Département de génie physique
Polytechnique Montréal

Mini-devoir 5

Remis le : 23 février 2024

Écrit par :

Juliette Chamberland (2133369)

Rafael Daigneault (2145688)

Dali Sullivan (2150627)

Projet de simulation

PHS3903

1. Choix de la méthode de Monte-Carlo

Une méthode de Monte-Carlo permet de générer au sein d'un espace à N dimensions un point. Supposons qu'il soit défini dans cet espace une certaine fonction f représentée dans cet espace à l'aide de N paramètres distincts. Cette fonction lie, par définition, différents points de l'espace de manière à former ce que l'on appelle alors une courbe. Par définition une intégration serait « l'aire » sous cette courbe. Cette notion devient plutôt difficile à évaluer au-delà de 2 ou 3 dimensions mais il est possible de généraliser en disant que la courbe permet de séparer l'espace en plusieurs régions. L'intégrale consiste donc en le « volume » en N dimensions de l'espace « sous la courbe ».

Considérant un grand nombre d'itérations par lesquels plusieurs points sont générés de telle sorte qu'ils couvrent à peu près l'entièreté d'une tranche d'espace considéré, il est possible d'évaluer l'intégrale dans cette tranche en prenant le rapport du nombre de points qui se retrouvent dans la région « sous la courbe » sur le nombre de points totaux couvrant toute la tranche d'espace.

De plus, les méthodes de Monte-Carlo pour l'intégration sont avantageuses pour le calcul d'intégrales à N dimensions lorsque N devient grand, puisque comparativement aux formules de quadratures, elles requièrent peu d'évaluations de la fonction. Par exemple, parmi les méthodes de quadrature, il y a la formule des points milieux, qui possède une erreur sur l'approximation de l'intégrale de l'ordre $O\left(\frac{1}{N^{\frac{2}{d}}}\right)$,où N est le nombre d'évaluations de la fonction à l'intérieure de l'intégrale et d est la dimension du système (Fakhereddine, 2013). On remarque alors que pour diviser l'ordre de l'erreur d'un facteur 2, le nombre d'évaluations de la fonction augmente exponentiellement avec la dimension du système. Autrement dit, le nombre d'évaluations augmente exponentiellement avec la dimension pour maintenir l'ordre de l'erreur constante. Cette proportionnalité avec l'exponentiel de la dimension est commune à toutes les autres méthodes de quadratures, ce qui rend leur utilisation peu pratique en dimension élevée. Les méthodes de Monte-Carlo, quant à elles, possèdent une erreur qui est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N}}$, et qui ne dépend donc pas de la dimension du système.

2. Calcul de volume

b) Pour le calcul des volumes moyens des N-sphères, pour N=3 et N=6, la moyenne des volumes de 100 essais a été prises pour différents nombres de points totaux (N_{tot}). L'incertitude relative a été aussi mesurée en divisant l'écart-type des volumes résultants des 100 essais par le volume moyen. Les résultats obtenus sont affichés dans le tableau suivant, le tableau 1.

Tableau 1 : Volume moyen et incertitude relative d'une N-sphère pour N= 3,6 avec différents nombres de points générés par essai pour 100 essais.

	N=3		N=6	
N_{tot}	**Volume**	**Incertitude relative (%)**	**Volume**	**Incertitude relative (%)**
100	4.1728	9.67261383	5.1456	36.64070177
200	4.2028	6.72347405	5.072	26.59401415
400	4.1646	4.06297126	5.1584	19.97730519
800	4.1733	3.34094829	5.2056	11.07408529
1600	4.1814	2.09017892	5.1916	9.25359539

3. Analyse de l'erreur

c) Pour quantifier la précision de la méthode de Monte-Carlo, nous avons calculé l'erreur relative du volume déterminé avec Monte-Carlo par rapport au volume théorique d'une sphère à N-dimension. La tendance de l'erreur relative en fonction du nombre de points évalués est présentée à la figure 1.

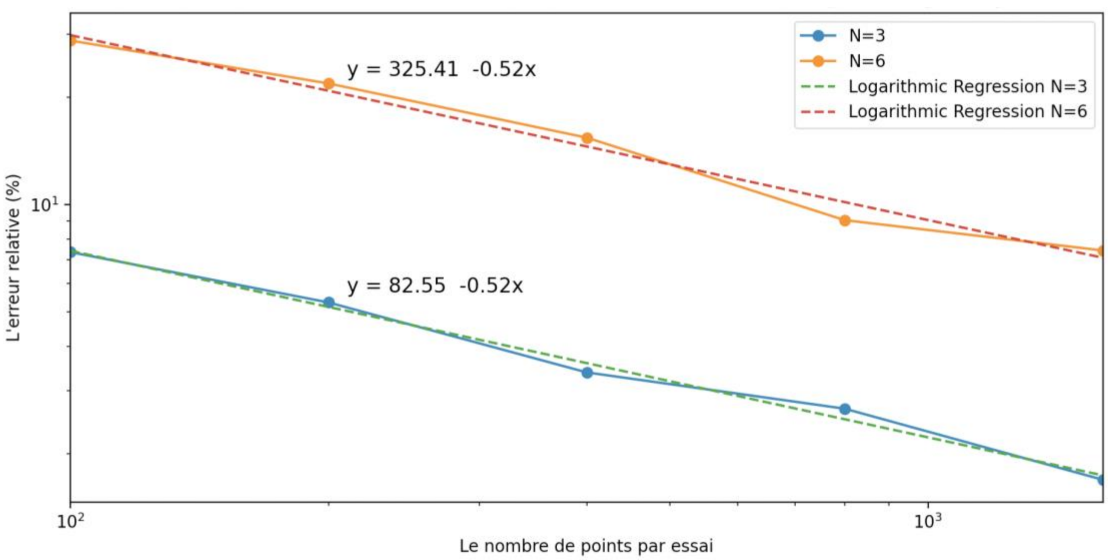

Figure 1 : L'erreur relative moyenne (%) sur le volume de la N-sphère calculé en fonction de N_{tot} pour chaque N-sphère.

Les volumes théoriques pour les N-sphères quand N=3 est 4.188790204786391 et quand N=6, 5.167712780049969. L'erreur relative de la figure 1 a été calculé en faisant la moyenne des erreurs relatives des 100 essais pour chaque N_{tot}. Les valeurs des erreurs relatives sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 2 : Erreur relative moyenne (%) du calcul des N-sphères

N_{tot}	N=3	N=6
100	7.34760609	28.82457562
200	5.30752243	21.84574843
400	3.37829402	15.39382208
800	2.67199335	9.03179517
1600	1.68799174	7.42599815

d) En observant la figure 1, on remarque que l'erreur diminue avec le nombre de points utilisés et ce de la même façon pour la 3-sphère que pour la 6-sphère. En effet, en traçant en échelle logarithmique, il est possible de faire ressortir l'ordre de convergence qui consiste en la pente des courbes, qu'on estime être à peu près la même peu importe la dimension considérée. Afin de la faire ressortir, on peut faire la régression linéaire des courbes et on obtient alors pour le cas en 3 dimensions - 0.5234055 et -0.51875529 pour le cas en 6 dimensions.

e)

- Comme l'erreur pour une méthode de Monte-Carlo est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{N_{tot}}}$, cela signifie que l'on s'attend donc à ce que l'ordre mesuré soit de $-\frac{1}{2}$.

- La précision des résultats n'est pas la même pour la 3-sphère et la 6-sphère. En effet, l'incertitude relative de la 6-sphère varie entre 9 % et 33 %, en fonction du nombre de points évalués, tandis que l'incertitude relative de la 3-sphère varie de 2 % à 9 %. Similairement, l'erreur relative varie de 1.68 % à 7.35 % pour la 3-sphère, et de 9.25 % à 36.6 % pour la 6-sphère. Cette différence de précision est attendue puisqu'en augmentant la dimension de la sphère, le volume de la sphère augmente. Alors pour une même quantité de points évalués, la concentration des points est moins grande lorsque la dimension augmente, et on peut donc s'attendre à ce que la distribution de points soit moins représentative du système étudié.

- L'incertitude relative calculée en b) est assez similaire à l'erreur relative calculée en c) pour les deux N-sphères. En effet, les valeurs des incertitudes sont légèrement supérieures aux erreurs relatives, mais la tendance décroissante en fonction du nombre de points évalués est identique.

Bibliographie

Fakhereddine, R. (2013). *Méthodes de Monte Carlo stratifiées pour l'intégration et la simulation numériques* [Thèse de doctorat, Université de Grenoble].