PHS3903 – Projet de simulation
Mini-devoir. Méthode de la matrice 1D

Directives

Répondre aux questions suivantes à l'aide du code Python (ou Matlab) fourni sur Moodle, auquel vous aurez apporté les modifications nécessaires. Justifier vos réponses avec clarté et concision. Vos tableaux et figures doivent être lisibles et présentés selon les règles de l'art. Remettre un fichier .pdf avec vos réponses et un fichier .py (ou .m) contenant votre code dans la boîte de dépôt sur Moodle.

Méthode de la matrice pour la résolution des équations dépendantes du temps (20 points).

Considérons le problème d'établissement d'un équilibre thermodynamique dans un mur d'isolation thermique. En particulier, considérons un mur en brique d'épaisseur $L = 30cm$ qui sépare l'intérieur de la maison (ayant la température désirée $T_i = 20^o C$) de l'extérieure ayant la température ambiante $T_a = -10^o C$. À l'intérieure du mur se trouve un système de chauffage. Il est caractérisé par le taux volumique d'émission de la chaleur $q = 2000\ W/m^3$. A la surface externe du mur nous supposons la condition frontière convective, tandis que à la surface qui face la maison on considère la condition frontière de la température constante :

$$C_v \rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + S(x)$$

Conditions aux limites :

$$-k \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left(T_a - T(0,t)\right)$$

$$\left.T(x,t)\right|_{x=L} = T_i$$

Conditions initiales :

$$T(x,0) = T_w + (T_i - T_w) \cdot x/L$$

$$T_w = \frac{T_i \cdot k/L + T_a \cdot h}{k/L + h}$$

Source de chaleur :

$$S(x) = q\Big/\left(1 + \left(\frac{x-L}{dL}\right)^2\right) \quad . (1)$$

1. (6 points) Travail préparatoire. En utilisant les maillages uniformes $t_p = p \cdot dt, p \geq 0$, $x_i = i \cdot dx, i \geq 0$ programmez une méthode implicite de la matrice pour modéliser la dynamique d'équilibrage d'un mur d'isolation thermique :

$$\frac{C_v \rho}{k} \frac{T(x,t_{p+1}) - T(x,t_p)}{dt} = \xi \frac{\partial^2 T(x,t_{p+1})}{\partial x^2} + (1-\xi) \frac{\partial^2 T(x,t_p)}{\partial x^2} + \frac{S(x)}{k} . \quad (2)$$

La méthode est détaillée dans le document intitulé « Methode_de_la_matrice_1d.pdf ». Programmer les conditions frontières dans la forme générale (en termes de coefficients c_{1-3}, d_{1-3}) comme expliqué dans le même document.

2. Devoir. À l'aide de la méthode implicite (2), et à l'aide du code pour le système équilibré («Equation_de_diffusion_independante_du_temps.m»), trouvez le temps d'équilibrage du système avec

$\xi = 1$; $k = 1$ W/(m·K); $h = 1$ W/(m²·K); $C_v = 1000$ J/(kg·K); $\rho = 2000$ kg/m³; $dL = 5cm$·

En particulière :

i) (6 points) D'abord, en utilisant le code pour le système équilibré «Equation_de_diffusion_independante_du_temps.m», trouvez (après les modifications nécessaires au code) la distribution de la température $T_{eq}(x)$ en équilibre thermique. Dans votre calcule utilisez $dx = 3$ mm. Enregistrez et présentez la température maximale en équilibre $T_{\max}^{eq} = \max_{x\in[0,L]}\left(T_{eq}(x)\right)$ dans le mur.

ii) (8 points) Ensuite, en utilisant votre propre code pour l'équation de transfert de chaleur dépendant du temps (2), trouver et présentez le temps τ_{eq} d'équilibrage du système. Pour cela, suivez la dynamique avec le pas temporaire $dt = 1 \cdot dx^2 \left(C_v \rho / k\right)$ pendant 10^6 s et enregistrez τ_{eq} pour lequel $\max_{x\in[0,L]}\left(T\left(x, \mathrm{t} = \tau_{eq}\right)\right) = \max_{x\in[0,L]}\left(T\left(x, \mathrm{t} = 0\right)\right) + 0.95 \cdot \left(T_{\max}^{eq} - \max_{x\in[0,L]}\left(T\left(x, \mathrm{t} = 0\right)\right)\right)$.

Vous pouvez déboguer votre code avec les paramètres présentés au-dessus et en utilisant la méthode de Crank-Nicolson,

$\xi = 0.5$; $k = 0.85$ W/(m·K); $h = 20$ W/(m²·K); $C_v = 1000$ J/(kg·K); $\rho = 2000$ kg/m³; $dL = 5cm$

Résulat:

$T_{\max}^{eq} = 20.477(5)^o C$; $Err(T_{\max}^{eq}) \approx 1.2 \cdot 10^{-4}\ {}^o C$; $\tau_{eq} \approx 1.024(7) \cdot 10^5\ s$; $dt \approx 21\ s$