12 Àlgebra multilineal i formes

Exercici 124: (Propietats elementals del producte exterior). Siguin S un tensor alternat d'ordre p, T un d'ordre q i U un d'ordre r. Feu la comprovació explícita de les propietats següents:

1. (Associativitat)
$$(S \wedge T) \wedge U = S \wedge (T \wedge U)$$

2. (Anticommutativitat)
$$S \wedge T = (-1)^{pq}\, T \wedge S$$

Solució: Els càlculs són als apunts de teoria.

L'única observació no trivial que, potser, cal afegir és que una reordenació dels índex $\sigma(1)$, …, $\sigma(\ell)$ consisteix a prendre $\sigma(\tau(1))$, …, $\sigma(\tau(\ell))$ per a una certa reordenació $\tau(1)$, …, $\tau(\ell)$ dels índexs 1, …, ℓ.

Exercici 125: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es defineix l'aplicació $f^* : \Lambda^p(\mathbb{R}^m) \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ considerant, per a cada tensor alternat T d'ordre p sobre $\mathbb{R}^m$, l'aplicació $f^*(T)$ que compleix

$$f^*(T)(v_1, \dots, v_p) = T(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

si $v_1, \dots, v_p$ són vectors de $\mathbb{R}^n$.

Feu les comprovacions de:

1. $f^*(T)$ és un tensor alternat de $\mathbb{R}^n$ i, per tant, la imatge de f^* està, realment, en $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$.

2. f^* és una aplicació lineal. És a dir $f^*(S+T) = f^*(S) + f^*(T)$ i $f^*(\lambda T) = \lambda f^*(T)$.

3. f^* és compatible amb el producte exterior: $f^*(S \wedge T) = f^*(S) \wedge f^*(T)$

Solució: Només s'han d'escriure les definicions. Aplicar f als arguments d'un tensor és compatible amb la suma, el producte per escalars i la reordenació.

Exercici 126:

1. Per a cada família $v_1, \dots, v_n$ de n vectors de $\mathbb{R}^n$ considerem la matriu $A = \left(a_i^j\right)$ formada per les components dels vectors v_i respecte la base canònica $e_1 \dots, e_n$ de forma que, per a cada i, es tingui
$$v_i = \sum_j a_i^j\, e_j$$
Demostreu que l'aplicació D determinada per
$$D(v_1, \dots, v_n) = \det(A)$$
és un element de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

2. Demostreu que per a cada $T \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ existeix una constant α tal que
$$T(v_1, \dots, v_n) = \alpha\, D(v_1, \dots, v_n)$$

3. Deduïu de l'anterior que, per a qualsevol endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, l'aplicació $f^* : \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ compleix
$$f^*(T) = \det(f)\, T$$

Solució:

1. No s'ha de fer res, el determinant és una aplicació multilineal alternada.

2. La constant α és el valor $T(e_1, \ldots, e_n)$ o, si es vol dir d'una altra manera, el determinant és l'única aplicació multilineal alternada (d'ordre n) que val 1 sobre e_1, ..., e_n.

3. Si $T = \alpha\, D$ es complirà $f^*(\alpha\, D)(e_1, \ldots, e_n) = \alpha\, f^*(D)(e_1, \ldots, e_n) = \alpha\, D(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \alpha\, \det(f) = \det(f)\, T(e_1, \ldots, e_n)$

Exercici 127: Sigui $e_1, \ldots, e_4$ la base canònica de $\mathbb{R}^4$ i $\theta_1, \ldots, \theta_4$ la seva base dual ($\theta_i(e_i) = 1$ i $\theta_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$). Demostreu que és impossible escriure

$$\theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 = S \wedge T$$

amb $S, T \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$. (Hi ha 2-tensors alternats que no són producte exterior de dos 1-tensors).

Solució: Noteu que un tensor de la forma $S \wedge T$, amb S i T d'ordre 1, sempre complirà $(S \wedge T) \wedge (S \wedge T) = S \wedge S \wedge T \wedge T = 0$ mentre que $(\theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4) \wedge (\theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4) = 2\, \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4$ que és diferent del tensor nul (el seu valor sobre e_1, ..., e_4 és 2).

Exercici 128: Demostreu que, si T és un producte interior (2-tensor simètric i definit positiu) d'un cert espai vectorial V de dimensió n, existeix una aplicació lineal bijectiva $f : \mathbb{R}^n \to V$ tal que $f^*(T)$ és el producte escalar ordinari de $\mathbb{R}^n$.

Solució: Si es té en compte que *2-tensor simètric i definit positiu* és una forma sofisticada de dir *producte escalar* i que per a qualsevol producte escalar es poden construir *bases ortonormals*, tot el problema es redueix a construir una base ortonormal v_1, ..., v_n per a T i considerar l'aplicació lineal f que transforma els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^n$ en els vectors v_i. Prenent aquesta aplicació, $f^*(T)(e_i, e_j) = T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ i, per tant, $f^*(T)$ actua com el producte escalar ordinari.

Recordeu que si es té una família de vectors v_1, ..., v_k ortonormals respecte T ($T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$) i un altre vector v que no estigui en el subespai vectorial que generen, sempre es pot afegir un nou vector v_{k+1} a la família prenent el vector $v - \sum T(v, v_i)\, v_i$ (que serà *perpendicular* a tots els anteriors) i dividint aquest resultat per la seva *norma*.

Exercici 129: *(Per a repassar si no ha quedat clar a les classes de teoria)*

Siguin $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ les funcions que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ li fan correspondre la seva component i-èsima. Comproveu que les 1-formes dx_i donen, en cada punt, la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^n$

Solució: El vector $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de la base canònica, que té el coeficient 1 en la posició i, en el punt $p = (x_1, \ldots, x_n)$ és el vector tangent a la corba $\gamma_i(t) = (x_1, \ldots, x_i +$

$t, \ldots, x_n)$. En general, si f és una funció definida en un entorn de p i v un vector tangent en aquest punt, el valor $df(v)$ es calcularà prenent una corba $\alpha(t)$ tal que $\alpha'(0) = v$ i fent la derivada $\left.\dfrac{d(f(\alpha(t)))}{dt}\right|_{t=0}$. A partir d'aquí és clar que

$$dx_j(e_i) = \begin{cases} \left.\dfrac{d(x_i+t)}{dt}\right|_{t=0} = 1 & \text{quan } i = j \\[2ex] \left.\dfrac{dx_j}{dt}\right|_{t=0} = 0 & \text{quan } i \neq j \end{cases}$$

que correspon al que s'havia de demostrar.

Exercici 130: Determineu quines són les formes diferencials ω a $\mathbb{R}^4$ compleixen

$$\omega \wedge (dx \wedge dy + dz \wedge dt) = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

i les que compleixen

$$\omega \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

Solució: Posant coeficients indeterminats a una 2-forma ω

$$\omega = a_1\, dx \wedge dy + a_2\, dx \wedge dz + a_3\, dx \wedge dt + a_4\, dy \wedge dz + a_5\, dy \wedge dz + a_6\, dz \wedge dt$$

la primera condició serà

$$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt = (a_1 + a_6)\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

de forma que en aquest cas l'única restricció és $a_1 + a_6 = 1$.

En el segon cas l'equació s'escriurà

$$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt = 2\,(a_1\, a_6 - a_2\, a_5 + a_3\, a_4)\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

i la restricció correspondrà a $a_1\, a_6 - a_2\, a_5 + a_3\, a_4 = 1/2$.

Exercici 131: Si en $\mathbb{R}^3$ es consideren les coordenades cilíndriques (r, θ, z), quina és l'expressió de l'element de volum usual $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ en funció de dr, $d\theta$, dz? (Recordeu que, respecte les coordenades cilíndriques, $x = r\,\cos(\theta)$, $y = r\,\sin(\theta)$ i la coordenada z és la mateixa en els dos casos).

I si en comptes de les coordenades cilíndriques es consideren les esfèriques?

Solució: Tenint en compte les expressions de (x, y, z) en funció de (r, θ, z) els càlculs es resumeixen en les manipulacions següents:

$$\begin{aligned} \eta &= dx \wedge dy \wedge dz = d(r\,\cos(\theta)) \wedge d(r\,\sin(\theta)) \wedge dz \\ &= (\cos(\theta)\, dr - r\,\sin(\theta)\, d\theta) \wedge (\sin(\theta)\, dr + r\,\cos(\theta)\, d\theta) \wedge dz \\ &= r\, dr \wedge d\theta \wedge dz \end{aligned}$$

En el cas de les coordenades esfèriques les relacions són

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ y &= r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\ z &= r\,\cos(\varphi) \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\eta = dx\wedge dy\wedge dz &= (\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,dr - r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,d\theta + r\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,d\varphi)\\ &\quad\wedge(\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,dr + r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,d\theta + r\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,d\varphi)\\ &\quad\wedge(\cos(\varphi)\,dr - r\,\sin(\varphi)\,d\varphi)\\ &= -r^2\,\sin(\varphi)\,dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\\ &= r^2\,\sin(\varphi)\,dr\wedge d\varphi\wedge d\theta\end{aligned}$$

Exercici 132: Es considera a $\mathbb{R}^3$ una forma del tipus $\omega = x\,dy\wedge dz - 2\,z\,f(y)\,dx\wedge dy + y\,f(y)\,dz\wedge dx$ amb f diferenciable tal que $f(1)=1$. Determineu la funció f si

1. $d\omega = dx\wedge dy\wedge dz$,
2. $d\omega = 0$.

Solució: Com que la diferencial de ω s'escriu com

$$d\omega = (1 - f(y) + y\,f'(y))\;dx\wedge dy\wedge dz$$

1. S'ha de complir
$$1 - f + y\,f' = 1$$
i no costa gaire veure que les solucions d'aquesta equació diferencial són totes de la forma $f(y) = k\,y$ (k constant). Si ha de ser $f(1)=1$ la funció és $f(y)=y$.

2. En aquest cas l'equació diferencial és
$$1 - f + y\,f' = 0$$
i tampoc costa gaire veure que la solució amb $f(1)=1$ ha de ser la funció constant $f(y)=1$.