FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Matematická analýza

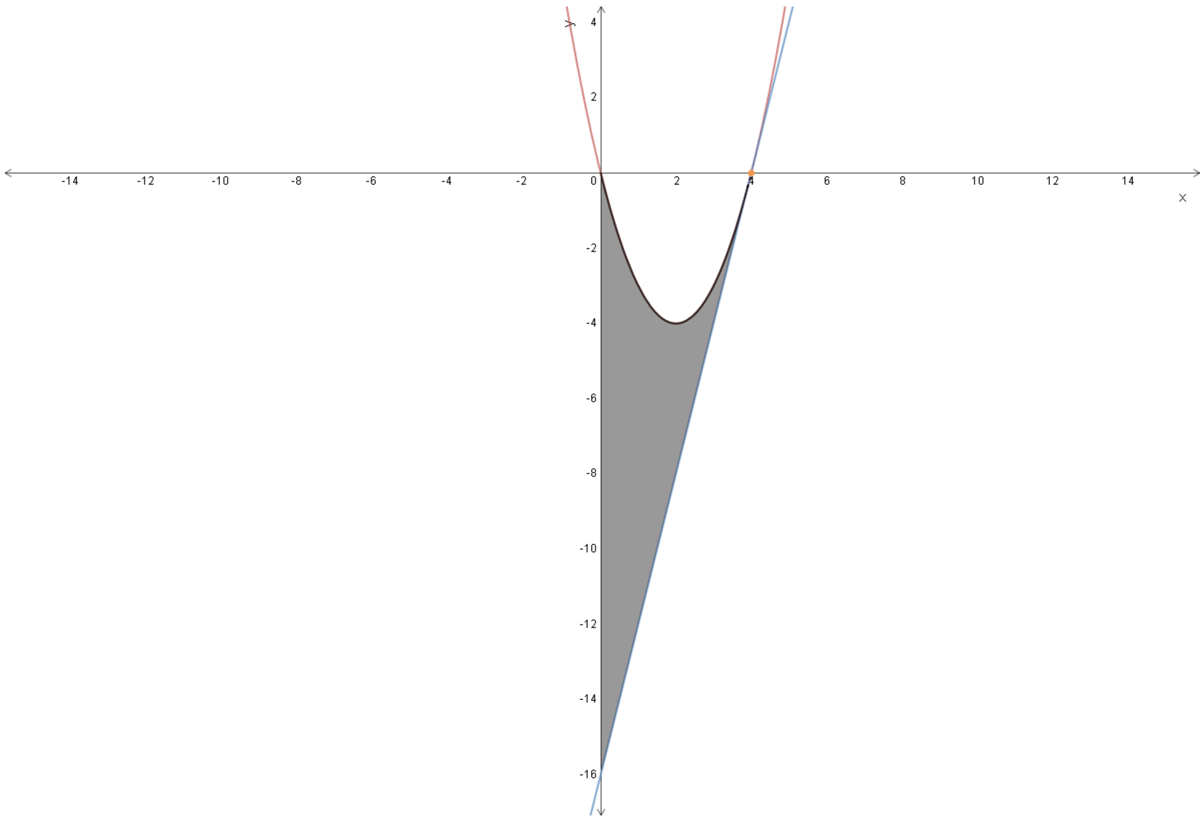
Domácí úloha 2 – zadání 1.

Adam Šuba, 187225
Adrián Tóth, 187383
Peter Šuhaj, 187331
Miroslav Tichavský, 185535
Martin Leonov, 187083
Markéta Radoberská, 187294

26. dubna 2016

Příklad 1.

Zadání:
Najděte tečnu ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 4x$ tak, aby obsah části roviny omezené grafem dané funkce, nalezenou tečnou a osou O_y byl roven 72.
Řešení:
Nejpreve se podívejme, jak asi může tato část roviny vypadat. Pomůže nám to určit, co je vlastně naše neznámá, kterou se budeme snažit vypočítat.



Jedna mez určitého integrálu bude osa y, tedy 0. Druhou mezí je nějaká hodnota x_0, která je x souřadnice bodu dotyku tečny t s funkcí f.

Rovnici tečny můžeme zapsat ve směrnicovém tvaru

$$t\colon y = px + q,$$

kde p je směrnice, tedy derivace funkce f v bodě dotyku. Derivace naší funkce je

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Po dosazení do rovnice tečny získáme:

$$t\colon y = (2x_0 - 4)x + q$$

Jelikož bude tečna t sloužit při výpočtu obsahu jako jedna z hranic (druhá je samotná funkce f), proměnná q nám v její rovnici překáží. Pokusme se ji tedy vyjádřit pomocí proměnné x_0.

Obyčejně, pokud počítáme hodnotu q, tak do rovnice dosadíme některý bod dané přímky. V našem případě to bude bod dotyku se souřadnicemi $[x_0, y_0]$. Můžeme tedy psát:

$$y_0 = (2x_0 - 4)x_0 + q$$
$$y_0 = 2x_0^2 - 4x_0 + q$$

Bod dotyku je zároveň bodem funkce f, tedy

$$y_0 = x_0^2 - 4x_0.$$

Jelikož $y_0 = y_0$, dáme do rovnosti a vyjádříme q:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 4x_0 &= 2x_0^2 - 4x_0 + q \\ q &= x_0^2 - 2x_0^2 - 4x_0 + 4x_0 \\ q &= -x_0^2 \end{aligned}$$

Nyní můžeme q dosadit do rovnice tečny t a můžeme přejít k výpočtu obsahu.

$$t\colon\, y = (2x_0 - 4)x - x_0^2$$

Obsah plochy ohraničené nějakými dvěma funkcemi se spočítá jako určitý integrál z jejich rozdílu. Tečnu můžeme označit jako funkci $t(x)$.

$$\int_0^{x_0} f(x) - t(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} x^2 - 4x - (2x_0x - 4x - x_0^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} x^2 - 2x_0x + x_0^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x_0x^2}{2} + \frac{x_0^2x}{1}\right]_0^{x_0} = \left[\frac{x^3}{3} - x_0x^2 + x_0^2x\right]_0^{x_0} = \frac{x_0^3}{3} - x_0^3 + x_0^3 = \frac{x_0^3}{3}$$

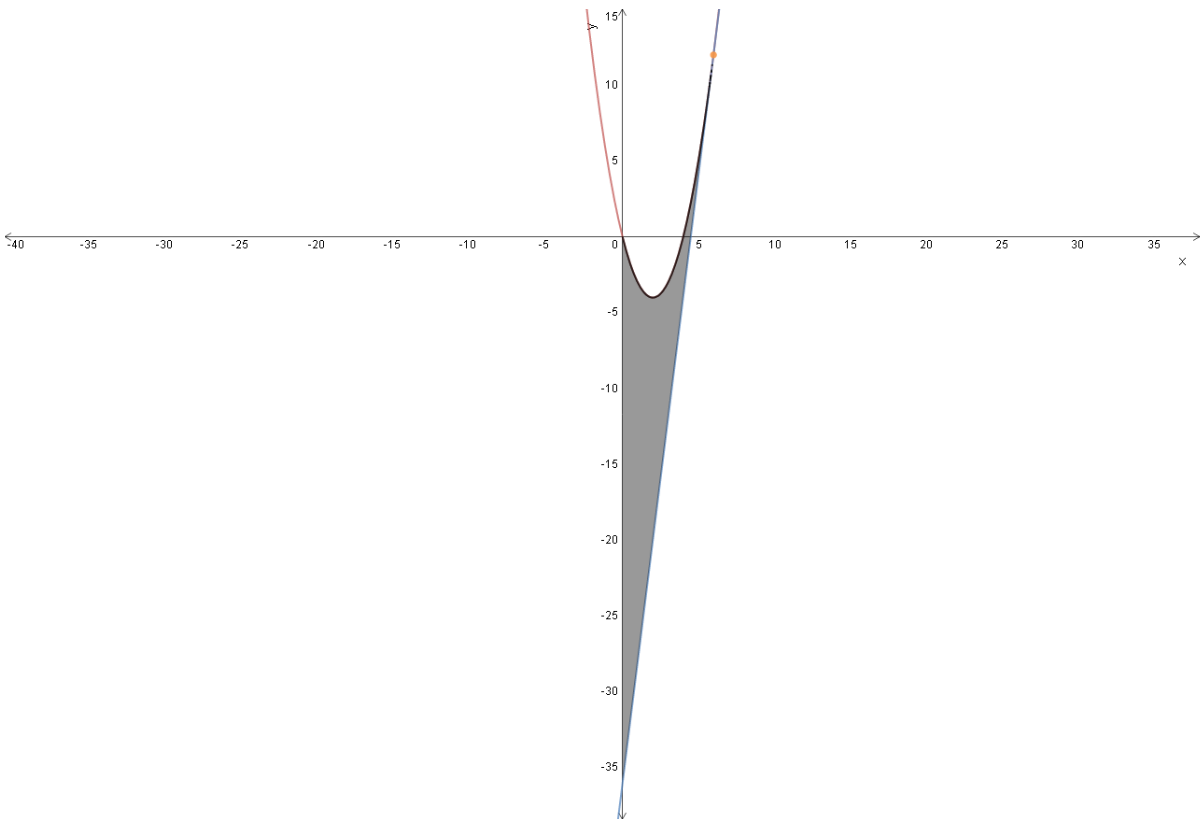
Obsah plochy ohraničené funkcí f, osou O_y a tečnou k funkci f v bodě $[x_0, y_0]$ je tedy roven $\frac{x_0^3}{3}$. Naším úkolem je určit tečnu tak, aby byl obsah roven 72. Vznikne nám tedy jednoduchá rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{x_0^3}{3} &= 72 \\ x_0^3 &= 216 \\ x_0 &= 6 \end{aligned}$$

Tečna má tedy rovnici

$$t\colon\, y = 8x - 36.$$

Bod dotyku má souřadnice $[6, 12]$. Graf vypadá potom takto:



Příklad 2.

Zadání:
Vypočítejte $\int\limits_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$, kde $f(x) = \dfrac{3x^3+x^2-4x+16}{x^5+5x^4+9x^3+13x^2+14x+6} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x^2+2}$, tedy funkce, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.
Řešení:
Výpočet nevlastního integrálu provedeme tak, že spočítáme $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_0^b \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}\ \mathrm{d}x\right) = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} - \ln(x+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln(b+1) - \frac{3}{b+1} - \ln(b+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{b}{\sqrt{2}} - \ln(0+1) + \frac{3}{0+1} + \ln(0+3) + \sqrt{2}\arctan\frac{0}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln(b+1) - \frac{3}{b+1} - \ln(b+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{b}{\sqrt{2}} - 0 + 3 + \ln(3) + 0\right) =$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln(b+1) - \frac{3}{b+1} - \ln(b+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{b}{\sqrt{2}}\right) + 3 + \ln(3) = \lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b+1}{b+3}\right) - 0 - \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 3 + \ln(3) =$$
$$= \ln(1) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 3 + \ln(3) = 3 + \ln(3) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 1.8772$$

Příklad 3.

Zadání:

Vypočítejte s přesností na tři desetinná místa (tj. s chybou menší než 10^{-3}) integrál $I = \int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady. Prověřte platnost podmínek, které tento postup umožňují.

Řešení:

Výpočet provedeme tak, že do mocninné (Taylorovy) řady rozložíme funkci $\cos x$. Tato Taylorova řada má obor konvergence na celém $\mathbb{R}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dosadíme do zadané funkce a po úpravách získáme:

$$f(x) = \frac{1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)}{x^2} = \frac{1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Nyní přejdeme k integrování.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n)!}\right]_0^1$$

Jelikož máme počítat s přesností na tři desetinná místa, stačí nám nyní určit, kolik členů řady doopravdy potřebujeme. Po dosazení dolní meze se všechny členy budou rovnat nule, stačí tedy přihlížet pouze k horní mezi.

$$\left[\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n)!}\right]_0^1 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3\cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!} - \frac{1}{7 \cdot 8!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n)!}$$

Jelikož hodnota $\frac{1}{3\cdot 4!} \approx 0.0139$ je větší než 10^{-3}, musíme ji ještě zahrnout. Avšak $\frac{1}{5\cdot 6!} \approx 2.8 \cdot 10^{-4}$ je již menší než požadovaná odchylka. Požadovaný výsledek tedy neovlivní. Z mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n)!}$ nám tedy stačí vzít pouze první dva členy.

$$\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\frac{1^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n)!} \approx 0.486$$

Příklad 4.

Zadání:
Najděte a nakreslete definiční obor funkce $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln\left(\cos(\pi x) - y\right)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x}$.

Řešení:

Definiční obor funkcí dvou proměnných se určuje stejně jako u funkcí jedné proměnné. Ze zadané funkce vidíme že

$$\ln(\cos(\pi x) - y) \neq 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Některé podmínky můžeme ještě trochu upravit:

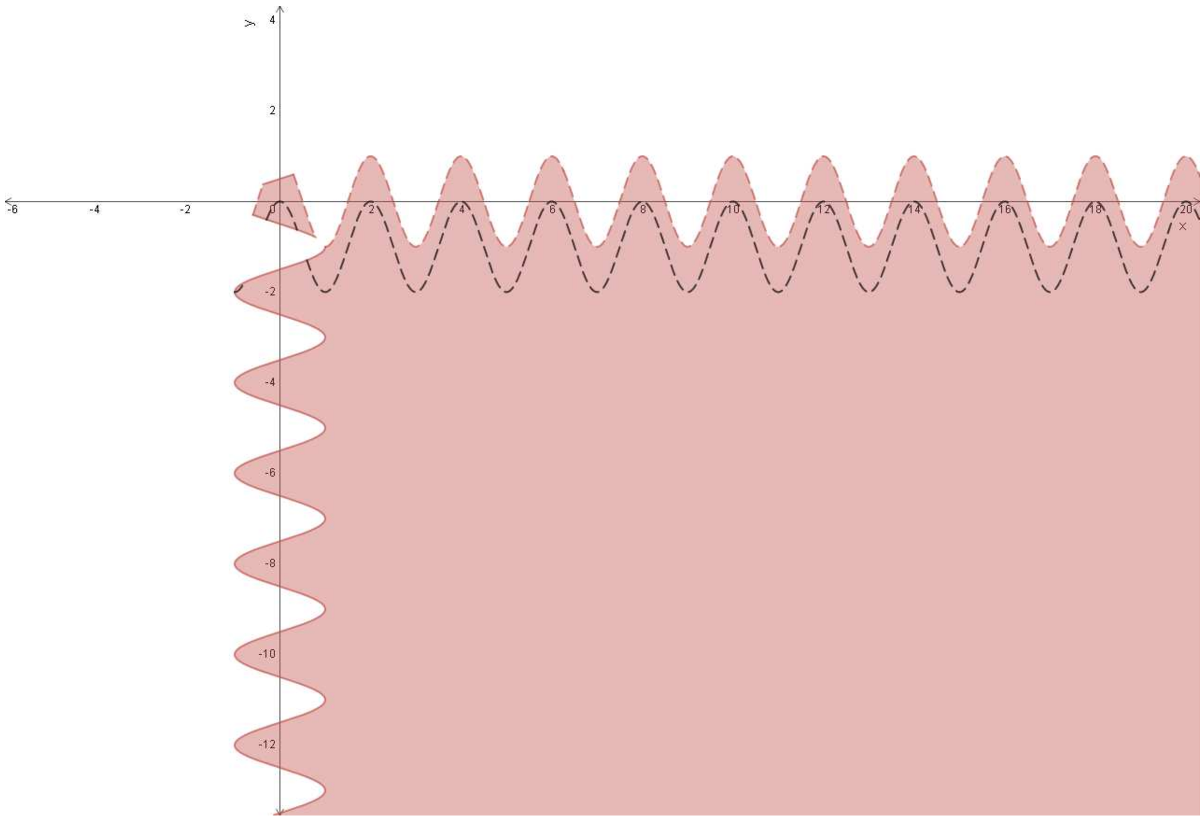
$$\begin{aligned} \ln(\cos(\pi x) - y) &\neq 0 \\ \cos(\pi x) - y &\neq 1 \\ y &\neq \cos(\pi x) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi x) - y &> 0 \\ y &< \cos(\pi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi y) + x &\geq 0 \\ x &\geq -\cos(\pi y) \end{aligned}$$

Souhrnně to můžeme zapsat takto:

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \cos(\pi x) - 1 \ \wedge \ y < \cos(\pi x) \ \wedge \ x \geq -\cos(\pi y)\right\}$$



Příklad 5.

Zadání:
Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2y^2(y + 3) + x^2(y + 1)$.
Řešení:
Při hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných musíme nejprve určit body podezřelé z lokálních extrémů (stacionární body) a pak je potvrdit.

Stacionární body nalezneme z následujících rovnic:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Částečně tedy derivujme zadanou funkci.

$$f'_x = 2x(y + 1)$$
$$f'_y = 4y(y + 3) + 2y^2 + x^2 = 6y^2 + 12y + x^2$$

Z derivace podle x můžeme určit, že $x = 0$ a $y = -1$. Dosadíme do derivace podle y a získáme:

$$\begin{aligned}
x = 0: \quad & 6y^2 + 12y + 0^2 = 0 \\
& y(6y + 12) = 0 \\
& y_{x1} = 0 \quad y_{x2} = -2 \\
y = -1: \quad & 6(-1)^2 + 12\dot{(} - 1) + x^2 = 0 \\
& 6 - 12 + x^2 = 0 \\
& x^2 = 6 \\
& x_{y1} = \sqrt{6} \quad x_{y2} = -\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Stacionární body jsou tedy:

$$P_1[0, 0] \quad P_2[0, -2] \quad P_3[\sqrt{6}, -1] \quad P_4[-\sqrt{6}, -1]$$

Zda-li se v těchto bodech opravdu vyskytují extrémy, určíme z determinantů Hessových matic pro jednotlivé body pomocí Sylvestrova kritéria.

Hessova matice obecně vypadá takto: $H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$. Určeme tedy druhé parciální derivace.

$$f''_{xx} = 2y + 2$$
$$f''_{yy} = 12y + 12$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x$$

Naše matice tedy vypadá následovně:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y + 2 & 2x \\ 2x & 12y + 12 \end{pmatrix}$$

Postupně nyní spočítáme determinant pro každý bod podezřelý z extrému. Pokud bude determinant větší jak 0, bod je extrémem, pokud je menší než 0, bod není extrémem a pokud je roven 0, tak nelze tímto kritériem rozhodnout.

$$P_1[0,0]: \quad \det H_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 24$$

$$P_2[0,-2]: \quad \det H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 24$$

$$P_3[\sqrt{6},-1]: \quad \det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$P_4[-\sqrt{6},-1]: \quad \det H_4 = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24$$

Determinanty vyšly kladné pouze pro body P_1 a P_2, v těchto dvou bodech se nachází lokální extrém. V bodech P_3 a P_4 se lokální extrém nenachází.

O tom, jestli se jedná o lokální minimum nebo maximum rozhoduje determinant $D_1 = |a_{11}|$, tedy hodnota f''_{xx}. Pokud je záporná, jde o maximum, pokud kladná, jde o minimum. Bod $P_1[0,0]$ je tedy minimum a bod $P_2[0,-2]$ je maximum.

$$f_{min} = f(P_1) = 0$$
$$f_{max} = f(P_2) = 8$$