PHS3903 – Projet de simulation

Mini-devoir 2 – Hiver 2025

À remettre le Vendredi 31 Janvier avant 17h.

Directives

Répondre aux questions suivantes à l'aide du code Python fourni sur Moodle, auquel vous aurez apporté les modifications nécessaires. Justifier vos réponses avec clarté et concision. Vos tableaux et figures doivent être lisibles et présentés selon les règles de l'art.

Remettre un fichier en format Jupyter Notebook (.ipynb) en utilisant le gabarit fourni dans la boîte de dépôt Moodle.

Étude numérique d'un pendule simple amorti (20 points)

On étudie ici le mouvement d'un pendule simple amorti, formé d'une masse m suspendue par un câble tendu de longueur L. Le mouvement du pendule est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \beta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \tag{1}$$

où θ désigne la position angulaire du pendule par rapport à la verticale, β est la constante d'amortissement et g est le champ gravitationnel.

Les conditions initiales sont données par :

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) = \omega_0. \tag{3}$$

1 – Définir la méthode numérique

En utilisant un maillage avec un pas de temps Δt uniforme :

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

ainsi qu'une formule de différences finies centrée à trois points pour la dérivée seconde et une formule centrée à deux points pour la dérivée première :

(a) **[6 pts]** Montrer qu'on obtient la méthode d'Euler explicite suivante :

$$\theta_1 = \theta_0 + \left(1 - \frac{\beta\Delta t}{2}\right)\omega_0\Delta t - \left(\frac{g}{2L}\Delta t^2\right)\sin\theta_0 \tag{5}$$

$$\theta_{n+1} = \frac{4\theta_n - (2-\beta\Delta t)\theta_{n-1} - \left(\frac{2g}{L}\Delta t^2\right)\sin\theta_n}{2+\beta\Delta t}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

et spécifier son ordre de convergence.

2 – Choisir un pas de temps adéquat d'un point de vue physique

Il est important que le pas choisi permette de bien représenter les phénomènes physiques à simuler.

(b) **[2 pts]** Déterminer la ou les échelles de temps associées au mouvement du pendule en fonction des paramètres du problème, puis expliquer comment le pas Δt devrait être choisi pour que la simulation puisse décrire adéquatement la situation étudiée.

(c) **[2 pts]** Expliquer ce qui se passerait si vous choisissiez un pas de temps légèrement supérieur et largement supérieur à la valeur de stabilité déterminée.

3 – Implémenter la méthode numérique

Modifier le code fourni afin d'implémenter la méthode numérique (5)–(6), puis répondre aux questions suivantes pour le cas spécifique : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, $L = 100\,\mathrm{cm}$, $\beta = 0{,}1\,\mathrm{s^{-1}}$, $\theta_0 = \pi/6$ rad et $\omega_0 = 5\,\mathrm{rad/s}$.

(d) **[2 pts]** Choisir une valeur de pas de temps $\Delta t = \Delta t_0$ appropriée, puis tracer un graphique de $\theta(t)$ en fonction de t pour ce pas de temps.

(e) **[2 pts]** Calculer la position finale du pendule au temps $t_f = 10\,\mathrm{s}$ pour chacun des pas de temps suivants :

$$\Delta t \in \left\{ \Delta t_0, \frac{\Delta t_0}{2}, \frac{\Delta t_0}{4}, \frac{\Delta t_0}{8}, \frac{\Delta t_0}{16} \right\}. \tag{7}$$

Présenter vos résultats à l'aide d'un tableau.

4 – Analyser le comportement de l'erreur (convergence)

Le calcul numérique de l'ordre de convergence est une manière de montrer que la méthode a été programmée correctement, ce qui ajoute de la crédibilité aux résultats produits.

(f) **[4 pts]** À l'aide des résultats calculés en (c), tracer un graphique de l'erreur E sur la position finale du lien en fonction du pas de temps Δt, en utilisant des échelles appropriées pour les axes et discutez de ce choix.

Rappel. Une méthode numérique est d'ordre p si l'erreur se comporte comme :

$$E = O(\Delta t^p).$$

L'erreur exacte ne pouvant pas être calculée, on utilise la définition suivante de l'erreur :

$$E(\Delta t) = \left| \theta(t_f; \Delta t) - \theta\left(t_f; \frac{\Delta t}{2}\right) \right|,$$

qui consiste à calculer la différence absolue entre les résultats de deux simulations avec un pas Δt et un pas $\Delta t/2$.

(g) **[1 pts]** Calculer l'ordre de la méthode à partir du graphique produit.

(h) **[1 pts]** Déterminer l'effet du pas de temps Δt_0 choisi sur l'ordre que vous avez calculé.