

Module « Optimisation et contrôle »



Projet sur les réseaux de distribution d'eau

Pierre Carpentier

`pierre.carpentier@ensta-paristech.fr`

Année 2017/2018

Cours : `cermics.enpc.fr/~jpc/optimisation.html`

Projet : `perso.ensta-paristech.fr/~pcarpent/TP_Reseau/ENPC/`

Objectif et modalités du projet

Prendre prétexte d'un **problème d'ingénierie** (lié à l'hydraulique urbaine) pour faire apparaître un **problème d'optimisation**, puis mettre en œuvre sur ce problème les différentes **approches** et les différents **algorithmes** présentés dans le cours d'optimisation.

Dans la “vraie vie”, il est rare d'écrire une méthode d'optimisation comme le gradient conjugué ou quasi-Newton, car c'est un travail de professionnel. **Pour ce projet, vous êtes les professionnels. . .**

Travail en binôme.

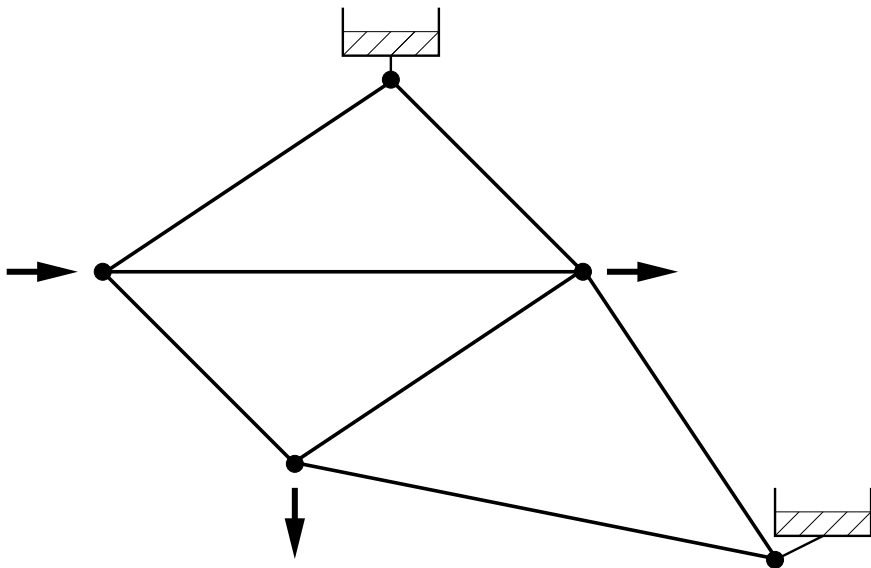
Langage de programmation : SCICOSLAB

Contrôle continu pour l'évaluation du projet.

Comptes rendus à l'issue des 1-ère et 3-ème séances.

Rapport final à l'issue de la dernière séance.

Schématique d'un réseau de distribution d'eau



Variables décrivant le réseau et notations

Tailles du réseau.

- n arcs (canalisations du réseau),
- m nœuds : m_r réservoirs, m_d consommateurs ($m = m_r + m_d$).

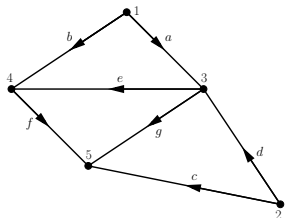
Variables hydrauliques du réseau.

- flux aux nœuds : $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ à calculer, connus.
- pressions aux nœuds : $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ connues, à calculer.
- résistances des arcs : $r \in \mathbb{R}^n$ connues.
- débits dans les arcs : $q \in \mathbb{R}^n$ à calculer.

⇒ $(m + n)$ inconnues à déterminer.

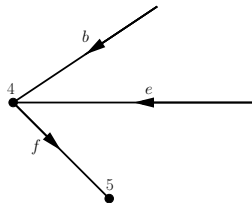
Matrice d'incidence et équations d'équilibre du réseau

Matrice d'incidence nœuds–arcs.



$$A = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Équations décrivant l'état d'équilibre.



$$\text{Noeud } 4 : q_b + q_e - q_f = f_4.$$

$$\rightsquigarrow Aq - f = 0.$$

$$\text{Arc } f : p_4 - p_5 = r_f q_f |q_f|.$$

$$\rightsquigarrow A^T p + r \bullet q \bullet |q| = 0.$$

$$\rightsquigarrow (m + n) \text{ équations.}$$

Problème d'optimisation associé à l'équilibre

Ces équations d'équilibre sont en fait les **conditions d'optimalité** du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(q \in \mathbb{R}^n, f_r \in \mathbb{R}^{m_r})} \quad \frac{1}{3} \left\langle q, r \bullet q \bullet |q| \right\rangle + \left\langle p_r, f_r \right\rangle ,$$

sous la contrainte :

$$Aq - f = 0 ,$$

qui s'écrit après réduction (par élimination de variables) comme un **problème d'optimisation sans contrainte** :

$$\min_{q_c \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \quad \frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + Bq_c, r \bullet (q^{(0)} + Bq_c) \bullet |q^{(0)} + Bq_c| \right\rangle \\ + \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_c) \right\rangle .$$

C'est ce problème que l'on va résoudre (pour commencer...) !

But du projet

Écrire des **méthodes génériques d'optimisation** (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un **oracle** associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + Bq_c, r \bullet (q^{(0)} + Bq_c) \bullet |q^{(0)} + Bq_c| \right\rangle + \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_c) \right\rangle.$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

$$[F, G, H] = \text{Oracle}(q_c, \text{ind}).$$

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

$$[F_{\text{opt}}, q_{\text{opt}}, G_{\text{opt}}] = \text{Minimise}(\text{Oracle}, q_{\text{ini}}).$$

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d .

L'algorithme du gradient à pas fixe

```
function [Fopt,qopt,Gopt]=Gradient_F(Oracle,qini)

    iter = 5000 ; tol = 0.000001 ; alpha = 0.0005; qc = qini;

    for k = 1:iter

        [F,G] = Oracle(qc,ind);
        if norm(G) <= tol then
            kstar = k; break
        end
        qc = qc - (alpha*G);

        logG = [ logG ; log10(norm(G)) ]; Cout = [ Cout ; F ];

    end

    Fopt = F; qopt = x; Gopt = G;

    Visualg(logG,Cout);

endfunction
```


Enchaînement des tâches : Moniteur_Skel.sce

```
// Donnees du probleme
exec('Probleme_R.sce'); exec('Structures_R.sce');

// Fonction de visualisation du deroulement de l'algorithme
exec('Visualg.sci');

// Fonctions de verification des resultats
exec('HydrauliqueP.sci'); exec('Verification.sci');

// Oracle et algorithme d'optimisation
exec('Oracle.sci'); exec('Gradient_F.sci');

// Optimisation
qini = 0.1 * rand(n-md,1);
[Fopt,qopt,Gopt] = Gradient_F(Oracle,qini);

// Verification des resultats
[q,z,f,p] = HydrauliqueP(qopt); Verification(q,z,f,p);
```

Variables disponibles dans l'environnement SCILAB

Description de la variable	Nom math.	Variable info.	Espace
Nombre total d'arcs	n	n	\mathbb{N}
Nombre total de nœuds	m	m	\mathbb{N}
Nombre de nœuds de demande	m_d	md	\mathbb{N}
Nombre de nœuds réservoir	m_r	mr	\mathbb{N}
Flux aux nœuds de demande	f_d	fd	$\mathcal{M}(m_d, 1)$
Pressions aux nœuds réservoir	p_r	pr	$\mathcal{M}(m_r, 1)$
Résistances des arcs	r	r	$\mathcal{M}(n, 1)$
Vecteur initial des débits	$q^{(0)}$	q0	$\mathcal{M}(n, 1)$
Matrice d'incidence nœuds-arcs	A	A	$\mathcal{M}(m, n)$
Sous-matrice "demande" de A	A_d	Ad	$\mathcal{M}(m_d, n)$
Sous-matrice "réservoir" de A	A_r	Ar	$\mathcal{M}(m_r, n)$
Sous-matrice "arbre" de A_d	$A_{d,T}$	AdT	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Sous matrice "coarbre" de A_d	$A_{d,C}$	AdC	$\mathcal{M}(m_d, n - m_d)$
Matrice inverse de $A_{d,T}$		AdI	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Matrice d'incidence arcs-cycles	B	B	$\mathcal{M}(n, n - m_d)$

Attention : en SCILAB, les variables sont **globales** !

① 02 mars (09h45 — 11h15)

↪ écriture de l'oracle

② 09 mars (09h45 — 11h15)

↪ recherche linéaire

③ 16 mars (09h45 — 11h15)

↪ algorithmes d'optimisation

④ 13 avril (08h30 — 11h15)

↪ dualité

Programme de travail de cette première séance

① Lire attentivement le document descriptif du TP ...

② Récupérer les documents et les codes SCILAB du TP :

http://perso.ensta-paristech.fr/~pcarpent/TP_Reseau/ENPC/

③ Calculer analytiquement le gradient de la fonction :

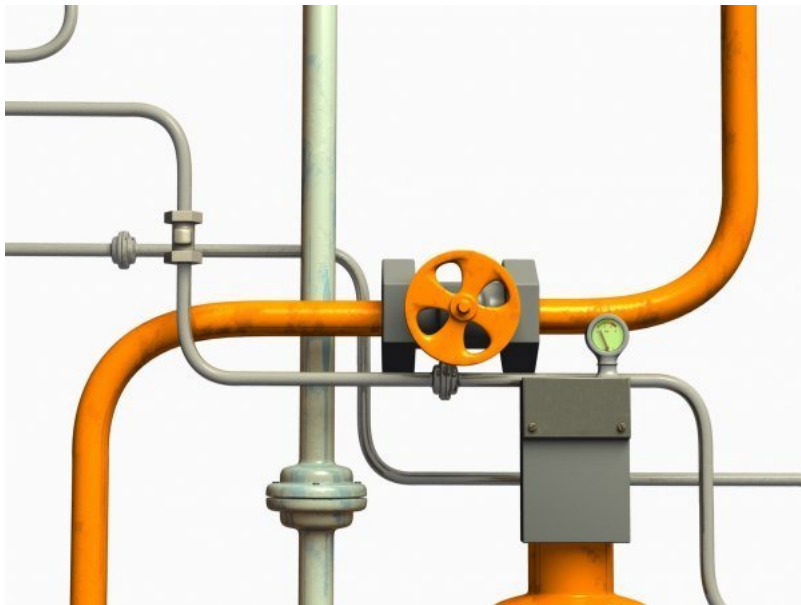
$$F : \mathbb{R}^{n-m_d} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q_c \mapsto \frac{1}{3} \left\langle q^{(0)} + Bq_c, r \bullet (q^{(0)} + Bq_c) \bullet |q^{(0)} + Bq_c| \right\rangle + \left\langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_c) \right\rangle.$$

④ Écrire un oracle codant les expressions obtenues (en SCILAB), et tester cet oracle avec l'algorithme du gradient à pas fixe.

Pour la **prochaine séance** : avoir un oracle en état de marche !

Ce projet. . .



Le vrai problème...

