+1)$-го приближения с меньшими номерами $1, 2, \ldots, i-1$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \cdots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3, \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Алгоритм

Дано: A, b, ε.

0) преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$;

1) положить $x^{(0)} = \beta$ и $k = 0$;

2) вычислить последующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле (2.20);

3) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, то процесс итераций завершен, приближенное решение системы линейных уравнений $\tilde{x} = x^{(k+1)}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 2.4.2. Решить систему линейных алгебраических уравнений из примера 2.4.1 методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0.01$.

В примере 2.4.1 было выполнено преобразование системы к виду (2.17):

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 - 0.8x_3 + 1, \\ x_2 = 0.5x_1 + 0.3x_3 + 10, \\ x_3 = 0.7x_1 - 0.25x_2 + 15. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & -0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & -0.25 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Итерация 0. $x^{(0)} = (1, 10, 15)^{\mathrm{T}}$.

Итерация 1.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.1x_2^{(0)} - 0.8x_3^{(0)} + 1 = -10, \\ x_2^{(1)} = 0.5x_1^{(1)} + 0.3x_3^{(0)} + 10 = 9.5, \\ x_3^{(1)} = 0.7x_1^{(1)} - 0.25x_2^{(1)} + 15 = 5.625 \end{cases}$$

$\max\limits_i\{|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}|\} = \max\{11, 0.5, 9.375\} = 11 > \varepsilon$. Условие окончания процесса итераций не выполнено, значит начинаем новую итерацию.

Итерация 2.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.1x_2^{(1)} - 0.8x_3^{(1)} + 1 = -2.55, \\ x_2^{(2)} = 0.5x_1^{(2)} + 0.3x_3^{(1)} + 10 = 10.4125, \\ x_3^{(2)} = 0.7x_1^{(2)} - 0.25x_2^{(2)} + 15 = 10.6118 \end{cases}$$

$\max\limits_i\{|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|\} = \max\{7.45, 0.9125, 4.9868\} = 7.45 > \varepsilon$. Условие окончания процесса итераций не выполнено, значит начинаем новую итерацию и т.д

На 13-й итерации найдется приближенное решение СЛАУ с заданной погрешностью ε: $\tilde{x} = (-5.108, 10.116, 8.895)^{\mathrm{T}}$. Очевидно, количество итераций значительно меньше, чем при решении методом простых итераций.

2.4.3. Метод релаксации

Для описания метода релаксации преобразуем систему (2.1) следующим образом: перенесем свободные члены налево и разделим первое уравнение на $-a_{11}$, второе на $-a_{22}$ и т.д. (при предположении, что все $a_{ii} \neq 0$, иначе, меняем строки местами). Тогда получим:

$$\begin{cases} -x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n + c_1 = 0, \\ d_{21}x_1 - x_2 + \cdots + d_{2n}x_n + c_2 = 0, \\ \ldots \\ d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots - x_n + c_n = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

где $d_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $c_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Пусть задано начальное приближение

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}},$$

подставляя его в (2.21), получим невязки

$$\begin{cases} R_1^{(0)} = c_1 - x_1^{(0)} + \sum\limits_{j=2}^{n} d_{1j}x_j^{(0)}, \\ \ldots \\ R_i^{(0)} = c_i - x_i^{(0)} + \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}x_j^{(0)}, \quad j \neq i, \\ \ldots \\ R_n^{(0)} = c_n - x_n^{(0)} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_{nj}x_j^{(0)}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Если в этой системе одной из неизвестных $x_k^{(0)}$ дать приращение $\delta x_k^{(0)}$, то соответствующая невязка $R_k^{(0)}$ уменьшится на $\delta x_k^{(0)}$, а остальные невязки $R_i^{(0)}$ $(i \neq k)$ увеличатся на величину $d_{ik}\delta x_k^{(0)}$ $\left(i, k = \overline{1, n}, i \neq k\right)$.

Следовательно, чтобы обратить невязку $R_k^{(1)}$ в ноль, достаточно величине $x_k^{(0)}$ дать приращение

$$\delta x_k^{(0)} = R_k^{(0)},$$

тогда на первой итерации имеем следующую систему уравнений

$$R_i^{(1)} = \begin{cases} 0 \quad (i = k), \\ R_i^{(0)} + d_{ik}\delta x_k^{(0)} \quad (i \neq k,\ i = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Далее, чтобы на m-той итерации обратить в ноль невязку $R_k^{(m)}$, дадим переменной $x_k^{(m-1)}$ приращение

$$\delta x_k^{(m-1)} = R_k^{(m-1)},$$

тогда получим систему уравнений

$$R_i^{(m)} = \begin{cases} 0 \quad (i = k), \\ R_i^{(m-1)} + d_{ik}\delta x_k^{(m-1)} \quad (i \neq k,\ i = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Процесс итераций заканчивается, когда все невязки последней преобразованной системы будут равны нулю с требуемой точностью

$$|R_i^{(m)}| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{где } 0 < \varepsilon < 1.$$

В методе рекомендуется на каждой итерации обращать в ноль максимальную по модулю невязку путем изменения значения, соответствующей компоненты приближения.

Метод релаксации сходится при выполнении условия

$$|a_{ii}| >= \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i, j = \overline{1, n},$$

иначе, путем перестановки строк, добьемся выполнения данного условия.

Алгоритм

Дано: A, b, $x^{(0)}$, ε.

0) преобразовать систему (2.1) к виду (2.21);

1) принять $m = 0$ и вычислить невязки начального приближения

$$R_i^{(0)} = c_i - x_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j^{(0)}, \quad j \neq i,\ i = \overline{1,n};$$

2) найти величину $a_k = \max\limits_i |R_i^{(0)}|$, которой соответствует невязка $R_k^{(0)}$ и приращение $\delta x_k^{(0)} = R_k^{(0)}$;

3) принять $m = m + 1$, вычислить невязки следующего приближения

$$R_i^{(m)} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = k, \\ R_i^{(m-1)} + d_{ik}\delta x_k^{(m-1)}, & \text{при } i \neq k,\ i = \overline{1,n}; \end{cases}$$

найти величину $a_k = \max\limits_i |R_i^{(m)}|$, которой соответствует невязка $R_k^{(m)}$ и приращение $\delta x_k^{(m)} = R_k^{(m)}$;

4) если выполняется условие $a_k < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, неизвестные вычисляются по формуле

$$x_i = x_i^{(0)} + \sum_{l=0}^{m} \delta x_i^{(l)}, \quad i = \overline{1,n},$$

иначе, возвращаемся к пункту 3.

Замечание 2.4.1. Описанные метод называется полной релаксацией. Если в процессе полной релаксации для системы уравнений (2.1) с положительно-определенной матрицей выполнено условие: последовательность индексов i компонент x_i ($i=\overline{1,n}$) имеет интервал повторяемости L, т.е. на каждом отрезке длины L индекс i принимает хотя бы по одному разу все числа $1,2,\ldots,n$, то процесс сходится к решению системы (2.1), где L — любое натуральное число.

Пример 2.4.3. Найти решение системы линейных алгебраический уравнений $Ax=b$ методом релаксации с заданной погрешностью $\varepsilon=0.001$. В качестве начального приближения принять $x^{(0)}=b$.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2,\\ 3x_1+x_2-2x_3=3,\\ x_1+x_3=3. \end{cases}$$

Согласно алгоритму, преобразуем эту систему к виду (2.21):

$$\begin{cases} -x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+1=0,\\ -3x_1-x_2+2x_3+3=0,\\ -x_1-x_3+3=0. \end{cases}$$

Выпишем коэффициенты полученной системы:

$$\begin{array}{llll} d_{11}=-1, & d_{12}=-\frac{1}{2}, & d_{13}=\frac{1}{2}, & c_1=1,\\ d_{21}=-3, & d_{22}=-1, & d_{23}=2, & c_2=3,\\ d_{31}=-1, & d_{32}=0, & d_{33}=-1, & c_3=3. \end{array}$$

Начальное приближение $x^{(0)}=(2,3,3)^{\mathrm{T}}$.

Вычислим невязку нулевого приближения:

$$\begin{cases} R_1^{(0)}=1-2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\right)=-1,\\ R_2^{(0)}=3-3+(-3\cdot 2+2\cdot 3)=0,\\ R_3^{(0)}=3-3+(-1\cdot 2+0\cdot 3)=-2. \end{cases}$$

Найдем величину $a_k=\max\{|-1|,|0|,|-2|\}=2>\varepsilon$, которой соответствует номер $k=3$ и приращение $\delta x_3^{(0)}=-2$.

Вычислим невязку первого приближения:

$$\begin{cases} R_1^{(1)} = -1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -2, \\ R_2^{(1)} = 0 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ R_3^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Величина $a_k = \max\{|-2|, |-4|, |0|\} = 4 > \varepsilon$, ей соответствует номер $k = 2$ и приращение $\delta x_2^{(1)} = -4$.

Снова вычислим невязку второго приближения:

$$\begin{cases} R_1^{(2)} = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4) = 0, \\ R_2^{(2)} = 0, \\ R_3^{(2)} = 0 + 0 \cdot (-4) = 0. \end{cases}$$

Величина $a_k = \max\{|0|, |0|, |0|\} = 0 < \varepsilon$, следовательно, процесс итераций закончен и найдено решение

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3 + (-4) = -1, \\ x_3 = 3 + (-2) = 1, \end{cases}$$

равное найденному решению в примере 2.2.1.

2.5. Лабораторная работа № 3

Задание 1. Найти решение СЛАУ методами простой итерации и Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Сравнить результаты и количество итераций.

Варианты заданий:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1.02 & -0.25 & -0.30 \\ -0.41 & 1.13 & -0.15 \\ -0.25 & -0.14 & 1.21 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.515 \\ 1.555 \\ 2.780 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 6.1 & 2.2 & 1.2 \\ 2.2 & 5.5 & -1.5 \\ 1.2 & -1.5 & 7.2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16.55 \\ 10.55 \\ 16.8 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 3.82 & 1.02 & 0.75 & 0.81 \\ 1.05 & 4.53 & 0.98 & 1.53 \\ 0.73 & 0.85 & 4.71 & 0.81 \\ 0.88 & 0.81 & 1.28 & 3.50 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15.655 \\ 22.705 \\ 23.480 \\ 16.110 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -7 & -10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 2.12 & 0.42 & 1.34 & 0.88 \\ 0.42 & 3.95 & 1.87 & 0.43 \\ 1.34 & 1.87 & 2.98 & 0.46 \\ 0.88 & 0.43 & 0.46 & 4.44 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11.172 \\ 0.115 \\ 9.009 \\ 9.349 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 20.9 & 1.2 & 2.1 & 0.9 \\ 1.2 & 21.2 & 1.5 & 2.5 \\ 2.1 & 1.5 & 19.8 & 1.3 \\ 0.9 & 2.5 & 1.3 & 32.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21.7 \\ 27.46 \\ 28.76 \\ 49.72 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$

9. $$A = \begin{pmatrix} 1.02 & -0.05 & -0.10 \\ -0.11 & 1.03 & -0.05 \\ -0.11 & -0.12 & 1.04 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.795 \\ 0.849 \\ 1.398 \end{pmatrix}.$$

10. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11. $$A = \begin{pmatrix} 1.15 & 0.09 & 0.2 & -0.71 \\ -0.31 & 1.52 & 0.43 & 0.59 \\ 0.06 & 0.74 & 1.48 & -0.49 \\ 0.73 & 0.62 & 0.23 & 1.81 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.02 \\ 0.75 \\ 0.73 \end{pmatrix}.$$

12. $$A = \begin{pmatrix} 3.27 & -1.29 & -0.25 & 1.3 \\ 0.42 & 0.87 & -0.07 & 0.26 \\ 0.24 & 0.96 & 1.5 & 0.11 \\ 0.27 & -0.07 & -1.01 & 1.55 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.04 \\ 2.47 \\ 1.78 \\ 2.32 \end{pmatrix}.$$

13. $$A = \begin{pmatrix} 2.16 & 0.77 & 0.03 & -1.08 \\ -0.55 & 1.81 & 0.36 & -0.66 \\ -0.38 & 1.53 & 2.39 & 0.17 \\ -0.29 & 0.3 & -1.14 & 1.99 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.88 \\ 1.73 \\ 2.14 \\ 1.29 \end{pmatrix}.$$

14. $$A = \begin{pmatrix} 1.97 & 0.83 & 0.31 & 0.74 \\ -0.77 & 1.24 & 0.3 & -0.11 \\ -0.26 & 0.32 & 1.05 & -0.43 \\ 0.73 & -1.33 & 0.59 & 2.78 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.58 \\ 0.64 \\ 0.62 \\ 0.53 \end{pmatrix}.$$

15. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -0.5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Задание 2. Найти решение СЛАУ методом релаксации с точностью $\varepsilon = 0.001$. В качестве начального приближения принять $x^{(0)} = b$.

Варианты заданий:

1. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 12 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. $$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 13 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. $$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 5 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0.3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -0.5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.6. Контрольные вопросы

1. Что такое число обусловленности матрицы и как оно вычисляется?

2. Какие существуют группы методов решения СЛАУ?

3. Приведите примеры прямых и итерационных методов решения СЛАУ.

4. Чем отличаются прямые методы от итерационных методов решения СЛАУ?

5. В чем заключаются прямой и обратный ход метода исключения Гаусса?

6. В каком случае метод Гаусса не применим для решения СЛАУ?

7. Расскажите о модификациях метода Гаусса.

8. Для решения каких систем применяется метод прогонки?

9. В чем заключается суть метода простых итераций для решения СЛАУ?

10. Как выбирается начальное приближение в методе простых итераций для решения СЛАУ?

11. Как привести систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами?

12. В чем заключается суть метода Зейделя для решения СЛАУ?

13. В чем заключается суть метода релаксации для решения СЛАУ?

14. Какой критерий остановки используется в итерационных методах решения СЛАУ?

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

3.1. Проблема собственных значений

Необходимость знать информацию о собственных значениях и собственных векторах матриц [5, 6, 8, 10, 11, 13] часто возникает на практике при решении задач механики, химии и физики, в т.ч. ядерной [4]. Собственные значения λ и собственные векторы x квадратной матрицы A порядка n определяются соотношением

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0. \tag{3.1}$$

Все собственные значения матрицы A являются решением (корнями) характеристического уравнения

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

Таким образом, матрица A порядка n имеет n собственных значений λ_i, $i = \overline{1, n}$, среди которых могут быть равные и комплексно-сопряженные.

Выделяют следующие проблемы собственных значений:

- *полная проблема* — найти все собственные числа и соответствующие собственные векторы матрицы A;
- *частичная проблема* — найти некоторые собственные числа и векторы матрицы A (как правило, минимальное и максимальное по модулю);
- *симметричная проблема* — найти собственные значения и векторы симметричной матрицы A.

Укажем наиболее простые случаи проблемы собственных значений.

Замечание 3.1.1. Собственные значения треугольной (верхней или нижней) матрицы A совпадают с её диагональными элементами: $\lambda_i = a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 3.1.2. Собственные значения диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ равны диагональным элементам: $\lambda_i = a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, а в качестве собственных векторов можно выбрать единичные орты: $x^i = e^i$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 3.1.3. Собственные значения вещественной симметричной матрицы A вещественны, а собственные векторы можно выбрать попарно ортогональными.

Важно отметить, что если матрицу A с помощью преобразований подобия привести к диагональной матрице B, то *полная проблема собственных значений решена.*

Определение 3.1.1. Квадратные матрицы A и B порядка n называются подобными, если существует невырожденная матрица P такая, что

$$B = P^{-1}AP, \tag{3.2}$$

$P^{-1}AP$ называют преобразованием подобия, а P — матрицей подобия.

Действительно, если B подобна A, то $B = P^{-1}AP$ (согласно определению 3.1.1), причем $\det(P) \neq 0$, и

$$By = \mu y. \tag{3.3}$$

Умножим (3.2) справа на вектор y:

$$By = P^{-1}APy,$$

теперь умножим слева на P

$$PBy = PP^{-1}APy, \quad \Rightarrow \quad PBy = APy,$$

тогда с учетом (3.3)

$$A(Py) = \mu(Py).$$

Отсюда видно, что собственное значение μ матрицы B совпадает с собственным значением λ матрицы A, а собственный вектор y матрицы B связан с собственным вектором x матрицы A соотношением

$$x = Py.$$

Определение 3.1.2. Если матрицы A и B удовлетворяют тождеству

$$(Ax, y) = (x, By), \tag{3.4}$$

то матрица B называется сопряженной матрице A и обозначается A^*.

Т.о., имеет место *тождество Лагранжа*: $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

3.2. Устойчивость задачи на собственные значения

Далее будем считать, что в задаче (3.1) все собственные значения матрицы A простые.

На практике элементы матрицы A почти всегда заданы с некоторой погрешностью δA, тогда вместо (3.1) будем иметь

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (\lambda + \delta\lambda)(x + \delta x).$$

Отбросим члены второго порядка малости, тогда получим

$$Ax + \delta Ax + A\delta x = \lambda x + \delta\lambda x + \lambda\delta x$$

и вычтем из этого выражения (3.1):

$$\delta A x + A\delta x = \delta\lambda x + \lambda\delta x. \tag{3.5}$$

Далее рассмотрим два варианта существования погрешностей.

1) $\delta x = 0,\ \delta\lambda \neq 0.$

Из (3.5) имеем

$$\delta A x^i = \delta\lambda_i x^i,$$

$$(y^i, \delta A x^i) = \delta\lambda_i (y^i, x^i),$$

$$\|\delta\lambda_i\| \leq \frac{\|y^i\|\|x^i\|}{(y^i, x^i)}\|\delta A\|.$$

Отношение $\dfrac{\|y^i\|\|x^i\|}{(y^i, x^i)} = \dfrac{1}{\cos\alpha_i} = \omega_i \geq 1$ называется i-тым коэффициентом перекоса матрицы A, где α_i — угол между собственными векторами x^i и y^i.

Таким образом,

$$\|\delta\lambda_i\| \leq \omega_i\|\delta A\|.$$

Следовательно, если погрешность δA и i-тый коэффициент перекоса достаточно малы, то мала и погрешность определяемого i-того собственного значения. Важно отметить, что для симметричной матрицы все $\omega_i = 1$, поэтому задача нахождения собственных значений симметричной матрицы является устойчивой.

2) $\delta x \neq 0,\ \delta\lambda = 0.$

Из (3.5) имеем

$$A\delta x^i + \delta A x^i = \lambda_i \delta x^i,$$

$$(A\delta x^i, y^j) + (\delta A x^i, y^j) = \lambda_i(\delta x^i, y^j), \tag{3.6}$$

где $(A\delta x^i, y^j) = (\delta x^i, A^* y^j) = (\delta x^i, \lambda_j y^j) = \lambda_j(\delta x^i, y^j)$. Подставим в (3.6):

$$\lambda_j(\delta x^i, y^j) + (\delta A x^i, y^j) = \lambda_i(\delta x^i, y^j),$$

$$(\delta x^i, y^j) = \frac{(\delta A x^i, y^j)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j. \tag{3.7}$$

Пусть

$$\delta x^i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x^j, \tag{3.8}$$

тогда

$$(\delta x^i, y^j) = \beta_{ij}(x^j, y^j).$$

Подставив это выражение в (3.7), получим

$$\beta_{ij} = \frac{(\delta A x^i, y^j)}{(x^j, y^j)(\lambda_i - \lambda_j)}, \quad i \neq j,$$

$$|\beta_{ij}| \leq \frac{\|x^i\|}{\|x^j\|} \frac{\omega_j}{|\lambda_i - \lambda_j|} \|\delta A\|. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) видно, что если мала погрешность определения элементов матрицы A и малы все коэффициенты перекоса, то мала погрешность определения i-того собственного вектора, соответствующего i-тому собственному значению.

Следствие 3.2.1. *Если матрица $A = A^*$ и все собственные значения простые, то задача нахождения собственных векторов устойчива.*

В рамках данного пособия ограничимся рассмотрением методов нахождения собственных значений и собственных векторов для матриц $A = A^*$.

3.3. Степенной метод

Степенной метод предназначен для приближенного решения частичной проблемы собственных значений — нахождения наибольшего по модулю собственного значения матрицы A и соответствующего собственного вектора. Этот метод достаточно прост с точки зрения реализации, но не часто применим на практике из-за медленной сходимости. Однако на его идее основаны более эффективные методы.

Решение задачи

Пусть $A = A^*$ и собственные значения упорядочены по модулю:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|, \tag{3.10}$$

т.е. искомое значение λ_n единственно. Зададим произвольный вектор $y^0 \in \mathbb{R}^n$ так, что $(y^0, x^n) \neq 0$, и образуем последовательные приближения

$$y^{k+1} = Ay^k. \tag{3.11}$$

Очевидно, что $y^k = A^k y^0$ при $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку собственные вектора матрицы A образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$, то имеет место представление

$$y^0 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Положим $\alpha_n \neq 0$. По определению $Ax^i = \lambda_i x^i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $A^k x_i = \lambda_i^k x^i$, $k = 2, \ldots$. Следовательно, имеет место разложение

$$y^k = A^k y^0 = \alpha_1 \lambda_1^k x^1 + \alpha_2 \lambda_2^k x^2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k x^n. \tag{3.12}$$

Поделим выражение на λ_n^k

$$\lambda_n^{-k} y^k = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k x^1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^k x^2 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Поскольку

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k \to 0, \ldots, \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty,$$

то $\lambda_n^{-k} y^k \to \alpha_n x^n$, $k \to \infty$. Это значит, что последовательность $\{y^k\}$ сходится к собственному вектору x^n по направлению, т.е. вектор y^k можно считать приближением к вектору $\lambda_n^k \alpha_n x^n$, пропорционально собственному вектору x^n.

Построим числовую последовательность, сходящуюся к собственному значению λ_n на основе информации о y^k. Учитывая разложение (3.16) и свойство ортонормированности системы $\{x^1, \dots, x^n\}$, образуем скалярные произведения

$$(y^k, y^k) = \alpha_1^2 \lambda_1^{2k} + \alpha_2^2 \lambda_2^{2k} + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n^{2k} = \lambda_n^{2k}(\alpha_n^2 + \delta_1(k)),$$

$$\delta_1(k) = \alpha_1^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2k} + \dots + \alpha_{n-1}^2 \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{2k};$$

$$(y^{k+1}, y^k) = \alpha_1^2 \lambda_1^{2k+1} + \alpha_2^2 \lambda_2^{2k+1} + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n^{2k+1} = \lambda_n^{2k}(\alpha_n^2 \lambda_n + \delta_2(k)),$$

$$\delta_2(k) = \alpha_1^2 \lambda_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2k} + \dots + \alpha_{n-1}^2 \lambda_{n-1} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{2k};$$

При $k \to \infty$: $\delta_1(k) \to 0$, $\delta_2(k) \to 0$.

Положим

$$l_{k+1} = \frac{(y^{k+1}, y^k)}{(y^k, y^k)} = \frac{\lambda_n^{2k}(\alpha_n^2 \lambda_n + \delta_2(k))}{\lambda_n^{2k}(\alpha_n^2 + \delta_1(k))} = \frac{\alpha_n^2 \lambda_n + \delta_2(k)}{\alpha_n^2 + \delta_1(k)}.$$

Следовательно, при $k \to \infty$, $l_{k+1} \to \lambda_n$.

Таким образом, наибольшее по модулю собственное значение находится итерационно по формуле

$$l_{k+1} = \frac{(y^{k+1}, y^k)}{(y^k, y^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Процесс итераций заканчивается при выполнении условия

$$\frac{|l_{k+1} - l_k|}{|l_k|} < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Собственный вектор x^n вычислим по формуле $x^n = y^{k+1}/\|y^{k+1}\|$.

Алгоритм

Дано: A, ε.

0) выбрать вектор y^0;

1) принять $k = 0$;

2) вычислить y^{k+1}, $l_{k+1} = \dfrac{(y^{k+1}, y^k)}{(y^k, y^k)}$;

3) если $\dfrac{|l_{k+1} - l_k|}{|l_k|} < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, наибольшее по модулю собственное значение $\lambda_n = l_{k+1}$, соответствующий собственный вектор $x^n = \dfrac{y^{k+1}}{\|y^{k+1}\|}$; иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 3.3.1. Найти наибольшее по модулю собственное значение матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

степенным методом с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Итерация 0. Положим $k = 0$, $y^0 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Итерация 1. Вычислим

$$y^1 = Ay^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = \frac{(y^1, y^0)}{(y^0, y^0)} = \frac{8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{22}{3} \approx 7.33333.$$

Итерация 2. Вычислим

$$y^2 = Ay^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 35 \\ 72 \end{pmatrix},$$

$$l_2 = \frac{(y^2, y^1)}{(y^1, y^1)} = \frac{63 \cdot 8 + 35 \cdot 5 + 72 \cdot 9}{8^2 + 5^2 + 9^2} = \frac{1327}{170} \approx 7.80588.$$

Проверим условие окончания итерационного процесса

$$\frac{|l_2 - l_1|}{|l_1|} = \frac{0.47255}{7.33333} \approx 0.064439 \not< \varepsilon,$$

следовательно, процесс итераций продолжается. И т.д.

Ход итераций отображен в таблице 3.1.

k	l_{k+1}	$\lvert l_{k+1} - l_k\rvert / \lvert l_k\rvert$
0	7.33333	
1	7.80588	$0.064439 \not< \varepsilon$
2	7.82338	$0.002236 \not< \varepsilon$
3	7.82398	$0.000077 \not< \varepsilon$
4	7.82399	$0.000003 < \varepsilon$

Таблица 3.1. Ход итераций

Таким образом, найдено приближенное наибольшее по модулю собственное значение матрицы A с заданной точностью ε:

$$\lambda_n = 7.82399, \quad x^n = (1.268 \cdot 10^{-5}, 0.686 \cdot 10^{-5}, 1.457 \cdot 10^{-5})^{\mathrm{T}}.$$

3.4. Обратный степенной метод

Обратный степенной метод используется для нахождения наименьшего по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора матрицы A. Метод применяется к обратной матрице A^{-1}, т.к. собственные ее значения обратны к собственным значениям матрицы A.

Пусть $A = A^*$ и собственные значения упорядочены по модулю:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|. \tag{3.14}$$

Выберем произвольный вектор $z^0 \in \mathbb{R}^n$ так, что $(z^0, x^1) \neq 0$, и образуем последовательность

$$z^{k+1} = A^{-1} z^k. \tag{3.15}$$

Так как собственные значения μ_i матрицы A^{-1} связаны с собственными значениями λ_i матрицы A соотношением $\mu_i \lambda_i = 1$, то

$$|\mu_{\max}| = \frac{1}{|\lambda_{\min}|} = \frac{1}{|\lambda_1|} = |\mu_1|.$$

Очевидно, что $z^k = (A^{-1})^k z^0$ при $k = 1, 2, \ldots$. Имеет место представление

$$z^0 = \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n.$$

Положим $\beta_1 \neq 0$. Тогда

$$z^k = (A^{-1})^k z^0 = \beta_1 \mu_1^k x^1 + \beta_2 \mu_2^k x^2 + \cdots + \beta_n \mu_n^k x^n. \tag{3.16}$$

Поделим выражение на μ_1^k

$$\mu_1^{-k} z^k = \beta_1 x^1 + \beta_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k x^2 + \cdots + \beta_n \left(\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)^k x^n.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Поскольку

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k \to 0, \ldots, \left(\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)^k \to 0, \quad k \to \infty,$$

то $\mu_1^{-k} z^k \to \beta_1 x^1$, $k \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{z^k\}$ сходится к собственному вектору x^1 по направлению.

Построим числовую последовательность, сходящуюся к собственному значению μ_1

$$(z^k, z^k) = \beta_1^2 \mu_1^{2k} + \beta_2^2 \mu_2^{2k} + \cdots + \beta_n^2 \mu_n^{2k} = \mu_1^{2k}(\beta_1^2 + \delta_3(k)),$$

$$\delta_3(k) = \beta_2^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k} + \cdots + \beta_n^2 \left(\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)^{2k};$$

$$(z^{k+1}, z^k) = \beta_1^2 \mu_1^{2k+1} + \beta_2^2 \mu_2^{2k+1} + \cdots + \beta_n^2 \mu_n^{2k+1} = \mu_1^{2k}(\beta_1^2 \mu_1 + \delta_4(k)),$$

$$\delta_4(k) = \beta_2^2 \mu_2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k} + \cdots + \beta_n^2 \mu_n \left(\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)^{2k};$$

Положим

$$m_{k+1} = \frac{(z^{k+1}, z^k)}{(z^k, z^k)} = \frac{\mu_1^{2k}(\beta_1^2 \mu_1 + \delta_4(k))}{\mu_1^{2k}(\beta_1^2 + \delta_3(k))} = \frac{\beta_1^2 \mu_1 + \delta_4(k)}{\beta_1^2 + \delta_3(k)}.$$

При $k \to \infty$: $\delta_3(k) \to 0$, $\delta_4(k) \to 0$, $m_{k+1} \to \mu_1$.

Таким образом, наименьшее по модулю собственное значение находится итерационно по формуле

$$m_{k+1} = \frac{(z^{k+1}, z^k)}{(z^k, z^k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Процесс итераций заканчивается при выполнении условия

$$\frac{|m_{k+1} - m_k|}{|m_k|} < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Собственный вектор x^1 вычислим по формуле $x^1 = z^{k+1}/\|z^{k+1}\|$.

Алгоритм

Дано: A, ε.

0) Вычислить обратную матрицу A^{-1} и выбрать произвольный вектор z^0;

1) принять $k = 0$;

2) вычислить z^{k+1}, $m_{k+1} = \dfrac{(z^{k+1}, z^k)}{(z^k, z^k)}$;

3) если $\dfrac{|m_{k+1} - m_k|}{|m_k|} < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, наименьшее по модулю собственное значение $\lambda_1 = \dfrac{1}{\mu_1} = \dfrac{1}{m_{k+1}}$, соответствующий собственный вектор $x^1 = \dfrac{z^{k+1}}{\|z^{k+1}\|}$; иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 3.4.1. Найти наименьшее по модулю собственное значение матрицы A из примера 3.3.1 обратным степенным методом с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Итерация 0. Положим $k = 0$, $z^0 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и вычислим обратную матрицу A^{-1}

$$A = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 1 & 22 & -9 \\ 8 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итерация 1. Вычислим

$$z^1 = A^{-1}z^0 = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 1 & 22 & -9 \\ 8 & -9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$m_1 = \frac{(z^1, z^0)}{(z^0, z^0)} = \frac{(4/37)\cdot 1 + (14/37)\cdot 1 + (1/37)\cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{19}{111} \approx$$
$$\approx 0.17117.$$

Итерация 2. Вычислим

$$z^2 = A^{-1}z^1 = \frac{1}{37^2}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 1 & 22 & -9 \\ 8 & -9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1369}\begin{pmatrix} 2 \\ 303 \\ -92 \end{pmatrix},$$

$$m_2 = \frac{(z^2, z^1)}{(z^1, z^1)} \approx 0.52759.$$

Проверим условие окончания итерационного процесса

$$\frac{|m_2 - m_1|}{|m_1|} \approx 0.67556 \not< \varepsilon,$$

следовательно, процесс итераций продолжается. И т.д.

Ход итераций отображен в таблице 3.2.

k	m_{k+1}	$\lvert m_{k+1} - m_k\rvert / \lvert m_k\rvert$
0	0.17117	
1	0.52769	$0.67556 \not< \varepsilon$
2	0.68371	$0.22833 \not< \varepsilon$
3	0.69123	$0.01088 \not< \varepsilon$
4	0.6914905	$0.00038 \not< \varepsilon$
5	0.6914995	$0.0000129 \not< \varepsilon$
6	0.6914998	$4.59 \cdot 10^{-7} < \varepsilon$

Таблица 3.2. Ход итераций

Таким образом, найдено приближенное наименьшее по модулю собственное значение матрицы A с заданной точностью ε:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{0.6914998} \approx 1.44613,$$

$$x^1 = (-1.87425, 25.44731, -10.34508)^{\mathrm{T}}.$$

3.5. Итерационный метод

Итерационный метод применим для решения полной проблемы собственных значений.

Пусть $A = A^* > 0$, тогда распишем систему уравнений

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{3.17}$$

относительно собственного значения λ_1 и собственного вектора x^1 матрицы A

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \dots + a_{1n}x_n^1 = 0, \\ a_{21}x_1^1 + (a_{22}-\lambda_1)x_2^1 + \dots + a_{2n}x_n^1 = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + (a_{nn}-\lambda_1)x_n^1 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \dots + a_{1n}x_n^1), \\ x_2^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{21}x_1^1 + a_{22}x_2^1 + \dots + a_{2n}x_n^1), \\ \dots \\ x_{n-1}^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1}x_1^1 + a_{n-1,2}x_2^1 + \dots + a_{n-1,n}x_n^1), \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{x_n^1}(a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + a_{nn}x_n^1). \end{cases} \tag{3.18}$$

Поскольку компоненты собственных векторов определяются с точностью до постоянной, то одну из них можно задать произвольно, например, можно положить $x_n^1 = 1$. Систему (3.18) можно решить методом итерации, задав начальные значения $x_i^{1,0}$, μ_0

$$\begin{cases} x_i^{1,k+1} = \dfrac{1}{\mu_k}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^{1,k} + a_{in}\right), \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \mu_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{1,k+1} + a_{nn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Таким образом, находится первое собственное значение $\lambda_1 \approx \mu_{k+1}$ и первый собственные вектор $x^1 = (x_1^{1,k+1}, x_2^{1,k+1}, \dots, x_{n-1}^{1,k+1}, 1)^{\mathrm{T}}$.

Для определения второго собственного значения λ_2 и второго собственного вектора x^2 обратимся к системе

$$\lambda_2 x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^2, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.19}$$

Из соотношения ортогональности

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^1 x_j^2 = 0 \tag{3.20}$$

исключается одно из неизвестных x_j^2, например, x_n^2. Тогда система (3.19) заменяется эквивалентной

$$\begin{cases} x_i^2 = \dfrac{1}{\lambda_2} \sum a_{ij}^{(2)} x_j^2, \quad i = \overline{1, n-2}; \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{x_{n-1}^2} \sum a_{n-1,j}^{(2)} x_j^2. \end{cases} \tag{3.21}$$

Здесь $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \dfrac{x_i^1}{x_n^1}$, $i, j = \overline{1, n-1}$ — новые преобразованные коэффициенты. Далее, полагая, что $x_{n-1}^2 = 1$ и при заданных начальных значениях $x_i^{2,0}$, ν_0 решается система уравнений (3.21) методом итерации

$$\begin{cases} x_i^{2,k+1} = \dfrac{1}{\nu_k} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}^{(2)} x_j^{2,k} + a_{i,n-1}^{(2)} \right), \quad i = \overline{1, n-2}; \\ \nu_{k+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-2} a_{n-1,j}^{(2)} x_j^{2,k+1} + a_{n-1,n-1}^{(2)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

В результате будут найдены второе собственное значение $\lambda_2 \approx \nu_{k+1}$ и второй собственный вектор

$$x^2 = (x_1^{2,k+1}, x_2^{2,k+1}, \ldots, x_{n-2}^{2,k+1}, 1, x_n^2)^{\mathrm{T}}$$

матрицы A, причем n-тая компонента этого вектора находится из условия ортогональности (3.20). По аналогии находятся остальные λ_j $(j = 3, 4, \ldots, n)$ и соответствующие им собственные векторы x^j.

Пример 3.5.1. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

итерационным методом.

Для начала найдем аналитическое решение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель по третьему столбцу

$$2 - (1-\lambda) - (1-\lambda-2) + (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$2\lambda + 2 + (3-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = 2(\lambda+1) + (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) =$$

$$= (\lambda+1)(2 - \lambda^2 + 6\lambda - 9) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{2} \approx 4.41421$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{2} \approx 1.58579$.

Далее найдем собственные значения и собственные векторы итерационным методом.

Распишем систему уравнений (3.17) относительно собственного значения λ_1 и собственного вектора x^1 матрицы A

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ 2x_1^1 + (1-\lambda_1)x_2^1 + x_3^1 = 0, \\ x_1^1 + x_2^1 + (3-\lambda_1)x_3^1 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(x_1^1 + 2x_2^1 + x_3^1), \\ x_2^1 = \dfrac{1}{\lambda_1}(2x_1^1 + x_2^1 + x_3^1), \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{x_3^1}(x_1^1 + x_2^1 + 3x_3^1). \end{cases}$$

Положим $x_3^1 = 1$ и решим последнюю систему методом итерации, задав начальные значения $x^{1,0} = (1,1)^{\mathrm{T}},\ \mu_0 = 1$

$$\begin{cases} x_1^{1,k+1} = \dfrac{1}{\mu_k}\left(x_1^{1,k} + 2x_2^{1,k} + 1\right), \\ x_2^{1,k+1} = \dfrac{1}{\mu_k}\left(2x_1^{1,k} + x_2^{1,k} + 1\right), \\ \mu_{k+1} = x_1^{1,k+1} + x_2^{1,k+1} + 3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ход итераций отражен в таблице 3.3. Таким образом, найдено

k	μ_k	$x_1^{1,k+1}$	$x_2^{1,k+1}$	$\lvert\mu_{k+1} - \mu_k\rvert$
0	1	1	1	
1	11	4	4	$10 \not< \varepsilon$
2	4.85124	1.18182	0.66942	$6.14876 \not< \varepsilon$
3	4.36904	0.72572	0.64331	$0.48220 \not< \varepsilon$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
10	4.41421	0.70711	0.70710	$0.000009 < \varepsilon$

Таблица 3.3. Ход итераций

первое собственное значение $\lambda_1 \approx 4.41421$ и первый собственные вектор

$$x^1 = (0.70711, 0.70710, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Для определения второго собственного значения λ_2 и второго собственного вектора x^2 обратимся к системе

$$\begin{cases} (1-\lambda_2)x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ 2x_1^2 + (1-\lambda_2)x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + (3-\lambda_2)x_3^2 = 0 \end{cases}$$

Из соотношения ортогональности $\sum\limits_{j=1}^{3} x_j^1 x_j^2 = 0$ исключаем x_3^2. Тогда предыдущую систему заменяем эквивалентной системой (3.21), которую решаем методом итерации, положив $x_2^2 = 1$, $x_1^{2,0} = 1$, $\nu_0 = 1$

$$\begin{cases} x_1^{2,k+1} = \dfrac{1}{\nu_k}\left(\left(a_{11} - \dfrac{x_1^1}{x_3^1}\right)x_1^{2,k} + \left(a_{12} - \dfrac{x_2^1}{x_3^1}\right)\right), \\ \nu_{k+1} = \left(a_{21} - \dfrac{x_1^1}{x_3^1}\right)x_1^{2,k+1} + \left(a_{22} - \dfrac{x_2^1}{x_3^1}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ход итераций отражен в таблице 3.4.

k	μ_k	$x_1^{2,k+1}$	$\lvert\mu_{k+1} - \mu_k\rvert$
0	1	1	
1	2.34315	1.58579	$1.34315 \not< \varepsilon$
2	1.26256	0.74999	$1.08059 \not< \varepsilon$
3	1.84179	1.19810	$0.57923 \not< \varepsilon$
…	…	…	…
27	1.58579	1.000003	$0.000009 < \varepsilon$

Таблица 3.4. Ход итераций

В результате найдены второе собственное значение $\lambda_2 \approx 1.58579$ и второй собственный вектор $x^2 = (1.000003, 1, x_3^2)^{\mathrm{T}}$, где компонента x_3^2 находится из условия ортогональности векторов x^1 и x^2:

$$0.70711 \cdot 1.000003 + 0.70710 \cdot 1 + 1 \cdot x_3^2 = 0 \Rightarrow x_3^2 = -1.41421$$

В итоге, $x^2 = (1.000003, 1, -1.41421)^{\mathrm{T}}$.

Третье собственное значение λ_3 и соответствующий вектор x^3 находятся из системы

$$\begin{cases} (1-\lambda_3)x_1^3 + 2x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ 2x_1^3 + (1-\lambda_3)x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + (3-\lambda_3)x_3^3 = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Положим $x_1^3 = 1$, из соотношений ортогональности $\sum\limits_{j=1}^{3} x_j^1 x_j^3 = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{3} x_j^2 x_j^3 = 0$ исключаем x_2^3, x_3^3:

$$\begin{cases} 0.70711 \cdot 1 + 0.70710 \cdot x_2^3 + x_3^3 = 0, \\ 1.000003 \cdot 1 + 1 \cdot x_2^3 - 1.41421 \cdot x_3^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^3 = -1.000003, \\ x_3^3 = 1.3116 \cdot 10^{-7}. \end{cases}$$

Следовательно, найден третий собственный вектор

$$x^3 = (1, -1.000003, 1.3116 \cdot 10^{-7})^{\mathrm{T}}.$$

Тогда из системы (3.22) легко выразить

$$\lambda_3 = a_{11} \cdot x_1^3 + a_{12} \cdot x_2^3 + a_{13} \cdot x_3^3 \approx -1.000005.$$

Очевидно, найденные приближенные собственные значения λ_i, $i = \overline{1,3}$ совпадают с аналитическим решением с заданной точностью ε.

3.6. Лабораторная работа № 4

Найти максимальное и минимальное по модулю собственные значения с применением степенного и обратного степенного методов. Во всех вариантах $\varepsilon = 0.0001$, $y_0 = (1, 1, \dots, 1)$.

Варианты заданий:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.42 & 0.54 & 0.66 \\ 0.42 & 1 & 0.32 & 0.44 \\ 0.54 & 0.32 & 1 & 0.22 \\ 0.66 & 0.44 & 0.22 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.12 & 3.14 \\ 1.12 & 1 & 5.21 \\ 3.14 & 5.21 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3.12 & 1.15 \\ 3.12 & 1 & 4.64 \\ 1.15 & 4.64 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$ 10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$ 14. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -1 & 9 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$ 18. $A = \begin{pmatrix} -9 & -12 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$ 20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$

3.7. Контрольные вопросы

1. Что называется собственными векторами и собственными значениями матрицы?

2. Что подразумевают под проблемой собственных значений? Какие ее виды обычно выделяют?

3. Каковы наиболее простые случаи проблемы собственных значений?

4. Какие методы нахождения собственных значений Вам известны?

5. Что такое преобразование подобия?

6. Почему собственные значения диагональной матрицы, полученной с помощью преобразования подобия, являются собственными значениями исходной матрицы?

7. В каком случае задача нахождения собственных векторов устойчива?

8. Для приближенного решения каких проблем собственных значений предназначен степенной метод?

9. Для приближенного решения каких проблем собственных значений предназначен обратный степенной метод?

10. Чем обусловлено применение обратного степенного метода к обратной матрице A^{-1}?

11. Для приближенного решения каких проблем собственных значений предназначен итерационный метод?

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Проблема решения нелинейных систем уравнений [5, 6, 12, 13] возникает при решении многих прикладных задач, например, поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий, при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и т.д.

4.1. Постановка задачи

Дана система n нелинейных уравнений с n неизвестными:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.1}$$

где $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ — нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$, или в векторном виде

$$F(x) = 0, \tag{4.2}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^{\mathrm{T}}$.

Требуется найти такой вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$, который при подстановке в систему (4.1) превращает каждое ее уравнение в тождество.

4.2. Метод простой итерации

Метод простой итерации является распространенным методом в вычислительной математике и применяется, как было описано в предыдущих главах, для обширного класса уравнений. Опишем его применение для систем (4.1).

Решение задачи

Приведем систему (4.1) к эквивалентному виду

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

или в векторной форме

$$x = \Phi(x). \tag{4.3}$$

Если выбрано некоторое начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, то последующие приближения находятся по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

Если последовательность векторов $x^{(k)}$ сходится, то она сходится к решению x^* системы нелинейных уравнений (4.1).

Теорема 4.2.1 (О сходимости)**.** *Пусть вектор-функция $\Phi(x)$ непрерывна вместе со своей производной*

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

в ограниченной выпуклой замкнутой области G и

$$\max_{x \in G} \|\Phi'(x)\| \le q < 1, \tag{4.5}$$

где q — постоянная. Если $x^{(0)} \in G$ и все последовательные приближения

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

также содержатся в G, то процесс итераций (4.4) сходится к единственному решению x^* уравнения (4.3) в области G и справедливы оценки погрешности (для любого натурального k):

$$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

$$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \frac{q}{1-q}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|. \tag{4.6}$$

Алгоритм

Дано: $F(x)$, ε.

0) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$ (если не дано); преобразовать исходную систему уравнений вида (4.1) к виду (4.3); выполнить проверку условия сходимости (4.5);

1) принять $k = 0$;

2) вычислить $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$;

3) если $\frac{q}{1-q}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение системы (4.1) $\tilde{x} = x^{(k+1)}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 4.2.1. Найти положительное решение системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0.2x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Графическим методом выберем начальное приближение и область G (см. рис. 4.1). Искомым решением является точка пересечения графиков функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$. Выберем произвольно точку, достаточно близкую к искомому решению, например, $x^{(0)} = (0.25, 0.75)^{\mathrm{T}}$, и построим вокруг неё ограниченную замкнутую выпуклую область $G: \ |x_1 - 0.25| \le 0.1, \ |x_2 - 0.75| \le 0.1$ (иначе, $G: \ 0.15 \le x_1 \le 0.35, \ 0.65 \le x_2 \le 0.85$).

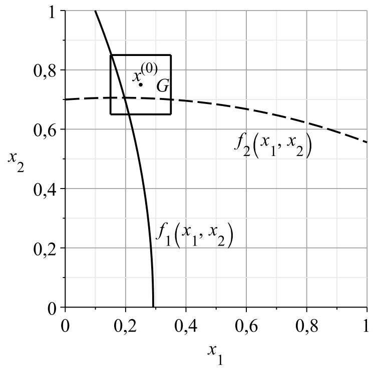


Рис. 4.1. Графики функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$

Преобразуем исходную систему уравнений (4.7) к виду

$$\begin{cases} x_1 = 0.3 - 0.1x_1^2 - 0.2x_2^2 \equiv \varphi_1(x_1, x_2), \\ x_2 = 0.7 - 0.2x_1^2 + 0.1x_1x_2 \equiv \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Проверим выполнение условия (4.5) в области G. Для этого найдем

$$\max_{x\in G} \|\Phi'(x)\| = \max_{x\in G} \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right| \right\}.$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -0.2x_1, \qquad \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -0.4x_2,$$
$$\frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -0.4x_1 + 0.1x_2, \quad \frac{\partial \varphi_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0.1x_1,$$

то в области G имеем

$$\left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| =$$

$$= |-0.2x_1| + |-0.4x_2| \le 0.07 + 0.34 = 0.41,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right| =$$

$$= |-0.4x_1 + 0.1x_2| + |0.1x_1| \le 0.075 + 0.035 = 0.11,$$

$$\max_{x\in G}\|\Phi'(x)\| \le 0.41 = q < 1.$$

Следовательно, если последовательные приближения $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^{\mathrm{T}}$ не покинут области G, то итерационный процесс будет сходится.

Итерация 0. $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$.

Итерация 1.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0.3 - 0.1(0.25)^2 - 0.2(0.75)^2 \approx 0.1813, \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0.7 - 0.2(0.25)^2 + 0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \approx 0.7063. \end{cases}$$

В соответствии с (4.6), вычисления завершаются при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \varepsilon,$$

где $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \max\limits_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$. Т.е. в данном примере критерием остановки итерационного процесса является условие

$$\max\left\{\left|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}\right|, \left|x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}\right|\right\} \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q} \approx 0.00014 = \epsilon.$$

Проверим условие окончания на первой итерации:

$$\max\{|0.1813 - 0.25|, |0.7063 - 0.75|\} =$$

$$= \max\{0.0687, 0.0437\} = 0.0687 \not\le \epsilon.$$

Не выполняется, следовательно, запускаем новую итерацию.

Итерация 2.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} & = & \varphi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \\ & = & 0.3 - 0.1(0.1813)^2 - 0.2(0.7063)^2 \approx 0.1969, \\ x_2^{(2)} & = & \varphi_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \\ & = & 0.7 - 0.2(0.1813)^2 + 0.1 \cdot 0.1813 \cdot 0.7063 \approx 0.7062. \end{cases}$$

$$\max\{|0.1969 - 0.1813|, |0.7062 - 0.7063|\} =$$

$$= \max\{0.0156, 0.00001\} = 0.0156 \nleq \epsilon.$$

И т.д.

Процесс итераций отображен в таблице 4.1.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\max\limits_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\|$
0	0.25	0.75	
1	0.18125	0.70625	$0.068725 \nleq \epsilon$
2	0.19696	0.70623	$0.015707 \nleq \epsilon$
3	0.19637	0.70615	$0.000588 \nleq \epsilon$
4	0.19641	0.70615	$0.000045 < \epsilon$

Таблица 4.1. Ход итераций

На четвертой итерации найдено приближенное решение нелинейной системы (4.7) с заданной точностью ε: $\tilde{x}_1 = 0.19641$, $\tilde{x}_2 = 0.70615$.

4.3. Метод Ньютона

Пусть выбрано некоторое начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, тогда последующие приближения находятся по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.8}$$

где

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби. В формуле (4.8) участвует обратная матрица Якоби. Но т.к. процесс вычисления обратной матрицы зачастую является процессом трудоемким, преобразуем (4.8) следующим образом:

$$\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ — поправка к текущему приближению $x^{(k)}$. Умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби $W(x^{(k)})$:

$$W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -W(x^{(k)})W^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}).$$

Очевидно, $W(x^{(k)})W^{-1}(x^{(k)}) = E$ — единичная матрица. Таким образом, получена система линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$:

$$W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}). \tag{4.9}$$

После определения $\Delta x^{(k)}$ вычисляется следующее приближение

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Вычисления завершаются при выполнении условия

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.3.1 (О сходимости)**.** *Пусть в некоторой окрестности решения* x^* *нелинейной системы* (4.1) *функции* $f_i(\cdot) \in C^2$ *и якобиан системы отличен от нуля. Тогда существует* δ*-окрестность точки* x^*

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - x^*| < \delta\}$$

такая, что при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$ *из этой окрестности последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *не выходит из нее и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности.*

Алгоритм

Дано: $F(x)$, ε.

0) выбрать начальное приближение $x^{(0)}$ (если не дано), например, графически при $n = 2$;

1) принять $k = 0$;

2) решить систему линейных алгебраических уравнений (4.9) относительно поправки $\Delta x^{(k)}$;

3) вычислить следующее приближение: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$;

4) если $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, то процесс итераций закончен, приближенное решение системы (4.1) $\tilde{x} = x^{(k+1)}$, иначе принимаем $k = k + 1$ и возвращаемся к пункту 2.

Пример 4.3.1. Найти положительное решение системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Искомое решение — точка x^* пересечения графиков функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$, находящаяся, исходя из условий задачи, в первой четверти (см. рис. 4.2). Начальное приближение $x^{(0)} = (0.9, 0.6)^{\mathrm{T}}$ выбрано в достаточно малой окрестности искомого решения $N = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x^*| < 0.1\}$.

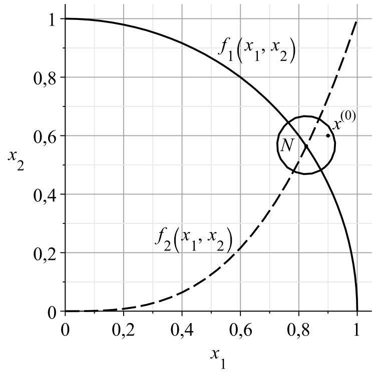


Рис. 4.2. Графики функций $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$

Вычислим матрицу Якоби:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итерация 0. $x^{(0)} = (0.9, 0.6)^{\mathrm{T}}$.

Итерация 1. Найдем поправку $\Delta x^{(0)}$ из решения СЛАУ

$$W(x^{(0)}) \cdot \Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)}).$$

$$W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0.9 & 2 \cdot 0.6 \\ 3 \cdot (0.9)^2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.2 \\ 2.43 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-F(x^{(0)}) = -\begin{pmatrix} 0.9^2 + 0.6^2 - 1 \\ 0.9^3 - 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.17 \\ -0.129 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 1.2 \\ 2.43 & -1 \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.17 \\ -0.129 \end{pmatrix}.$$

Решим, например, методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.8 & 1.2 \\ 2.43 & -1 \end{vmatrix} = -1.8 - 2.43 \cdot 1.2 = -4.716,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0.17 & 1.2 \\ -0.129 & -1 \end{vmatrix} = 0.17 + 0.129 \cdot 1.2 = 0.3248,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.8 & -0.17 \\ 2.43 & -0.129 \end{vmatrix} = -1.8 \cdot 0.129 + 2.43 \cdot 0.17 = 0.1809,$$

$$\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta \\ \Delta_2/\Delta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.06887 \\ -0.03836 \end{pmatrix}$$

В итоге, вычислим $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.06887 \\ -0.03836 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83113 \\ 0.56164 \end{pmatrix}$$

Проверим условие окончания итерационного процесса:

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \max\left(\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|\right) =$$

$$= \max\left(\left|\Delta x_1^{(0)}\right|, \left|\Delta x_2^{(0)}\right|\right) = \max(0.06887, 0.03836) = 0.06887 \not< \varepsilon.$$

Следовательно, начинаем новую итерацию. И т.д.

Ход итераций отображен в таблице 4.2.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\max\limits_i \left\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\|$
0	0.9	0.6	
1	0.83113	0.56164	$0.06887 \not< \varepsilon$
2	0.82606	0.56361	$0.00507 \not< \varepsilon$
3	0.82603	0.56362	$0.00003 < \varepsilon$

Таблица 4.2. Ход итераций

На третьей итерации найдено приближенное решение нелинейной системы (4.10) с заданной точностью ε: $\tilde{x}_1 = 0.82603$, $\tilde{x}_2 = 0.56362$.

4.4. Лабораторная работа № 5

Найти решение системы нелинейных уравнений методами простой итерации и Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Начальное приближение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ подобрать графическим методом.

Варианты заданий:

1. $\begin{cases} \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1.2, \\ 2x_1 + \cos(x_2) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x_2 + 0.5) + x_1 = 0.8, \\ \sin(x_1) - 2x_2 = 1.6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(x_1 + x_2) - 1.4x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x > 0, \ y > 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin(x_1 - 1) = 13 - x_2, \\ x_1 - \sin(x_2 + 1) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + x_2 = 0.5, \\ x_1 - \cos(x_2) = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(x_1 + x_2) - 1.6x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x > 0, \ y > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \cos(x_2 + 0.5) - x_1 = 2, \\ \sin(x_1) - 2x_2 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0.5, \\ x_2 - \cos(x_1) = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \sin(x_1 + x_2) + 1.5x_1 = 0.1, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x < 0, \ y > 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x_1) + 2x_2 = 2, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0.7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(x_1+2) - x_2 = 0.2, \\ x_1 + \cos(2x_2) = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(x_1-1) + 3x_2 = 1.5, \\ 2x_1 - \cos x_2 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin(2x_1) + x_2 = 1, \\ \cos(x_2 - 0.5) + x_1 = 0.5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos(2x_1) + x_2 = 3, \\ x_1 - \sin(x_2 - 1) = 0.5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(x_1+1) - 2x_2 = 2, \\ \cos(x_2 - 1) + 3x_1 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \cos(x_1+1) + x_2 = 1.6, \\ \sin(2x_2) - x_1 = 0.8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(x_1-2) + x_2 = 0.7, \\ 2x_1 - \sin x_2 = 0.6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_2 - \cos(x_1+2) = 0, \\ 2x_1 + \sin x_2 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \cos(x_1+0.7) - x_2 = 1, \\ \sin(2x_2) - x_1 = 0.5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(x_1+3) - 3x_2 = 1.5, \\ x_1 + \cos(x_2 - 1) = -0.5. \end{cases}$

4.5. Контрольные вопросы

1. Какие Вы знаете методы решения систем нелинейных уравнений?

2. В чем заключается суть метода простых итераций для решения систем нелинейных уравнений?

3. Каково достаточное условие сходимости метода простой итерации для решения систем нелинейных уравнений?

4. В чем заключается суть метода Ньютона для решения

систем нелинейных уравнений?

5. Какие Вы можете отметить недостатки и преимущества метода Ньютона?

6. Каково достаточное условие сходимости метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?

7. Каким образом возможен выбор начального приближения для методов решения нелинейных систем уравнений?

ОТВЕТЫ

Ответы к разделу 1.3 (с точностью 10^{-5}). 1. −1.32472. 2. 5.82843. 3. 1.56333. 4. −0.94640. 5. −1.93543. 6. −0.03686. 7. 1.28343. 8. 0.56714. 9. −1.35078. 10. 0.65146. 11. 0.92078. 12. 2.82831. 13. 2.32373. 14. 0.67529. 15. 0.75635. 16. −0.03564. 17. 0.83345. 18. −0.17334. 19. 5.82861. 20. 2.18957.

Ответы к разделу 1.4 (с точностью 10^{-5}). 1. 1.30238. 2. −1.27917. 3. 0.83543. 4. 0.83372. 5. 0.28440. 6. 0.00000. 7. 0.79206. 8. −2.04509. 9. 1.34833. 10. 0.51844. 11. 1.31385. 12. −0.00012. 13. 1.69855. 14. 1.20797. 15. 0.09568. 16. 2.91547. 17. 1.54149. 18. 0.84079. 19. 2.85214. 20. 0.64173.

Ответы к разделу 1.5 (с точностью 10^{-5}). 1. 2.29854. 2. 0.26244. 3. 0.56292. 4. 0.76716. 5. 0.64437. 6. 2.33113. 7. 3.22995. 8. 0.88137. 9. 0.23896. 10. 0.09443. 11. 1.96157. 12. 1.86825. 13. 0.61002. 14. 0.59483. 15. 0.16951. 16. 3.14619. 17. 2.13035. 18. 1.47370. 19. 0.50028. 20. 0.87673.

Ответы к разделам 1.6, 1.7 (с точностью 10^{-5}). 1. 1.04338. 2. 1.17123. 3. 0.39962. 4. 1.33819. 5. 1.23998. 6. 1.76666. 7. 1.25872. 8. 0.36067. 9. 0.56714. 10. 0.56714. 11. 1.93456. 12. 1.76675. 13. −0.35400. 14. 0.18744. 15. 0.25707. 16. 0.77141. 17. −0.38679. 18. 1.15381. 19. 0.60710. 20. 4.50798.

Ответы к разделу 1.8 (с точностью 10^{-7}). 1. 1.7632228. 2. 0.2237011. 3. 1. 4. 0.6190613. 5. 2.0107349. 6. 0.6071016. 7. 0.3573274. 8. 0.5041317. 9. 3.0583229. 10. 0.8489184. 11. −0.2718036. 12. −0.3833323. 13. −0.6040448. 14. 0.5372744. 15. 0.1606668. 16. 0.1878284. 17. 0.7079979. 18. 3.6934414. 19. 0.7300225. 20. 2.1847884.

Ответы к разделу 2.2.

Задание 1.

1. $(3,1,1)^{\mathrm{T}}$. 2. $(-4,-13,11)^{\mathrm{T}}$. 3. $(-2,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 4. $(-1,3,-2,2)^{\mathrm{T}}$. 5. $(2,1,-3,1)^{\mathrm{T}}$. 6. $(-2,1,4,3)^{\mathrm{T}}$. 7. $(0,2,\frac{1}{3},-\frac{3}{2})^{\mathrm{T}}$. 8. $(\frac{1}{2},-\frac{2}{3},2,-3)^{\mathrm{T}}$. 9. $(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$. 10. $(1,2,2,0)^{\mathrm{T}}$. 11. $(\frac{31}{2},-\frac{93}{2},-84)^{\mathrm{T}}$. 12. $(2,3,-2)^{\mathrm{T}}$. 13. $(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 14. $(2,-1,-3)^{\mathrm{T}}$. 15. $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 16. $(2,-1,-3)^{\mathrm{T}}$. 17. $(3,0,-2)^{\mathrm{T}}$. 18. $(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$. 19. $(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 20. $(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

Задание 2.

1. $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 2. $(1,2,-1,3)^{\mathrm{T}}$. 3. $(-\frac{4}{3},\frac{16}{15},\frac{47}{15},\frac{37}{5})^{\mathrm{T}}$. 4. $(-\frac{37}{3},-\frac{49}{6},\frac{11}{2},-\frac{29}{2})^{\mathrm{T}}$. 5. $(\frac{23}{10},-\frac{17}{10},\frac{4}{5},-\frac{13}{5})^{\mathrm{T}}$. 6. $(\frac{-5}{44},-\frac{27}{44},\frac{1}{22},-\frac{13}{11})^{\mathrm{T}}$. 7. $(\frac{7}{43},-\frac{18}{43},-\frac{1}{43},-\frac{39}{43})^{\mathrm{T}}$. 8. $(\frac{11}{19},\frac{26}{19},\frac{5}{38},\frac{43}{76})^{\mathrm{T}}$. 9. $(-3,-1,-3,-2)^{\mathrm{T}}$. 10. $(-\frac{10}{17},\frac{12}{17},-\frac{21}{17},-\frac{21}{34})^{\mathrm{T}}$. 11. $(-3,1,5,-8)^{\mathrm{T}}$. 12. $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 13. $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$. 14. $(-6,-4,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 15. $(-1,-3,-5,-7)^{\mathrm{T}}$. 16. $(5,2,-4,-10)^{\mathrm{T}}$. 17. $(\frac{3}{2},-\frac{7}{4},-\frac{5}{2},\frac{9}{4})^{\mathrm{T}}$. 18. $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 19. $(2,2,2,2)^{\mathrm{T}}$. 20. $(\frac{8}{5},-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},1)^{\mathrm{T}}$.

Ответы к разделу 2.4.

Задание 1.

1. $(2,2.5,3)^{\mathrm{T}}$. 2. $(1.5,2,2.5)^{\mathrm{T}}$. 3. $(2.13,3.03,3.77,1.99)^{\mathrm{T}}$. 4. $(-0.96,-1.52,2.57)^{\mathrm{T}}$. 5. $(3.7,-1.5,2.1,1.3)^{\mathrm{T}}$. 6. $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$. 7. $(0.8,1,1.2,1.4)^{\mathrm{T}}$. 8. $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 9. $(0.98,1.01,1.56)^{\mathrm{T}}$. 10. $(-1,1,3)^{\mathrm{T}}$. 11. $(0.733,0.008,0.487,0.043)^{\mathrm{T}}$. 12. $(0.910,2.011,-0.335,1.211)^{\mathrm{T}}$. 13. $(0.681,1.361,0.090,0.594)^{\mathrm{T}}$. 14. $(0.351,0.612,0.599,0.264)^{\mathrm{T}}$. 15. $(-0.101,0.214,0.192)^{\mathrm{T}}$. 16. $(-0.857,0.386,0.168)^{\mathrm{T}}$. 17. $(-0.6,0.2,0.2)^{\mathrm{T}}$. 18. $(-0.029,0.079,0.223)^{\mathrm{T}}$. 19. $(0.135,1.124,-0.373)^{\mathrm{T}}$. 20. $(0.394,0.182,0.242)^{\mathrm{T}}$.

Задание 2 (с точностью 10^{-5}).

1. $(0.25041,0.46387,0.64295)^{\mathrm{T}}$.

2. $(0.62707,0.20628,-0.15100)^{\mathrm{T}}$.

3. $(-0.65757,-0.15747,0.77152,1.04139)^{\mathrm{T}}$.

4. $(-2.12803, -0.99988, 0.61517)^{\mathrm{T}}$.
5. $(-0.93464, 0.21382, -0.01792, 0.02873)^{\mathrm{T}}$.
6. $(-2.09741, -0.04165, -0.76352)^{\mathrm{T}}$.
7. $(-0.10383, 0.12802, -0.06099)^{\mathrm{T}}$.
8. $(-0.02741, -0.06928, 0.23578)^{\mathrm{T}}$.
9. $(0.01259, 0.58345, 0.68597)^{\mathrm{T}}$.
10. $(0.15298, 0.26720, 0.33838, -0.18929)^{\mathrm{T}}$.
11. $(0.99958, 0.99939, 0.99988)^{\mathrm{T}}$.
12. $(1.00101, 2.00076, -0.99873)^{\mathrm{T}}$.
13. $(0.97053, 2.03652, -1.01173)^{\mathrm{T}}$.
14. $(-0.02889, 0.07875, 0.22323)^{\mathrm{T}}$.
15. $(-0.04, 0.08007, 0.27917)^{\mathrm{T}}$.
16. $(0.13499, 1.12397, -0.37282)^{\mathrm{T}}$.
17. $(0.39370, 0.18241, 0.24226)^{\mathrm{T}}$.
18. $(-0.10034, 0.21466, 0.19199)^{\mathrm{T}}$.
19. $(-0.85661, 0.38619, 0.16848)^{\mathrm{T}}$.
20. $(-0.60016, 0.19951, 0.20097)^{\mathrm{T}}$.

Ответы к разделу 3.6. 1. $|\lambda_{\max}| = 2.32274$, $|\lambda_{\min}| = 0.24226$. 2. $|\lambda_{\max}| = 9.34847$, $|\lambda_{\min}| = 1.92135$. 3. $|\lambda_{\max}| = 8.14858$, $|\lambda_{\min}| = 0.56015$. 4. $|\lambda_{\max}| = 3.73205$, $|\lambda_{\min}| = 0.26795$. 5. $|\lambda_{\max}| = 8.87789$, $|\lambda_{\min}| = 0.02946$. 6. $|\lambda_{\max}| = 6.89498$, $|\lambda_{\min}| = 1.70760$. 7. $|\lambda_{\max}| = 7.61749$, $|\lambda_{\min}| = 0.01736$. 8. $|\lambda_{\max}| = 7.38864$, $|\lambda_{\min}| = 0.63326$. 9. $|\lambda_{\max}| = 4$, $|\lambda_{\min}| = 2.44949$. 10. $|\lambda_{\max}| = 6.53656$, $|\lambda_{\min}| = 2.15491$. 11. $|\lambda_{\max}| = 5.65204$, $|\lambda_{\min}| = 1.69268.12$. $|\lambda_{\max}| = 0.67909$, $|\lambda_{\min}| = 3.55822$. 13. $|\lambda_{\max}| = 4.26218$, $|\lambda_{\min}| = 0.60168.14$. $|\lambda_{\max}| = 5.19863$, $|\lambda_{\min}| = 0.46307$. 15. $|\lambda_{\max}| = 4.41440$, $|\lambda_{\min}| = 1.58629.16$. $|\lambda_{\max}| = 8.43516$, $|\lambda_{\min}| = 1.17027$. 17. $|\lambda_{\max}| = 4.00152$, $|\lambda_{\min}| = 2.19250.18$. $|\lambda_{\max}| = 10.48474$, $|\lambda_{\min}| = 5.62544$. 19. $|\lambda_{\max}| = 8.06925$, $|\lambda_{\min}| = 0.27629.20$. $|\lambda_{\max}| = 6.16229$, $|\lambda_{\min}| = 0.16228$.

Ответы к разделу 4.4. 1. $(0.51015, -0.20184)^{\mathrm{T}}$. 2. $(-0.13355, -0.86658)^{\mathrm{T}}$. 3. $(0.70554, 0.70866)^{\mathrm{T}}$. 4. $(0.99171, 13.00829)^{\mathrm{T}}$. 5. $(3.35591, 1.20691)^{\mathrm{T}}$. 6. $(0.61630, 0.78751)^{\mathrm{T}}$. 7. $(-1.09739, -0.94501)^{\mathrm{T}}$. 8. $(1.20691, 3.35591)^{\mathrm{T}}$. 9. $(-0.32273, 0.94549)^{\mathrm{T}}$. 10. $(-0.28981, 1.14288)^{\mathrm{T}}$. 11. $(0.40867, 0.46904)^{\mathrm{T}}$. 12. $(2.44819, 0.45923)^{\mathrm{T}}$. 13. $(-0.17096, 1.33529)^{\mathrm{T}}$. 14. $(1.06866, 3.53671)^{\mathrm{T}}$. 15. $(0.00259, -0.57857)^{\mathrm{T}}$. 16. $(0.02775, 1.07325)^{\mathrm{T}}$. 17. $(0.79905, 1.62382)^{\mathrm{T}}$. 18. $(0.91360, -0.97412)^{\mathrm{T}}$. 19. $(-0.52912, -0.01456)^{\mathrm{T}}$. 20. $(-0.84114, -0.22266)^{\mathrm{T}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие для вузов по физико-мат. спец. / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М.; СПб. : Физматлит, 2001. — 630 с.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. — М. : Высшая школа, 2000. — 188 с.

3. Волков, Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. — СПб. : Лань, 2008. — 256 с. — Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/54`.

4. Гавришина, О. Н. Практикум по численным методам / О. Н. Гавришина, Ю. Н. Захаров. — Кемерово : КемГУ, 2011. — 73 с. Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/30128`.

5. Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений / В. Е. Зализняк. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 356 с.

6. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. — СПб. : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/65043`.

7. Кострикин, А. И. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. — М. : Физматлит, 2001. — 464 с.

8. Крюкова, О. Г. Численные методы линейной алгебры / О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова, Г. С. Шевцов. — СПб. : Лань, 2011. — 496 с. Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/1800`.

9. Пирумов, У. Г. Численные методы / У. Г. Пирумов ; под ред. У. Г. Пирумова. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 421 с.

10. Плотников, П. В. Основы численных методов / П. В. Плотников, Л. И. Турчак. — М. : Физматлит, 2002. — 304 с. — Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/2351`.

11. Ревизников, Д. Л. Численные методы / Д. Л. Ревизников, В. Ф. Формалев. — М. : Физматлит, 2006. — 400 с. — Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/48183`.

12. Самарский, А. А. Численные методы : учеб. пособие для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 430 с.

13. Срочко, В. А. Численные методы. Курс лекций / В. А. Срочко. — СПб. : Лань, 2010. — 208 с. — Режим доступа: `http://e.lanbook.com/book/378`.

14. Ширапов, Д. Ш. Численные методы линейной алгебры : Учебное пособие / Д. Ш. Ширапов. — Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2003. — 96 с.

Учебное издание

Авторы

Ирина Сергеевна Гусева
Ишин-Хорло Дамбадоржиевна Хишектуева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 14.12.16. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 100. Заказ 287.
Цена договорная.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а.

E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Издательства БГУ
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а