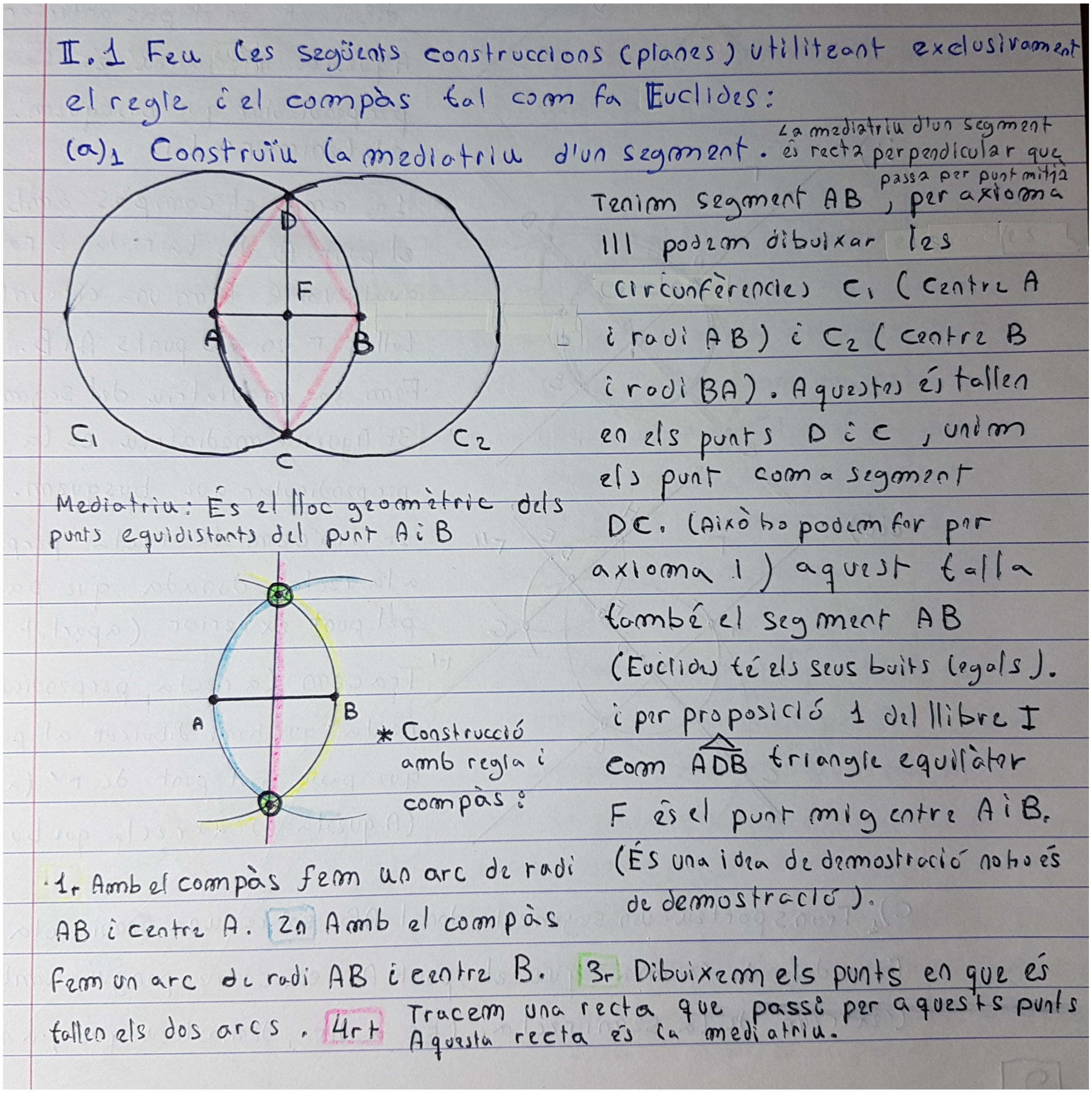
GL_01Solucions_GeometriaEuclidianaClassica.md



II.1 Feu les següents construccions (planes) utilitzant exclusivament el regle i el compàs tal com fa Euclides:

(a)$_1$ Construïu la mediatriu d'un segment. La mediatriu d'un segment és recta perpendicular que passa per punt mitjà

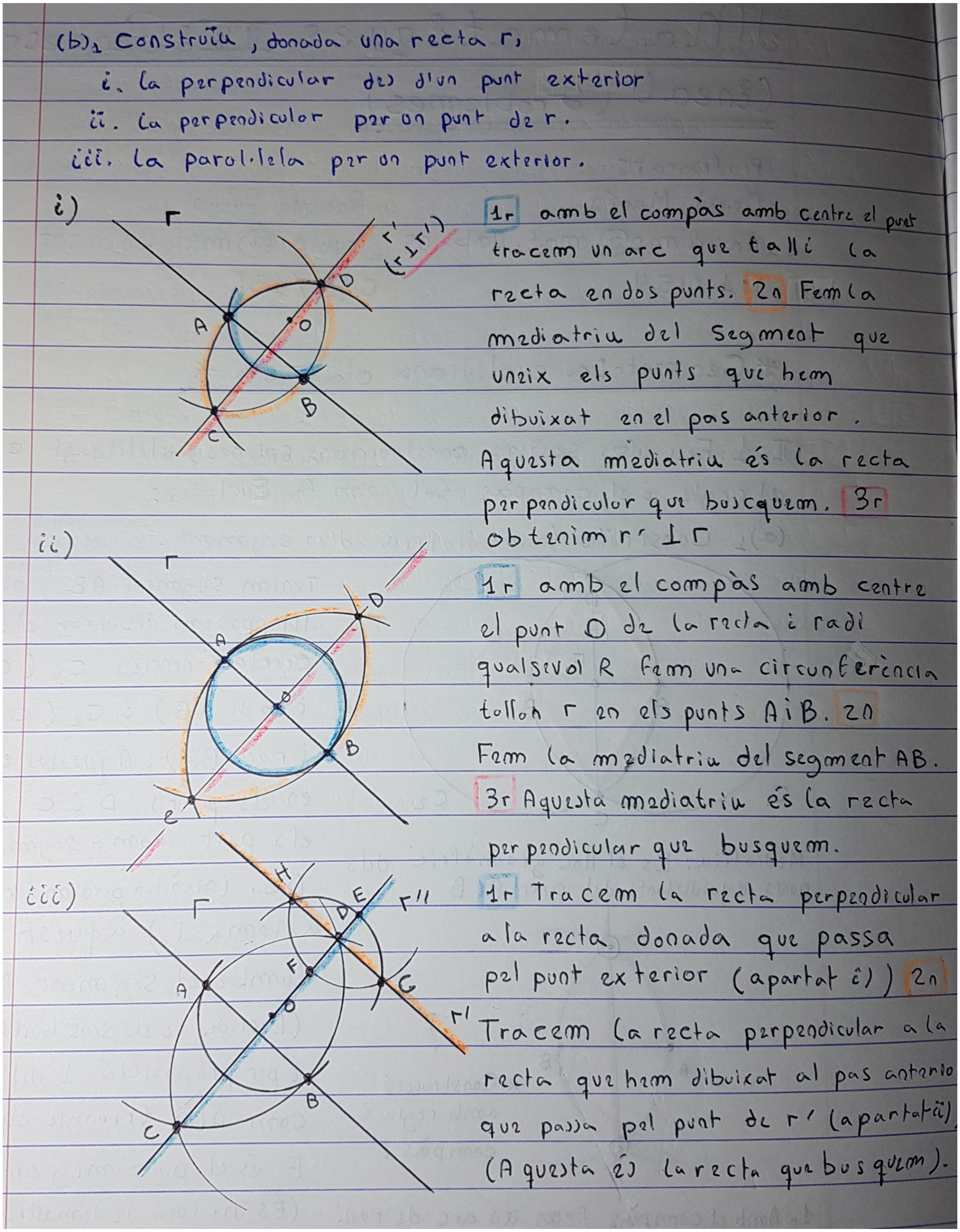
Tenim segment AB, per axioma III podem dibuixar les circumferències C_1 (centre A i radi AB) i C_2 (centre B i radi BA). Aquestes és tallen en els punts D i C, unim els punt com a segment DC. (Això ho podem fer per axioma I) aquest talla també el segment AB (Euclides té els seus buits legals). i per proposició 1 del llibre I com $\widehat{ADB}$ triangle equilàter F és el punt mig entre A i B. (És una idea de demostració no ho és de demostració).

Mediatriu: És el lloc geomètric dels punts equidistants del punt A i B

* Construcció amb regla i compàs:

1r Amb el compàs fem un arc de radi AB i centre A. 2n Amb el compàs fem un arc de radi AB i centre B. 3r Dibuixem els punts en que és tallen els dos arcs. 4rt Tracem una recta que passi per aquests punts. Aquesta recta és la mediatriu.

Figure 1: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0A_Part01.jpg



(b)$_1$ Construïu, donada una recta r,

i. la perpendicular des d'un punt exterior

ii. la perpendicular per un punt de r.

iii. la paral·lela per un punt exterior.

i) 1r amb el compàs amb centre el punt tracem un arc que talli la recta en dos punts. 2n Fem la mediatriu del segment que uneix els punts que hem dibuixat en el pas anterior. Aquesta mediatriu és la recta perpendicular que busquem. 3r obtenim $r' \perp r$

ii) 1r amb el compàs amb centre el punt O de la recta i radi qualsevol R fem una circunferència tallan r en els punts A i B. 2n Fem la mediatriu del segment AB. 3r Aquesta mediatriu és la recta perpendicular que busquem.

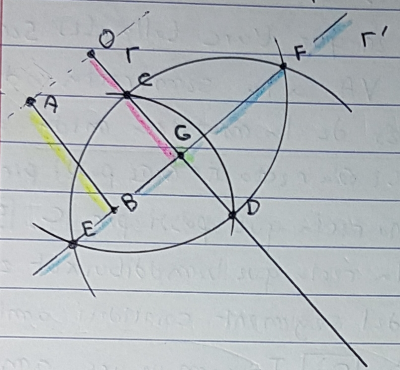
iii) 1r Tracem la recta perpendicular a la recta donada que passa pel punt exterior (apartat i)) 2n Traeem la recta perpendicular a la recta que hem dibuixat al pas anterior que passa pel punt de r' (apartat ii)). (Aquesta és la recta que busquem).

Figure 2: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0B_Part01.jpg

els axiomes d'Euclides, podem suposar que disposem d'un "compàs bloquejable".).

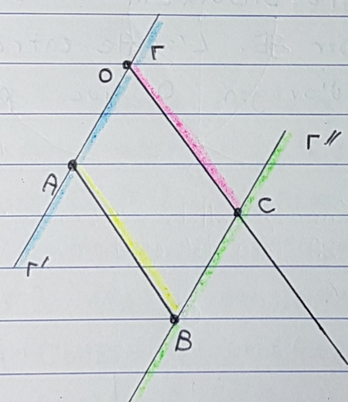
Abans de abordar el cas general considerarem casos més senzills.

* Primer cas: El segment donat és paral·lel a la semirecta i el punt A està perfectament alineat amb O.



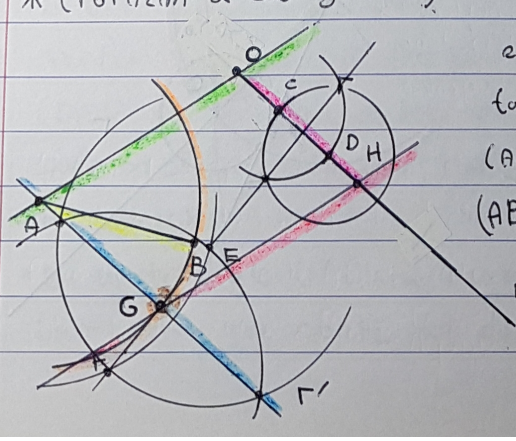
1r Fem una recta perpendicular a la semirecta r que passi per B. 2n Dibuixem el punt G de la recta r' que hem fet en el pas anterior que talla r. 3r El segment OG, és el segment que busquem.

* Segon cas: El segment donat és paral·lel a la semirecta però O i A no estàn alineats.



1r Dibuixem la recta que passa per O i A (r'). 2n Dibuixem una recta paral·lela a la que hem dibuixat en el pas anterior que passa per B (tal com en apartat b) iii)) 3r El segment OC, és el segment que busquem.

* (Tornem a cas general)



1r Tracem una recta r' paral·lela a la semirecta que passi per A. 2n Amb el compàs tracem un arc de radi AB que talli la recta que hem dibuixat en el pas anterior (Anomenem G al punt de tall entre aquest arc i r') $(AB \equiv AC)$. 3r Dibuixem segment AO. 4t Dibuixem una recta paral·lela a la que hem dibuixat en el pas anterior que passi per G. OH segment buscat. (no surt [redacted] del pas 4)

Figure 3: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0C_Part01.jpg

d)$_1$ Transporteu un angle sobre una semirecta donada i un costat donat.

Angle: Dues semirectes que tenen el mateix origen.

1r Amb el compàs fem un arc amb centre el vèrtex de l'angle (punt V) i un radi qualsevol de manera que l'arc talli les dues semirectes que formen el angle.

Anomenem A i B, els punts en que l'arc talla les semirectes.

2n Transportem el segment VA a la semirecta de manera que el segment OC és de la mateixa mida que VA.

3r Tracem un arc amb centre O i radi OC; 4t Dibuixem el segment AB i una recta que passi per C. 5è Transportem el segment AB a la recta que hem dibuixat en el pas anterior, de manera que l'origen del segment coincideixi amb el punt C. Així CD és congruent amb AB. 6è Tracem un arc amb origen C i radi CD. Anomenem E al punt de tall entre aquest arc amb arc dibuixat en (3). 7è Dibuixem una semirecta amb origen O que passi per E. L'angle entre aquesta semirecta i la semirecta d'origen O que passa per C és l'angle que busquem.

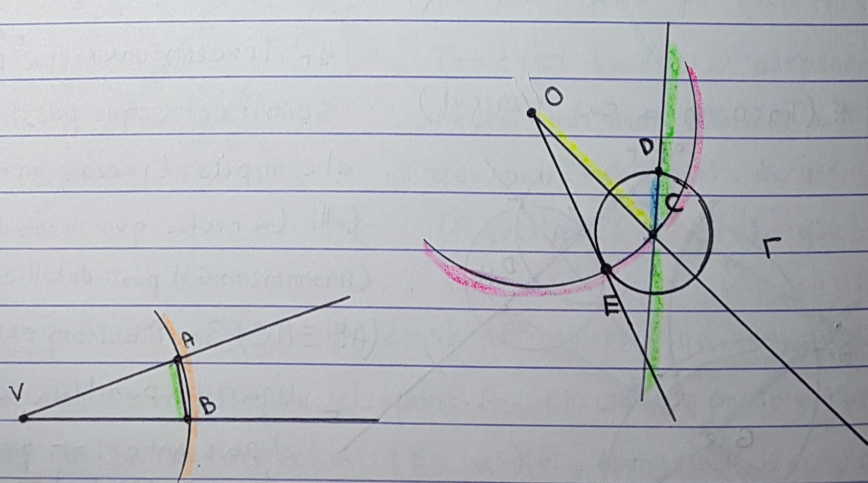
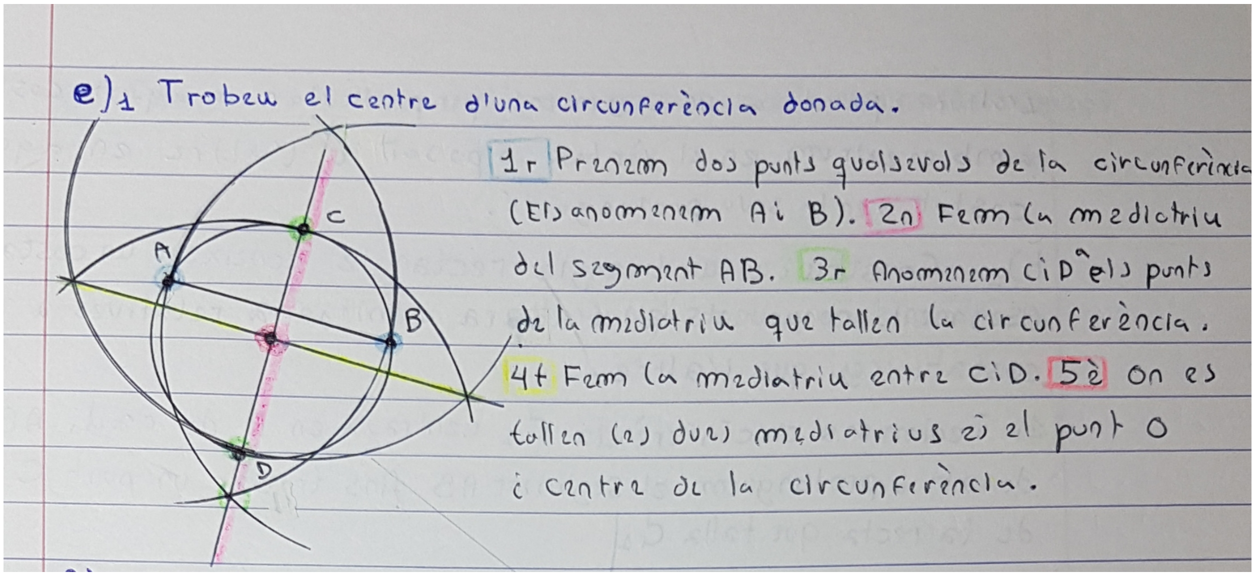


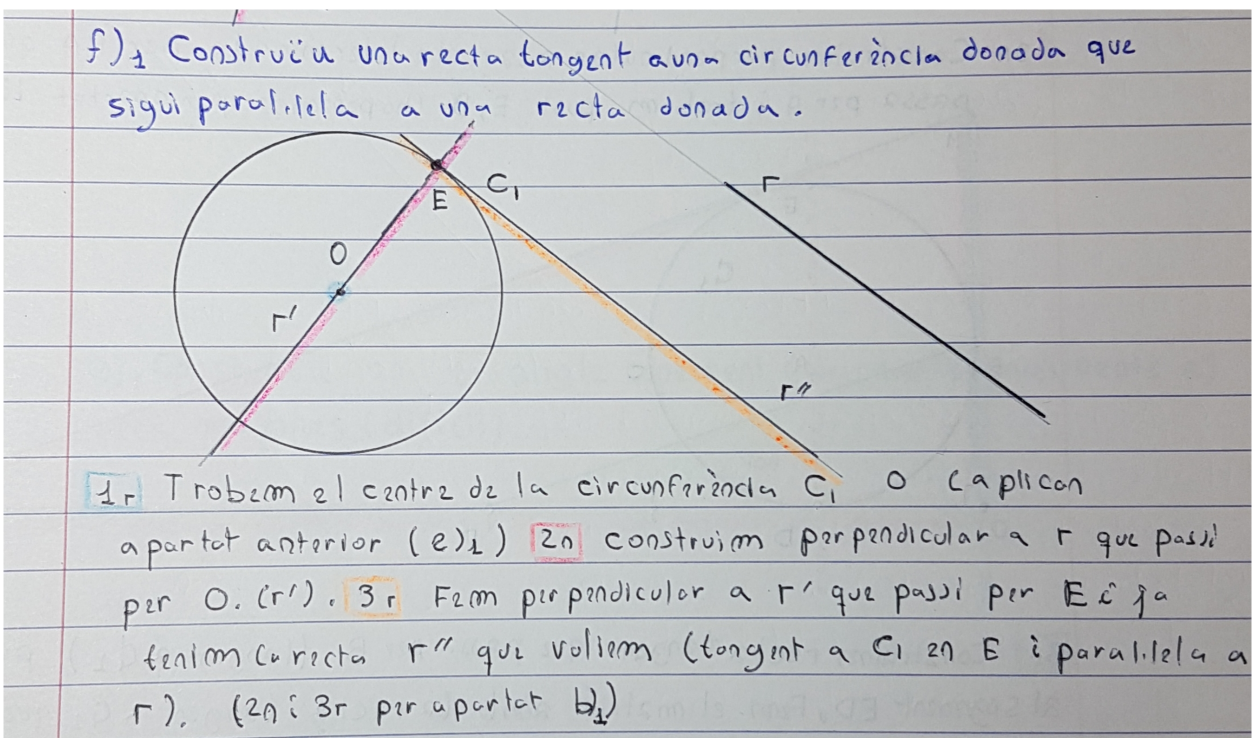
Figure 4: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0D_Part01.jpg



e)$_1$ Trobeu el centre d'una circunferència donada.

1r Prenem dos punts qualsevols de la circunferència (Els anomenem A i B). 2n Fem la mediatriu del segment AB. 3r Anomenem C i D els punts de la mediatriu que tallen la circunferència. 4t Fem la mediatriu entre C i D. 5è On es tallen les dues mediatrius és el punt O i centre de la circunferència.

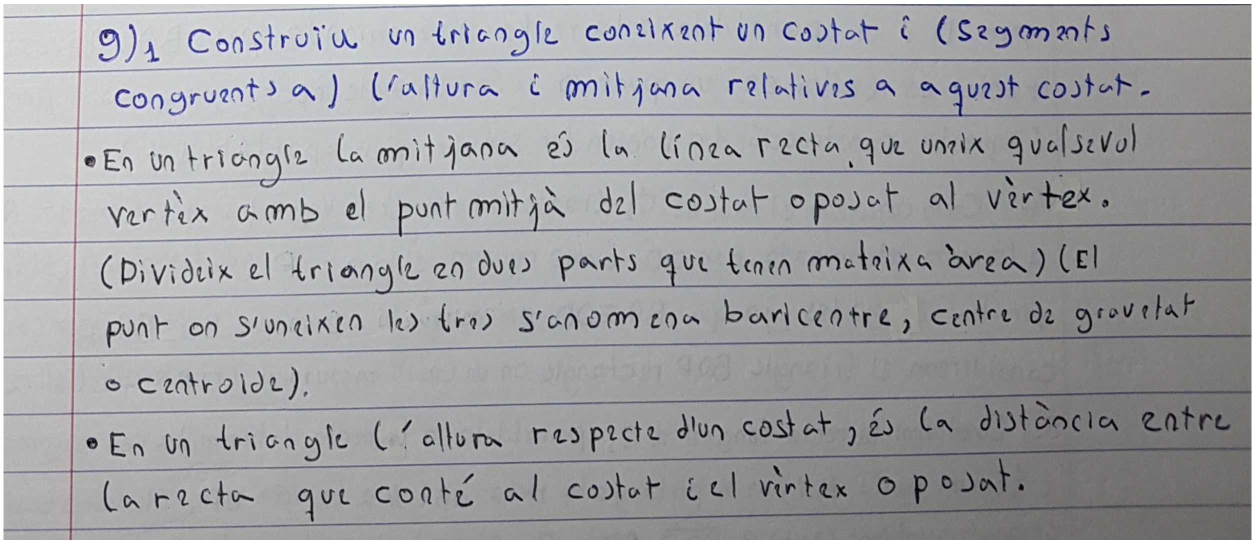
Figure 5: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0E_Part01.jpg



f)$_1$ Construïu una recta tangent a una circunferència donada que sigui paral·lela a una recta donada.

1r Trobem el centre de la circunferència C_1 o aplicant apartat anterior (e)$_1$) 2n construïm perpendicular a r que passi per O. (r'). 3r Fem perpendicular a r' que passi per E i ja tenim la recta r'' que volem (tangent a C_1 en E i paral·lela a r). (2n i 3r per apartat b)$_1$)

Figure 6: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0F_Part01.jpg

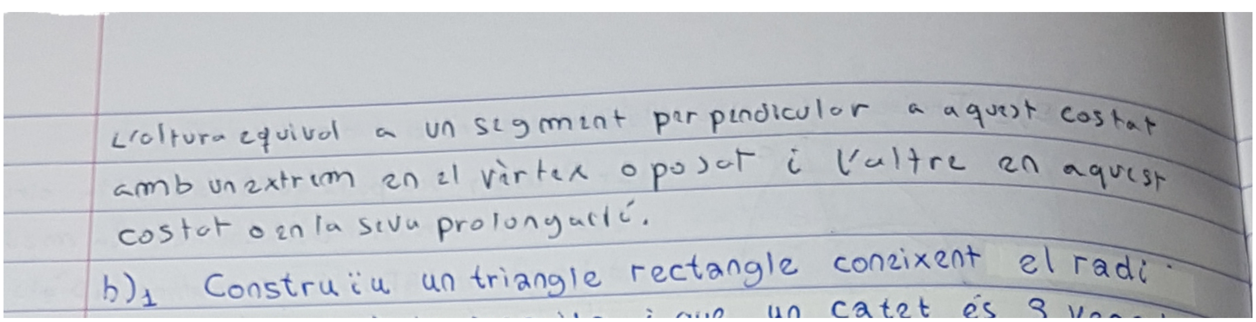


g)$_1$ Construïu un triangle coneixent un costat i (segments congruents a) l'altura i mitjana relatives a aquest costat.

• En un triangle la mitjana és la línea recta que uneix qualsevol vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat al vèrtex. (Divideix el triangle en dues parts que tenen mateixa àrea) (El punt on s'uneixen les tres s'anomena baricentre, centre de gravetat o centroide).

• En un triangle l'altura respecte d'un costat, és la distància entre la recta que conté al costat i el vèrtex oposat.

Figure 7: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0G_Part01.jpg



L'altura equival a un segment perpendicular a aquest costat amb un extrem en el vèrtex oposat i l'altre en aquest costat o en la seva prolongació.

h)$_1$ Construïu un triangle rectangle coneixent el radi

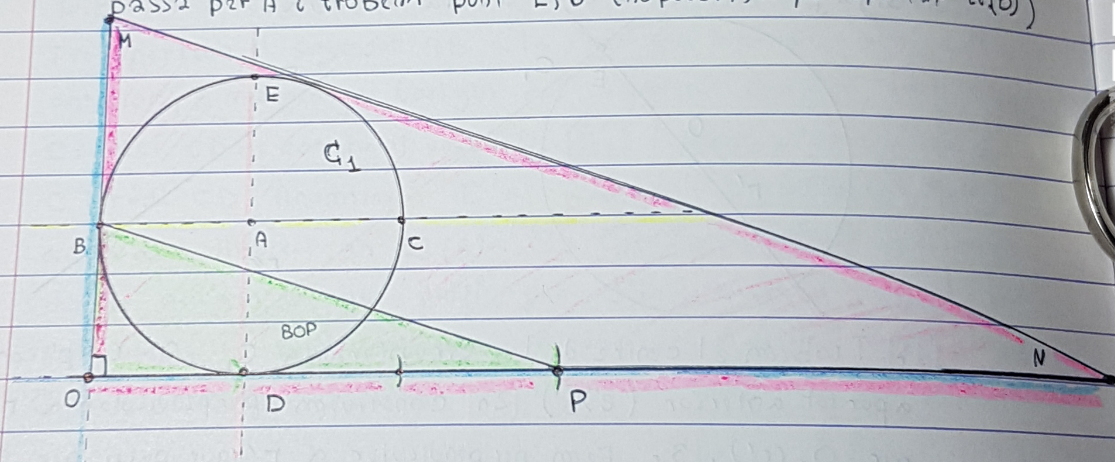
i que un catet és 3

Figure 8: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0G_Part02.png

b)$_1$ Construïu un triangle rectangle coneixent el radi de la circunferència inscrita i que un catet és 3 vegades més llarg que l'altre.

1r Tenim una circunferència C_1 centrada en A de radi AB donat i prolonguem el segment AB fins trobar un punt C de la recta que talla C_1

2n Construim perpendicular a la recta determinada per BA que passa per A i trobem punt E, D (ho podem fer per apartat ii(b))

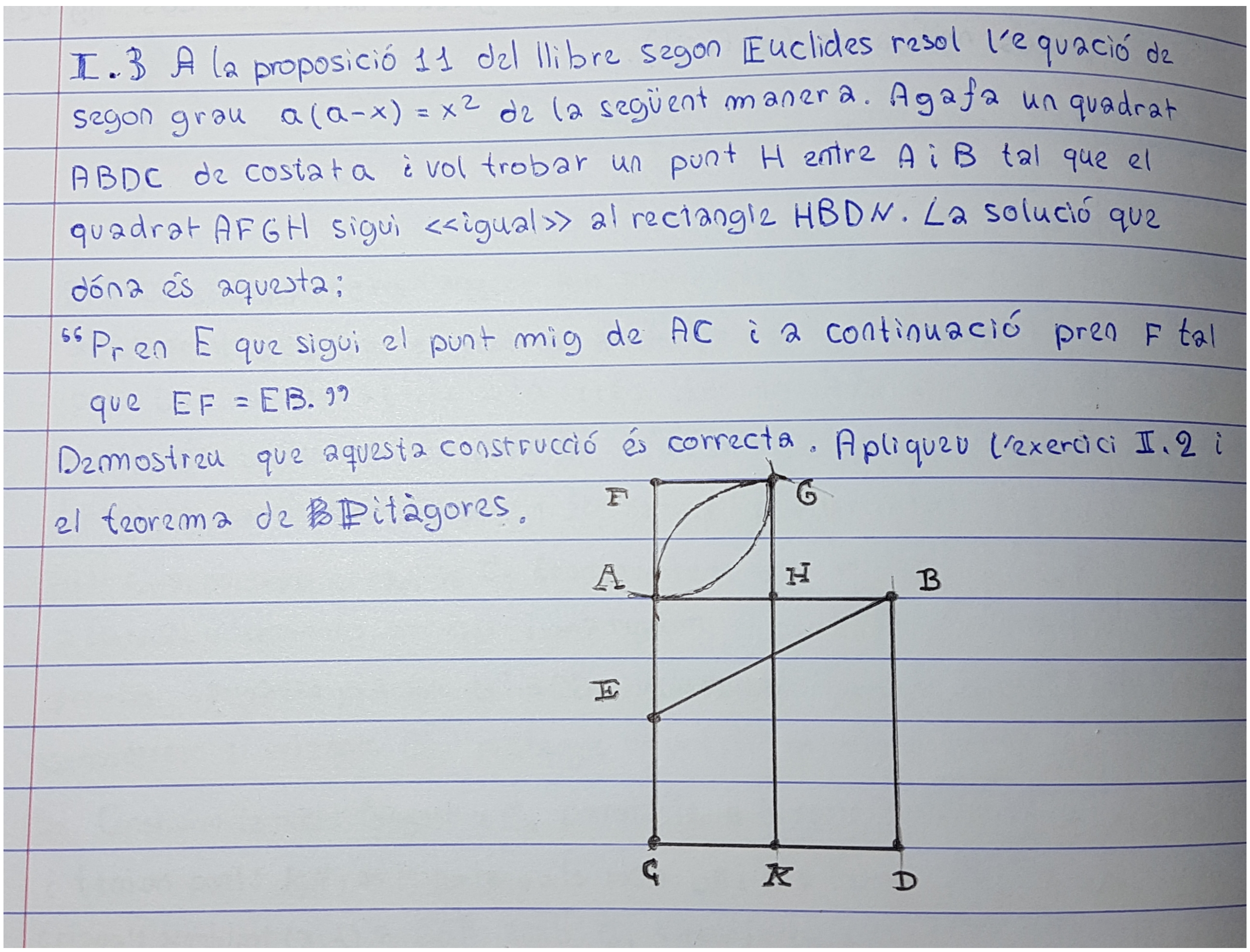


3r Construim recta tangent que passa per B (tangent a C_1) paral·lela al segment ED. Fem el mateix amb la recta tangent a C_1 que passa per D i és paral·lela a la recta determinada per BA. Aquestes rectes es tallen en un punt O i fan un angle recte ja que són perpendiculars (Aquesta construcció la podem fer servir per apartat 1.f).

4rt Com coneixem el radi de C_1 transportem tres vegades el segment AB a la recta determinada per OD i marquem el punt P (de fet només caldria fer-ho 2 vegades, ja que $BA \equiv OD$ per construcció. Com que $BO \equiv BA$ per construcció considerem el triangle BOP rectangle on un catet mesura el triple que l'altre.

5è Construim la recta tangent a C_1 paral·lela a la recta determida pel segment BP i tenim punts M, N, on M pertany a la recta OB i N a la recta OP. Aleshores tenim $\widehat{MON}$ triangle semblant (3:1) a $\widehat{BOP}$ amb C_1 circunferència inscrita.

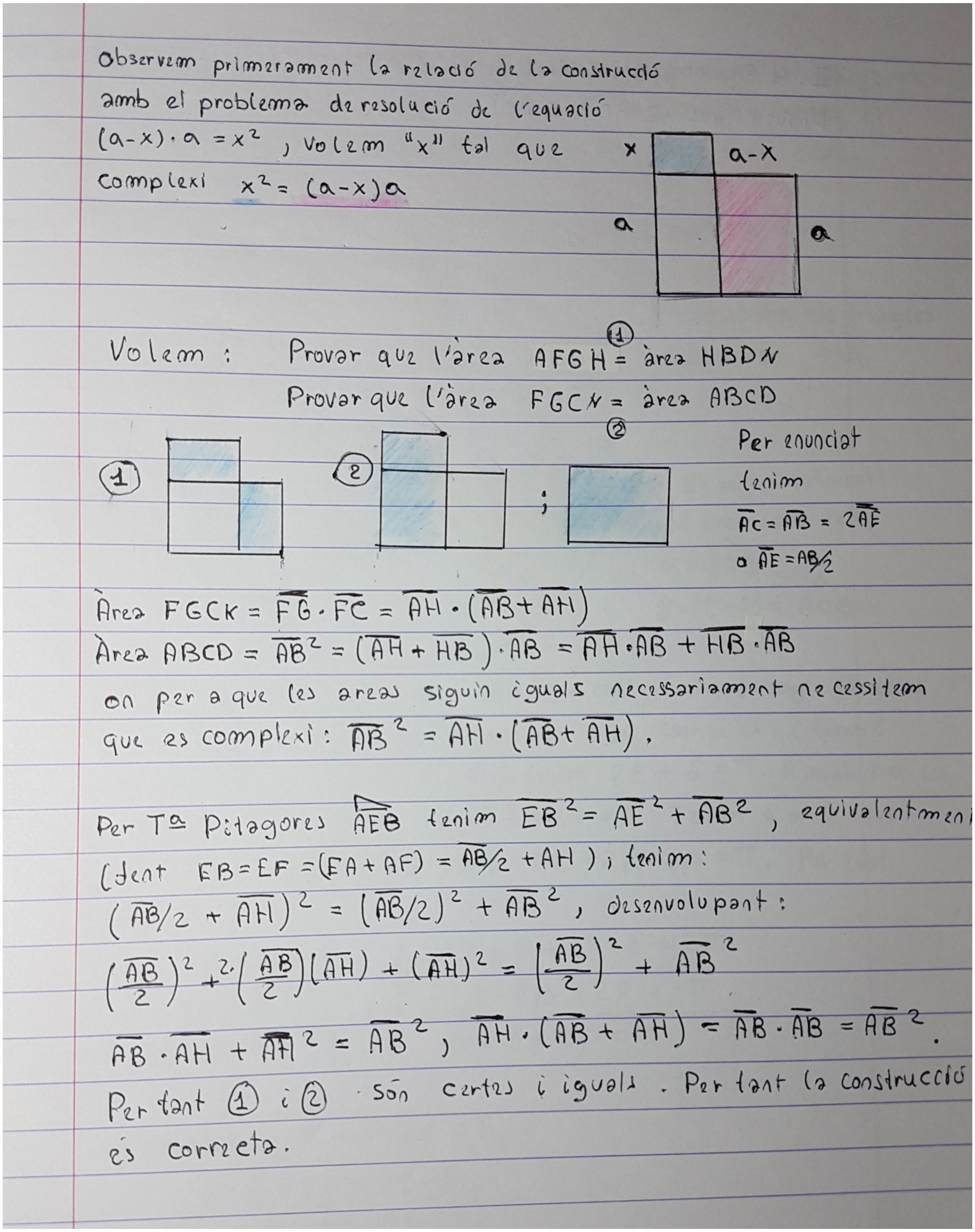
Figure 9: ./GL_SolucioLlista01_Exercici001_Apartat0H_Part01.png


II.3 A la proposició 11 del llibre segon Euclides resol l'equació de segon grau $a(a-x) = x^2$ de la següent manera. Agafa un quadrat ABDC de costat a i vol trobar un punt H entre A i B tal que el quadrat AFGH sigui <<igual>> al rectangle HBDN. La solució que dóna és aquesta:

"Pren E que sigui el punt mig de AC i a continuació pren F tal que EF = EB."

Demostreu que aquesta construcció és correcta. Apliqueu l'exercici II.2 i el teorema de ~~B~~ Pitàgores.

Figure 10: ./GL_SolucioLlista01_Exercici003_Apartat01_Part01.jpg



Observem primerament la relació de la construcció amb el problema de resolució de l'equació $(a-x)\cdot a = x^2$, volem "x" tal que complexi $x^2 = (a-x)a$

Volem: Provar que l'àrea AFGH = àrea HBDN (1)

Provar que l'àrea FGCN = àrea ABCD (2)

(1) ; (2) ;

Per enunciat tenim $\overline{AC} = \overline{AB} = 2\overline{AE}$ o $\overline{AE} = \overline{AB}/2$

Àrea FGCK $= \overline{FG}\cdot\overline{FC} = \overline{AH}\cdot(\overline{AB}+\overline{AH})$

Àrea ABCD $= \overline{AB}^2 = (\overline{AH}+\overline{HB})\cdot\overline{AB} = \overline{AH}\cdot\overline{AB} + \overline{HB}\cdot\overline{AB}$

on per a que les areas siguin iguals necessàriament necessitem que es complexi: $\overline{AB}^2 = \overline{AH}\cdot(\overline{AB}+\overline{AH})$.

Per T^{a} Pitagores $\widehat{AEB}$ tenim $\overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2$, equivalentment (dent $EB = EF = (EA + AF) = \overline{AB}/2 + AH$); tenim:

$$\left(\overline{AB}/2 + \overline{AH}\right)^2 = \left(\overline{AB}/2\right)^2 + \overline{AB}^2, \text{ desenvolupant:}$$

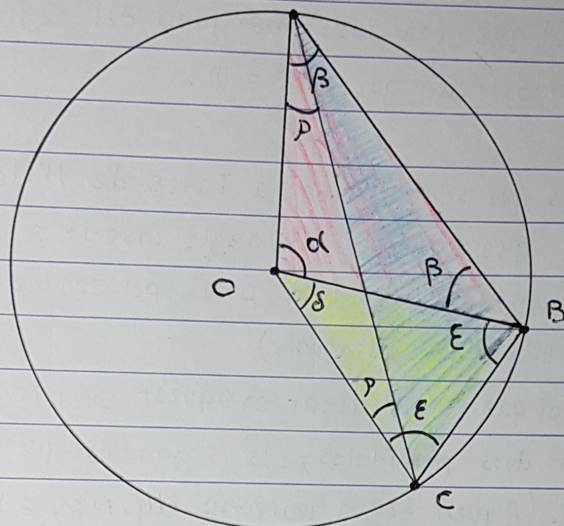
$$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)(\overline{AH}) + (\overline{AH})^2 = \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AH} + \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2, \quad \overline{AH}\cdot(\overline{AB}+\overline{AH}) = \overline{AB}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}^2.$$

Per tant (1) i (2) són certes i iguals. Per tant la construcció és correcta.

Figure 11: ./GL_SolucioLlista01_Exercici003_Apartat01_Part02.jpg

(Solució problema I.4):



Considerem els triangles ABC CBO OAB

Els angles rellevants pel problema són

$\alpha = \widehat{AOB}$

$\gamma = (\varepsilon - \rho) = \widehat{ACB}$

Com que OAB compleix $OA = OB =$ radi tenim triangle isorcèles amb $2\beta + \alpha = \pi$. També com que OBC isorcèles (també $OC = OB =$ radi de la circunferència) tenim $2\varepsilon + \delta = \pi$. A més per la mateixa raò OAC té $(\alpha + \delta) + 2\rho = \pi$. Tenim a més que $\varepsilon - \rho = \gamma$ angle d'estudi amb $2\varepsilon + 2\beta - 2\rho = \pi$. Per tant tenim:

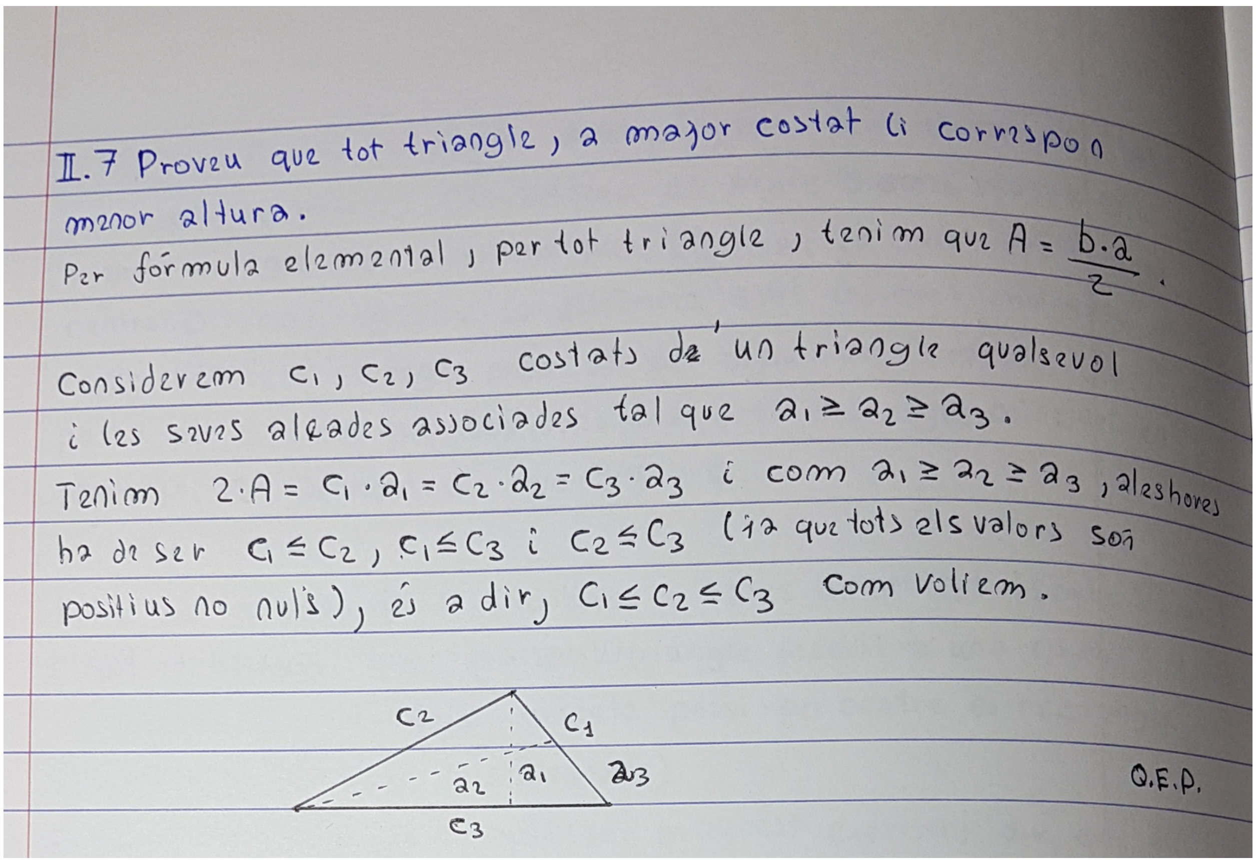
$$\left.\begin{array}{r} 2\beta + \alpha = \pi \\ 2\varepsilon + \delta = \pi \\ 2\varepsilon + 2\beta - 2\rho = \pi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 2\beta + \alpha + 2\varepsilon + \delta = 2\pi \\ -2\varepsilon - 2\beta + 2\rho = -\pi \\ \hline \alpha + \delta + 2\rho = \pi \end{array}$$

aleshores, $\alpha + \delta + 2\rho = \pi$,

$$\alpha + \delta + 2\rho = 2\varepsilon + \delta,$$
$$\alpha = 2\varepsilon - 2\rho,$$
$$\alpha = 2(\varepsilon - \rho),$$
$$\alpha = 2\gamma,$$
$$\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$$

Q.E.D.

Figure 12: ./GL_SolucioLlista01_Exercici004_Apartat01_Part01.jpg



II.7 Proveu que tot triangle, a major costat li correspon menor altura.

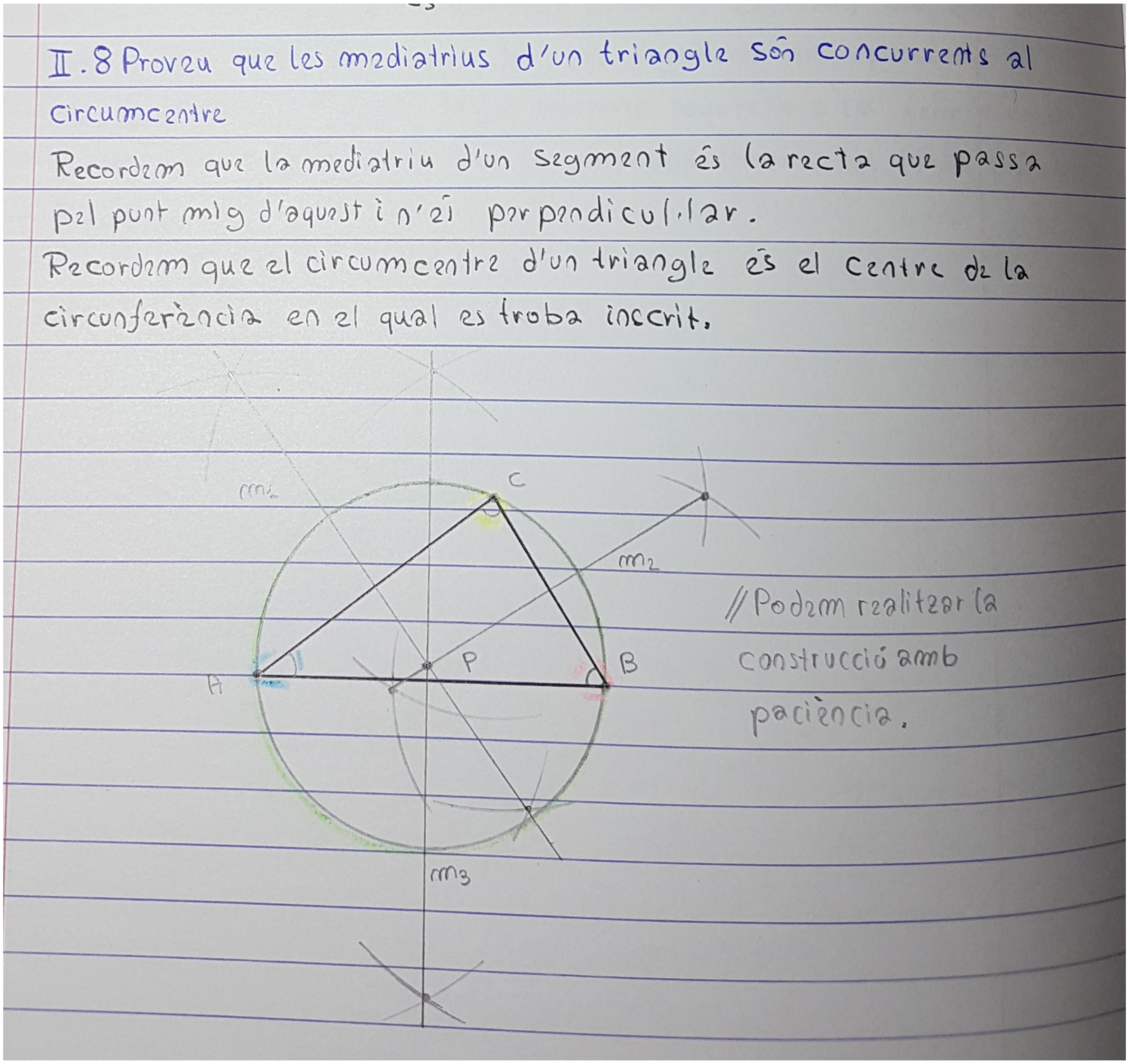
Per fórmula elemental, per tot triangle, tenim que $A = \frac{b \cdot a}{2}$.

Considerem c_1, c_2, c_3 costats d'un triangle qualsevol i les seves alçades associades tal que $a_1 \geq a_2 \geq a_3$.

Tenim $2 \cdot A = c_1 \cdot a_1 = c_2 \cdot a_2 = c_3 \cdot a_3$ i com $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, aleshores ha de ser $c_1 \leq c_2$, $c_1 \leq c_3$ i $c_2 \leq c_3$ (ja que tots els valors són positius no nuls), és a dir, $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ com volíem.

Q.E.D.

Figure 13: ./GL_SolucioLlista01_Exercici008_Apartat01_Part01.jpg



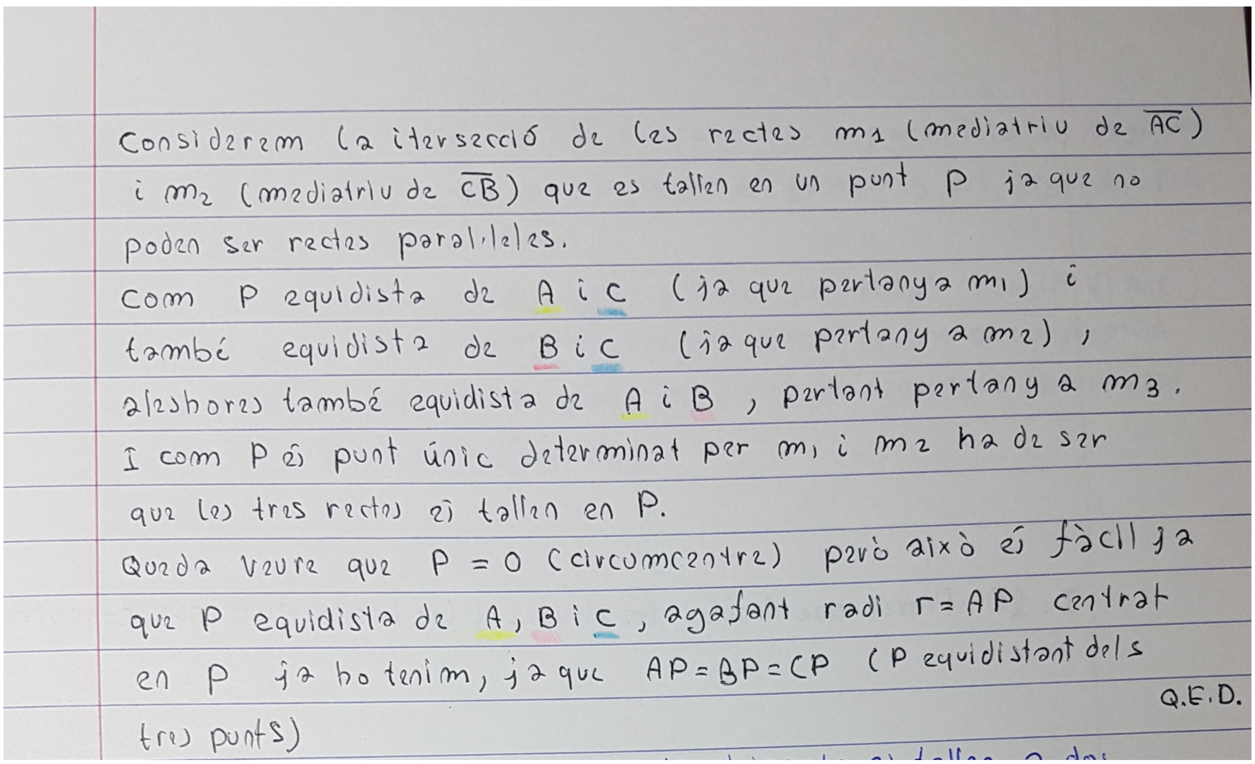
II.8 Proveu que les mediatrius d'un triangle són concurrents al circumcentre

Recordem que la mediatriu d'un segment és la recta que passa pel punt mig d'aquest i n'és perpendicul·lar.

Recordem que el circumcentre d'un triangle és el centre de la circumferència en el qual es troba inscrit.

// Podem realitzar la construcció amb paciència.

Figure 14: ./GL_SolucioLlista01_Exercici009_Apartat01_Part01.jpg



Considerem la itersecció de les rectes m_1 (mediatriu de $\overline{AC}$) i m_2 (mediatriu de $\overline{CB}$) que es tallen en un punt P ja que no poden ser rectes paral·leles.
Com P equidista de A i C (ja que pertany a m_1) i també equidista de B i C (ja que pertany a m_2), aleshores també equidista de A i B, per tant pertany a m_3.
I com P és punt únic determinat per m_1 i m_2 ha de ser que les tres rectes es tallen en P.
Queda veure que P = O (circumcentre) però això és fàcil ja que P equidista de A, B i C, agafant radi $r = AP$ centrat en P ja ho tenim, ja que $AP = BP = CP$ (P equidistant dels tres punts)

Q.E.D.

Figure 15: ./GL_SolucioLlista01_Exercici009_Apartat01_Part02.jpg