Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

Matematická analýza
Domácí úloha 1 – zadání 1.

Adam Šuba, 187225
Adrián Tóth, 187383
Peter Šuhaj, 187331
Miroslav Tichavský, 185535
Martin Leonov, 187083
Markéta Radoberská, 187294

22. března 2016

Příklad 1.

Zadání:
Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$.

Řešení:
Jelikož stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, přistoupíme rovnou k rozkladu jmenovatele na součin pomocí Hornerova schématu.

$$p(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 \tag{1}$$

Můžeme určit možné racionální kořeny polynomu, které budou ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde a jsou dělitelé absolutního členu polynomu a b jsou dělitelé vedoucího koeficientu. Tedy

$$a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$
$$b \in \{\pm 1\}$$
$$\frac{a}{b} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Nyní vytvořme samotnou tabulku, reprezentující Hornerovo schéma:

	1	5	9	13	14	6
1	1	6	15	28	42	48 ✗
-1	1	4	5	8	6	0 ✓
-1	1	3	2	6	0 ✓	
-1	1	2	0	6 ✗		
2	1	5	12	30 ✗		
-2	1	1	0	6 ✗		
3	1	6	20	66 ✗		
-3	1	0	2	0 ✓		
-3	1	-3	11 ✗			
6	1	6	38 ✗			
-6	1	-6	38 ✗			

Kořeny polynomu jsou tedy $k_{1,2} = -1$ a $k_3 = -3$. Polynom přepíšeme do tvaru

$$p(x) = (x+1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x^2+2). \tag{2}$$

$(x^2 + 2)$ je v $\mathbb{R}$ dále nerozložitelný.

Dosazením součinu polynomů zpět do funkce v zadání získáme

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x^2+2)}. \tag{1}$$

Součet parciálních zlomků bude vypadat následovně:

$$\frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x^2+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} \tag{2}$$

V uvedené rovnici se zbavíme zlomků vynásobením celé rovnice jmenovateli (respektive jmenovatelem zlomku na levé straně, který obsahuje součin všech polynomů ve jmenovatelích na straně pravé).

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 4x + 16 = A &\cdot (x+3) \cdot (x^2+2) + B \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x^2+2) + \\ &+ C \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2+2) + (Dx+E) \cdot (x+1)^2 \cdot (x+3) \end{aligned} \tag{3}$$

Jednotlivé členy roznásobíme, zachováváme ovšem levou a pravou stranu tak, jak jsou. Upravená rovnice vypadá následovně:

$$
\begin{split}
3x^3 + x^2 - 4x + 16 = (B + C + D)x^4 + \\
+ (A + 4B + 2C + 5D + E)x^3 + (3A + 5B + 3C + 7D + 5E)x^2 + \\
+ (2A + 8B + 4C + 3D + 7E)x + 6A + 6B + 2C + 3E
\end{split}
\tag{4}
$$

Porovnáním koeficientů na obou stranách rovnice získáme soustavu 5 rovnic o 5 neznámých.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & B & + & C & + & D & & & = & 0 \\
A & + & 4B & + & 2C & + & 5D & + & E & = & 3 \\
3A & + & 5B & + & 3C & + & 7D & + & 5E & = & 1 \\
2A & + & 8B & + & 4C & + & 3D & + & 7E & = & -4 \\
6A & + & 6B & + & 2C & & & + & 3E & = & 16
\end{array}
$$

Vyřešením soustavy rovnic získáme hodnoty

$$
\begin{aligned}
A &= 3, \\
B &= 1, \\
C &= -1, \\
D &= 0, \\
E &= -2.
\end{aligned}
$$

Výsledný parciální zlomek je tedy:

$$
\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2} = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, -1\}
$$

Příklad 2.

Zadání:
Najděte asymptoty grafu funkce $f(x) = x^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$.

Řešení:
Asymptoty grafu mohou být dvojího druhu: svislé (bez směrnice) a se směrnicí. Na úvod ukažme, že je funkce sudá. Usnadní nám to další výpočty, neboť budeme moci počítat pouze pro kladné hodnoty a to stejné bude platit i pro hodnoty záporné.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right)\\
f(-x) &= (-x)^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{(-x)^2}{(-x)^2-4}\right)
\end{aligned}
$$

Jelikož $(-x)^2$ je to stejné jako x^2, tak

$$f(x) = f(-x),$$

funkce je tedy sudá.

Asymtoty bez směrnice mohou existovat pouze v bodech, které nejsou součástí definičního oboru dané funkce. Jediné omezení definičního oboru zadané funkce je jmenovatel zlomku v arctan() tedy

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 &\neq 0\\
x^2 &\neq 4\\
|x| &\neq 2\\
D_f &= \mathbb{R} - \{\pm 2\}.
\end{aligned}
$$

Aby svislé asymptoty v bodech 2 a -2 existovaly, musí platit, že alespoň jedna jednostranná limita v daném bodě je nevlastní. Počítejme limitu zleva a zprava pro $x = 2$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) = 4\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{4}{(2^+)^2-4}\right) &=\\
= \pi - 4\cdot\arctan\infty = \pi - 4\cdot\frac{\pi}{2} = \pi - 2\pi = -\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) = 4\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{4}{(2^-)^2-4}\right) &=\\
= \pi - 4\cdot\arctan(-\infty) = \pi - 4\cdot(-\frac{\pi}{2}) = \pi + 2\pi = 3\pi
\end{aligned}
$$

Jelikož je funkce sudá, pro $x = -2$ by limita zleva vyšla $-\pi$ a zprava 3π. Jelikož ani limita zprava ani zleva není $+\infty$ nebo $-\infty$, svislá limita neexistuje.

Asymptoty se směrnicí jsou ve tvaru $y = ax + b$. Hodnotu a spočítáme ze vzorce $a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$. Hodnota b je potom $b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) = \left|\infty\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \lim_{x\to\infty}\arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) = \right.$$

$$\left. = \infty\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}\right) = \infty\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \arctan 1\right) = \infty\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \infty\cdot 0\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}}{x^{-1}} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1+\frac{x^4}{(x^2-4)^2}}\right)\cdot\frac{2x\cdot(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2}}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{\frac{x^4-8x^2+16+x^4}{(x^2-4)^2}}\right)\cdot\frac{2x\cdot(-4)}{(x^2-4)^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-(x^2-4)^2}{2x^4-8x^2+16}\cdot\frac{8x^3}{(x^2-4)^2}\right) = -\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{x^4-4x^2+8} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\cdot\frac{4}{x}}{x^4\cdot(1-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^4})} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^4}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) - ax = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}\right) = \left|\infty\cdot 0\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{x^2}{x^2-4}}{x^{-2}} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{1+\frac{x^4}{(x^2-4)^2}}\right)\cdot\frac{2x\cdot(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2}}{-2x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{\frac{x^4-8x^2+16+x^4}{(x^2-4)^2}}\right)\cdot\frac{2x\cdot(-4)}{(x^2-4)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-(x^2-4)^2}{2x^4-8x^2+16}\cdot\frac{4x^4}{(x^2-4)^2}\right) = -\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^4-4x^2+8} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^4\cdot(1-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^4})} = -\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^4}} = -2$$

Pokud bychom do výpočtů výše místo ∞ dosadili $-\infty$, získáme naprosto stejné hodnoty a a b. Existuje tedy pouze jediná asymptota se směrnicí a to

$$y = -2.$$

Příklad 3.

Zadání:
Na grafu funkce $f(x) = x^2 - x$ najděte bod, který má nejkratší vzdálenost od bodu $A = [0, 1]$.
Řešení:
Bod který na grafu funkce f hledáme má souřadnice $X = [x, f(x)]$. Zajímá nás nejkratší vzdálenost $d = |AX|$. Obecně tuto vzdálenost můžeme vyjádřit jako

$$d = \sqrt{(x - a_1)^2 + (f(x) - a_2)^2}$$

Dosadíme za a_1, a_2 a $f(x)$ a upravíme.

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x-0)^2 + ((x^2 - x) - 1)^2} \\
d &= \sqrt{x^2 + (x^2 - x - 1)^2} \\
d &= \sqrt{x^2 + (x^2 - x - 1) \cdot (x^2 - x - 1)} \\
d &= \sqrt{x^2 + x^4 - x^3 - x^2 - x^3 + x^2 + x - x^2 + x + 1} \\
d &= \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}
\end{aligned}$$

Vzdálenost d můžeme vyjádřit jako funkci $d(x)$. Jelikož máme určit **nejkratší** vzdálenost, zajímá nás globální minimum této funkce. Minimum určíme podle nulových a nedefinovaných bodů 1. derivace.

$$\begin{aligned}
d'(x) = \left[(x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}}\right]' &= \frac{1}{2} \cdot (x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x^3 - 6x^2 + 2) = \\
&= \frac{4x^3 - 6x^2 + 2}{2\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}} = \frac{2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 1)}{2\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}}
\end{aligned}$$

Derivace bude definovaná pokud

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x + 1} &\neq 0 \\
x^4 - 2x^3 + 2x + 1 &\neq 0
\end{aligned}$$

Pomocí Hornerova schématu můžeme polynom rozložit. V úvahu připadá pouze $x \in \{\pm 1\}$:

	1	-2	2	1
1	1	-1	1	2 ✗
-1	1	-3	5	-4 ✗

Výše uvedený polynom nikdy nebude roven 0, derivace je tedy definovaná na celém $\mathbb{R}$. Nyní určeme nulové body derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x + 1} &= 0 \\
2x^3 - 3x^2 + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Polynom opět rozložíme pomocí Hornerova schématu. Možné kořeny $x \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.

	2	-3	0	1
1	2	-1	-1	0 ✓
1	2	1	0 ✓	

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 \cdot (2x+1) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Minimum tedy může nastávat pro $x \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$. Určeme funkčí hodnoty $d(x)$:

$$d\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1+4}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$d(1) = \sqrt{1^4 - 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1 + 1} = \sqrt{1 - 2 + 2 + 1} = \sqrt{2}$$

Jelikož $\dfrac{\sqrt{5}}{4} < \sqrt{2}$, tak minimum nastává pro $x = -\frac{1}{2}$. Stačí spočítat $f(x)$ a máme souřanice hledaného bodu X.

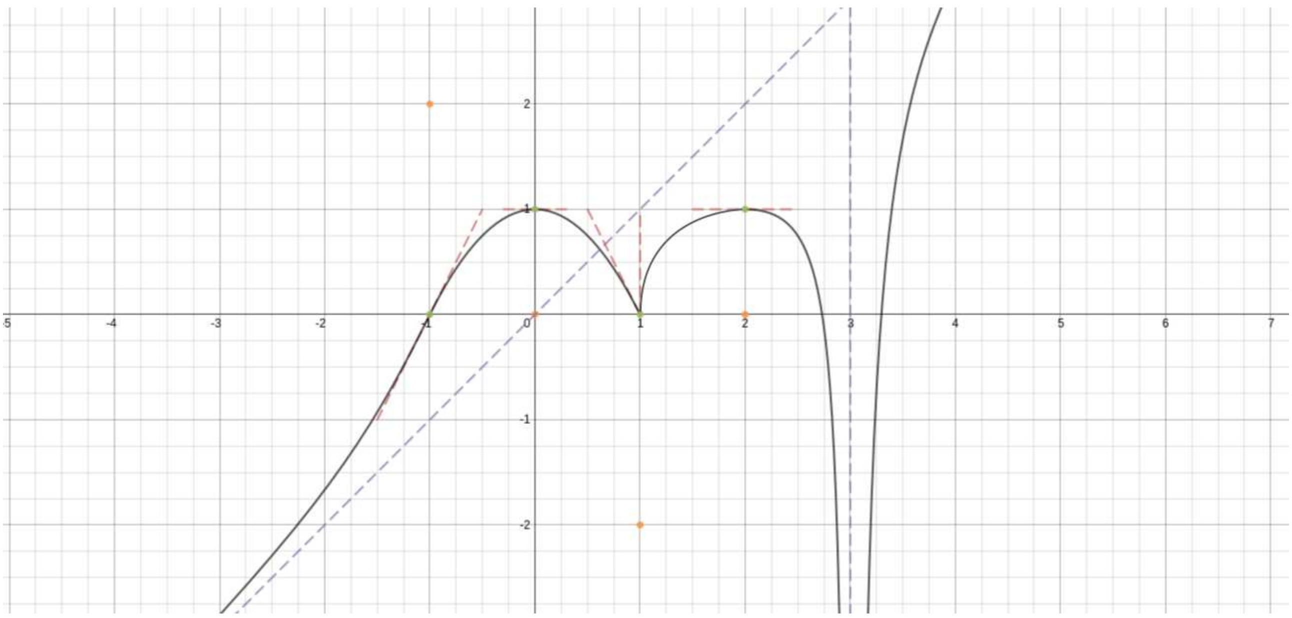
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$X = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

Příklad 4.

Zadání:
Načrtněte graf funkce spojite na $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$, přímky $y = x$ a $x = 3$ josu její asymptoty,
$f(0) = f(2) = 1$, $f(-1) = f(1) = 0$,
$f'(-1) = 2$, $f'(0) = f'(2) = 0$, $f'_+(1) = \infty$, $f'_-(1) = -2$
$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$, $x \in (1, 3)$, $x \in (3, \infty)$.
Do obrázku nakreslete také obě asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech $x = -1, 0, 1, 2$.
Řešení:
Jako první do grafu zakreslíme obě dvě zadané asymptoty. Poté zaznačíme zadané funkční hodnoty v bodech $x = -1, 0, 1, 2$.
V bodě $x = 0$ je funkční hodnota rovna jedné, první derivace je nulová a druhá derivace pro $x \in (-1, 1)$ je záporná. Z těchto informací můžeme usoudit že funkce bude konkávní (2. derivace) a bod $x = 0$ bude její maximum (1. derivace). Derivace v bodě $x = -1$ je kladná ($f'(-1) = 2$), funkce zde bude tedy růst (tak aby byla konkávní) z bodu $[-1, 0]$ do bodu $[0, 1]$, poté bude klesat do bodu $[1, 0]$, kde je derivace zleva rovna -2.
Na intervalu $(-\infty, -1)$ je 2. derivace kladná, funkce je tedy konvexní. Funkce se bude v $-\infty$ přibližovat k asymptotě $y = x$.
Derivace zprava v $x = 1$ je rovna nekonečnu, polotečna tedy bude rovnoběžná s osou y a funkce bude z tohoto bodu velmi strmě růst. Na intervalu $(1, 3)$ je funkce konkávní a bude mít lokální maximum v bodě $x = 2$ ($f'(2) = 0$). K bodu $x = 3$, kterým prochází svislá asymptota, bude funkce klesat.
Na posledním intervalu $x \in (3, \infty)$ je funkce opět konkávní. Limita pro $x \to 3^+$ bude rovna $-\infty$ a pro $x \to \infty$ bude rovna ∞.
Tečny a polotečny doplníme v zadaných bodech podle příslušných prvních derivací, které jsou směrnicemi těchto (polo)tečen.

$$
\begin{aligned}
t_{-1} &: y = 2x + 2 \\
t_0 &: y = 1 \\
t_{1_-} &: y = -2x + 2, \text{ pro } x < 1 \\
t_{1_+} &: x = 1, \text{ pro } x > 1 \\
t_2 &: y = 1
\end{aligned}
$$



Příklad 5.

Zadání:
Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ na intervalu $\langle -2, 9\rangle$.
Řešení:
Pomocí 1. derivace funkce zjistíme hodnoty x, ve kterych funkce dosahuje některého lokálního extrému. Tyto body potom včetně těch krajních dosadíme do původní funkce a určíme největší a nejmenší hodnotu funkce f na zadaném intervalu.

$$f'(x) = \left[(6x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3} \cdot \left(6x^2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (6x^2 - x^3)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} \cdot (12x - 3x^2) =$$
$$= \frac{3 \cdot (4x - x^2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4x - x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}}$$

Určíme nulové body a body ve kterých není derivace definovaná.

$$\frac{4x - x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} &\neq 0 \\
(6x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} &\neq 0 \quad /^{\frac{3}{2}} \\
6x^2 - x^3 &\neq 0 \\
x^2 \cdot (6 - x) &\neq 0 \\
x \neq 0 \quad &\vee \quad x \neq 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x - x^2 &= 0 \\
x \cdot (4 - x) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Nyní určíme funkční hodnoty $f(x)$ pro všechny $x \in \{-2, 0, 4, 6, 9\}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{6x^2 - x^3} \\
f(-2) &= \sqrt[3]{6 \cdot (-2)^2 - (-2)^3} = \sqrt[3]{24 + 8} = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \\
f(0) &= \sqrt[3]{6 \cdot (0)^2 - (0)^3} = \sqrt[3]{0 - 0} = \sqrt[3]{0} = 0 \\
f(4) &= \sqrt[3]{6 \cdot (4)^2 - (4)^3} = \sqrt[3]{96 - 64} = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \\
f(6) &= \sqrt[3]{6 \cdot (6)^2 - (6)^3} = \sqrt[3]{6^3 - 6^3} = \sqrt[3]{0} = 0 \\
f(9) &= \sqrt[3]{6 \cdot (9)^2 - (9)^3} = \sqrt[3]{486 - 729} = \sqrt[3]{-243} = -3\sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že na intervalu $\langle -2, 9\rangle$ nabývá funkce $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ největší hodnotu v $x_1 = -2$ a $x_2 = 4$, neboť $f(-2) = f(4) = 2\sqrt[3]{4}$. Naopak nejmenší hodnotu nabývá pro $x = 9$, neboť $f(9) = -3\sqrt[3]{9}$.