

# **Abordant la funció de correlació femtoscòpica $N\Omega$ fent servir potencials efectius barió-barió**

TREBALL DE FI DE MÀSTER

Marc Piquer i Méndez

Tutors: Dra. Assumpta Parreño García,  
Dr. Juan Torres-Rincon.



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA



UNIVERSIDAD  
DE SEVILLA  
1505

12 de juliol de 2024

## Resum

S'ha generat una versió actualitzada del potencial  $N\Omega$  per a interaccions a baixa energia basada en un plantejament en teoria de camp efectiu a ordre principal, ajustant els paràmetres per aproximar un potencial conegut de CDQ reticular per al canal  ${}^5S_2 \rightarrow {}^5S_2$ . Aquest potencial, altres potencials basats en parametritzacions diverses i l'esmentat potencial de CDQ reticular han estat emprats per a resoldre l'equació de Schrödinger numèricament, i s'ha obtingut les funcions d'ona de dispersió per a diversos valors del moment relatiu. Fent servir aquestes funcions d'ona, s'ha calculat la funció de correlació femtoscòpica  $N\Omega$  i comparat els resultats per al cas  $p\Omega$  amb els publicats per la col·laboració ALICE. Addicionalment, es preveu estats lligats per al potencial no només per a l'estat  ${}^5S_2$  sinó també per a l'estat  ${}^3S_1$ .

## Agraïments

Vull expressar la meva gratitud als meus tutors, Assumpta Parreño García i Juan Torres-Rincon, per la seva paciència i bon consell al llarg de tot el curs acadèmic. El seu nivell de dedicació ha estat molt més alt del que mai els podria haver demanat. També els vull agrair que em suggerissin el tema per a aquest treball, sobre el qual no tenia cap coneixement previ i que ha demostrat ser molt interessant d'estudiar.

En aquest any difícil, també vull agrair a la meva família el seu suport durant tota la meva vida acadèmica. Fins i tot quan tenien dubtes, sempre han respectat les meves decisions i m'han donat la millor educació possible.

També cal estendre un reconeixement per als meus amics. Com sempre, estic agraït a aquells que sempre hi han estat i amb qui sé que sempre puc comptar. Un agraïment especial va, aquest cop, als amics que m'han ajudat a poder acabar aquest treball, el suport dels quals ha estat crucial. Aquest curs, en particular, també vull donar gràcies als meus col·legues del màster: m'han ajudat molt en les meves dificultats acadèmiques i han fet tota l'experiència molt més agradable.

Per últim, però no menys important, vull agrair a l'Institut de Ciències del Cosmos (ICCUB) el seu suport econòmic per a aquest màster.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Derivació del potencial <math>N\Omega</math> en TCE</b>	<b>3</b>
2.1	Diagrames $N\Omega$ a ordre principal . . . . .	3
2.1.1	Diagrames d'intercanvi d'un mesó . . . . .	3
2.1.2	Termes de contacte . . . . .	5
2.2	Vèrtexs $N\Omega$ . . . . .	6
2.2.1	Acoblament $p\eta\bar{p}$ . . . . .	6
2.2.2	Acoblament $\Omega\eta\bar{\Omega}$ . . . . .	10
2.3	Derivació del potencial $p\Omega \rightarrow p\Omega$ a ordre principal . . . . .	11
2.3.1	Potencial de contacte . . . . .	11
2.3.2	Potencial d'intercanvi de $\eta$ . . . . .	11
2.3.3	Elements de matriu del terme tensorial i ones parcials . . . . .	14
2.3.4	Potencial d'intercanvi de $\sigma$ . . . . .	16
2.3.5	Factor de forma per als potencials d'intercanvi . . . . .	18
2.4	Parametritzacions del potencial . . . . .	19
2.4.1	Ajustament del potencial ${}^5S_2$ . . . . .	19
2.4.2	Estats lligats ${}^5S_2$ . . . . .	22
2.4.3	Potencial i estats lligats ${}^3S_1$ . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Dispersió pel potencial <math>N\Omega</math></b>	<b>27</b>
3.1	Dispersió per potencials locals . . . . .	27
3.1.1	Expansió en ones parcials . . . . .	28
3.1.2	Desfasaments . . . . .	29
3.2	Dispersió $n\Omega$ . . . . .	30
3.2.1	Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^5S_2$ . . . . .	30
3.2.2	Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^3S_1$ . . . . .	31
3.3	Dispersió sota el potencial de Coulomb . . . . .	32
3.3.1	Solució analítica per al potencial de Coulomb . . . . .	32
3.3.2	Expansió en ones parcials per al potencial de Coulomb . . . . .	33
3.3.3	Desfasaments de Coulomb . . . . .	35
3.4	Dispersió $p\Omega$ . . . . .	35
3.4.1	Funcions d'ona de dispersió $p\Omega$ al canal ${}^5S_2$ . . . . .	36
3.4.2	Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^3S_1$ . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Femtoscòpia de la interacció <math>N\Omega</math></b>	<b>39</b>
4.1	Generalitats sobre funcions de correlació . . . . .	39
4.1.1	Reducció de la fórmula de Koonin-Pratt per al cas sense Coulomb . . . . .	40
4.1.2	Reduction of the Koonin-Pratt formula for the Coulomb case . . . . .	41
4.2	Funcions de correlació de la interacció $N\Omega$ . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Sumari, conclusions i panorama</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Apèndix: Descripció dels codis</b>	<b>47</b>
A.1	Estats lligats . . . . .	47
A.2	Estats de dispersió i funcions de correlació . . . . .	47

# 1 Introducció

Quan s'estudia la interacció hadró-hadró, dues interaccions fonamentals juguen un paper important: la interacció electromagnètica i la interacció forta. La primera és ben entesa i descrita pel potencial de Coulomb, mentre que la segona és molt més difícil de tractar. La teoria fonamental de la interacció forta, la cromodinàmica quàntica (CDQ), proveeix una descripció precisa del seu comportament a l'escala dels quarks i els gluons, però és molt difícil obtenir la interacció barió-barió fent-la servir.

Mentre que els fenòmens a altes energies es poden descriure amb un mètode pertorbatiu a través de la llibertat asimptòtica, aquesta tècnica no funciona a l'escala de la interacció barió-barió a baixa energia. En aquest règim, el mètode més conegut d'afrontar el problema consisteix en regularitzar la teoria formulant-la en un espai-temps discret, cosa que naturalment introdueix un truncament, i després extrapolat els resultats a espai nul del reticle. Aquesta formulació es coneix com a CDQ reticular, i, tot i que és computacionalment molt exigent, és coneguda per donar resultats molt precisos.

Una altra opció comú per estudiar la CDQ al règim no pertorbatiu és el que es coneix com a teoria de camp efectiu (TCE). En aquest plantejament, es construeix una interacció efectiva adaptada als graus de llibertat naturals del sistema, els hadrons. Per a barions i mesons lleugers, un tal mètode és la teoria de perturbacions quiral (TP $\chi$ ). En aquesta teoria, es descriu els acoblaments mitjançant diagrames, que s'organitza segons l'ordre quiral  $\nu$  del seu moment, usant la fórmula de comptatge d'ordre de Weinberg [Wei90],

$$\nu = 2 + 2L - B + \sum_i V_i(d_i + b_i/2 - 2), \quad (1.1)$$

on  $L$  és el nombre de bucles,  $B$  és el nombre de camps bariònics entrants i per als  $V_i$  vèrtexs de tipus  $i$  hi ha  $d_i$  derivades i  $b_i$  línies bariòniques internes. S'anomenem ordre principal (OP) l'expansió fins a  $\nu = 0$ .

Pel què fa als acoblaments a cada diagrama, s'usa un lagrangia adaptat als graus de llibertat rellevants i simetries del sistema. Es tindrà diferents estructures operacionals, cada una de les quals apareixerà al lagrangia amb una constant de baixa energia associada. Llavors, s'usarà aquest lagrangia per descriure els vèrtexs del diagrama.

A banda dels hadrons fets amb només quarks amunt i avall, els hadrons més lleugers són els que contenen algun quark estrany, anomenats hiperons. D'entre ells, degut al seu contingut, el més pesant és el barió  $\Omega$ , isoescalar i amb  $J^\pi = 3/2^+$ , consistent en tres quarks estranys. La interacció d'aquest barió amb nucleons, la interacció  $N\Omega$ , serà el tema d'aquest treball.

Els hiperons no són estables, i decauen a l'espai lliure principalment per processos d'interacció lliures. Tanmateix, sistemes lligats de nucleons i un (o més) hiperons poden ser produïts experimentalment [SD+21] amb temps de vida al voltant de  $10^{-10}$  s. Afegir un o més hiperons a un nucli generalment en redueix la mida, en un efecte "de cola". Per exemple,  $N\Omega$  és un candidat per a dibarió (això és, un estat lligat amb dos barions). Un dels potencials d'interacció, del qual farem un ús extensiu, és un que resulta d'un ajustament a un potencial de CDQ reticular al canal  ${}^5S_2 \rightarrow {}^5S_2$  obtingut per la col·laboració HAL QCD [IA+19] que, com es veurà, admet, en efecte, un estat lligat. Ara bé, és important notar que tal estat no s'ha trobat encara experimentalment.

Pel què fa a l'estudi de la interacció, el mètode habitual per a la interacció hadró-hadró fa servir experiments de dispersió. Aquests experiments esdevenen més i més difícils quan les partícules involucrades no són estables, com és el cas del barió  $\Omega$ , ja que és notablement difícil preparar un feix de partícules. Per tant, hi ha interès en seguir un plantejament alternatiu.

En aquest sentit, s'ha observat que l'estudi de la funció de correlació femtoscòpica dona bons resultats. Les característiques de la interacció es traslladen a la forma d'una funció  $C(\vec{k})$  del moment relatiu, que també es pot obtenir experimentalment en certes col·lisions segons [FMV21]

$$C_{\text{exp}}(\vec{k}) = \xi(\vec{k}) \frac{N(\vec{k})}{N_{\text{ref}}(\vec{k})}, \quad (1.2)$$

on  $N$  és la distribució en moments dels parells produïts en el mateix esdeveniment,  $N_{\text{ref}}$  es la distribució

obtinguda combinant partícules produïdes en col·lisions diferents i  $\xi$  es una correcció deguda a efectes experimentals.

Alguns resultats d'interès han estat obtinguts seguint aquest mètode per la col·laboració ALIDE fent servir col·lisions pp [ALI20] i per la col·laboració STAR fent servir col·lisions AuAu [STA19].

La funció de correlació es pot calcular des de la interacció fent servir múltiples mètodes. En el que ens enfocarem consisteix en resoldre l'equació de Schrödinger numèricament per a un potencial i moment  $\vec{k}$  donats i llavors obtenir el valor  $C(\vec{k})$  en aquell punt fent servir la fórmula de Koonin-Pratt

$$C(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} S(\vec{r}) |\psi(\vec{r}, \vec{k})|^2 d\vec{r}. \quad (1.3)$$

A l'equació prèvia,  $\psi$  és la funció d'ona de dispersió amb moment  $\vec{k}$  i  $S(\vec{r})$ , coneguda com a funció font, és una densitat de probabilitat sobre  $\mathbb{R}^3$  que modelitza la producció d'hadró i, per tant, conté informació sobre la geometria del sistema. Com que compararem la funció de correlació  $p\Omega$  amb els resultats de les col·lisions pp de la col·laboració [ALI20], usarem la mateixa funció font d'allà; és a dir, una gaussiana de radi  $r_0 = 0,95$  fm.

Per a la funció de correlació, doncs, necessitem les funcions d'ona de dispersió. Com que treballarem amb un potencial amb simetria esfèrica, reduïrem l'equació de Schrödinger a l'equació radial

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\mu Z_1 Z_2 \alpha}{r} - 2\mu \hat{V}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0, \quad (1.4)$$

on  $u_l$  són les funcions d'ona radials reduïdes,  $\mu$  és la massa reduïda del sistema i  $Z_1, Z_2$  són les càrregues de les partícules. Resoldre aquesta equació numèricament donarà la informació que necessitem per al càlcul de la funció de correlació.

Aquest càlcul consistirà en tres parts: una on es deriva i discuteix diversos potencials, una on es calcula les funcions d'ona de dispersió d'aquests potencials, i una on es calcula les funcions de correlació. Tots els càlculs numèrics es faran amb un codi escrit en Fortran 90.

A banda de l'interès fonamental que suscita, entendre la interacció  $N\Omega$  és rellevant per a l'astrofísica, ja que les interaccions hiperó-nucleó poden tenir un paper important a les estrelles de neutrons, perquè els hiperons poden ser en quantitats suficientment grans per afectar la seva equació d'estat, per a la qual necessitem entendre les interaccions entre ells i amb nucleons [TF20].

Totes les dades dibuixades a les figures d'aquest treball es poden trobar al repositori [Piq24].

## 2 Derivació del potencial $N\Omega$ en TCE

Com hem comentat, la primera tasca que hem de dur a terme és obtenir un potencial per a la interacció  $N\Omega$ . Procedirem amb un plantejament efectiu i obtindrem les seves constants ajustant al potencial de CDQ reticular de [IA+19], que està calculat per a la interacció  ${}^5S_2 \rightarrow {}^5S_2$ . Llavors, aquestes constants seran les usades per estudiar altres canals rellevants.

### 2.1 Diagrames $N\Omega$ a ordre principal

Com s'ha dit a la introducció, per estudiar la interacció  $N\Omega$  es pot organitzar els diagrames de Feynman segons el seu ordre quiral  $\nu$ , donat per la fórmula de comptatge d'ordre de Weinberg (1.1). Restarem al cas OP,  $\nu = 0$ , donat pels diagrames d'intercanvi d'un mesó ( $b_i = 2, d_i = 1$ ) i els termes de contacte ( $b_i = 4, d_i = 0$ ).

#### 2.1.1 Diagrames d'intercanvi d'un mesó

Primer, estudiarem els diagrames d'intercanvi d'un mesó. A cada un d'ells, anomenem 1 el vèrtex del costat esquerre i 2 el vèrtex del costat dret. Escrivim  $I_n$  i  $J_n$  (amb  $n \in \{1, 2\}$ ) l'isospin i spin finals del barió sortint del node  $n$ . Les propietats físiques rellevants dels barions i mesons que participen als diagrames són a la taula 1.

	p	n	$\Lambda$	$\Sigma^+$	$\Sigma^0$	$\Sigma^-$	$\Xi^0$	$\Xi^-$
Contingut de quarks	uud	udd	uds	uus	uds	dds	uss	dss
$I$	1/2	1/2	0	1	1	1	1/2	1/2

(a) Barions de l'octet ( $J^\pi = 1/2^+$ ).

	$\Sigma^{*+}$	$\Sigma^{*0}$	$\Sigma^{*-}$	$\Xi^{*0}$	$\Xi^{*-}$	$\Omega^-$
Contingut de quarks	uus	uds	dds	uss	dss	sss
$I$	1	1	1	1/2	1/2	0

(b) Barions del decuplet ( $J^\pi = 3/2^+$ ) amb estranyesa no nul·la.

	$\eta$	$\pi^-$	$\pi^0$	$\pi^+$	$K^-$	$K^0$	$\bar{K}^0$	$K^+$
Contingut de quarks	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$d\bar{u}$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$u\bar{d}$	$s\bar{u}$	$d\bar{s}$	$s\bar{d}$	$u\bar{s}$
$I$	0	1	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2

(c) Mesons de l'octet ( $J^\pi = 0^-$ ).

Taula 1: Dades de les partícules que necessitarem per analitzar els diagrames.

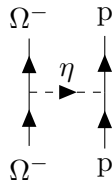


Figura 1: Diagrama d'intercanvi d'un mesó  $\eta$ .

L'intercanvi d'un mesó  $\eta$  és l'únic que satisfà la conservació d'isospin, càrrega i estranyesa a tots dos vèrtexs del diagrama, dibuixat a la figura 1.

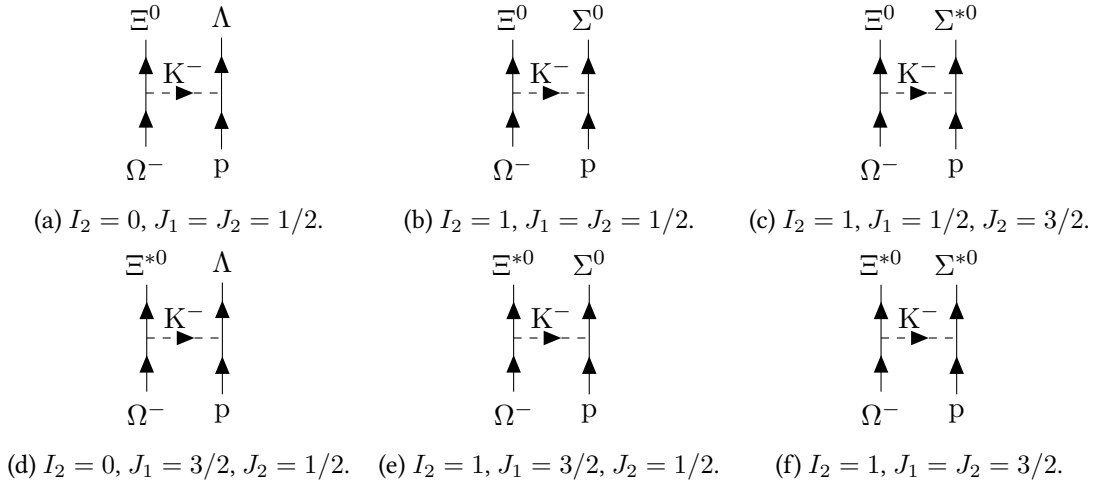


Figura 2: Casos d'intercanvi d'un mesó  $K^-$ . En tots ells tenim  $I_1 = 1/2$ .

El segon cas correspon a l'intercanvi d'un mesó  $K^-$ , que té contingut de quarks  $s\bar{u}$ . El mesó és aquest per força ja que, al node 1, tenim  $\Delta S_1 = \Delta Q_1 = 1$ , cosa que elimina tots els altres mesons de l'octet. Els diferents resultats sorgeixen dels diversos aboblaments d'isospin i de moment angular, que estan escrits sota cada diagrama.

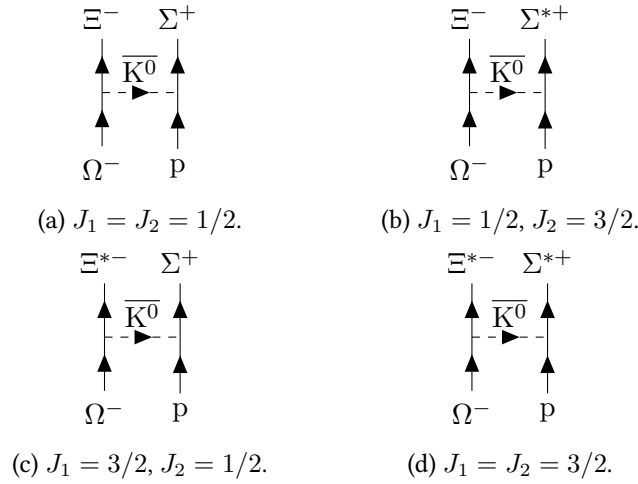


Figura 3: Casos d'intercanvi d'un mesó  $\bar{K}^0$ . En tots ells tenim  $I_1 = 1/2, I_2 = 1$ .

El tercer cas correspon a l'intercanvi del mesó  $\bar{K}^0$ , que té contingut de quarks  $s\bar{d}$ . Ha de ser aquest mesó pel fet que, al node 1, tenim  $\Delta S_1 = 1, \Delta Q_1 = 0$ , cosa que elimina tots els altres mesons de l'octet.

El contingut de quarks d'un barió p (un protó) és uud, mentre que el contingut del barió  $\Omega$  és sss. En un model d'intercanvi d'un mesó, els estats resultants poden intercanviar com a màxim un quark, depenent del mesó, cosa que assegura que hem escrit tots els diagrames possibles. El mateix raonament és vàlid per al cas de neutrons de sota.

La única diferència al cas dels neutrons és deguda al fet que el contingut de quarks de n és udd, de manera que els estats resultants (i els mesons intercanviats) tindran contingut de quarks diferent.



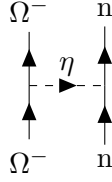


Figura 4: Diagrama d'intercanvi d'un mesó  $\eta$ .

El primer cas és idèntic al del protó: és l'intercanvi del mesó  $\eta$ , que preserva ambdós barions.

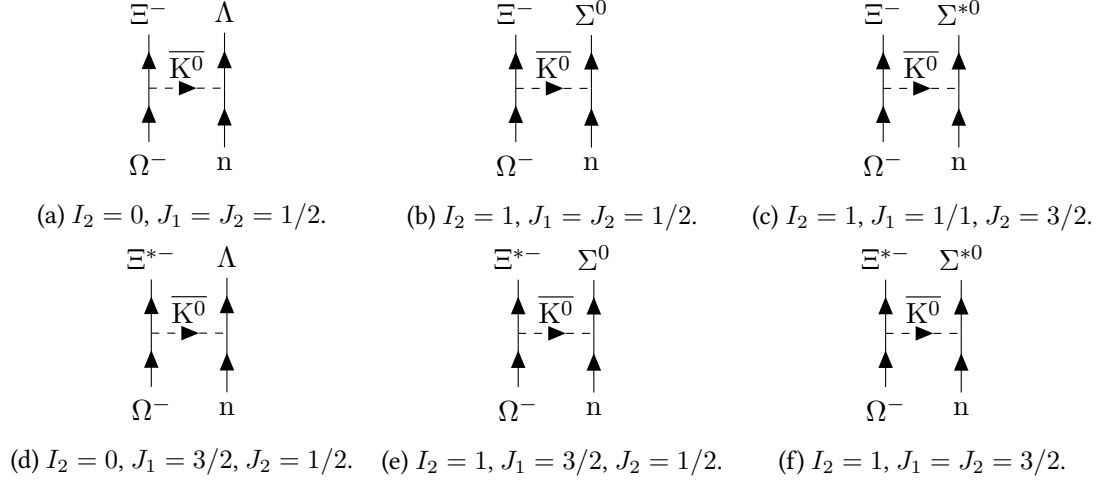


Figura 5: Casos d'intercanvi d'un mesó  $\overline{K}^0$ . En tots ells tenim  $I_1 = 1/2$ .

El segon cas ara correspon a l'intercanvi d'un mesó  $\overline{K}^0$ , que té contingut de quarks  $s\bar{d}$ . Aquests i els següents queden girats respecte al cas degut a la diferència d'un quark que apareix a tots els productes.

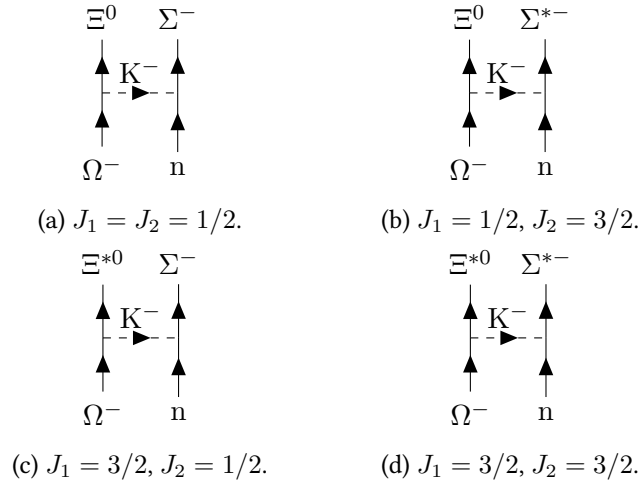


Figura 6: Casos d'intercanvi d'un mesó  $K^-$ . En tots ells tenim  $I_1 = 1/2, I_2 = 1$ .

El tercer cas correspon a l'intercanvi d'un mesó  $K^-$ , que té contingut de quarks  $s\bar{u}$ .

### 2.1.2 Termes de contacte

Com hem discutit a les pàgines anteriors, les lleis de conservació d'imposen per determinar els termes de contacte que participen a la TCE, dibuixats a la figura 7. En aquest treball, només considerarem el canal  $N\Omega \rightarrow N\Omega$ .

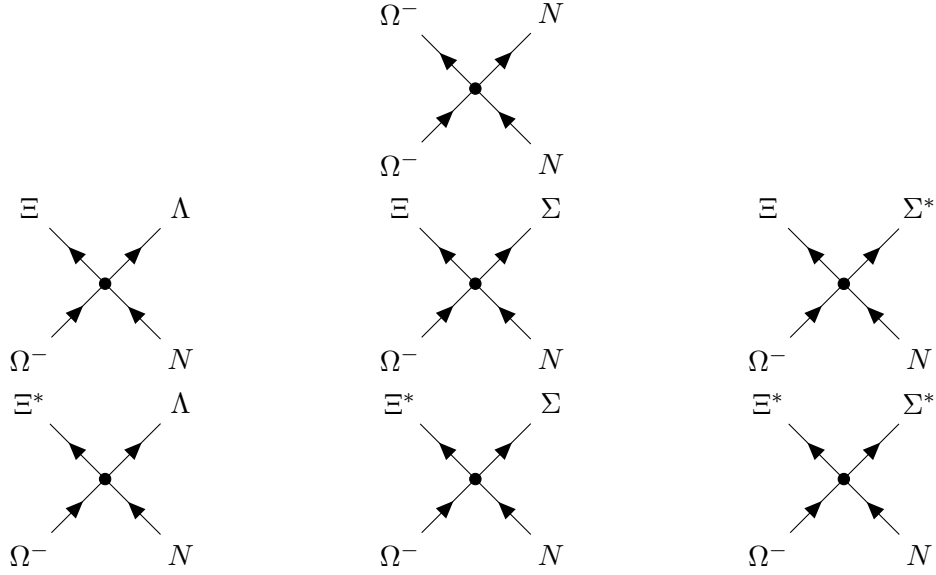


Figura 7: Diagrames de contacte a considerar a la interacció.

La càrrega dels barions sortints s'ha de prendre en correspondència al nucleó entrant, de la mateixa manera que apareixien al cas d'intercanvi d'un mesó. Els moments angulars i isospins també són completament anàlegs.

## 2.2 Vèrtexs $N\Omega$

Havent estudiat els diagrames que contribueixen a la interacció  $N\Omega$  a ordre principal, calculem els vèrtexs fent servir el lagrangiana que correspon a cada cas. L'objectiu final és calcular el potencial  $p\Omega \rightarrow p\Omega$  a ordre principal. Per tant, necessitem estudiar els acoblaments  $p\eta\bar{p}$  i  $\Omega\eta\bar{\Omega}$ .

### 2.2.1 Acoblament $p\eta\bar{p}$

El lagrangiana que descriu la interacció forta a l'octet ve donat per [OR97, Pic95]

$$\mathcal{L}_O = \text{tr}[\bar{B}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_B)B] + D \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 \{u_\mu, B\}] + F \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 [u_\mu, B]], \quad (2.1)$$

on  $m_B$  és la massa del barió i  $D$  i  $F$  són constants de baixa energia. Podem expandir la derivada covariant com a  $\nabla_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B]$ , cosa que ens deixa amb

$$\mathcal{L}_O = i \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \partial_\mu B] + i \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu [\Gamma_\mu, B]] - m_B \text{tr}[\bar{B}B] + D\gamma^\mu \gamma_5 \text{tr}[\bar{B}\{u_\mu, B\}] + F\gamma^\mu \gamma_5 \text{tr}[\bar{B}[u_\mu, B]]. \quad (2.2)$$

A les dues darreres expressions, tenim corrents vector i vector axial

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= (u\partial_\mu u^\dagger + u^\dagger\partial_\mu u)/2, \\ u_\mu &= i(u\partial_\mu u^\dagger - u^\dagger\partial_\mu u)/2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

amb l'operador  $u$  definit per  $u^2 = \exp(i\sqrt{2}\phi/f)$  i la constant de decaïment mesònic  $f$ . Al model d'intercanvi d'un mesó, podem expandir  $u$  fins a primer ordre en  $\phi$ , com a

$$u \simeq 1 + \frac{i}{\sqrt{2}f}\phi, \quad (2.4)$$

cosa que ens permet reescriure els corrents

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= 0, \\ u_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}f}\partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Això ens deixa convertir el lagrangian en

$$\mathcal{L}_O = i \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \partial_\mu B] - m_B \text{tr}[\bar{B}B] + \frac{D}{\sqrt{2}f} \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 \{\partial_\mu \phi, B\}] + \frac{F}{\sqrt{2}f} \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 [\partial_\mu \phi, B]]. \quad (2.6)$$

Les matrius de barions i mesons a l'octet a l'estat fonamental són

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}, \\ \bar{B} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} \end{pmatrix}, \\ \phi &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

El primer exemple que mirarem és el vèrtex  $p\eta\bar{p}$ , que apareix al primer dels diagrames del protó. Per a aquest cas, tenim

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{B} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{p} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -2\eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

El primer terme al lagrangian el terme cinètic, es pot calcular com segueix,

$$\begin{aligned} i \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \partial_\mu B] &= i \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_\mu p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= i \gamma^\mu \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}\gamma^\mu \partial_\mu p \end{pmatrix} \\ &= i \bar{p}\gamma^\mu \partial_\mu p. \end{aligned} \quad (2.9)$$

El càlcul del terme de massa és quasi idèntic,

$$\begin{aligned} -M_B \text{tr}[\bar{B}B] &= -M_B \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -M_B \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}p \end{pmatrix} \\ &= -M_B \bar{p}p. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pel què fa a la reta de termes, necessitem el commutador i l'anticommutador de  $\partial_\mu \phi$  i  $B$ . Per tant, necessitem els productes

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \phi)B &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \partial_\mu \eta & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\mu \eta & 0 \\ 0 & 0 & -2\partial_\mu \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\partial_\mu \eta)p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B\partial_\mu \phi &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \eta & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\mu \eta & 0 \\ 0 & 0 & -2\partial_\mu \eta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(\partial_\mu \eta)p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

D'aquí, obtenim els següents dos termes: l'acoblat per  $D$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\sqrt{2}f} \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 \{\partial_\mu \phi, B\}] &= \frac{-D}{\sqrt{3}f} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\partial_\mu \eta)p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{-D}{2\sqrt{3}f} \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p \end{pmatrix} \\
&= \frac{-D}{2\sqrt{3}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

i l'acoblat per  $F$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{F}{\sqrt{2}f} \text{tr}[\bar{B}\gamma^\mu \gamma_5 [\partial_\mu \phi, B]] &= \frac{\sqrt{3}F}{2f} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\partial_\mu \eta)p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}F}{2f} \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{3}F}{2f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Afegint tots els termes, obtenim el lagrangian per a aquest vèrtex,

$$\mathcal{L}_{p\eta\bar{p}} = i\bar{p}\gamma^\mu (\partial_\mu)p - m_p \bar{p}p + \frac{3F - D}{2\sqrt{3}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p. \tag{2.14}$$

La contribució al potencial és aquest mateix lagrangian sense els camps i introduint les partícules que participen al vèrtex en forma espinorial. Tanmateix, els termes cinètic i de massa es poden ignorar, ja que l'intercanvi de  $\eta$  no hi apareix, de manera que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p\eta\bar{p}} &\simeq \frac{3F - D}{2\sqrt{3}f} \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p \\
&\equiv C_{p\eta\bar{p}} \bar{p}\gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \eta)p,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

d'on extraiem la contribució

$$\Gamma_{p\eta\bar{p}} = C_{p\eta\bar{p}} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu \gamma_5 q_\mu u(p_1), \tag{2.16}$$

amb espinors de Dirac donats per

$$u(p) = \sqrt{\frac{E + m_p}{2E}} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m_p} \chi \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Pel què fa a la constant d'acoblament, s'usa els valors donats per [Spr99, BSS93, JOR02],

$$\begin{aligned} F &= 0,50, \\ D &= 0,80, \\ f &= 93,0 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aquests valors donen la constant per al vèrtex,

$$\begin{aligned} C_{p\eta\bar{p}} &= \frac{3F - D}{2\sqrt{3}f} \\ &\approx 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avaluem els termes temporal i espacial a l'operador  $\Gamma$  per separat. Començant per la component temporal, tenim

$$\begin{aligned} \bar{u}(p'_1) \gamma^0 \gamma_5 q_0 u(p_1) &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma_5 \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \end{pmatrix} q_0 \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \\ \chi \end{pmatrix} q_0 \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \\ -\chi \end{pmatrix} q_0 \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \vec{\sigma} \cdot \left( \frac{\vec{k}}{E + m_p} + \frac{\vec{k}'}{E' + m_p} \right) q_0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Considerant la conservació d'energia, tenim  $E = E'$ , i al límit no relativista es té  $E \simeq m_p$ , per tant

$$\bar{u}(p'_1) \gamma^0 \gamma_5 q_0 u(p_1) = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{k} + \vec{k}') q_0}{2m_p}. \quad (2.21)$$

El càlcul per a les components espacials és similar, però cal considerar el signe canviat degut a la mètrica. Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \bar{u}(p'_1) \gamma^j \gamma_5 q_j u(p_1) &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^j \gamma_5 \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \end{pmatrix} q_j \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^j \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \\ \chi \end{pmatrix} q_j \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \begin{pmatrix} \chi^\dagger & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^j \chi \\ -\hat{\sigma}^j \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \chi \end{pmatrix} q_j \\ &= \sqrt{\frac{(E' + m_p)(E + m_p)}{4E'E}} \left( \vec{\sigma} + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}'}{E' + m_p} \vec{\sigma} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E + m_p} \right) \cdot \vec{q}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Altre cop, apliquem la conservació d'energia i el límit no relativista, i es pot aproximar

$$\bar{u}(p'_1) \gamma^j \gamma_5 q_j u(p_1) \simeq -\vec{\sigma} \cdot \vec{q}. \quad (2.23)$$

Es pot, ara, afegir ambdós termes i obtenir el resultat per a l'operador vèrtex,

$$\Gamma_{p\eta\bar{p}} = C_{p\eta\bar{p}} \left[ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{k} + \vec{k}') q_0}{2m_p} - \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \right]. \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Acoblament $\Omega\eta\bar{\Omega}$

Pel què fa a l'acoblament del decuplet, usarem les components fortes decuplet-decuplet del lagrangia de la teoria de pertorbacions quiral de barions pesants[JM91]; això és

$$\mathcal{L}_D = -i\bar{T}^\mu(v \cdot \nabla)T_\mu + \Delta m \bar{T}^\mu T_\mu + 2\mathcal{H}\bar{T}^\mu \hat{S}_\nu u^\nu T_\mu, \quad (2.25)$$

on  $\vec{S}$  és l'operador de spin del decuplet,  $v$  és un vector velocitat que relaciona els camps de barions,  $\Delta m$  és la diferència de massa dels barions al decuplet,  $\mathcal{H}$  és una constant de baixa energia, i  $T$  és el tensor de tres índexs totalment simètric que representa els barions del decuplet, que té components donades per

$$\begin{aligned} T^{111} &= \Delta^{++}, & T^{112} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, & T^{113} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+}, \\ T^{122} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, & T^{123} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*0}, \\ T^{133} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0}, \\ T^{222} &= \Delta^-, & T^{223} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-}, \\ T^{233} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-}, \\ T^{333} &= \Omega^-. \end{aligned} \quad (2.26)$$

D'aquí, es calcula les seves contraccions amb el camp de mesons per obtenir el tercer terme del lagrangia anterior, ja que negligirem els termes de massa i cinètic.

Ara, per al vèrtex  $\Omega\eta\bar{\Omega}$  tenim barions

$$\begin{aligned} T^{dab} &= T^{333} \\ &= \Omega, \\ T^{abc} &= \bar{T}_{333} \\ &= \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

i camp de mesons

$$\begin{aligned} \phi_d^c &= \phi_3^3 \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}f}\eta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Per al càlcul del vèrtex, altre cop, podem ignorar tant el terme de massa com el cinètic, i per tant tenim lagrangia

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Omega\eta\bar{\Omega}} &\simeq -\frac{2\mathcal{H}}{\sqrt{3}f}\bar{\Omega}\mathbb{S}^\mu(\partial_\mu\eta)\Omega \\ &\equiv C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}\bar{\Omega}\mathbb{S}^\mu(\partial_\mu\eta)\Omega, \end{aligned} \quad (2.29)$$

d'on la contribució és

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{\Omega}\eta\Omega} &= -C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}\hat{\mathbb{S}}^\mu q_\mu \\ &= -C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}(\hat{\mathbb{S}}^0 q_0 - \vec{S} \cdot \vec{q}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Novament, podem calcular la constant d'acoblament fent servir els valors donats a [Spr99, BSS93, JOR02], en particular  $\mathcal{H} = -1,90$ , i obtenim

$$\begin{aligned} C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\mathcal{H}}{f} \\ &\approx 2,36 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

### 2.3 Derivació del potencial $p\Omega \rightarrow p\Omega$ a ordre principal

En estudiar els diagrames i els seus ordres hem vist que, a OP, només necessitem incloure, per a la interacció elàstica  $p\Omega$ , un terme de contacte i un terme d'intercanvi d'un mesó  $\eta$ . Això vol dir que podem escriure

$$\hat{V}_{p\Omega} = \hat{V}_{ct} + \hat{V}_\eta. \quad (2.32)$$

Estudiarem tots dos termes per avaluar els elements de matriu del potencial.

Com que haurem d'avaluar múltiples operadors de spin, convé explicar la notació que farem servir. Escrivim  $\vec{S}$  per a l'operador de la partícula  $\Omega$ ,  $\vec{\sigma}/2$  per al spin del protó,  $\vec{S} = \vec{S} + \vec{\sigma}/2$  per al spin total,  $\vec{L}$  per al moment angular relatiu i  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  per al moment angular total.

#### 2.3.1 Potencial de contacte

Combinant spin, isospin i moment respectant les simetries del sistema, si ens mantenim a ordre principal no 'mes podem tenir un terme central i un terme spin-spin al potencial de contacte. Per tant, podem escriure

$$\hat{V}_{ct}(q) = C_0^0 + C_0^1 \vec{S} \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.33)$$

on  $C_0^0$  i  $C_0^1$  són constants de baixa energia. Noti's que no s'hi ha inclòs cap factor de forma, de manera que els únics paràmetres lliures que hi ha per ara són  $C_0^0$  i  $C_0^1$ . Per obtenir aquest potencial a la representació de posicions cal aplicar-li la transformació de Fourier. Això produeix una delta de Dirac, que regularitzarem substituint-la per una funció difuminada  $f_\delta$ ,

$$\hat{V}_{ct}(\vec{r}) = \left( C_0^0 + C_0^1 \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \right) f_\delta(r), \quad (2.34)$$

que triem que sigui una gaussiana,

$$f_\delta(r) = \frac{e^{-(r/\delta)^2}}{\pi^{3/2} \delta^3}. \quad (2.35)$$

Usualment, el valor del paràmetre  $\delta$  es pren de manera que representa l'escala d'energia del primer barió pesant exclòs a OP; en aquest cas, el mesó  $\omega$ . Podem usar, per exemple,  $\delta = \sqrt{2}/m_\omega$ .

Per trobar aquests elements de matriu, cal calcular els elements de matriu de  $\vec{S} \cdot \vec{\sigma}$ . Per fer-ho, calculem el producte escalar en termes del spin total, com és habitual,

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{\sigma} &= 2\vec{S} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \\ &= \hat{S}^2 - \hat{S}^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{4} \\ &= \hat{S}^2 - \frac{9}{4}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

fent servir els spins d'ambues partícules. Per tant, els elements de matriu són

$$\langle (1/2, 3/2) S' M'_S | \vec{S} \cdot \vec{\sigma} | (1/2, 3/2) S M_S \rangle = \left[ S(S+1) - \frac{9}{2} \right] \delta_{SS'} \delta_{M_S M'_S}. \quad (2.37)$$

#### 2.3.2 Potencial d'intercanvi de $\eta$

Donat que ja hem calculat els vèrtexs del diagrama d'intercanvi de  $\eta$ , construïrem el potencial d'intercanvi de  $\eta$  calculant ambdós operadors  $\Gamma$  amb el propagador mesònic, de manera que tenim

$$\begin{aligned} \hat{V}_\eta(q) &= i\Gamma_{p\eta\bar{p}} \frac{i}{q^2 - m_\eta^2} \Gamma_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \\ &= C_{p\eta\bar{p}} \left[ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{k} + \vec{k}') q_0}{2M_p} - \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \right] C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \frac{\hat{S}^0 q_0 - \vec{S} \cdot \vec{q}}{q^2 - m_\eta^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aquí, prenem l'aproximació estàtica i obtenim  $q_0 \approx 0$ , de manera que el potencial esdevé

$$\hat{V}_\eta(\vec{q}) = -C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \frac{(\vec{S} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m_\eta^2}. \quad (2.39)$$

Això dóna el potencial a l'espai de moments. Per obtenir-lo a l'espai de coordenades només cal fer una transformació de Fourier,

$$\begin{aligned} \hat{V}_\eta(\vec{r}) &= -C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{(\vec{S} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

El salt entre la primera i la segona línia és fàcil de fallar: com que tenim el producte  $i\vec{q} \cdot \vec{r}$  en un exponent, derivar respecte  $x_i$  farà caure un factor  $iq_i$ , de manera que els dos productes escalars a la primera línia poden ser substituïts per les derivades parcials a la segona línia. La darrera integral és una transformació de Fourier coneguda: el popular potencial de Yukawa. Ara, fent servir les propietats de la derivació successiva, el potencial esdevé

$$V_\eta(\vec{r}) = C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \left[ \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + (\vec{S} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r}. \quad (2.41)$$

Aquí, comencem a notar que ens quedaran dos termes, cada un amb un operador multiplicat per una funció radial. Les funcions radials s'obtinran fàcilment derivant la funció de la dreta reiteradament. Per estalviar feina, però, convé estudiar primer el segon operador. El podem reescriure com a

$$\begin{aligned} (\vec{S} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) &= \sum_{\mu, \mu'} (-1)^\mu \hat{S}_\mu \hat{r}_{-\mu} (-1)^{-\mu'} \hat{\sigma}_{-\mu'} \hat{r}_{\mu'} \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{L, M_L} (-1)^{M_L} \left[ \vec{S} \times \vec{\sigma} \right]_{-M_L}^L \cdot \left[ \vec{Y}_1 \times \vec{Y}_1 \right]_{M_L}^L \\ &= \frac{1}{3} \vec{S} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{M_L} (-1)^{M_L} \left[ \vec{S} \times \vec{\sigma} \right]_{-M_L}^2 \cdot \left[ \hat{r} \times \hat{r} \right]_{M_L}^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

on s'ha usat  $\hat{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \vec{Y}_1$  i desenvolupat

$$\begin{aligned} \hat{r}_{-\mu} \hat{r}_{\mu'} &= \frac{4\pi}{3} Y_{1-\mu} Y_{1\mu'} \\ &= \frac{4\pi}{3} \sum_{L, M_L} \langle LM_L | 1 - \mu 1 \mu' \rangle \left[ \vec{Y}_1 \times \vec{Y}_1 \right]_{M_L}^L. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si definim  $\hat{O}_T/3$  com a l'operador de la suma gran a l'expressió final, es pot reescriure la interacció com a

$$\begin{aligned} \hat{V}_\eta(\vec{r}) &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \left[ \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{3} (\vec{S} \cdot \vec{\sigma} + \hat{O}_T) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} \\ &= \frac{C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}}{3} \left[ \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \nabla^2 + \hat{O}_T \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

La darrera tasca que queda per obtenir la forma del potencial és calcular les funcions radials, per a les que només necessitem les primeres dues derivades i el laplacià de la funció de la dreta, que denotem  $f$ .



Les primeres dues derivades es poden calcular directament,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dr} &= -\left(m_\eta + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r}, \\ \frac{d^2f}{dr^2} &= \left(m_\eta^2 + \frac{2m_\eta}{r} + \frac{2}{r^2}\right) \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

El laplacà és una mica més llarg de calcular. Comencem calculant-lo explícitament i l'obtenim trencat en tres termes,

$$\begin{aligned}\nabla^2(e^{-m_\eta r}/r) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}/r) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla}(1/r)e^{-m_\eta r} + \frac{1}{r}\vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}) \right] \\ &= \nabla^2(1/r)e^{-m_\eta r} + 2\vec{\nabla}(1/r) \cdot \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}) + \frac{1}{r}\nabla^2(e^{-m_\eta r}).\end{aligned}\tag{2.46}$$

El primer terme és el que se'ns complicarà. En tot cas, necessitem calcular dos gradients, cosa que farem en coordenades esfèriques,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(1/r) &= \partial_r(1/r)\hat{r} \\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}, \\ \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}) &= \partial_r(e^{-m_\eta r})\hat{r} \\ &= -m_\eta e^{-m_\eta r} \frac{\vec{r}}{r}.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Des d'aquí, calcular els darrers dos termes és directe, fent servir les coordenades esfèriques,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(1/r) \cdot \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}) &= \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \cdot \left(-m_\eta e^{-m_\eta r} \frac{\vec{r}}{r}\right) \\ &= -\frac{m_\eta e^{-m_\eta r}}{r^2},\end{aligned}\tag{2.48}$$

i

$$\begin{aligned}\nabla^2(e^{-m_\eta r}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r}) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \hat{r} \cdot \vec{\nabla}(e^{-m_\eta r})] \\ &= -\frac{m_\eta}{r^2} \partial_r (r^2 e^{-m_\eta r}) \\ &= (m_\eta r - 2) \frac{m_\eta}{r} e^{-m_\eta r}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Tanmateix, el primer terme no es pot atacar de manera regular. Això sí, podem calcular, per a  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\nabla^2(1/r) &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}/r^3) \\ &= -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \hat{r} \cdot \vec{r}/r^3) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{2.50}$$

i podem calcular al punt que falta,  $r = 0$ , fent servir el teorema de la divergència per a la bola de radi unitat,  $\mathbb{D}^3$ , cosa que ens dóna

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^3} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) dV &= \int_{\mathbb{S}^2} \hat{r} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) dS \\ &= -\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{r^2} dS \\ &= -\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -4\pi,\end{aligned}\tag{2.51}$$

i això força l'aparició d'una delta de Dirac a l'origen, cosa que resol el dilema,

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r}). \quad (2.52)$$

Ajuntant tots els càlculs, obtenim el laplacian,

$$\nabla^2 f = m_\eta^2 \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} - \delta(\vec{r}), \quad (2.53)$$

amb el qual podem escriure el potencial d'intercanvi de  $\eta$  escrivint les funcions radials explícitament,

$$\hat{V}_\eta(\vec{r}) = C_{\text{p}\eta\bar{\text{p}}} C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \frac{m_\eta^2}{3} \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} \left[ \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma} + \left( 1 + \frac{3}{m_\eta r} + \frac{3}{(m_\eta r)^2} \right) \hat{O}_T \right]. \quad (2.54)$$

Pel què fa al primer terme, ja hem calculat els elements de matriu analitzant el potencial de contacte. Per tant, només necessitem calcular els elements de matriu del tensor.

### 2.3.3 Elements de matriu del terme tensorial i ones parcials

Recordem que hem definit operador tensorial  $\hat{O}_T$  com a

$$\langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle = 3 \langle (L'S')JM_J | \sum_\mu (-1)^\mu [\vec{\mathbb{S}} \times \vec{\sigma}]_{-\mu}^2 [\hat{r} \times \hat{r}]_\mu^2 | (LS)JM_J \rangle. \quad (2.55)$$

En coordenades esfèriques, podem factoritzar

$$[\hat{r} \times \hat{r}]_\mu^2 = \frac{4\pi}{3} \sum_{m,m'} \langle 2\mu | 1m1m' \rangle Y_{1m}(\hat{r}) Y_{1m'}(\hat{r}). \quad (2.56)$$

Aquesta suma de productes d'esfèrics harmònics es pot reescriure fent servir coeficients de Clebsch-Gordan,

$$\sum_{m,m'} \langle LM_L | l_1 m l_2 m' \rangle Y_{l_1 m}(\hat{r}) Y_{l_2 m'}(\hat{r}) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4(2L + 1)\pi}} \langle L0 | l_1 0 l_2 0 \rangle Y_{LM}(\hat{r}), \quad (2.57)$$

cosa que, particularitzada al cas amb  $L = 2$ ,  $M_L = \mu$  i  $l_1 = l_2 = 1$ , queda

$$\sum_{m,m'} \langle 2\mu | 1m1m' \rangle Y_{1m}(\hat{r}) Y_{1m'}(\hat{r}) = \sqrt{\frac{9}{20\pi}} \langle 20 | 1010 \rangle Y_{2\mu}(\hat{r}). \quad (2.58)$$

Per tant, tenim

$$\begin{aligned} [\hat{r} \times \hat{r}]_\mu^2 &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \langle 20 | 1010 \rangle Y_{2\mu}(\hat{r}) \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{2\mu}(\hat{r}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Fent servir això, hem completat el primer pas per a l'avaluació dels elements de matriu,

$$\langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle = \sqrt{\frac{24\pi}{5}} \langle (L'S')JM_J | \sum_\mu (-1)^\mu [\vec{\mathbb{S}} \times \vec{\sigma}]_{-\mu}^2 Y_{2\mu}(\hat{r}) | (LS)JM_J \rangle. \quad (2.60)$$

A l'expressió, es pot identificar l'acoblament de dos operadors irreductibles de rang 2 amb un operador de rang 0, cosa que ens permet reescriure els elements de matriu com a

$$\langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle = \sqrt{24\pi} \langle (L'S')JM_J | \left[ [\vec{\mathbb{S}} \times \vec{\sigma}]^2 \times \vec{Y}_2(\hat{r}) \right]_{00} | (LS)JM_J \rangle. \quad (2.61)$$

Aquest operador és el producte de dos altres operadors, caracteritzats per  $L$ ,  $M_L$  i  $S$ ,  $M_S$ , respectivament. Degut a l'acoblament, hauríem d'expressar els elements de matriu a la representació acoblada. Això és

$$\begin{aligned} \langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle &= \sqrt{24(2J+1)\pi} \langle JM_J | JM_J 00 \rangle \\ &\quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ L' & S' & J \\ L & S & J \end{Bmatrix} \langle S' || [\vec{S} \times \vec{\sigma}] || S \rangle \langle L' || \vec{Y}_2 || L \rangle. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Per trencar l'altre acoblament, un nota que tenim dos subsistemes de spin  $3/2$  i  $1/2$  acoblats a spin total  $S$  amb projecció  $M_S$ . Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \langle (3/2 \ 1/2) S' M'_S | [\vec{S} \times \vec{\sigma}]_{-\mu}^2 | (3/2 \ 1/2) S M_S \rangle &= \sqrt{5(2S+1)} \langle S' M'_S | S M_S 2 - \mu \rangle \\ &\quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & S' \\ 3/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \langle 3/2 || \vec{S} || 3/2 \rangle \langle 1/2 || \vec{\sigma} || 1/2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.63)$$

mentre que el teorema de Wigner-Eckart dona

$$\langle S' M'_S | [\vec{S} \times \vec{\sigma}]_{-\mu}^2 | S M_S \rangle = \frac{\langle S' M'_S | S M_S 2 - \mu \rangle}{\sqrt{2S'+1}} \langle S' || [\vec{S} \times \vec{\sigma}] || S \rangle. \quad (2.64)$$

La comparació d'ambdós termes, finalment, permet avaluar el desitjat element de matriu de spin reduït,

$$\langle S' || [\vec{S} \times \vec{\sigma}] || S \rangle = \sqrt{5(2S+1)(2S'+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & S' \\ 3/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \langle 3/2 || \vec{S} || 3/2 \rangle \langle 1/2 || \vec{\sigma} || 1/2 \rangle. \quad (2.65)$$

Els darrers elements de matriu que ens cal calcular també es poden calcular amb el teorema de Wigner-Eckart,

$$\langle L' || \vec{Y}_2 || L \rangle = \sqrt{\frac{5(2L+1)}{4\pi}} \langle L' 0 | L 0 20 \rangle. \quad (2.66)$$

Podem substituir tots aquests termes i obtenir

$$\begin{aligned} \langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle &= 10\sqrt{15(2J+1)(2S+1)(2S'+1)(2L+1)} \\ &\quad \langle L' 0 | L 0 20 \rangle \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ L' & S' & J \\ L & S & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & S' \\ 3/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Un cas particular rellevant és el que té  $L = 0$ ; això és, el cas en què el sistema inicial no té moment angular relatiu. Això implica acoblament  $J = S$  i  $L' = 2$ . També podem usar les propietats dels símbols  $9j$  i escriure

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ L' & S' & J \\ L & S & J \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & S' & S \\ 0 & S & S \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 2 & S' & S \\ 0 & S & S \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \\ &= (-1)^{S'+S} \begin{Bmatrix} S' & 2 & S \\ S & 0 & S \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{5(2S+1)}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

La qual cosa, finalment, dóna

$$\langle (L'S')JM_J | \hat{O}_T | (LS)JM_J \rangle = 6\sqrt{15(2S'+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & S' \\ 3/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix}. \quad (2.69)$$

Havent calculat tots els elements de matriu de l'operador, podem donar una expressió tancada per als elements de matriu del potencial, tant per al potencial de contacte

$$\langle (LS)JM_J | \hat{V}_{\text{ct}} | (LS)JM_J \rangle = \frac{e^{-(r/\delta)^2}}{\pi^{3/2}\delta^3} \left[ C_0^0 + C_0^1 \left( S(S+1) - \frac{9}{2} \right) \right] \quad (2.70)$$

com per al potencial d'intercanvi de  $\eta$ , restant al cas  $L = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle (L'S')SM_S | \hat{V}_\eta(\vec{r}) | (0S)SM_S \rangle = & C_{p\eta\bar{p}} C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \frac{m_\eta^2}{3} \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} \left[ \left( S(S+1) - \frac{9}{2} \right) \delta_{L',0} \right. \\ & \left. + \left( 1 + \frac{3}{m_\eta r} + \frac{3}{(m_\eta r)^2} \right) 6\sqrt{15(2S'+1)} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & S' \\ 3/2 & 1/2 & S \end{Bmatrix} \delta_{L',2} \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Segons aquestes expressions, l'única dependència dels elements de matriu no nuls és en els spins totals  $S$  i  $S'$ . Veiem que els elements amb  $L' = 0$  tenen els termes de contacte i spin-spin. Donat que  $s_p = 1/2$  i  $s_\Omega = 3/2$ , aquests canals són

$$\begin{aligned} {}^3S_1 &\rightarrow {}^3S_1, \\ {}^5S_2 &\rightarrow {}^5S_2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Els altres acoblaments possibles, els dels elements amb  $L' = 2$ , només tenen la part tensorial de la interacció. Aquests canals són

$$\begin{aligned} {}^3S_1 &\rightarrow {}^3D_1, \\ {}^3S_1 &\rightarrow {}^5D_1, \\ {}^5S_2 &\rightarrow {}^3D_2, \\ {}^5S_2 &\rightarrow {}^5D_2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

D'aquesta manera, només necessitem quatre símbols  $9j$ ,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{-1}{18\sqrt{10}}, \\ \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix} &= \frac{-1}{10\sqrt{6}}, \\ \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{10\sqrt{6}}, \\ \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{10} \sqrt{\frac{7}{30}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

### 2.3.4 Potencial d'intercanvi de $\sigma$

Fins a aquest punt, hem seguit el desenvolupament del potencial de [Flo14]. Tanmateix, un problema que trobem amb aquest potencial és el fet que el potencial d'intercanvi de  $\eta$  és fix i és repulsiu. De

[IA+19] esperem una interacció netament atractiva, però això es pot assolir si la interacció de contacte atractiva. Emperò, hi ha incicis [SKH18] que els termes d'intercanvi donen també una interacció atractiva.

A [SKH18] es discuteix que l'intercanvi de  $\sigma$  dona la part més atractiva dels termes d'intercanvi d'un mesó, de manera que afegirem aquesta interacció aquí. Recordem que l'anomenat mesó  $\sigma$  és la ressonància  $f_0(500)$ , i es representa generalment com un parell correlacionat de pions. Podem dibuixar l'intercanvi com segueix.

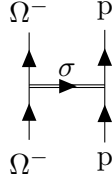


Figura 8: Diagrama d'intercanvi de  $\sigma$ .

Al contrari que la partícula  $\eta$ , que és pseudoescalar, el mesó  $\sigma$  és un escalar. Per tant, trobarem un nou terme del potencial sense les contribucions de spin a OP [LS96],

$$\begin{aligned}\hat{V}_\sigma(q) &= \frac{C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}}{q^2 - m_\sigma^2} \\ &\simeq -\frac{C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}}{\vec{q}^2 + m_\sigma^2},\end{aligned}\tag{2.75}$$

on a la segona línia hem pres, novament, l'aproximació estàtica  $q_0 \approx 0$ . Aquí apliquem la transformació de Fourier per passar a l'espai de posicions, i obtenim el conegut potencial de Yukawa,

$$\begin{aligned}\hat{V}_\sigma(\vec{r}) &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^2 + m_\sigma^2} \\ &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r},\end{aligned}\tag{2.76}$$

on no hi ha acoblaments derivatius perquè no estem tractant amb cap bosó de Goldstone.

Pel què fa a la constant  $C_{p\sigma\bar{p}}$ , la podem obtenir del model de Walecka-Serot [SW86]. A [ST20], trobem l'expressió per al potencial  $NN$  degut a l'intercanvi de  $\sigma$ ,

$$V_\sigma^{(NN)}(r) = -\alpha_\sigma \frac{e^{-m_\sigma r}}{r},\tag{2.77}$$

amb  $\alpha_\sigma = 6,04$ . Tanmateix, seguint el potencial  $N\Omega$  d'intercanvi de  $\sigma$  que acabem de calcular, obtenim una altra expressió per al potencial  $NN$ , substituint la constant  $C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}$  per  $C_{p\sigma\bar{p}}$ ,

$$\hat{V}_\sigma^{(NN)}(r) = -C_{p\sigma\bar{p}}^2 \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r},\tag{2.78}$$

ja que tenim la contribució de dos vèrtexs  $\Gamma_{p\sigma\bar{p}}$ . Fent servir aquesta nova expressió, podem comparar ambdós potencials per obtenir una expressió per a l'acoblament en termes del valor de  $\alpha_\sigma$ ,

$$\begin{aligned}C_{p\sigma\bar{p}} &= \sqrt{4\pi\alpha_\sigma} \\ &\approx 8,71.\end{aligned}\tag{2.79}$$

Com que la constant  $C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}$  no pot ser fixada de manera anàloga, la deixarem com a paràmetre lliure per al model.

### 2.3.5 Factor de forma per als potencials d'intercanvi

Fins aquí, la única regularització que hem aplicat és la funció de truncament per a la interacció de contacte usada per [Flo14]. Ara bé, també hauríem d'afegir un factor de forma a cada vèrtex dels potencials d'intercanvi per tenir en compte la mida finita de les partícules. Per al factor, triem un factor de forma de tipus monopolar

$$F_\Lambda(\vec{q}) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \vec{q}^2}. \quad (2.80)$$

Per a afegir el factor de forma al potencial d'intercanvi de  $\eta$ , n'hi ha prou que l'escrivim dins la integral a (2.40) (tots els passos anteriors són idèntics). D'aquesta manera, obtenim

$$\begin{aligned} \hat{V}_\eta(\vec{r}) &= -C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{(\vec{S}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} (F_{\Lambda_\eta}(q))^2 \\ &= -C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{(\vec{S}\cdot\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{q})}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 + \vec{q}^2} \right)^2 \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^2 + m_\eta^2} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 + \vec{q}^2} \right)^2 \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 + q^2} \right)^2 \frac{q^2}{q^2 + m_\eta^2} \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{iqr\cos\theta} \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \left[ \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dq \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 + q^2} \right)^2 \frac{q \sin(qr)}{q^2 + m_\eta^2} \right] \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 \hat{S}^i \hat{\sigma}^j \partial_i \partial_j \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right] \\ &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 \\ &\quad \left[ \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + (\vec{S} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right] \\ &= \frac{C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}}{3} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 \\ &\quad \left[ \vec{S} \cdot \vec{\sigma} \nabla^2 + \hat{O}_T \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \right] \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Aquest càlcul segueix tot el desenvolupament operacional de la darrera secció. Per tant, els operadors que apareixen al potencial són els mateixos, però hem de substituir la funció  $f$  per

$$f(r) = \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right], \quad (2.82)$$

per obtenir la dependència radial.

Totes les derivades han estat ja calculades, a (2.45), excepte les del decaïment exponencial, de manera que posem  $g(r) = e^{-\Lambda_\eta r}$  i veiem, immediatament,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dr} &= -\Lambda_\eta e^{-\Lambda_\eta r}, \\ \frac{d^2g}{dr^2} &= \Lambda_\eta^2 e^{-\Lambda_\eta r}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Mentre que el laplacà ja ha estat calculat a (2.49). Per tant, l'expressió final per al potencial queda

$$\begin{aligned}\hat{V}_\eta(\vec{r}) = \frac{C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}}}{3} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 & \left[ m_\eta^2 \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} \left( \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma} + \left( 1 + \frac{3}{m_\eta r} + \frac{3}{(m_\eta r)^2} \right) \hat{O}_T \right) \right. \\ & - \Lambda_\eta^2 \frac{e^{-\Lambda_\eta r}}{4\pi r} \left( \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma} + \left( 1 + \frac{3}{\Lambda_\eta r} + \frac{3}{(\Lambda_\eta r)^2} \right) \hat{O}_T \right) \\ & \left. + (m_\eta^2 - \Lambda_\eta^2) \frac{\Lambda_\eta r - 2}{2} \frac{e^{-\Lambda_\eta r}}{4\pi r} \left( \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma} + \frac{\Lambda_\eta r + 1}{\Lambda_\eta r - 2} \hat{O}_T \right) \right].\end{aligned}\quad (2.84)$$

Pel què fa al potencial d'intercanvi de  $\sigma$ , hem de repetir els càlculs per a una transformació una mica més senzilla. Seguint la secció anterior,

$$\begin{aligned}\hat{V}_\sigma(\vec{r}) &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{q^2 + m_\sigma^2} (F_{\Lambda_\sigma}(\vec{q}))^2 \\ &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{q^2 + m_\sigma^2} \left( \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 + q^2} \right)^2 \\ &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} \left( \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 + q^2} \right)^2 \frac{q^2}{q^2 + m_\sigma^2} \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{iqr\cos\theta} \\ &= -\frac{C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dq \left( \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 + q^2} \right)^2 \frac{q \sin(qr)}{q^2 + m_\sigma^2} \\ &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \left( \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 - m_\sigma^2} \right)^2 \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right].\end{aligned}\quad (2.85)$$

## 2.4 Parametritzacions del potencial

Havent construït diverses formes funcionals per al potencial efectiu, és el moment de donar valors als paràmetres restants per a reproduir el comportament del potencial  $p\Omega$ . Tot comptat, hem construït un potencial amb termes de contacte i intercanvi de  $\eta$ , un amb un terme afegit d'intercanvi de  $\sigma$  i un amb factors de forma als termes d'intercanvi.

Com que les nostres parametritzacions seran ajustades a canals elàstics, convé que escrivim l'expressió final per a les contribucions dels canals elàstics, amb constant de truncament  $\delta = \sqrt{2}/m_\omega$ ,

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{ct}}^{\text{el}} &= \left( C_0^0 + C_0^1 \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma} \right) \frac{e^{-(r/\delta)^2}}{\pi^{3/2} \delta^3}, \\ \hat{V}_\eta^{\text{el}} &= C_{p\eta\bar{p}}C_{\Omega\eta\bar{\Omega}} \frac{m_\eta^2}{3} \left( \frac{\Lambda_\eta^2}{\Lambda_\eta^2 - m_\eta^2} \right)^2 \left[ \frac{e^{-m_\eta r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\eta r}}{4\pi r} + \frac{(m_\eta^2 - \Lambda_\eta^2)\Lambda_\eta}{8\pi m_\eta^2} e^{-\Lambda_\eta r} \right] \vec{\mathbb{S}} \cdot \vec{\sigma}, \\ \hat{V}_\sigma^{\text{el}} &= -C_{p\sigma\bar{p}}C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}} \left( \frac{\Lambda_\sigma^2}{\Lambda_\sigma^2 - m_\sigma^2} \right)^2 \left[ \frac{e^{-m_\sigma r}}{4\pi r} - \frac{e^{-\Lambda_\sigma r}}{4\pi r} + \frac{m_\sigma^2 - \Lambda_\sigma^2}{8\pi\Lambda_\sigma} e^{-\Lambda_\sigma r} \right].\end{aligned}\quad (2.86)$$

### 2.4.1 Ajustament del potencial $^5S_2$

Per a tots aquests potencials, tenim dos paràmetres lliures per al terme de contacte,  $C_0^0$  i  $C_0^1$ . Afegir l'intercanvi de  $\sigma$  afegeix un paràmetre addicional  $C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}$ . Afegir els factors de forma afegeix dos paràmetres de truncament,  $\Lambda_\eta$  i  $\Lambda_\sigma$ . Triarem els valors d'aquests paràmetres fixant-ne alguns i després fent servir la resta per ajustar a

$$V(r) = b_1 e^{-b_2 r^2} + b_3 \left( 1 - e^{-b_4 r^2} \right) \left( \frac{e^{-m_\pi}}{r} \right)^2, \quad (2.87)$$

el potencial de HAL QCD per al canal  ${}^5S_2$  amb  $t/a = 12$  i  $n = 1$ , que té constants [IA+19]

$$\begin{aligned} b_1 &= -313,0 \text{ MeV}, \\ b_2 &= 81,7 \text{ fm}^{-2}, \\ b_3 &= -252 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2, \\ b_4 &= 0,85 \text{ fm}^{-2}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Aquest potencial és ell mateix un ajustament al potencial reticular. Per a nosaltres, serà el potencial “real”, que ajustarem amb el nostre potencial efectiu.

	$C_0^0(\text{MeV}^{-2})$	$C_0^1(\text{MeV}^{-2})$	$C_{\Omega\sigma\bar{\Omega}}$	$\Lambda_\eta(\text{MeV})$	$\Lambda_\sigma(\text{MeV})$
Florit	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$			
Florit reduïda	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$			
Sense FF	$-8,06(6) \cdot 10^{-6}$	$-1,61(2) \cdot 10^{-6}$	0,8858(2)	900	1200
FF fixat	$1,133(5) \cdot 10^{-5}$	$2,267(9) \cdot 10^{-6}$	1,882(8)		
FF lliure	$6,59(6) \cdot 10^{-6}$	$1,32(2) \cdot 10^{-6}$	2,58(3)	917,4(7)	622(6)

Taula 2: Tries de paràmetres preses. Les cel·les en blanc corresponen a constants que no són al model.

Ambdós conjunts de Florit es prenen de [Flo14] i inclouen només els termes de contacte i intercanvi de  $\eta$ . La parametrització de Florit correspon a una tria raonable en el sentit que és prop dels valors per als sectors  $S = -1$  i  $S = -2$ , que es pot veure a la taula 3 per completesa, mentre que la tria de Florit reduïda correspon a l'expectativa que aquesta interacció sigui més feble.

	$C_0^0(\text{MeV}^{-2})$	$C_0^1(\text{MeV}^{-2})$
$N\Lambda \rightarrow N\Lambda$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$N\Sigma \rightarrow N\Sigma$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$
$N\Xi \rightarrow N\Xi$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-4}$

Taula 3: Resultats experimentals per a les constants de contacte per a alguns canals de  $S = -1$  i  $S = -2$  [Flo14, PHM07, HP+13].



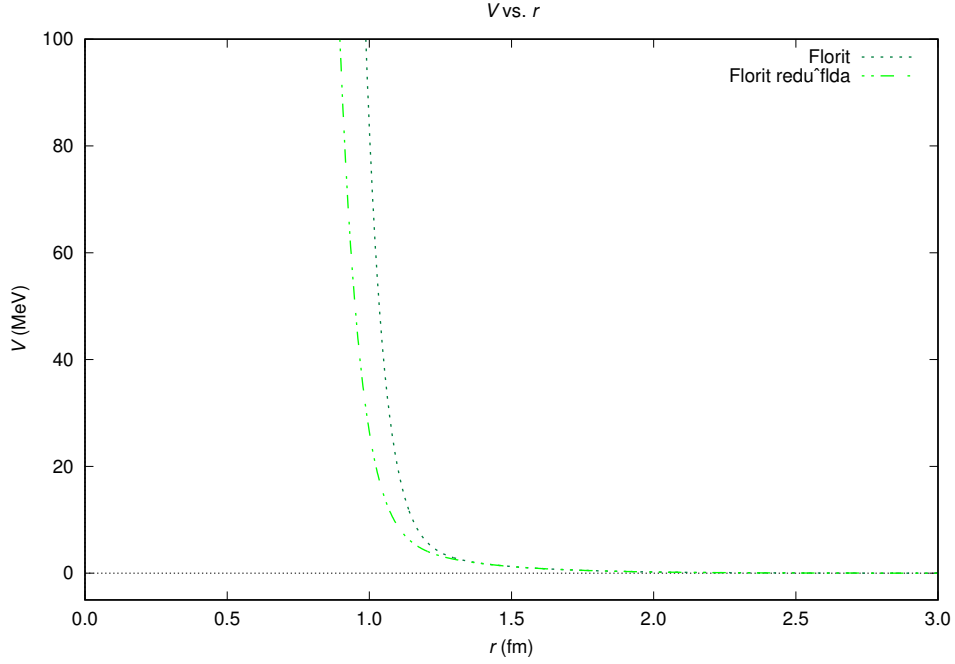


Figura 9: Potencial  $p\Omega$  per al canal  ${}^5S_2$ , segons les tries de Florit.

Ambdós potencials, però, són molt repulsius, cosa que contrasta amb l’atractivitat del potencial de HAL QCD. Tot i aquesta discrepància, seguirem estudiant aquests potencials al llarg del treball, ja que ens interessa com els observables de dispersió i femtoscopia es comporten sota aquest cas límit molt repulsiu.

Pel què fa a les parametritzacions “sense factors de forma” i amb “factors de forma lliures”, sorgeixen de prendre un ajustament de mínims quadrats al potencial de HAL QCD obtingut amb un programa de Python, el primer sense factors de forma i el segon amb factors de forma. La tria amb “factors de forma fixats” s’obté fixant les constants  $\Lambda_\eta$  i  $\Lambda_\sigma$  a un valor físicament raonable (vegi’s la taula 2) i prenent un ajustament de mínims quadrats al potencial de HAL QCD amb els paràmetres restants.

És interessant notar que, metre que l’ajustament “sense factors de forma” pert el comportament repulsiu de la interacció de contacte que trobem als sectors  $S = -1$  i  $S = -2$ , les parametritzacions amb “factors de forma fixats” i “factors de forma lliures” mantenen la interacció de conitacte repulsiva.

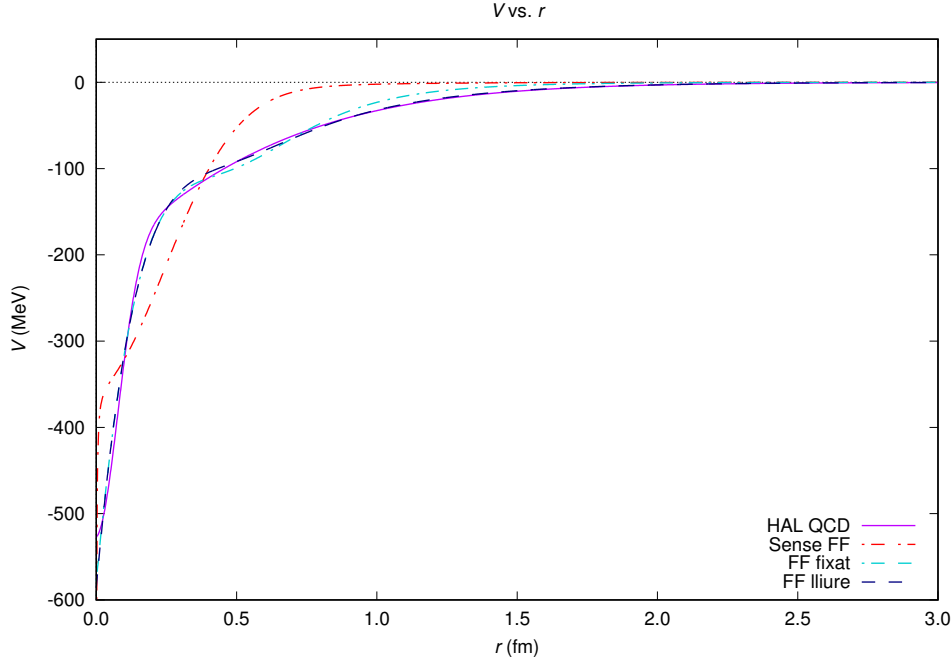


Figura 10: Potencial  $p\Omega$  per al canal  ${}^5S_2$ , segons les tries d'ajustament.

En tots els casos, s'ha imposat la condició que  $C_0^0 = 5C_0^1$ . Una tria en aquest sentit és necessària degut al fet que aquestes dues constants no es poden separar dins el canal  ${}^5S_2$ , i no tenim cap potencial per al canal  ${}^3S_1$  amb què les poguem fixar. Aquesta tria és, altre cop, basada en el comportament de les constants als sectors  $S = -1$  i  $S = -2$ .

Veiem que la parametrització “sense factors de forma” difereix fortament del potencial de HAL QCD. Per tant, no la considerarem per a la resta del treball.

Contràriament, obtenim un comportament molt fidel de l'ajustament amb “factors de forma lliures”. En donar sentit físic als factors de forma, tanmateix, trobem el problema que  $\Lambda_\sigma = 622$  MeV, mentre que per a acoblaments escalars esperaríem  $\Lambda_\sigma \sim 1,2$  MeV (com a la taula 2). Això no ha de ser causa de preocupació: el factor de forma començarà a modificar el potencial a  $|\vec{q}| \sim 600$  MeV. Tanmateix, com que  $m_\sigma = 500$  MeV, les correccions relativistes ja hi seran importants, i no les hem considerades. Per tant, hi ha un error sistemàtic que no podem controlar dins el model, cosa que explica el valor inesperadament baix de  $\Lambda_\sigma$ .

#### 2.4.2 Estats lligats ${}^5S_2$

Com hem comentat, els parells  $N\Omega$  són candidats per a dibarió. Per tant, és interessant veure si ls potencials que hem desenvolupat admeten estats lligats. A aquest efecte, s'ha implementat un mètode numèric en Fortran 90 (veure la secció A.1) per calcular tals estats resolent l'equació de Schrödinger radial,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\mu Z_1 Z_2 \alpha}{r} - 2\mu \hat{V}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0, \quad (2.89)$$

que ens permet obtenir el comportament radial de la funció d'ona al cas de potencials centrals i on  $k^2 = 2\mu E$ ,  $E$  és l'energia,  $\mu$  és la massa reduïda,  $Z_1$  i  $Z_2$  són les càrregues de cada partícula i  $l$  és el nombre quàntic de moment angular relatiu. El desenvolupament d'aquesta equació serà precisat a la següent secció.

Fent servir aquest codi, no es troba cap estat lligat per a les parametritzacions de Florit (cosa esperable, ja que són fortament repulsius). Sí que es troba estats lligats per als potencials amb factors de forma (FF), així com per al potencial de HAL QCD, tots els quals amb  $l = 0$ .

	$p\Omega$		$n\Omega$	
	$E(\text{MeV})$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{fm})$
HAL QCD	-2,26	3,40	-1,38	3,99
Factors de forma fixats	-0,428	7,59	$-3,65 \cdot 10^{-3}$	18,9
Factors de forma lliures	-2,13	3,47	-1,26	4,13

Taula 4: Energia i radi quadràtic mitjà d'un estat lligat  ${}^5S_2$  obtingudes per a totes les tries de potencial que n'admeten un.

El cas  $n\Omega$  s'ha obtingut, senzillament, assumint simetria d'isospín i fent servir el mateix potencial  $p\Omega$  sense incloure la interacció de Coulomb.

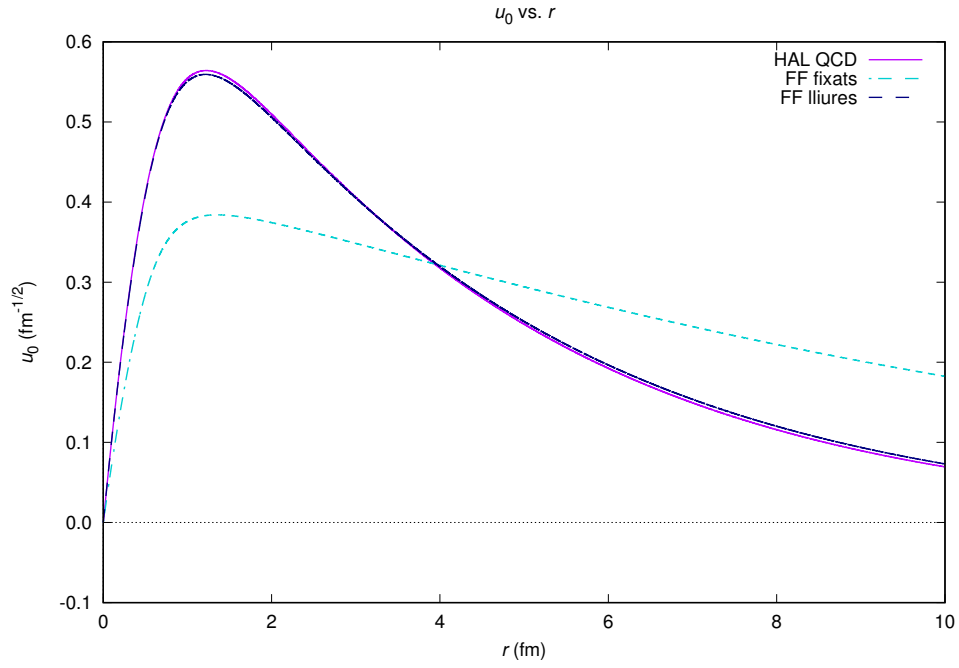


Figura 11: Funció d'ona radial reduïda dels estats lligats de la interacció  $p\Omega$  construïts amb les diverses tries de potencial al canal  ${}^5S_2$ .

Trobem màxima similitud, com podem esperar, en les funcions d'ona del potencial de HAL QCD i el seu millor ajustament, el de “factores de forma lliures”.

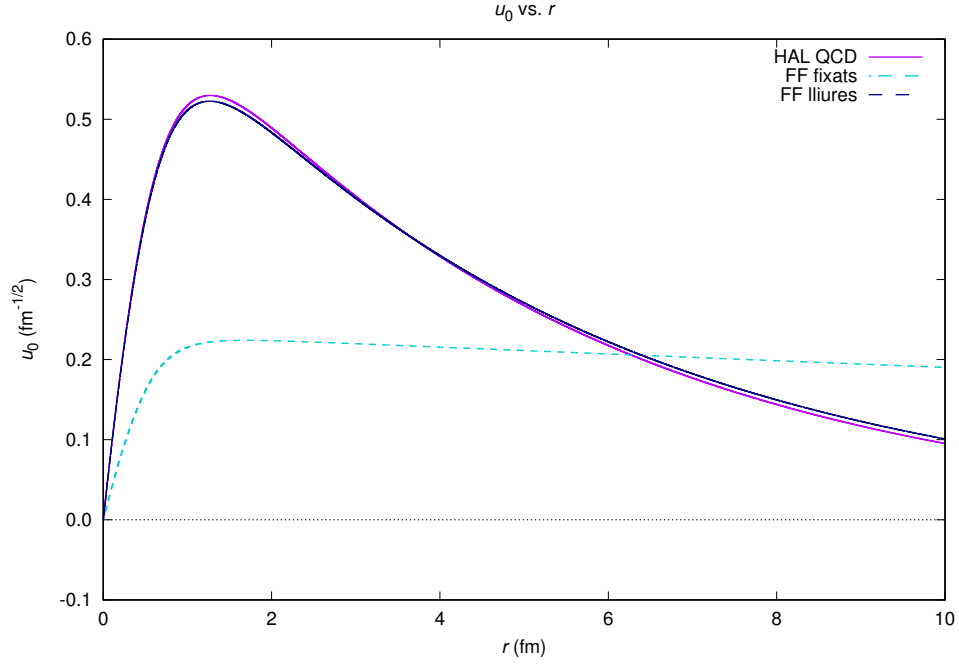


Figura 12: Funció d'ona radial reduïda dels estats lligats de la interacció  $n\Omega$  construïts amb les diverses tries de potencial al canal  ${}^5S_2$ .

Observem el mateix comportament general per al cas de neutró i protó, tot i que els estats són previsiblement menys lligats per al cas del neutró.

### 2.4.3 Potencial i estats lligats ${}^3S_1$

Les parametritzacions donades fins ara, sota l'assumpció  $C_0^0 = 5C_0^1$ , ens permeten també donar una forma per al potencial  ${}^3S_1$ .

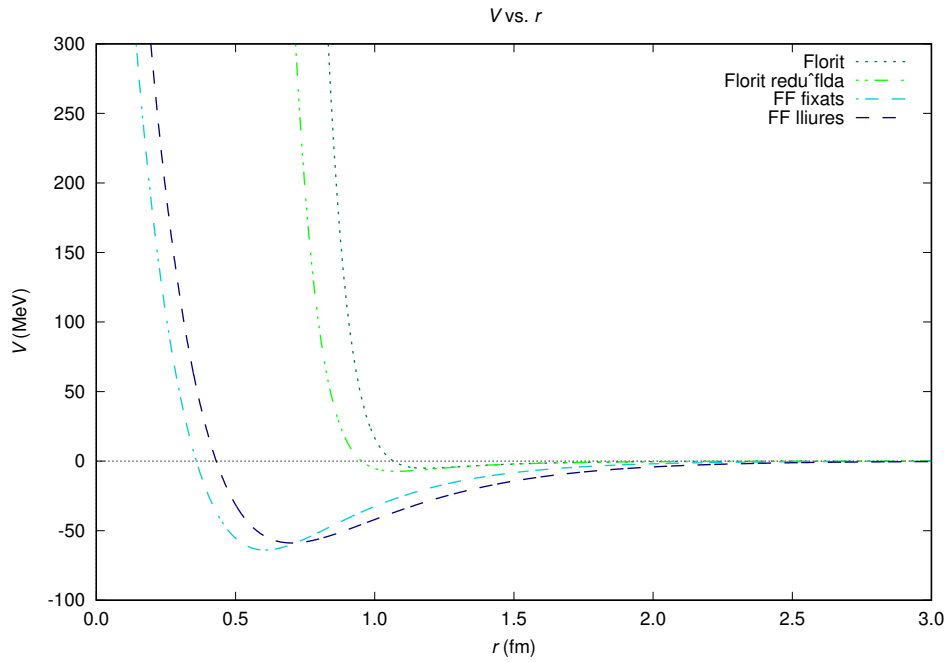


Figura 13: Potencial  $p\Omega$  per al canal  ${}^3S_1$ .

De la figura, ja es pot suposar que només hi haurà estats lligats per als ajustaments amb “factors de forma fixats” i “factors de forma lliures”, ja que les parametritzacions de Florit donen tan sols un mínim molt poc pronunciat. El programa obté justament els resultats esperats.

	$p\Omega$		$n\Omega$	
	$E(\text{MeV})$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{fm})$
Factors de forma fixats	$-5,45 \cdot 10^{-2}$	27,9		
Factors de forma lliures	$-4,81 \cdot 10^{-1}$	6,91	$-7,69 \cdot 10^{-2}$	13,6

Taula 5: Energia i radi quadràtic mitjà d'un estat lligat  $^3S_1$  obtingudes per a totes les tries de potencial que n'admeten un.

Veiem que, per al cas  $p\Omega$ , la tria amb “factors de forma fixats” amb prou feines genera l'estat lligat, amb un radi molt gran, mentre que la tria amb “factors de forma lliures” dóna un estat una mica més estable.

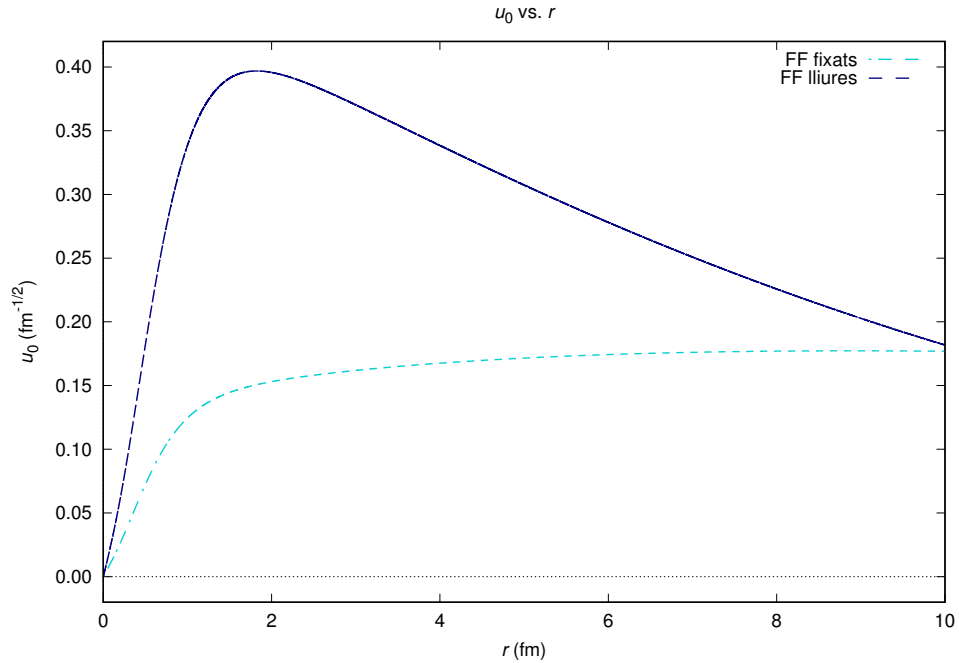


Figura 14: Funció d'ona radial reduïda dels estats lligats de la interacció  $p\Omega$  construïts amb les diverses tries de potencial al canal  $^3S_1$ .

Per al cas  $n\Omega$ , l'ajustament amb “factors de forma fixats” ja no és capaç de mantenir l'estat lligat, i l'ajustament amb “factors de forma lliures” quasi tampoc. Per tant, només ens queda un estat lligat, i amb una energia de lligam molt petita.

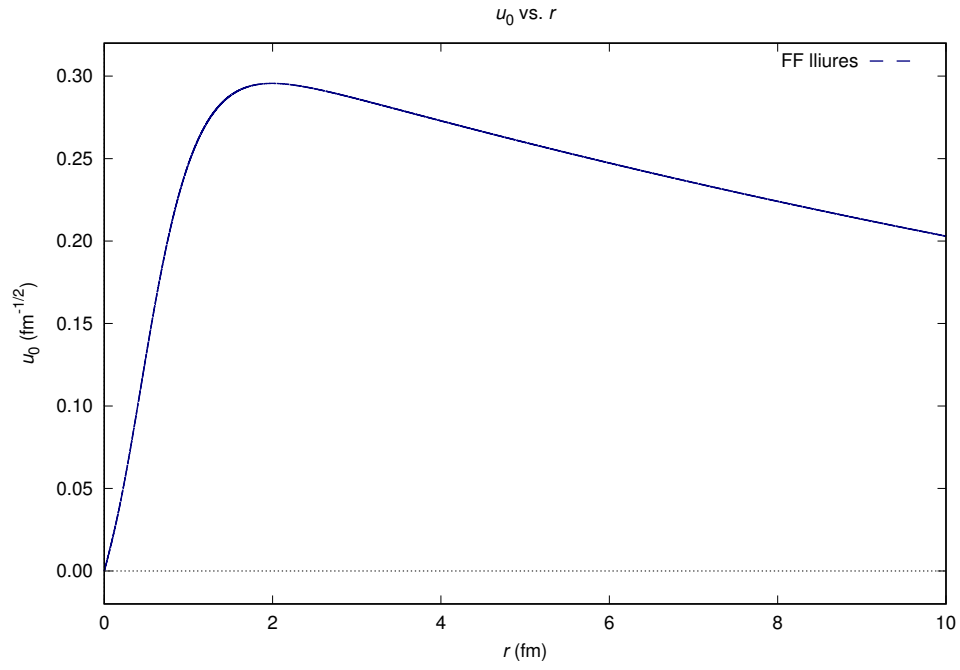


Figura 15: Funció d'ona radial reduïda dels estats lligats de la interacció  $n\Omega$  construïts amb les diverses tries de potencial al canal  ${}^3S_1$ .

### 3 Dispersió pel potencial $N\Omega$

Havent obtingut un potencial per a la interacció  $N\Omega$ , el següent pas és entendre la manera que es construirà les seves funcions d'ona de dispersió (això és, solucions no lligades de l'equació de Schrödinger). Per fer-ho, introduïrem els fonaments de la teoria de dispersió i llavors calcularem les funcions d'ona per als potencials [MM23, Joa75].

#### 3.1 Dispersió per potencials locals

Per dispersió ens referim al procés en què un objecte interactua amb un altre. En general, un considera un dels objectes com a dispersat, mentre que l'altre és tractat com el centre dispersor, usualment representat per un potencial de dispersió.

En el cas de la col·lisió de dos cossos, podem treballar al sistema de referència del centre de massa amb coordenades relatives. Per tant, la teoria general de dispersió per a una partícula dispersada i un potencial de dispersió també es pot fer servir, fent servir la massa relativa  $\mu$  en comptes de les masses de les partícules i fent servir coordenades relatives.

Al cas quàntic, així, la dispersió es descriu com a la transició des d'un estat quàntic a un altre. Considerem, en conseqüència, l'estat inicial  $|i\rangle$  el d'una partícula lliure; això és, una ona plana de moment  $\vec{k}$ . Per tant, per a l'hamiltonià de la partícula lliure  $\hat{H}_0$ , tenim

$$\hat{H}_0 |i\rangle = \frac{k^2}{2\mu} |i\rangle. \quad (3.1)$$

La dispersió s'introdueix per l'acció d'un potencial  $\hat{V}$  de rang finit  $R$ . Un treballa, doncs, amb l'hamiltonià  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{r})$  i intenta entendre l'acció de  $\hat{H}$  sobre l'estat inicial de partícula lliure  $|i\rangle$ .

Suposem que tenim la partícula dins una capsula cúbica de mida  $L$ . Llavors, la partícula lliure queda representada per

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle &= \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{L^{3/2}} \\ &= N e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Al final dels càlculs, prendrem el límit  $L \rightarrow \infty$  per reproduir el caràcter continu de l'estat. Suposant que el potencial de dispersió sigui real i local, tenim el comportament asimptòtic

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \gg R} N \left[ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}', \vec{k}) \right]. \quad (3.3)$$

Així, la funció d'ona esdevé una combinació de l'ona plana incident i una ona esfèrica, modulada per una funció  $f$ , l'amplitud de dispersió, que depèn dels moments inicial i final,  $\vec{k}$  i  $\vec{k}'$ , i que té la forma

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{\mu L^3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \vec{k}' | \vec{r}' \rangle \hat{V}(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \psi \rangle d\vec{r}'. \quad (3.4)$$

Assumint que el potencial també tingui simetria esfèrica, podem escriure  $\hat{V}(\vec{r}) = \hat{V}(r)$ . Per tant, a la regió de dispersió,  $0 < r < R$ , tenim l'equació de Schrödinger

$$-\frac{1}{2\mu} \nabla^2 \psi + \hat{V}(r) \psi = E \psi. \quad (3.5)$$

L'energia total és  $E = k^2/2\mu$ , ja que el procés de dispersió és elàstic. La funció d'ona té dependència en  $r$ , l'angle de dispersió  $\theta$  i  $\vec{k}$ , de manera que denotem  $\varphi(r, \theta)$ . Prenem les coordenades de manera que  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$  i podem, doncs, escriure el comportament asimptòtic com

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \gg R} N \left[ e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \right]. \quad (3.6)$$

### 3.1.1 Expansió en ones parcials

Considerant un potencial amb les assumpcions especificades, necessitem construir un conjunt complet de funcions pròpies. Escrivim l'hamiltonià en coordenades esfèriques, cosa que dona el problema de valors propis

$$\left[ -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \hat{r} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + \hat{V}(r) \right] \chi(r, \theta, \varphi) = E\chi(r, \theta, \varphi). \quad (3.7)$$

Com que els operadors  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$  i  $\hat{L}_z$  commuten, podem construir un conjunt complet de funcions pròpies caracteritzades pels seus valors propis,  $E$ ,  $l(l+1)$  i  $m$  respectivament; això és,

$$\begin{aligned} \hat{H}\chi &= E\chi, \\ \hat{L}^2\chi &= l(l+1)\chi, \\ \hat{L}_z\chi &= m\chi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Proposem una solució separable de la forma

$$\chi(r, \theta, \varphi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.9)$$

on  $u_l$  són funcions radials i  $Y_{lm}$  són els harmònics esfèrics. Introduint això a l'equació de Schrödinger (eq. (3.7)), obtenim una equació per a  $u_l$  que depèn tan sols de la coordenada radial,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - 2\mu\hat{V}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (3.10)$$

Requerim que  $\chi$  sigui finit a l'origen, de manera que cal imposar  $u_l(0) = 0$ . Com que la partícula és lliure per a  $r > R$ , per altra banda, la solució és una combinació de funcions esfèriques de Bessel de primer i segon tipus,  $j_l$  i  $n_l$ ,

$$u_l(r) = r(c_l' j_l(kr) + c_l'' n_l(kr)). \quad (3.11)$$

És més pràctic, però, escriure-les en termes de les funcions esfèriques de Hankel de primer i segon tipus, donades per  $h_l^1(x) = j_l(x) + i n_l(x)$  i  $h_l^2(x) = j_l(x) - i n_l(x)$ ,

$$u_l(r) = r(c_l^1 h_l^1(kr) + c_l^2 h_l^2(kr)). \quad (3.12)$$

Sabem, tanmateix, que la solució per a una partícula lliure no dispersada (això és, una ona plana) ve donada per  $e^{ikr \cos \theta}$  i conté components amb tots els valors possibles de  $l$ , seguint la fórmula de Rayleigh,

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (3.13)$$

on  $P_l$  són els polinomis de Legendre. Veiem que no hi ha dependència en  $\varphi$ , com esperem pel comportament asimptòtic discutit a la secció anterior.

Fent servir el comportament asimptòtic de les funcions de Hankel, obtenim l'expansió per a la fórmula de Rayleigh

$$e^{ikr \cos \theta} \xrightarrow{r \gg R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta). \quad (3.14)$$

Aquest comportament suggereix que podem escriure la solució per a  $r > R$  com a

$$\psi(r, \theta) = N \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta). \quad (3.15)$$

El seu comportament asimptòtic, substituint l'expressió de  $u_l$  amb funcions de Hankel, s'escriu

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \gg R} N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{ikr} [c_l^1 e^{ikr} - (-1)^l c_l^2 e^{-ikr}] P_l(\cos \theta). \quad (3.16)$$



### 3.1.2 Desfasaments

Prenent  $N = 1$  i  $c_l^1 = c_l^2 = 1/2$  recuperem el cas no dispersat, que és evident ja que aquesta tria ens retorna al cas de partícula lliure  $u_l(r) = r j_l(kr)$ . Aquesta situació succeeix sempre que prenguem  $c_l^1 = c_l^2$  (i per suposat ajustant la constant de normalització  $N$  al valor apropiat). Per això, el que és rellevant és la ràtio entre ambdós coeficients, que es pot escriure

$$\frac{c_l^1}{c_l^2} = e^{2i\delta_l}, \quad (3.17)$$

on  $\delta_l$  s'anomena desfasament, i és òbviament dependent de  $k$ . Podem, doncs, expressar el mateix comportament en termes d'aquesta nova quantitat,

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \gg R} N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{ikr} c_l [e^{2i\delta_l} e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos \theta). \quad (3.18)$$

Un pot identificar en aquesta expressió l'amplitud de dispersió, que s'escriu llavors com

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} P_l(\cos \theta). \quad (3.19)$$

Ens referim al factor  $e^{2i\delta_l}/2ik$  com a amplitud de dispersió de l'ona parcial,  $f_l$ .

Per donar un significat físic, fent servir el comportament asimptòtic veiem que  $\delta_l$  és, de fet, la diferència entre la fase de la funció d'ona i la de l'ona incident. A la situació sense dispersió, obtenim  $\delta_l = 0$ , cosa que retorna una partícula lliure per a tot l'espai. Com que, per a  $r > R$ , tenim una partícula lliure, el desfasament  $\delta_l$  és el resultat de la interacció que la partícula experimenta per a  $r < R$ .

Fent servir la definició del desfasament, podem escriure la part radial de la funció d'ona a la regió  $r > R$ ,

$$\begin{aligned} u_l(r) &= \frac{r}{2} [e^{2i\delta_l} h_l^1(kr) + h_l^2(kr)] \\ &= r e^{i\delta_l} [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

This way, the mathematical description of the situation is given exclusively by the phase shift, which reduces the problem to calculating just this quantity.

Pel què fa a calcular el desfasament, ho podem fer en termes de la derivada logarítmica adimensionalitzada a  $R^- = R - \varepsilon$  (per a cert  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  petit),  $\beta_l = R u_l'(R)/u_l(R)$ , igualant-la a l'expressió coneguda per a  $R^+ = R + \varepsilon$ , cosa que dóna

$$\cot \delta_l = \frac{k R n_l'(kR) - (\beta_l - 1) n_l(kR)}{k R j_l'(kR) - (\beta_l - 1) j_l(kR)}. \quad (3.21)$$

Hi ha una darrera informació que es pot obtenir dels desfasaments i ens interessa per a aquest treball. És un resultat conegut de la teoria de dispersió quàntica que, per a potencials esfèrics  $V$  tals que

$$\int_0^\infty dr r |V(r)| < \infty, \quad (3.22)$$

el desfasament compleix

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \begin{cases} (n_l + 1/2)\pi & \text{si hi ha un estat mig lligat, i} \\ n_l\pi & \text{en cas contrari;} \end{cases} \quad (3.23)$$

on  $n_l$  és el nombre d'estats lligats amb nombre de moment relatiu  $l$ . Anomenem un estat “mig lligat” si la seva funció d'ona decau cap a zero però no pot de pressa per a ser de quadrat integrable [Zho06]. Havent obtingut els desfasaments, doncs, hauríem de poder determinar si hi ha estats lligats. Això, realment, ja ho hem fet a la secció anterior, de manera que això només és una comprovació més.

## 3.2 Dispersió $n\Omega$

Havent desenvolupat el formalisme per a la dispersió per potencials de curt abast, podem calcular les funcions d'ona de dispersió per als potencials de la secció anterior i estudiar-les. Per fer-ho, construïm les solucions per als diversos potencials amb un codi de Fortran 90 (vegis la secció A.2).

### 3.2.1 Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^5S_2$

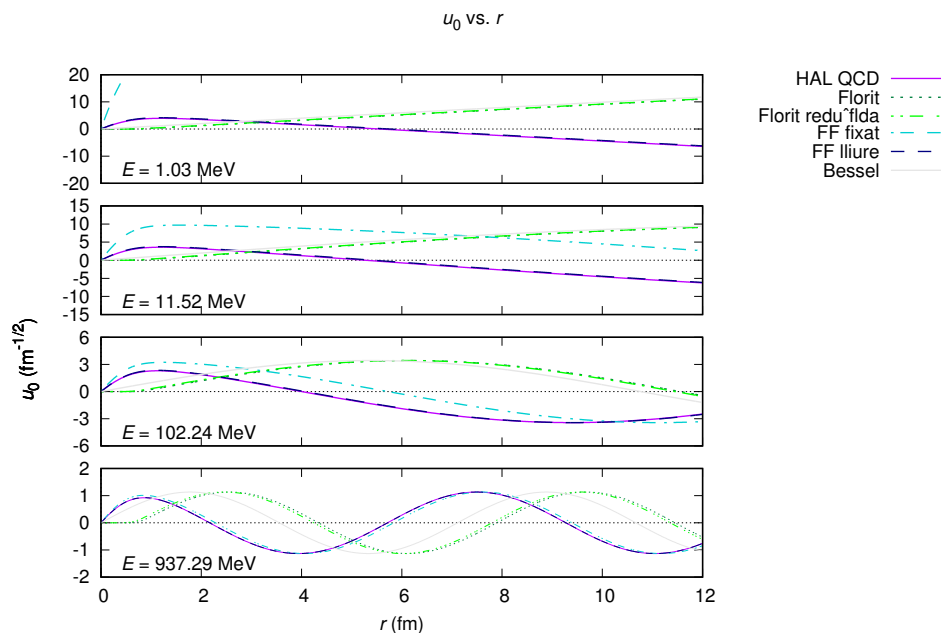


Figura 16: Funcions d'ona radials per a diverses energies, obtingudes fent servir els potencials de la secció anterior per al canal  ${}^5S_2$   $n\Omega$ .

Un pot observar, als perfils de les funcions d'ona, la similitud esperada entre els obtinguts per al potencial de HAL QCD i l'ajustament de “factors de forma lliures”, així com un comportament qualitativament proper, tot i que quantitativament distant, per a l'ona amb “factors de forma fixos”. Pel què fa als potencials de Florit, el seu nucli repulsiu explica el seu comportament quasi-pla per a radis molt petits.

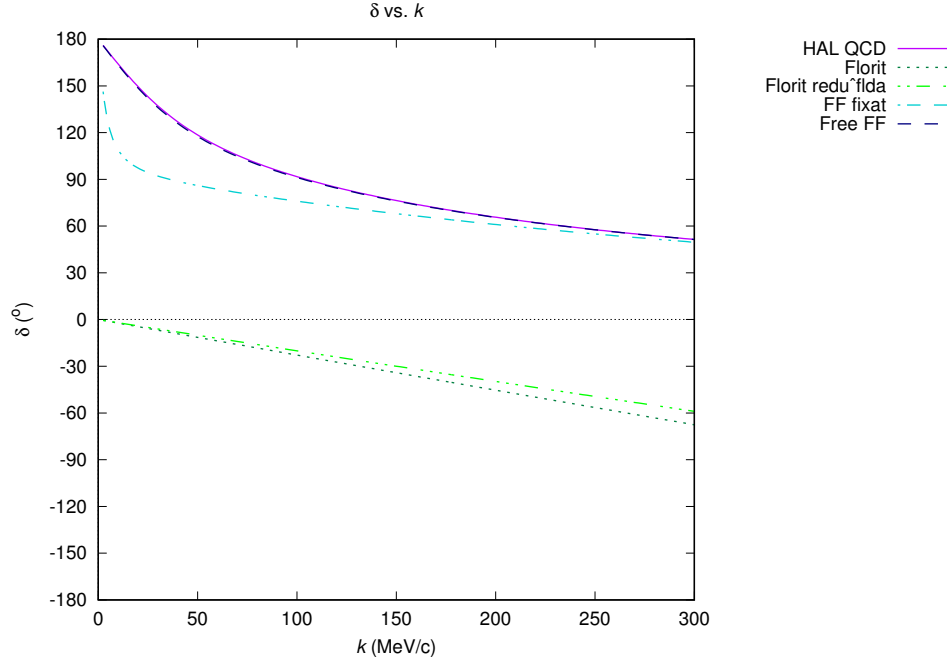


Figura 17: Desfasaments per al canal  ${}^5S_2$   $n\Omega$ , obtinguts usant els potencials discutits a la secció 1.

El comportament explicat al paràgraf anterior també es pot interpretar en termes de desfasaments. Notablement, pel teorema de Levinson, el fet que tots els potencials comencin a  $180^\circ$ , llevat de les parametritzacions de Florit, és un signe de la presència d'un estat lligat per a aquests potencials. Això coincideix amb els estats lligats trobats a la secció 1.

### 3.2.2 Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^3S_1$

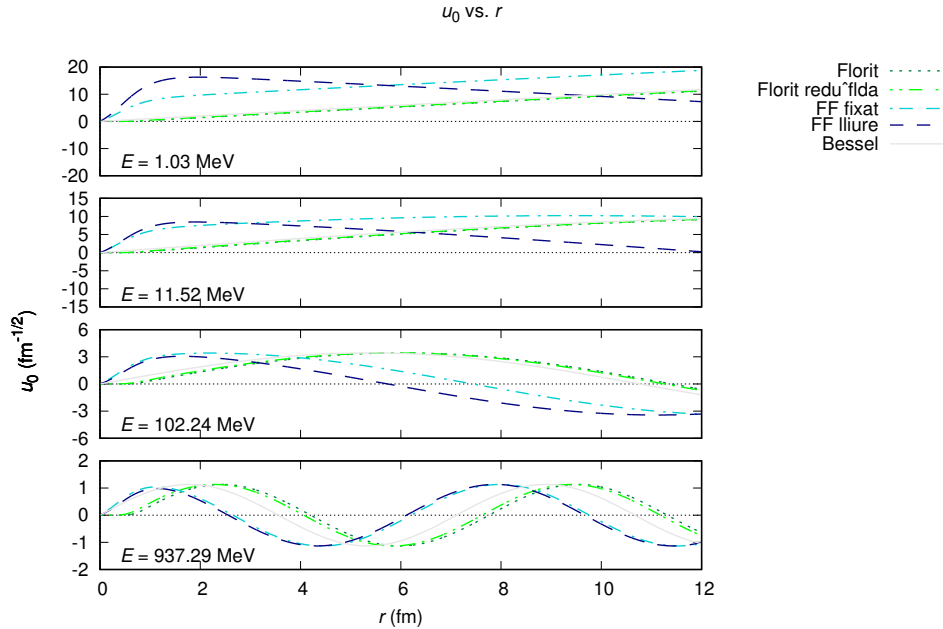


Figura 18: Funcions d'ona radials per a diverses energies, obtingudes fent servir els potencials de la secció anterior per al canal  ${}^3S_1$   $n\Omega$ .

Altre cop observem el valor moderat i previsible dels potencials amb factor de forma i l'efecte del nucli fortament repulsiu de les parametritzacions de Florit.

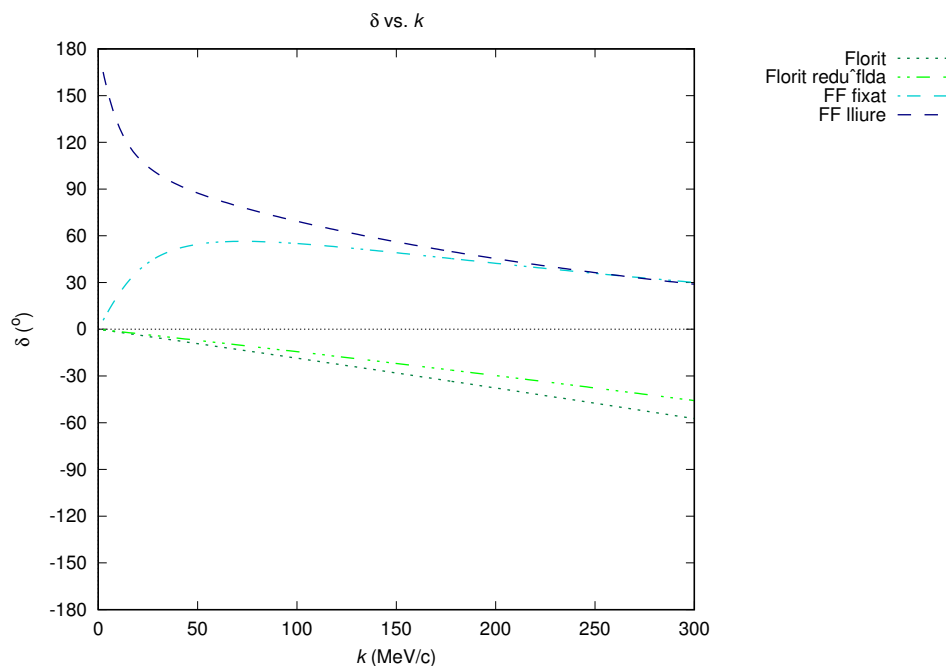


Figura 19: Desfasaments per al canal  ${}^3S_1$   $n\Omega$ , obtinguts usant els potencials de la secció anterior.

En aquest cas, veiem que la parametrització amb “factors de forma fixos” té un desfasament començant a  $0^\circ$ . Això indica, altre cop pel teorema de Levinson, que no admet un estat lligat, mentre que la parametrització amb “factors de forma lliures” encara ho fa. Això, altre cop, coincideix amb els estats lligats trobats a la secció anterior.

### 3.3 Dispersió sota el potencial de Coulomb

El potencial de Coulomb, degut al seu característic decaïment lent  $r^{-1}$ , no pot ser tractat localment. Per tant, no es pot analitzar directament amb la teoria de dispersió que hem construït per a potencials locals.

Tanmateix, l'equació de Schrödinger per a partícules sota el potencial de Coulomb es pot resoldre analíticament. Per tant, podem construir la teoria de dispersió sobre les funcions d'ona de Coulomb en comptes de les funcions d'ona de partícula lliure. Llavors, tractem el potencial local de la mateixa manera que ho hem fet al cas de la partícula lliure.

Això resultarà en una expressió molt similar per a les diverses quantitats del sistema, en particular per a la funció d'ona i els desfasaments, a la que tan sols caldrà canviar les funcions esfèriques de Bessel (que corresponen al cas de la partícula lliure) per les funcions que caracteritzen la dispersió de Coulomb [MM23, Joa75].

#### 3.3.1 Solució analítica per al potencial de Coulomb

Com hem comentat, necessitem les funcions d'ona per al potencial de Coulomb sol, que ens donaran el comportament asimptòtic per a les solucions dispersades (altre cop, amb un desfasament). Tot i que podríem sentir la temptació de resoldre l'equació de Schrödinger en coordenades esfèriques (ja que el potencial de Coulomb té simetria esfèrica), serà més senzill resoldre-la en coordenades parabòliques;

això és, donades per

$$\begin{cases} \xi = r(1 + \cos \varphi), \\ \eta = r(1 - \cos \varphi), \\ \varphi = \arctan y/x. \end{cases} \quad (3.24)$$

Aquestes coordenades s'anomenen "parabòliques" pel fet que les superfícies amb  $\xi$  o  $\eta$  constants són paraboloides de revolució. En aquest sistema, el laplacà s'escriu

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.25)$$

Així, l'equació de Schrödinger pren la forma

$$-\frac{2}{\mu(\xi + \eta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{2Z_1 Z_2 \alpha}{\xi + \eta} \psi = E\psi, \quad (3.26)$$

on  $\alpha$  és la constant d'estructura fina i  $Z_1, Z_2$  són les càrregues de la partícula dispersada i el centre dispersor en unitats de  $e$ . Noti's que no hem inclòs la derivada respecte  $\varphi$ , ja que la solució ha d'exhibir simetria azimuthal. Per tant, podem proposar una solució producte  $\psi(\xi, \eta) = f(\xi)g(\eta)$ , que ens porta a dues equacions diferents,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) + [(k/2)^2 \xi - \nu_1] f &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) + [(k/2)^2 \eta - \nu_2] g &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

on  $k = \sqrt{2\mu E}$  i  $\nu_1, \nu_2$  són tals que  $\nu_1 + \nu_2 = \gamma k$ , i hem definit  $\gamma = \mu Z_1 Z_2 \alpha / k$ . Si prenem  $\nu_1 = ik/2$ , veiem que

$$f(\xi) = e^{ik\xi/2} \quad (3.28)$$

és una solució per a la seva equació diferencial. Llavors, podem definir una nova funció  $h$  tal que  $g(\eta) = e^{-ik\eta/2} h(\eta)$ , i obtenir l'equació diferencial

$$\eta \frac{d^2 h}{d\eta^2} + (1 - ik\eta) \frac{dh}{d\eta} - \gamma k h = 0, \quad (3.29)$$

que és coneguda com a equació de Kummer-Laplace, i té solució

$$h(\eta) = C {}_1F_1(-i\gamma; 1; ik\eta), \quad (3.30)$$

on  ${}_1F_1$  és la funció hipergeomètrica confluent.

Això ja acaba la feina, ja que ara només ens cal posar tots junts aquests resultats i retornar a les coordenades esfèriques, cosa que ens dona la solució

$$\psi(r, \theta, \varphi) = e^{-\pi\gamma/2} \Gamma(1 + i\gamma) e^{ikr \cos \theta} {}_1F_1(-i\gamma; 1; ikr(1 - \cos \theta)). \quad (3.31)$$

El valor per a  $C$  queda fixat imposant la condició que obtinguem densitat de probabilitat 1 a l'espai de configuració.

### 3.3.2 Expansió en ones parcials per al potencial de Coulomb

Ara que tenim la solució per al potencial de Coulomb, farem una expansió en ones parcials que, com al cas de la partícula lliure, serà útil per entendre l'efecte del potencial local. Per fer-ho, escriurem l'equació de Schrödinger en coordenades esfèriques,

$$\left[ -\frac{1}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \hat{r} + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{r} \right] \chi(r, \theta, \varphi) = E \chi(r, \theta, \varphi). \quad (3.32)$$

Altres cop, els operadors  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$  i  $\hat{L}_z$  commuten, de manera que  $\chi$  són novament funcions pròpies d'aquests operadors.

També com hem fet per al cas de la partícula lliure, proposem una solució separable de la forma

$$\chi(r, \theta, \varphi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.33)$$

i obtenim la mateixa equació de Schrödinger radial, aquest cop per al cas particular del potencial de Coulomb,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\mu Z_1 Z_2 \alpha}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (3.34)$$

Triem els eixos, altre cop, de manera que  $\vec{r} \cdot \vec{k} = rz$ ; això és, posem l'eix  $z$  en la direcció i sentit del vector d'ona  $\vec{k}$ . Si substituïm  $u_l(r) = e^{ikr}(kr)^{l+1}v_l(-2ikr)$  i fem el canvi de variable  $\xi = -2ikr$ , l'equació radial esdevé

$$\xi \frac{d^2 v_l}{d\xi^2} + (2l+2-\xi) \frac{dv_l}{d\xi} - (l+1+i\gamma)v_l = 0, \quad (3.35)$$

Reconeixem, novament, l'equació de Kummer-Laplace, i obtenim la solució

$$v_l(r) = C_l {}_1F_1(l+1+i\gamma; 2l+2; -2ikr). \quad (3.36)$$

Llavors, l'expressió per a  $u_l$  és la funció coneguda com a funció de Coulomb esfèrica regular,  $F_l$ ,

$$\begin{aligned} u_l(r) &= F_l(k, r) \\ &= C_l e^{ikr} (kr)^{l+1} {}_1F_1(l+1+i\gamma; 2l+2; -2ikr). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Encara necessitem obtenir el coeficient  $C_l$  per a la funció, de manera que fem servir el comportament asimptòtic, per al qual obtenim

$$F_l(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_l \frac{e^{\pi\gamma/2 + i\sigma_l} (2l+1)!}{2^l \Gamma(l+1+i\gamma)} \sin(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr + \sigma_l), \quad (3.38)$$

on  $\sigma_l$  és el desfasament de Coulomb, que es pot trobar comparant la solució amb el cas de partícula lliure en aquest règim, i és  $\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\gamma)$ .

Novament per analogia amb el cas de partícula lliure, requerim que

$$F_l(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sin(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr + \sigma_l), \quad (3.39)$$

cosa que fixa el coeficient  $C_l$  a

$$C_l = \frac{2^l e^{-\pi\gamma/2} |\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!}, \quad (3.40)$$

de manera que la funció de Coulomb esfèrica regular és

$$F_l(k, r) = \frac{2^l e^{-\pi\gamma/2} |\Gamma(l+1+i\gamma)|}{(2l+1)!} e^{ikr} (kr)^{l+1} {}_1F_1(l+1+i\gamma; 2l+2; -2ikr). \quad (3.41)$$

Des d'aquí, podem normalitzar la funció d'ona com al cas de la partícula lliure per obtenir densitat de probabilitat 1 a l'espai de configuració, i obtenir la solució

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{C}_l e^{ikr} k^{l+1} r^l {}_1F_1(l+1+i\gamma; 2l+2; -2ikr) P_l(\cos \theta), \quad (3.42)$$

on els coeficients  $\tilde{C}_l$  són obtinguts per la normalització fent servir l'ortogonalitat dels polinomis de Legendre, i són

$$\tilde{C}_l = k^{-1} (2l+1)! e^{i\sigma_l} C_l. \quad (3.43)$$

Substituïnt-los a la funció d'ona, tenim

$$\psi(r, \theta, \varphi) = (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\sigma_l} F_l(k, r) P_l(\cos \theta). \quad (3.44)$$

Veïem que això és en completa analogia a l'ona plana, de la que difereix tan sols en el fet que té  $(kr)^{-1} F_l(k, r)$  en comptes de la funció de Bessel  $j_l(kr)$ .

Ja que hem produït un anàleg per a les funcions esfèriques de Bessel de primer tipus, ens serà útil tenir-ne un per a les de segon tipus. Definirem la funció de Coulomb esfèrica irregular,  $G_l$ ,

$$G_l(k, r) = C_l e^{ikr} (kr)^{l+1} G(l+1+i\gamma; 2l+2; -2ikr), \quad (3.45)$$

on  $G$  és una altra solució (irregular) a l'equació de Kummer-Laplace.

Fent servir els mateixos valors per a les constants, la funció té comportament asimptòtic

$$G_l(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\cos(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr + \sigma_l). \quad (3.46)$$

Per tant, l'anàleg de  $n_l(kr)$  és  $(kr)^{-1} G_l(k, r)$ .

### 3.3.3 Desfasaments de Coulomb

Havent construït la solució per al potencial de Coulomb, computarem l'efecte del potencial central local a l'equació. D'aquesta manera, ara ens cal considerar l'equació de Schrödinger radial

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\mu Z_1 Z_2 \alpha}{r} - 2\mu \hat{V}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0. \quad (3.47)$$

Com que el camp local s'esvaeix sobre cert  $R$ , la solució serà una ona coulombiana per a  $r > R$ ; això és

$$u_l(r) = c_l' F_l(k, r) + c_l'' G_l(k, r). \quad (3.48)$$

Podem construir l'anàleg a les funcions de Hankel com a  $H_l^\pm = e^{\mp i\sigma_l} (F_l \pm iG_l)$ . Així, podem reescriure aquesta factorització

$$u_l(r) = a_l [H_l^-(k, r) + e^{2i\Delta_l} H_l^+(k, r)]. \quad (3.49)$$

Això és útil, ja que el comportament asimptòtic ara esdevé

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} i a_l [e^{-i(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr)} - e^{2i\Delta_l} e^{i(kr - l\pi/2 - \gamma \ln 2kr)}]. \quad (3.50)$$

Si el potencial local és real, llavors  $\Delta_l$  també és real. En absència de tal potencial local, tenim  $\Delta_l = \sigma_l$ , de manera que posarem  $\Delta_l = \sigma_l + \hat{\delta}_l$ . Així,  $\sigma_l$  és el desfasament degut al potencial de Coulomb, mentre que  $\hat{\delta}_l$  és el desfasament degut al potencial local respecte l'ona coulombiana.

Podem adaptar el mateix procediment que hem desenvolupat per al càlcul del desfasament, que en aquest cas quedarà

$$\cot \hat{\delta}_l = \frac{k R G_l'(kR) - \beta_l G_l(kR)}{k R F_l'(kR) - \beta_l F_l(kR)}, \quad (3.51)$$

si escrivim  $\beta_l = R u_l'(R) / u_l(R)$  (la derivada logarítmica adimensionalitzada).

Fent servir la definició d'aquest desfasament i normalitzant l'ona de manera que es comporti com una funció de Coulomb amb una ona dispersada (asimptòticament) obtenim l'expressió per a la funció d'ona radial reduïda a  $r > R$ ,

$$u_l(r) = e^{i\Delta_l} [\cos \hat{\delta}_l F_l(k, r) - \sin \hat{\delta}_l G_l(k, r)]. \quad (3.52)$$

## 3.4 Dispersió $p\Omega$

Ara que tenim una manera d'introduir la interacció de Coulomb als nostres càlculs de dispersió, ens podem enfrontar al càlcul numèric de la dispersió  $p\Omega$ . El codi desenvolupat és completament anàleg a l'usat per a les funcions d'ona neutròniques (veure la secció A.2).

### 3.4.1 Funcions d'ona de dispersió $p\Omega$ al canal ${}^5S_2$

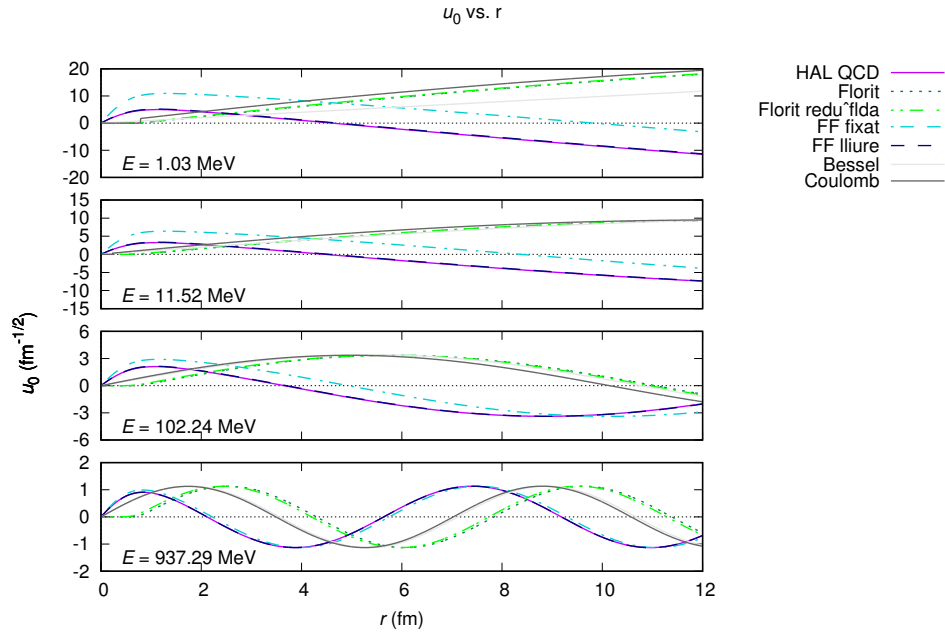


Figura 20: Funcions d'ona radials per a diverses energies, obtingudes fent servir els potencials de la secció anterior per al canal  ${}^5S_2$   $p\Omega$ .

Es pot observar, previsiblement, un comportament qualitativament similar al del cas neutrònic. Això també es reflecteix en els desfasaments.

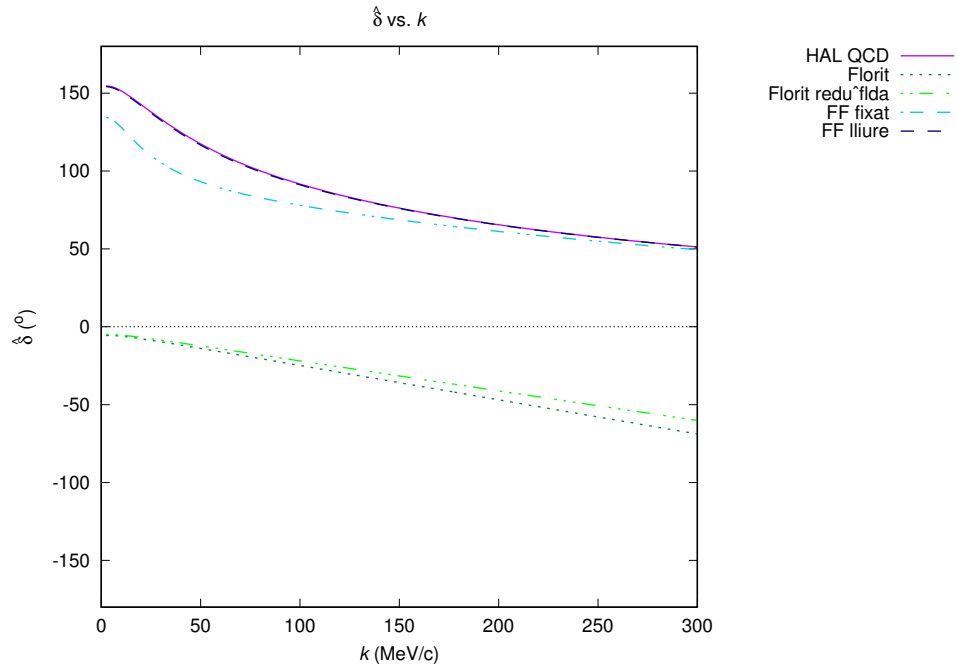


Figura 21: Desfasaments per al canal  ${}^5S_2$   $p\Omega$ , obtinguts usant els potencials de la secció anterior.



### 3.4.2 Funcions d'ona de dispersió $n\Omega$ al canal ${}^3S_1$

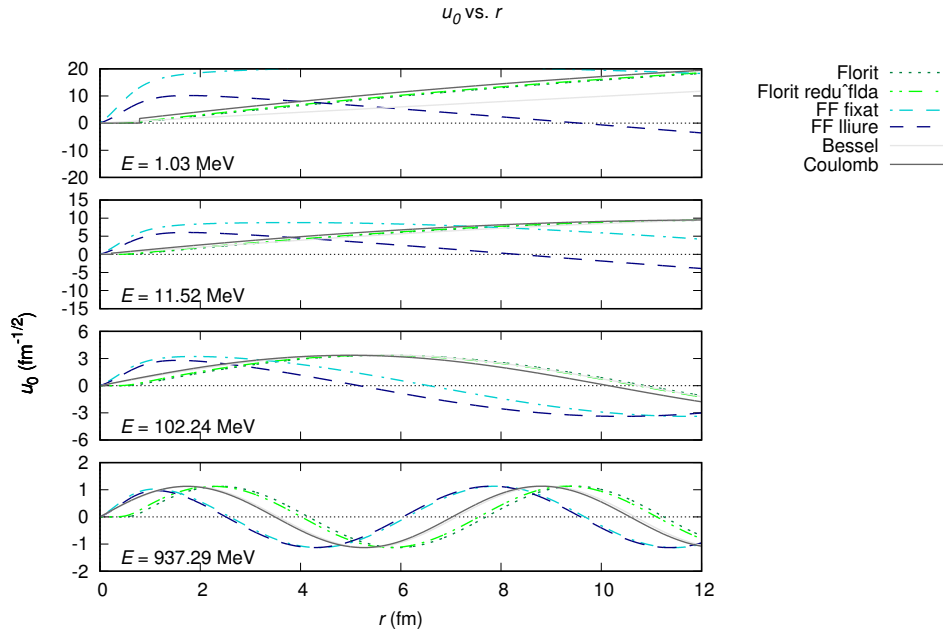


Figura 22: Funcions d'ona radials per a diverses energies, obtingudes fent servir els potencials de la secció anterior per al canal  ${}^3S_1$   $p\Omega$ .

Novament, no es troba gaire diferència qualitativa entre aquest cas i el neutrònic. Una diferència notable es pot veure a la gràfica del desfasament, on es veu que l'ajustament amb “factors de forma fixos” ja no té el seu desfasament començant a zero.

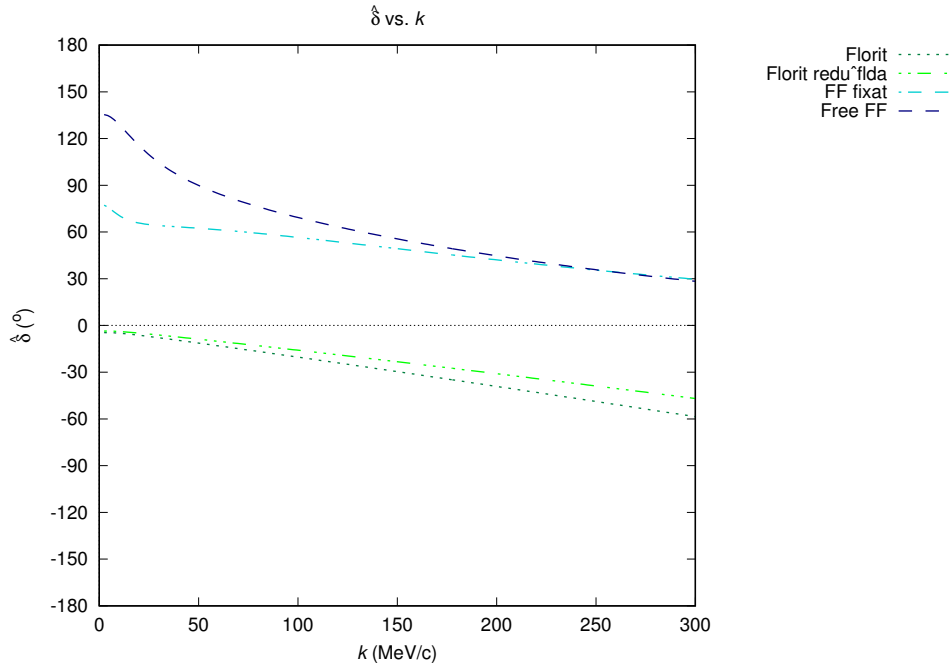


Figura 23: Desfasaments per al canal  ${}^3S_1$   $p\Omega$ , obtinguts usant els potencials de la secció anterior.

Com hem notat, aquests desfasaments són molt similars als no coulombians. Fins i tot si sembla que

no hi hem guanyat gaire introduint el formalisme de Coulomb, cal fer-ho per al càlcul femtoscòpic.

## 4 Femtoscòpia de la interacció $N\Omega$

Com havíem esmentat a la introducció, fer experiments de dispersió amb barions  $\Omega$  és força difícil, ja que és complicat produir i mantenir un feix d'aquestes partícules. Per tant, cal considerar una enfocament diferent [FMV21].

La quantitat fonamental estudiada a la femtoscòpia és la funció de correlació, que s'expressa en termes del moment relatiu  $\vec{k}$ . Al sistema de referència del centre de massa, ve donada per la fórmula de Koonin-Pratt,

$$C(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} S(\vec{r}) |\psi(\vec{r}, \vec{k})|^2 d\vec{r}. \quad (4.1)$$

El primer factor a l'integrand descriu la font que emet les partícules, mentre que el segon factor representa la interacció fent servir la funció d'ona. La font, doncs, ve caracteritzada per una distància  $r_0$ , que dona una escala de distància a la que els parells interactuants seran creats. Així, la font és una densitat de probabilitat a  $\mathbb{R}^3$ .

L'interessant, però, és el fet que també podem obtenir la funció de correlació directament dels resultats experimentals. L'obtenim com a la fracció de la distribució en moment relatiu de les partícules produïdes al mateix esdeveniment  $N$  respecte una distribució de referència obtinguda combinant partícules produïdes en col·lisions diferents,  $N_{\text{ref}}$ ,

$$C_{\text{exp}}(\vec{k}) = \xi(\vec{k}) \frac{N(\vec{k})}{N_{\text{ref}}(\vec{k})}. \quad (4.2)$$

$\xi$  representa les correccions degudes a efectes experimentals.

Aquesta funció de correlació experimental queda distorsionada per dos mecanismes. La mostra de parells pot contenir no només partícules primàries sinó també secundàries o mal identificades. Això afegirà algunes contribucions no genuïnes a la funció de correlació. Es pot trobar més detalls a [FMV21].

### 4.1 Generalitats sobre funcions de correlació

Les característiques de la interacció queden marcades a la funció de correlació. En particular, l'efecte de la interacció als estats finals és més obvi per a valors petits de  $\vec{k}$ . Una interacció repulsiva, amb valors positius dels potencials locals, comporta una funció de correlació amb  $C(\vec{k}) < 1$ . Al contrari, una interacció atractiva donarà valors de la funció de correlació amb  $C(\vec{k}) > 1$ .

Aquesta idea intuïtiva, tanmateix, canvia si l'atracció és prou forta com per admetre un estat lligat. En aquest cas, la funció de correlació té una davallada depenent de l'energia de lligam. Això és deu al fet que els parells que formen l'estat lligat no apareixen a la funció de correlació, ja que són en un estat final diferent. Si l'energia de lligam és prou gran (això és, si el potencial és prou atractiu), la correlació tindrà característiques similars al cas repulsiu.

Mides diferents de la font també poden afectar la força de les correlacions, és clar. Ressonàncies, interferències i altres efectes també poden aparèixer a diversos rangs de  $\vec{k}$ .

La sensibilitat del mètode per estudiar la interacció forta depèn de la superposició de la funció d'ona amb la distribució de probabilitat font. Els radis útils depenen de l'experiment, però usualment cauen a l'ordre de magnitud de  $r_0 \sim 1$  fm per a pp, per exemple.

Per calcular la fórmula de Koonin-Pratt (4.1), al cas de fonts amb simetria esfèrica, podem pensar a integrar directament sobre l'expansió en ones parcials

$$\psi(\vec{r}, \vec{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{u_l(r, k)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (4.3)$$

on  $\theta$  és l'angle polar entre  $\vec{r}$  i  $\vec{k}$ , i  $P_l$  són els polinomis de Legendre. Prenent el mòdul quadrat de

l'expansió dona directament

$$\begin{aligned}
|\psi(\vec{r}, \vec{k})|^2 &= \sum_{l_1=0}^{\infty} i^{l_1} (2l_1 + 1) \frac{u_{l_1}(r, k)}{r} P_{l_1}(\cos \theta) \sum_{l_2=0}^{\infty} i^{-l_2} (2l_2 + 1) \frac{u_{l_2}(r, k)^*}{r} P_{l_2}(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)^2 |u_l(r, k)|^2 P_l(\cos \theta)^2 \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=l_1+1}^{\infty} (2l_1 + 1)(2l_2 + 1) \operatorname{Re}[u_{l_1}(r, k) u_{l_2}(r, k)^*] P_{l_1}(\cos \theta) P_{l_2}(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ara, la simetria esfèrica de la font indica que el fet que  $S(\vec{r})$  és una densitat de probabilitat a  $\mathbb{R}^3$  és equivalent a que  $4\pi r^2 S(\vec{r})$  sigui una densitat de probabilitat a  $[0, \infty)$ . Llavors, integrarem aquesta complicada equació fent servir l'ortogonalitat dels polinomis de Legendre, que es pot escriure

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}, \tag{4.5}$$

ja que ara són l'únic factor no radial que queda. Per tant, totes les integrals respecte  $d\cos \theta$  s'esvaeixen per al segon terme, i per al primer terme només s'afegeix un factor. Llavors, tenim una nova expressió per a la funció de correlació,

$$C(\vec{k}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \int_0^{\infty} S(r) |u_l(r, k)|^2 dr. \tag{4.6}$$

Tantmateix, aquesta expressió és prou difícil de calcular numèricament, i podem trobar formes aproximades més pràctiques.

#### 4.1.1 Reducció de la fórmula de Koonin-Pratt per al cas sense Coulomb

A l'hora de fer els càlculs, convé reduir la fórmula de Koonin-Pratt de manera que poguem calcular una bona aproximació fent servir només el mode  $s$  de la funció d'ona, altre cop al cas de fonts amb simetria esfèrica.

Sense interaccions, la funció d'ona esdevindria una ona plana  $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$  i les ones parcials serien  $u_l(r, k) = (2l + 1)i^l j_l(kr)$ , on  $j_l$  són les funcions de Bessel esfèriques de primer tipus. Aquesta és la idea rere l'aproximació: suposem que la interacció afecta només el mode amb  $l = 0$  i els modes  $\varphi_l$  amb  $l \in \{1, 2, \dots\}$  queden inalterats; això és, són funcions de Bessel. En aquest cas, com que  $P_0(x) = 1$  per definició, tenim

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{r}, \vec{k}) &= \frac{u_0(r, k)}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} (2l + 1)i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{u_0(r, k)}{r} - j_0(r, k) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \\
&= \frac{u_0(r, k)}{r} - j_0(kr) + \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

on el darrer pas és senzillament la identitat de Rayleigh.

Per calcular la fórmula de Koonin-Pratt (4.1), necessitem els mòduls quadrats de la funció d'ona; és a dir,

$$\begin{aligned}
|\psi(\vec{r}, \vec{k})|^2 &= (\operatorname{Re} \psi(\vec{r}, \vec{k}))^2 + (\operatorname{Im} \psi(\vec{r}, \vec{k}))^2 \\
&= (\operatorname{Re} u_0(r, k)/r - j_0(kr) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}))^2 + (\operatorname{Im} u_0(r, k)/r + \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}))^2 \\
&= 1 + |u_0(r, k)/r|^2 + (j_0(kr))^2 + 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \operatorname{Re} u_0(r, k)/r \\
&\quad + 2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \operatorname{Im} u_0(r, k)/r - 2j_0(kr) \operatorname{Re} \varphi_0(r, k)/r - 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) j_0(kr).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Quan integrem l'expressió, tenim en compte que  $\vec{r} \cdot \vec{k} = rk \cos \theta$ , de manera que, expressant  $\vec{r}$  en termes de  $\theta$ , obtenim  $d\vec{r} = 2\pi r^2 dr d\cos \theta$  (el factor  $2\pi$  apareix en integrar respecte l'altra component invariant, respecte la qual l'integrand és invariant). Integrant respecte  $d\cos \theta$ , apareixeran només integrals dels tres tipus següents:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\cos \theta &= 2, \\ \int_{-1}^1 \sin(kr \cos \theta) d\cos \theta &= 0, \\ \int_{-1}^1 \cos(kr \cos \theta) d\cos \theta &= 2 \frac{\sin(kr)}{kr} \\ &= 2j_0(kr); \end{aligned} \tag{4.9}$$

de manera que els termes amb sinus desapareixen i el darrer terme de la penúltima línia es cancel·la amb el penúltim terme de la darrera línia. Per tant, només queda

$$\begin{aligned} C(\vec{k}) &= 4\pi \int_0^\infty r^2 S(r) [1 + |u_0(r, k)/r|^2 - (j_0(kr))^2] dr \\ &= 1 + 4\pi \int_0^\infty S(r) [|u_0(r, k)|^2 - (rj_0(kr))^2] dr, \end{aligned} \tag{4.10}$$

on al darrer pas hem fet servir la normalització de la font.

#### 4.1.2 Reduction of the Koonin-Pratt formula for the Coulomb case

For the Coulomb case, we perform again an expansion of the wave function in partial waves,

$$\psi(\vec{r}, \vec{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{u_l(r, k)}{r} P_l(\cos \theta), \tag{4.11}$$

but in this case, the wave functions without interactions is not a plane wave, but a Coulomb wave. We will again apply the  $s$ -wave approximation, and we get

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, \vec{k}) &= \frac{u_0(r, k)}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} e^{i\sigma_l} i^l \frac{2l+1}{kr} F_l(k, r) P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{u_0(r, k)}{r} - e^{i\sigma_0} \frac{F_0(k, r)}{kr} + \sum_{l=0}^{\infty} e^{i\sigma_l} i^l \frac{2l+1}{kr} F_l(k, r) P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{u_0(r, k)}{r} - e^{i\sigma_0} \frac{F_0(k, r)}{kr} + e^{-\pi\gamma/2} \Gamma(1+i\gamma) e^{ikr \cos \theta} {}_1F_1(-i\gamma; 1; ikr(1-\cos \theta)), \end{aligned} \tag{4.12}$$

where  $\gamma$  is the Sommerfeld parameter.

We'll label the last term  $\psi_c$ , for simplicity purposes. In this case, the difference lays in the fact that the wave function is not modulus one in general, and its real and imaginary parts are not so simple. For the squared modulus, we get

$$\begin{aligned} |\psi(\vec{r}, \vec{k})|^2 &= (\text{Re } \psi(\vec{r}, \vec{k}))^2 + (\text{Im } \psi(\vec{r}, \vec{k}))^2 \\ &= |\psi_c(r, k)|^2 + |u_0(r, k)/r|^2 + |F_0(k, r)/kr|^2 + 2 \text{Re } \psi_c(\vec{r}, \vec{k}) \text{Re } u_0(r, k)/r \\ &\quad + 2 \text{Im } \psi_c(\vec{r}, \vec{k}) \text{Im } u_0(r, k)/r - 2 \cos \sigma_0 \text{Re } F_0(k, r) [\text{Re } u_0(r, k)/r + \text{Re } \psi_c(\vec{r}, \vec{k})]/kr \\ &\quad - 2 \sin \sigma_0 \text{Im } F_0(k, r) [\text{Im } u_0(r, k)/r + \text{Im } \psi_c(\vec{r}, \vec{k})]/kr. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Under angular integration, all terms in the expansion of  $\psi_c$  vanish except for the  $l = 0$  one will vanish due to the ortogonality of the Legendre polynomials. The remaining term can be cancelled with the other factors and we get a similar reduction for the Koonin-Pratt formula (4.1),

$$\begin{aligned} C(\vec{k}) &= \int_{\mathbb{R}^3} S(r) |\psi_c(\vec{r}, \vec{k})|^2 d\vec{r} + 4\pi \int_0^\infty S(r) [|u_0(r, k)|^2 - |F_0(k, r)/k|^2] dr \\ &= 2\pi e^{-\pi\gamma} |\Gamma(1 + i\gamma)|^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty r^2 S(r) |{}_1F_1(-i\gamma; 1; ikr(1 - \cos\theta))|^2 dr \\ &\quad + 4\pi \int_0^\infty S(r) [|u_0(r, k)|^2 - |F_0(k, r)/k|^2] dr. \end{aligned} \quad (4.14)$$

## 4.2 Funcions de correlació de la interacció $N\Omega$

Ara que ja hem desenvolupat el formalisme de les funcions de correlació, ja podem calcular les funcions de correlació per al parell  $N\Omega$ . Per fer-ho, cal considerar que estem operant amb múltiples canals d'interacció. En particular, hem considerat els canals amb  $L = L' = 0$ ,

$$\begin{aligned} {}^3S_1 &\rightarrow {}^3S_1, \\ {}^5S_2 &\rightarrow {}^5S_2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Fent una assumpció d'equiprobabilitat a la creació del parell i tenint en compte la degenració de cada estat, calcularem una mitjana pesada pels spins,

$$C(\vec{k}) = \frac{3C({}^3S_1; \vec{k}) + 5C({}^5S_2; \vec{k})}{8}, \quad (4.16)$$

on hem etiquetat la funció de correlació de cada canal amb l'etiqueta  ${}^{2S+1}L_J$  de l'estat.

Pel què fa a la funció font, com que volem comparar els resultats de  $p\Omega$  amb els obtinguts per col·lisions pp de [ALI20], farem servir la font usada allà; és a dir, una gaussiana

$$S(\vec{r}) = (4\pi r_0^2)^{-3/2} e^{-(r/2r_0)^2}, \quad (4.17)$$

amb  $r_0 = 0,95$  fm.

Hem obtingut totes les funcions de correlació, novament, fent servir un codi de Fortran 90 (veure secció A.2).

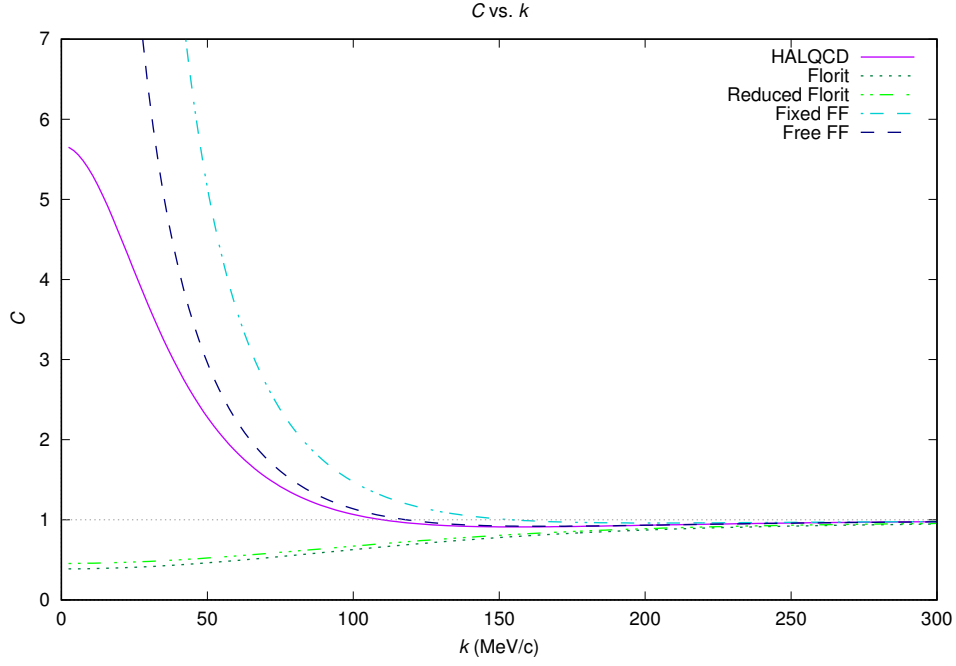


Figura 24: Funcions de correlació per als potencials desenvolupats, per a la interacció  $n\Omega$ .

Per al cas neutrònic, veiem que les interaccions amb un comportament fortament atractiu (totes llevat de les parametritzacions de Florit) queden sobre 1 pràcticament a tot arreu. Tanmateix, totes elles creuen la línia a algun punt, cosa que cabria esperar, degut al fet que totes tenen estats lligats en almenys un canal. Mentrestant, les interaccions repulsives (les parametritzacions de Florit) queden sota 1 al llarg de tot el domini.

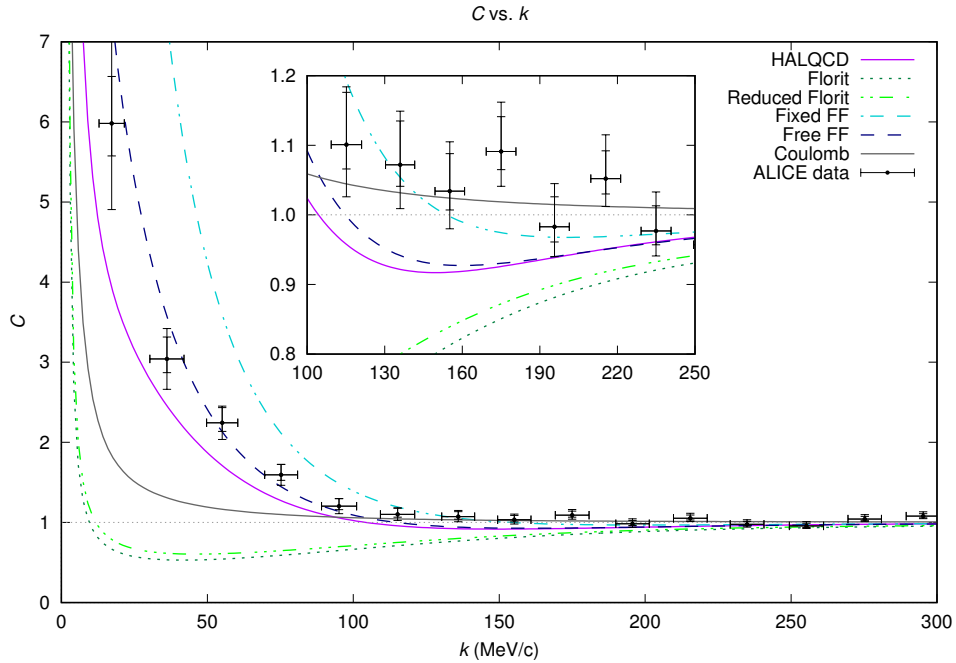


Figura 25: Funcions de correlació per als potencials desenvolupats, per a la interacció  $n\Omega$ , juntament amb les dades d'ALICE de [ALI20].

El cas protònic és una mica més complicat degut al fet que la interacció de Coulomb fa aparèixer naturalment un ascens en els valors de la funció de correlació per a  $k$  petits. Això complica les coses

lleugerament pel fet que interaccions diferents donen resultats qualitativament similars. En particular, les parametritzacions de Florit, molt repulsives, ara mostren un comportament molt similar (tot i que més abrupte) al de les interaccions atractives considerades.

L'interessant aquí, però, és veure la comparació amb les dades d'ALICE. Com podem veure, el potencial amb "factors de forma lliures" és el que segueix més de prop les dades d'ALICE en quasi tots els sectors del rang estudiat. Afegir el canal  $^3S_1$  ha alçat els valors de la funció de correlació de manera que queden més a prop de les dades. A moments baixos fins i tot trobem una petita sobreestimació de les dades.

Podem observar, tant per als potencials amb factors de forma com per al potencial de HAL QCD, una davallada a la regió entre 100 MeV/c i 200 MeV/c. Aquesta depleció correspon a l'estat lligat que hem calculat a la primera secció, i no s'observa a les dades de [ALI20].

Cal recordar que hem deixat algunes contribucions fora dels càlculs. En particular, no hem considerat cap reorganització de l'estranyesa ni els canals inelàstics que acoblen a modes amb  $L' = 2$  o modes de  $L$  superior. Aquests canals, segons les conclusions de [ALI20], són dominats per l'absorció i haurien de ser negligits. Tanmateix, l'augment en els valors degut a l'addició del canal  $^3S_1$  deixa una mica d'espai per millorar la descripció amb els canals inelàstics.

Per tant, podem concloure que els canals encara no considerats (això és, els canals acoblats i les ones parcials superiors) poden afegir una contribució no negligible a la funció de correlació.



## 5 Sumari, conclusions i panorama

En aquest treball, volíem introduir la interacció barió-barió  $p\Omega$ . Com que no hi ha mesures de dispersió per a aquesta interacció, hem fet servir el mètode de la femtoscòpia, que dóna informació sobre la interacció a nivell microscòpic.

Hem derivat un potencial per a la interacció forta  $N\Omega$  fent servir una teoria efectiva fins a OP tenint en compte les contribucions dels termes de contacte, un terme d'intercanvi de  $\eta$  i un terme d'intercanvi de  $\sigma$ . Aquest potencial té cinc paràmetres lliures, amb els quals hem ajustat el canal  ${}^5S_2 \rightarrow {}^5S_2$  al potencial fort  $p\Omega$  conegut de CDQ reticular obtingut per la col·laboració HAL QCD.

Aquest process ha donat diverses parametritzacions per al potencial. En particular, hem desenvolupat un ajustament sense factors de forma (que ha donat molt mals resultats i hem ignorat), un ajustament on hem fixat els factors de forma a valors físicament raonables i ajustat la resta de paràmetres (que hem anomenat parametrització amb “factores de forma fixos”) i un on hem ajustat amb tots els paràmetres (que hem anomenat parametrització amb “factores de forma lliures”). Addicionalment, hem considerat dues parametritzacions d'un treball previ [Flo14] que no considerava ni factors de forma ni el terme d'intercanvi de  $\sigma$  (que hem anomenat parametritzacions de Florit).

Aquestes parametritzacions, juntament amb l'expressió per al potencial efectiu, ens permeten obtenir el potencial per al canal  ${}^3S_1 \rightarrow {}^3S_1$ . Tot i que no l'hem inclòs en aquest treball, la derivació per al potencial efectiu també ens ha donat un terme tensorial responsable dels canals inelàstics amb  $L' = 2$ .

L'ajustament amb “factores de forma lliures” ha demostrat bona concordança amb el potencial de HAL QCD i els seus estats lligats, funcions d'ona de dispersió i funcions de correlació, tot i que ha donat un valor baix per al factor de forma d'intercanvi de  $\sigma$ . Els altres ajustaments també han exhibit bona concordança en algunes regions, però han demostrat ser incapaços de reproduir el seu comportament i els resultats que se n'extreu.

Les parametritzacions de Florit, en particular, no reproduïen bé l'atractivitat del potencial de HAL QCD, però han demostrat ser útils al llarg del treball per estudiar un cas límit de potencial molt repulsiu.

En referència als estats lligats, per a les parametritzacions del potencial que inclouen factors de forma hem trobat no tan sols l'anticipat estat lligat  ${}^5S_2$  tant per a  $p\Omega$  com per a  $n\Omega$ , sinó també un estat lligat  ${}^3S_1$  per a  $p\Omega$ . Això sembla reforçar la hipòtesi que la interacció  $p\Omega$  sigui capaç de generar un dibarió lligat, tot i que no s'ha trobat encara experimentalment.

Fent servir les parametritzacions obtingudes en aquest treball, hem calculat numèricament les funcions d'ona de dispersió per a l'ona  $s$ . Aquestes han exhibit desfasaments en concordança amb els esmentats estats lligats segons el teorema de Levinson. Com havíem anticipat, l'ajustament amb “factores de forma lliures” reproduïx molt bé els resultats del potencial de HAL QCD per a la dispersió, mentre que els resultats per a la resta de parametritzacions han estat molt menys exitosos.

En particular, per a les funcions d'ona de les parametritzacions de Florit podem observar un el nucli repulsiu com un comportament quasi-constant de les funcions d'ona per a radis petits.

Hem calculat la funció de correlació femtoscòpica fent servir la fórmula de Koonin-Pratt amb les funcions d'ona dispersades calculades prèviament, tant pel parell  $n\Omega$  com pel  $p\Omega$ , fent servir les diverses parametritzacions.

Hem vist que l'ajustament amb “factores de forma lliure” millora lleugerament els resultats del de HAL QCD en el sentit que s'apropa més a les dades per al parell  $p\Omega$  de [ALI20], fins i tot sobreestimant-les per a alguns valors de l'energia. En particular, el fet que la funció de correlació sigui lleugerament augmentat per afegir el potencial  ${}^3S_1$  deixa una mica d'espai per als canals acoblats per donar una contribució lleugerament negativa.

Aquest fet ens porta a pensar que, donat que les ones parcials superiors contribuiran positivament a la funció de correlació, els canals inelàstics poden proveir una contribució negativa per compensar, almenys parcialment, aquesta sobreestimació. Per tant, concloem que els canals acoblats podrien tenir un efecte no negligible en la funció.

Tots els càlculs numèrics han sigut executats amb programes de Fortran 90 construïts desde zero (llevat de subrutines per a les funcions gamma, de Bessel, de Coulomb i hipergeomètrica confluent) fent

servir mètodes coneguts. En particular, hem fet us extensiu de la discretització de Numerov, el mètode del tirador i la integració per trapezis.

L'excepció a això són els ajustaments del potencial, que han estat obtinguts fent servir un script de Python per fer un ajustament de mínims quadrats.

Al moment present, s'està treballant per obtenir els errors en els ajustaments del potencial i el seu valor  $\chi^2$  per tal d'obtenir una mesura quantitativa de la seva bondat. També s'està treballant en propagar els errors dels ajustaments als observables que se n'obté. En particular, als resultats per a la funció de correlació.

Una extensió directa d'aquest treball seria la comparació de les nostres funcions de correlació amb les del model de Lednický-Lyuboshitz, per a la qual caldria calcular els paràmetres de dispersió a baixa energia, per tal de comprovar la seva validesa. Anàlisis de la dependència en la funció font i el radi gaussià també ens podrien proveir d'informació rellevant.

El treball futur en aquest projecte hauria d'incloure no tan sols els càlculs de les ones parcials superiors, sinó també els canals inelàstics. Tot i que un primer pas en aquesta direcció és relativament fàcil, ja que ja hem calculat els components tensorials del nostre potencial d'acoblament a  $L' = 2$ , aquesta tasca no serà trivial, ja que requerirà adaptar el mètode numèric per resoldre el sistema matricial d'equacions de Schrödinger acoblades.

Una altra direcció en què es podria continuar el treball necessitaria estendre la teoria efectiva a ordre següent-al principal, la qual cosa afegiria noves contribucions a la interacció.

També es podria fer servir aquest treball per estudiar altres sistemes barió-barió ja incorporats al nostre formalisme, com ara el sistema  $p\Xi^-$ .

## A Apèndix: Descripció dels codis

Els codis que hem usat per al treball han estat desenvolupats en llenguatge Fortran 90, ajudats per les subrutines que fem servir per calcular funcions especials; en concret, les de Bessel, Coulomb, gamma i hipergeomètrica confluent.

### A.1 Estats lligats

El codi desenvolupat per trobar estats lligats pren una funció potencial  $V$ , un rang  $R$  que s'hauria de prendre molt lluny quan el potencial ja no és rellevant, un punt de comparació  $R^* < R$  que caldria prendre en algun punt on el potencial encara és rellevant però ja ha començat a decaure, un nombre de  $N$  de nodes per discretitzar l'espai i una tolerància  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  petita.

Primer de tot, el codi discretitza el rang  $[0, R]$  amb espaiat  $\Delta R = R/N$ , de manera que tenim una xarxa  $\{r_0, \dots, r_N\}$  amb  $r_i = i\Delta R$  i el punt de comparació és ara  $r_M$ , on  $M = \lfloor NR^*/R \rfloor$ . Escrivim  $V_i = V(r_i)$  i  $u_i = u(r_i)$  per al potencial i la funció d'ona radial, amb  $i \in \{0, \dots, N\}$ . Llavors, posem  $E^+ = 0$  i  $E^- = V(r_0)$ .

Ara el codi iterarà un procés de bisecció. Prenem  $E = (E^+ + E^-)/2$  i fem servir la discretització de Numerov per resoldre l'eq. (3.32). La fórmula de Numerov, aplicada a l'equació de Schrödinger radial, s'escriu [Gia21]

$$u_{i+2} = \frac{(12 - 10f_{i+1})u_{i+1} - f_i u_i}{f_{i+2}}, \quad (\text{A.1})$$

on

$$f_i = 1 + \frac{\mu}{6} \left( \frac{\Delta R}{\hbar} \right)^2 [E - V_i]. \quad (\text{A.2})$$

Posem  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = (\Delta R)^{l+1}$  i iterem la fórmula fins que obtenim  $u_M$ .

Per l'altra banda, posem  $u_N = 0$ ,  $u_{N-1} = (\Delta R)^{l+1}$  i apliquem la fórmula de Numerov endarrere,

$$u_{i-2} = \frac{(12 - 10f_{i-1})u_{i-1} - f_i u_i}{f_{i-2}}, \quad (\text{A.3})$$

fins que obtinguem un valor diferent per a  $u_M$ , que anomenem  $u_M^*$ . Llavors multipliquem  $u_{M+1}, \dots, u_N$  per  $u_M/u_M^*$ , per tenir la funció correctament escalada.

Ara, calculem la derivada cap endavant a  $M$ ,  $u_M'^F$ , i la derivada cap endarrere a  $M$ ,  $u_M'^B$ . Ara, si  $u_M'^F - u_M'^B > 0$ , l'energia triada és massa alta i redefinim  $E^+ = E$ . Per contra, si  $u_M'^F - u_M'^B < 0$ , l'energia triada és molt baixa i redefinim  $E^- = E$ .

Repetim aquest procés fins que  $E^+ - E^- < \varepsilon$ . Un cop passi això, l'energia desitjada és al centre de l'interval,  $E = (E^+ + E^-)/2$ . Normalitzem l'estat integrant  $u_i^2$  des de  $r_0$  fins a  $r_N$  fent servir la integració per trapezis

$$N = \left[ \frac{u_0^2 + u_N^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 \right] \Delta R \quad (\text{A.4})$$

i dividint totes les  $u_i$  per  $\sqrt{N}$ .

Ara, obtenim el radi quadràtic mitjà de l'estat integrant  $u_i^2 r_i^2$  des de  $r_0$  fins a  $r_N$  i prenent l'arrel quadrada del resultat,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\left[ \frac{u_0^2 r_0^2 + u_N^2 r_N^2}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 r_i^2 \right] \Delta R}.$$

### A.2 Estats de dispersió i funcions de correlació

El codi desenvolupat per trobar els estats de dispersió i les funcions de correlació pren una funció potencial  $V$ , un rang  $R$  que s'hauria de prendre molt lluny quan el potencial ja no és rellevant, un

nombre  $N_E$  de valors d'energia per calcular, energies  $E_0 \in \mathbb{R}^+$  i  $E_{N_E} > E_0$  que són el més baix i el més alt que el codi calcularà, i nombres  $N_\theta$  i  $N_r$  que serviran per discretitzar les integrals de la funció de correlació. Aquests darrers dos nombres només són necessaris per al cas de Coulomb (això és, el cas p $\Omega$ ).

Per obtenir els moments linealment separats, definim els nivells d'energia  $E_1, \dots, E_{N_E-1}$  segons

$$E_i = E_1 + \left(\frac{i}{N}\right)^2 (E_{N_E} - E_1),$$

en comptes d'organitzar-los linealment. Per a cadascun d'aquests nivells d'energia, procedim amb els càlculs següents. Definim els moments  $k_i = \sqrt{2\mu E_i}$  i els valors de la funció de correlació  $C_i = C(k_i)$ .

Com hem fet amb el codi previ, discretitzem el rang  $[0, R]$  amb espaiat  $\Delta R = R/N$ , de manera que tenim una xarxa  $\{r_0, \dots, r_N\}$  amb  $r_i = i\Delta R$ . Escribim  $V_i = V(r_i)$  i  $u_i = u(r_i)$  per al potencial i les funcions d'ona radials, amb  $i \in \{0, \dots, N\}$ .

Per a cert nivell d'energia  $E_j$ , doncs, prenem  $u_0 = 0$  i  $u_1 = \Delta R$ . Llavors, apliquem la fórmula de Numerov (A.1) per obtenir  $u_2, \dots, u_N$ . Tenim l'estat de dispersió, però ens cal reescalar-lo. Per fer-ho, calculem la derivada logarítmica al punt  $N$ ,  $\beta_0$ , com a

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2\Delta R u_N} r_N \\ &= \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2u_N} N. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Fent-la servir, trobem el desfasament de l'estat amb l'eq. (3.21) per al cas sense Coulomb, i l'eq. (3.51) per al cas amb Coulomb. En el primer cas, necessitem les funcions de Bessel i Von Neumann, que calculem amb subrutines de [ZJ96]. Per al segon cas, necessitem les funcions de Coulomb, que calculem amb les subrutines de [SF19].

Usant aquests desfasaments, calculem el "veritable" valor de la funció d'ona  $u_N$ , que anomenem  $u_N^*$ , amb l'eq. (3.20) o l'eq. (3.52), respectivament. Fixem la fase global de manera que el valor sigui real. Llavors, multipliquem  $u_0, \dots, u_N$  per  $u_N^*/u_N$ .

Ara ja tenim l'estat de dispersió  $E_j$ . Podem, doncs, calcular el valor de la funció de correlació  $C_j$ . Per fer-ho, fem servir l'eq. (4.10) per al cas sense Coulomb, cosa que requereix integrar per trapezis,

$$C_j = 1 + 4\pi \left[ \frac{S(r_N)[u_N^2 - (r_N j_0(k_j r_0))^2]}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} S(r_i)[u_i^2 - (r_i j_0(k_j r_i))^2] \right] \Delta R, \quad (\text{A.6})$$

Mentre que, per al cas amb Coulomb, les integrals de l'eq. (4.14) són una mica més complicades. Recordant que estem fent servir una font gaussiana  $S$  amb radi  $r_0 = 0.95$  fm (com a eq. (4.17)), tenim

$$\begin{aligned} C_j &= 2\pi e^{-\pi\gamma_j} |\Gamma(1 + i\gamma_j)|^2 I_j \\ &+ 4\pi \left[ \frac{S(r_N)[u_N^2 - (F_0(k_j, r_0)/k_j)^2]}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} S(r_i)[u_i^2 - (F_0(k_j, r_i))^2] \right] \Delta R, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

one  $\gamma_j$  és el factor de Sommerfeld per a energia  $E_j$  i  $I_j$  és una integral doble que ve d'integrar la funció hipergeomètrica confluent. Aquesta es calcula amb la integració per trapezis doble, definint

$\rho_k = kR/N_r$  i  $x_i = -1 + 2k/N_\theta$  i afegint

$$\begin{aligned}
I_j = & \frac{\rho_{N_r}^2 S(\rho_{N_r})}{4} \left[ |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; 0)|^2 + |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; 2ik_j\rho_{N_r})|^2 \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^{N_\theta-1} |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; ik_j\rho_k(1-x_i))|^2 \right] \Delta R \\
& + \sum_{k=1}^{N_r-1} \frac{\rho_k^2 S(\rho_k)}{2} \left[ |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; 0)|^2 + |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; 2ik_j\rho_k)|^2 \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^{N_r-1} |{}_1F_1(-i\gamma_j; 1; ik_j\rho_k(1-x_i))|^2 \right] \Delta R
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Fem servir subrutines de [Mor14] per a la funció gamma i de [NPB92] per a la funció hipergeomètrica confluent.

Noti's que, per a aquest codi, les funcions de Bessel no són necessàries, ja que ens quedem a  $l = 0$ . Tanmateix, hem pensat que seria convenient incloure-les per tal que parts del codi siguin més fàcils d'estendre a altres moments angulars relatius.

## Referències

- [ALI20] Col·laboració ALICE. “Unveiling the strong interaction among hadrons at the LHC”. *Nature* **588**: 232-238 (2020).
- [BSS93] M. N. Butler, M. J. Savage i R. P. Springer. “Strong and electromagnetic decays of the baryon decuplet”. *Nucl. Phys. B* **399**: 69 (1993).
- [Flo14] M. Florit Gual. *Strong baryon-baryon interaction in the strangeness  $-3$  sector* (treball de fi de màster, Universitat de Barcelona, 2014).
- [FMV21] L. Fabbietti, V. Mantovani Sarti i O. Vázquez Doce. “Study of the Strong Interaction Among Hadrons with Correlations at the LHC”. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **71**: 377-402 (2021).
- [Gia21] P. Giannozzi. “Numerical methods in quantum mechanics” (apuntes de classe de l’assignatura homònima, Interateneo Triste – Udine, 2021).
- [HP+13] J. Haidenbauer, S. Petschauer et al. “Hyperon-nucleon interaction at the next-to-leading order in chiral effective field theory”. *Nucl. Phys. A* **915**: 24-58 (2013).
- [IA+19] T. Iritani, S. Aoki et al. “ $N\Omega$  dibaryon from lattice QCD near the physical point”. *Phys. Lett. B* **792**: 284-289 (2019).
- [JM91] E. Jenkins i A. V. Manohar. “Chiral corrections to the baryon axial currents”. *Phys. Lett. B* **259**: 353-358 (1991).
- [Joa75] C. J. Joachain. *Quantum Collision Theory* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975).
- [JOR02] D. Jido, E. Oset i À. Ramos. “Chiral dynamics of the  $p$ -wave in  $K^-p$  and coupled states”. *Phys. Rev. C* **66**: 055203 (2002).
- [LS96] W. Lucha i F. F. Schöberl. “Effective potential models for hadrons”. arXiv:hep-ph/9601263 (1996).
- [Mac85] R. Machleidt. “The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Matter”, a *Relativistic Dynamics and Quark-Nuclear Physics: Proc. Los Alamos Workshop*, eds. M. B. Johnson i A. Piclesimer (John Wiley & Sons, Nova York, 1986).
- [Mor14] J.-P. Moreau. “Fortran Routines for Computation of Special Functions” (2014).
- [MM23] M. Macêdo-Lima i L. Madeira. “Scattering length and effective range of microscopic two-body potentials”. arXiv:2303.04591v2 [quant-ph] (2023).
- [NPB92] M. Nardin, W. F. Perger i A. Bhalla. “Solution to the confluent hypergeometric function”. *Trans. on Math. Soft.* **18**: 345-349 (1992).
- [OR97] E. Oset i À. Ramos. “Nonperturbative chiral approach to  $s$  wave  $\bar{K}N$  interactions”. *Nucl. Phys. A* **635**: 92-120 (1998).
- [Pic95] A. Pich. “Chiral perturbation theory”. *Rept. Prog. Phys.* **58**: 563-610 (1995).
- [Piq24] M. Piquer i Méndez. “Master’s thesis plot data” (dipòsit de GitHub, [https://github.com/Marc-PiM/Masters\\_thesis\\_plot\\_data](https://github.com/Marc-PiM/Masters_thesis_plot_data), 2024).
- [PHM07] H. Polinder, J. Haidenbauer i U.-G. Meißner. “Strangeness  $S = -2$  baryon-baryon interactions using chiral effective field theory”. *Phys. Lett. B* **653**: 29-37 (2007).

- [SD+21] T. R. Saito, W. Dou et al. “New directions in hypernuclear physics”. *Nat. Rev. Phys.* **3**: 803-813 (2021).
- [SF19] F. Salvat i J. M. Fernández-Varea. “RADIAL: a Fortran subroutine package for the solution of the radial Schrödinger and Dirac wave equations”. *Comp. Phys. Comm.* **240**: 165-177 (2019).
- [SKH18] T. Sekihara, Y. Kamiya i T. Hyodo. “ $N\Omega$  interaction: meson exchanges, inelastic channels, and quasibound state”. *Phys. Rev. C* **98**: 015205 (2018).
- [Spr99] R. P. Springer. “Heavy baryon chiral perturbation theory and the weak nonleptonic  $p$ -wave decays of the baryon octet”. *Phys. Lett. B* **461**: 167 (1999).
- [ST20] E. Shuryak i J. Torres-Rincon. “Baryon preclustering at the freeze-out of heavy-ion collisions and light-nuclei production”. *Phys. Rev. C* **101**: 034914 (2020).
- [STA19] Col·laboració STAR. “The proton- $\Omega$  correlation function in Au + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$ ”. *Phys. Lett. B* **790**: 490-497 (2019).
- [TF20] L. Tolós i L. Fabbietti. “Strangeness in nuclei and neutron stars”. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **112**: 103770 (2020).
- [Tor23] J. Torres-Rincon. Apunts privats.
- [SW86] B. D. Serot i J. D. Walecka. “The Relativistic Nuclear Many Body Problem”. *Adv. Nucl. Phys.* **16**: 1-327 (1986).
- [Wei90] S. Weinberg. “Nuclear forces from chiral lagrangians”. *Phys. Lett. B* **251**: 288-292 (1990).
- [Zho06] Zhong-Qi M. “The Levinson theorem”. *J. Phys. A Math. Gen.* **39**: R625-R659 (2006).
- [Z]96] S. Zhang i J. Jin. *Computation of special functions* (John Wiley & Sons, Hoboken, 1996).