L'objectiu d'aquest seminari és aplicar els coneixements adquirits de geometria euclidiana afí per arribar a construir amb cartró un model acurat d'un cert políedre que anomenarem $\mathcal{P}$ del qual coneixem les coordenades dels seus vèrtex.

$\mathcal{P}$ és un políedre convex de $\mathbb{R}^3$ que té 14 vèrtex i 9 cares. Coneixem les coordenades dels vèrtex com a punts d'un hiperplà de $\mathbb{R}^4$. El motiu de donar les coordenades a $\mathbb{R}^4$ és que, com passa moltes vegades (pensem, per exemple, en el triangle equilàter o el tetràedre regular), podem trobar coordenades més senzilles en una dimensió superior a la necessària. En aquest cas concret, és possible donar coordenades *enteres* per als vèrtex de $\mathcal{P}$. Són:

$$\begin{array}{llll}
V_1=(4,1,2,3), & V_2=(3,1,2,4), & V_3=(3,2,1,4), & V_4=(4,2,1,3)\\
V_5=(1,4,1,4), & V_6=(1,6,1,2), & V_7=(1,6,2,1), & V_8=(1,2,6,1)\\
V_9=(2,1,6,1), & V_{10}=(4,1,4,1), & V_{11}=(2,1,3,4), & V_{12}=(1,2,3,4)\\
V_{13}=(4,3,2,1), & V_{14}=(4,3,1,2) & &
\end{array}$$

Observem que tots aquests punts pertanyen a l'hiperplà H d'equació

$$[x+y+z+t=10.]$$

Per tant, $\mathcal{P}\subset H\cong\mathbb{R}^3$. Com a informació suplementària sobre $\mathcal{P}$ direm que té 9 cares que es troben sobre aquests hiperplans de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{lll}
H_1: 3x-y-z-t+6=0 & H_2: 3y-x-z-t+6=0 & H_3: 3z-x-y-t+6=0\\
H_4: 3t-x-y-z+6=0 & H_5: x+y-z-t+4=0 & H_6: y+z-x-t+4=0\\
H_7: z+t-x-y+4=0 & H_8: x+y+z-3t+6=0 & H_9: y+z+t-3x+6=0
\end{array}$$

Els passos a seguir són

1. Trobeu els vèrtex de cada cara.
2. Utilitzeu un programa adient (R, sage, maple, etc.) per dibuixar amb precisió cadascuna de les nou cares a una mateixa escala. Aquí caldrà utilitzar recursos bàsics de la geometria euclidiana afí que hem après en el curs.
3. Retalleu les cares en un suport adient (cartolina, cartró ploma, etc.) i enganxeu-les per obtenir el model que es demana. Hi ha dues maneres de fer-ho, que corresponen a les dues imatges especulars de $\mathcal{P}$. Això és normal perquè hem definit $\mathcal{P}$ a $\mathbb{R}^4$. Per fixar una de les dues versions possibles de $\mathcal{P}$ hem de disposar d'alguna informació addicional. Per exemple, si exigim que hi hagi una cara que tingui com a vèrtex V_1, V_2, V_3, V_4 en aquest ordre en el sentit de les agulles del rellotge, ja tindrem ben definit $\mathcal{P}$.

Observacions:

- El programa (R, sage, etc.) només es pot utilitzar per fer càlculs que, si fos necessari, sabríem fer a mà. Per exemple, si trobéssim una llibreria de R que dibuixa les cares d'un políedre del qual sabem els vèrtex, aquesta llibreria NO es pot utilitzar.
- Cada equip cal que entregui, a través del campus virtual:
  (a) Un arxiu pdf on s'expliqui exactament com s'ha construït el políedre i que contingui tot el codi que s'ha utilitzat (convenientment explicat). Aquest document ha de contenir els noms i nius de tots els membres de l'equip.
  (b) Un vídeo breu on es vegi el model de cartró que s'ha fet.

- Aconsella carta ploma
- poligon de 14 vèrtex
- Driver en Python

// Elvadonar

Dades: $\begin{cases} V_1 = \\ \vdots \\ V_{14} = \end{cases}$

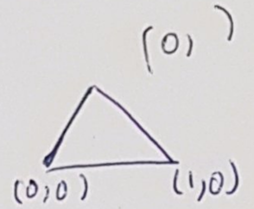
coordenades amb nombres enters,

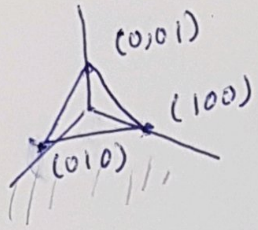
$H_1 =$

$\vdots$

$H_9 =$

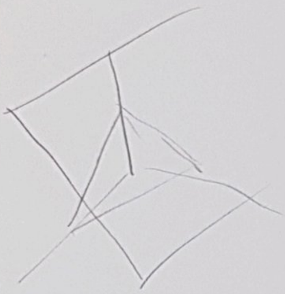
// De dimensió 4

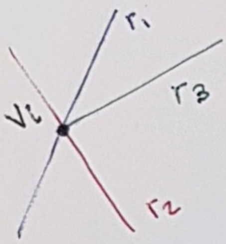


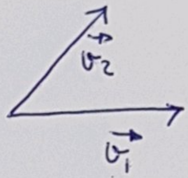


El que necessitarem

Està en un hiperpla







Com trobar base ortonormal

$$\frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = \vec{e}$$

allò que diu

$$\vec{v_1}\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|\cos(\alpha)$$

La fórmula és la següent:

$$\vec{w} = \vec{v} - \frac{\vec{v_1}\vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|}\vec{e_1}$$

mètode de Gram Smith, i no pot no tenir modul aleshores:

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}$$

// Prohibit llibreria de dibuix polìedre

usem geometria projectiva:

$V_1 = (0\ 0\ 1) \rightarrow$

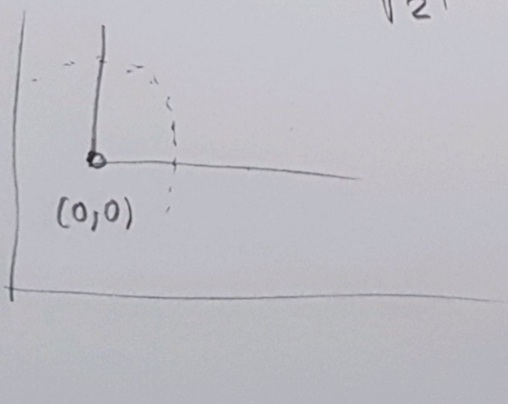
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Traslació al pla

$z=0$

$(0,1,0) - (1,0,0)$

$\sqrt{2}$



// Hi ha dos possibilitats però amb observació sabrem quina de les dues

$$\left.\begin{aligned} d(A,B) &= n \\ d(B,C) &= n \\ d(C,A) &= n \end{aligned}\right\}$$