1　线性代数与几何参考手册

目录

1.1　线性代数（向量与矩阵）

1.1.1　向量

n 维实向量是 n 个实数按一定顺序组成的，记作 $\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$。我们把 $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ 称作向量 $\vec{v}$ 的 n 个分量。

标量可以视为只有一个分量的向量。

令 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 为两个长度同为 n 的向量, $\vec{a} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$\vec{b} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$。

向量加法： $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

向量减法： $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \cdots, x_n - y_n)$

向量点积（内积）： $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ （即对应位相乘，再将所有乘积相加）

向量模长： $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ （即向量的长度）

一个重要的性质：$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$，$\theta$ 表示 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角。

三维向量的叉积： $(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$

另一个重要的性质：令 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 为两个三维向量，$\vec{a} \times \vec{b}$ 垂直于 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 所在平面，且 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 等于 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 两向量撑起的平行四边形的面积。

1.1.2　矩阵

矩阵可以理解为一个 n 行 m 列的数组，每个元素都是实数。n 行 m 列的矩阵 A 可以称作 $n \times m$ 的矩阵 A, 也可以记作 $A_{n\times m}$。矩阵 A 的第 i 行 j 列的元素记作 A_{ij}，本文档中也可以借助二维数组的表示方式记作 $A[i][j]$。

行数列数都相同的矩阵可以相加，对应位置相加就得到结果矩阵。同样也可以相减。

矩阵的转置： 矩阵的转置操作是把 $n \times m$ 的矩阵变成 $m \times n$ 的矩阵，原先第 i 行 j 列的元素变成现在第 j 行 i 列的元素。矩阵 A 的转置记作 A^T。

例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

向量可以表示为 $1\times n$ 或 $n\times 1$ 的矩阵，我们之后都采用 $n\times 1$ 的矩阵表示向量，称作列向量，记作 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

线性变换与矩阵乘法：矩阵最大的用处是表示线性变换，一个 $m\times n$ 的矩阵可以将 m 维的向量按照一定的系数变换为 n 维的向量，或者将 n 维向量按照一定系数变换为 m 维向量。所谓“线性变换”，就是说，向量 $\vec{v}$ 的每个分量都是向量 $\vec{p}$ 的每个分量乘上特定系数相加得到的。比如说，记 $\vec{v}=(x_1,x_2,x_3),\vec{p}=(y_1,y_2)$，两者之间关系满足如下条件：

对于任意 $\vec{p}$，$x_1=2y_1+3.5y_2,x_2=3y_1-6y_2,x_3=-y_1+y_2$。

我们说 $\vec{v}$ 是 $\vec{p}$ 通过线性变换得到的, 也可以说, 列向量 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是列向量 $(y_1,y_2)^T$ 左乘 3×2 的矩阵 $\begin{bmatrix}2 & 3.5\\3 & -6\\-1 & 1\end{bmatrix}$ 得到的, 这就告诉我们矩阵乘向量的做法。即:

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)^T &= \begin{bmatrix}2 & 3.5\\3 & -6\\-1 & 1\end{bmatrix}\times(y_1,y_2)^T = \begin{bmatrix}2 & 3.5\\3 & -6\\-1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\times y_1+\begin{bmatrix}3.5\\-6\\1\end{bmatrix}\times y_2=(2y_1+3.5y_2,3y_1-6y_2,-y_1+y_2)^T\end{aligned}$$

矩阵向量乘, 实际上是, 一个 n 行 m 列的矩阵可以和一个 m 维的列向量 (本质是 $m\times 1$ 的矩阵）相乘，得到一个 n 维列向量（$n\times 1$ 的矩阵）。几何含义是可以对向量做线性变换得到另一个向量。

你可以这么理解 “线性变换” 的 “线性”：变换前共线的向量变换后一定也共线。

线性变换满足零向量变换后一定还是零向量，这一点用于和后面讲到的仿射变换加以区分。

一般地，一个 $n\times m$ 的矩阵可以和一个 $m\times k$ 的矩阵相乘，得到一个 $n\times k$ 的矩阵。几何含义是先后做两个线性变换可以合并为一个线性变换。

下面给出矩阵乘法的严格定义：

当矩阵 $A_{n\times m}$ 的列数和矩阵 $B_{m\times k}$ 的行数相同时，A 可以和 B 相乘，得到的矩阵记作 $A\times B$ 或 AB，行数和 A 相同，列数和 B 相同。

令 $C=AB$, 则 $C[i][j]$ 是 A 的第 i 行的行向量 $(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{im})$，和 B 的第 j 列的列向量 $(B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{mj})^T$，两个向量做内积的结果。即 $C[i][j]=\sum_{k=1}^{m}A[i][k]\times B[k][j]$

用代码，可以这样表示矩阵乘法的计算过程

```
//A[][]是n行m列的矩阵 B[][]是m行k列的矩阵, A*B得到的结果矩阵 C[][]是n行k列的矩阵
clear_C();//对C清零
for(int index_n=1;index_n<=n;++index_n)
    for(int index_k=1;index_k<=k;++index_k)
        for(int index_m=1;index_m<=m;++index_m)
            C[index_n][index_k]+=A[index_n][index_m]*B[index_m][index_k]
```

矩阵乘法具有结合律和分配律, 但不具有交换律。

单位矩阵： 一个从左上到右下对角线上元素值都为 1，其余位置都为 0 的 $n \times n$ 的矩阵被称为 $n \times n$ 的单位矩阵，记作 I_n。对任意 $m \times n$ 的矩阵 A，有 $AI_n = I_m A = A$。

逆矩阵： 一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的逆矩阵记作 A^{-1}，满足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$。逆矩阵不一定存在，若存在，则唯一。求逆矩阵的方法本文档不再给出，有兴趣的同学可在赛后自行查阅相关资料。

1.2 几何表示与计算

1.2.1 齐次坐标

我们可以用一个 n 维向量表示 n 维空间中的一点，即该点的坐标（可以视为原点到该坐标的向量）。

但是，在许多场景中，我们使用 $n+1$ 维向量表示 n 维空间中的点。这种坐标叫做**齐次坐标**。

齐次坐标可以有效地区分**点**和**向量**, 具体来说, 对于多出来的一维, **点**补 1, **向量**补 0。三维空间中的齐次坐标, 就是用四维向量 $(x, y, z, 1)$ 来表示三维空间内的点 (x, y, z), $(x, y, z, 0)$ 表示三维空间中的向量 (x, y, z)，下面我们将介绍这种表示方法的用处。

1.2.2 仿射变换

仿射变换是一个线性变换加一个平移变换的总和。上面提到, 线性变换可以用矩阵乘法表示，例如如下几种线性变换以及对应的矩阵表示:

令 $\vec{x}^T = (x, y, z)^T$

放缩 (每个分量都是原先的二倍)

$$\vec{y}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}^T$$

对称 (x 坐标取反)

$$\vec{y}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}^T$$

绕 z 轴旋转 θ:

$$\vec{y}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}^T$$

连续做多个线性变换，可以把这几个线性变换的矩阵乘起来然后一起做线性变换。比如，对 x^T 依次左乘 A, B, C, 相当于 $C(B(Ax^T))$, 根据结合律，相当于 $(CBA)x^T$ 需要注意的是, 在矩阵乘式中，靠近 x^T 的矩阵先做变换。

但是，一个非零的平移变换显然不是线性变换，因为它不满足零向量变换后还是零向量。包含平移变换的多次变换的组合，可以表示为 $A\vec{x}^T + \vec{c}^T$, 其中向量 $\vec{c}^T$ 代表平移操作。

使用齐次坐标可以很方便地用矩阵表示仿射变换，令

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^T = (x, y, z, 1)^T$$

$$\vec{c}^T = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

我们可以将 $A(x, y, z)^T + \vec{c}^T$ 用以下仿射变换矩阵表示

$$\vec{y}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \Delta x \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \Delta y \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}^T$$

$$= \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} (x, y, z)^T + (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \times 1, 0 \times x + 0 \times y + 0 \times z + 1 \right)$$

$$= (A(x, y, z)^T + \vec{c}^T, 1)$$

这种方法可以自动区分齐次坐标的点和向量，当我们代入向量 $(x, y, z, 0)$ 进行乘法时，由于末位是 0，平移变换被自动忽略，而只剩下线性变换部分的计算，并且变换后的结果末位依然是 0。

仿射变换矩阵的最后一行一定是 $(0, 0, 0, 1)$ ，所以在很多代码实现中，我们只记录前三行的数字。

1.2.3 射线与平面求交

令 $(\vec{o}, \vec{d})$ 表示端点为 $\vec{o} = (x, y, z, 1)^T$，方向为 $\vec{d} = (a, b, c, 0)^T$ 的射线。使之与平面 $ax + by + cz + d = 0$ 求交。

我们可以将平面也用一个四维向量 $(a, b, c, d)^T$ 表示。

进而问题转化为，求一标量 l，使得 $(a, b, c, d) \cdot \left(\vec{o} + l\vec{d}\right) = 0$

可以推得:

$$(a, b, c, d) \cdot \vec{o} + l(a, b, c, d) \cdot \vec{d} = 0$$

$$l = -\frac{(a, b, c, d) \cdot \vec{o}}{(a, b, c, d) \cdot \vec{d}}$$

若无解，则平面与射线平行，不存在交点;

否则，交点为 $\vec{o} + l\vec{d}$。

1.2.4 三角形内部判定

由于我们已经知道如何求射线与平面的交点了，故只需考虑判定点在三角形所在平面上的情况。

设三角形三个顶点分别为 A, B, C，需要判定的点为 P，以下为 P 在 $\triangle ABC$ 内部的充要条件（分别对应一种判定方法）:

1. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCA}$
2. $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$
3. 对于三角形任意一点，**点 P 与该点**在 **包含另外两点的三角形所在平面的垂直面**同侧
4. $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ 三点环绕方向相同
5. 令实数 a, b 满足 $\vec{AP} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$，且 $0 \le a, b \le 1$，$0 \le a + b \le 1$

在实际应用中，我们一般不需纠结于边界情况如何判定。