14 Varietats amb vora. Integració de formes.

Exercici 142: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tal que $df \neq 0$ sobre $f^{-1}(0)$. Demostreu que $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ és una n-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$. (Com és ∂M?)

Feu un dibuix de la regió de $\mathbb{R}^2$ donada pels punts (x, y) tals que $x^3 - y^3 - 3\,x\,y \leq 0$ per tal de comprovar que la condició sobre df és necessària.

Exercici 143: Siguin f i g funcions de $\mathbb{R}^n$ amb valors reals i diferenciables. Quines condicions s'haurien d'imposar per tal de poder assegurar que el conjunt

$$N = \{p \in \mathbb{R}^n; f(p) = 0 \text{ i } g(p) \leq 0\}$$

és una varietat amb vora (de dimensió $n-1$, és clar)?

Doneu un mètode equivalent a l'anterior per tal d'obtenir varietats amb vora de dimensió arbitrària. (Quines condicions s'han d'imposar a f, g per tal de poder dir que els punts p que compleixen $f(p) = 0$ i $g(p) \leq 0$ donen una varietat amb vora de dimensió k).

Exercici 144: Sigui γ la corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\gamma(s) = (s, s^2, s^3)$ amb $s \in [0, 1]$. Calculeu

$$\int_\gamma (dx + dz)$$

Exercici 145: Considereu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3\,y - z = 2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Determineu

$$\int_S dx \wedge dz$$

si l'orientació en S és la que correspon al vector normal $(-1, -3, 1)$. (Noteu que si s'escriu $dx \wedge dz$ s'està pensant que s'integra una forma de $\mathbb{R}^3$ sobre la subvarietat S).

Exercici 146: Sigui $\mathbb{S}^2$ l'esfera unitària de $\mathbb{R}^3$ (on es pren l'orientació determinada pel normal exterior).

Quin valor té la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} dx \wedge dy$?

Es pot relacionar aquest càlcul amb el T. de Stokes?