Notes de la unitat 3 (Endomorfisme de Weingarten)

Aplicació lineal, on vam suposar que teníem una superfície orientada per un vector perpendicular unitari que representem amb la lletra ν `\nu`.

Recordem que T_pS és llegeix com el pla tangent a un punt p de la superfície S. S^2 és l'esfera unitat.

Aquest vector el podem pensar com una aplicació que va de la superfície a la esfera unitat, i això té un nom que és **L'aplicació de Gauss**.

Llavors com el nostre objectiu és definir la forma geomètrica de la nostra superfície des de un punt de vista exterior, llavors **convé veure com varia aquest vector normal**. Per tant, el que fem és mirar **la seva diferencial** (del vector normal `\nu`) i el punt clau aquí, és que com en un punt donat en el pla tangent a la superfície en aquell punt, com el pla tangent en la imatge del punt a l'esfera unitat són paral · lels, els identifiquem de forma que aquesta diferencial la podem **pensar com una aplicació lineal d'un K.espai vectorial en si mateix** (és a dir un endomorfisme) i aquest endomorfisme **rep un nom que és l'endomorfisme de Weingarten-** Però **alerta**, per motius històrics i pràctics, s'acostuma a prendre amb el signe canviat, **amb un signe negatiu**.

- `Aplicació de Gauss:`

$$\nu : S \longrightarrow S^2$$

- `Diferencial de la funció vectorial de \nu en el punt p:`

$$d\nu_p : T_pS \longrightarrow T_{\nu_p}S^2 \equiv T_pS$$

- `Endomorfisme de Weingarten (o Diferencial de la funció vectorial de \nu en el punt p canviada de signe):`

$$W = -d\nu_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

Per fer això que deia de explorar les propietats algebraiques de l'endomorfisme de Weingarten primer veurem un lema que ens facilitara els càlculs:

Lema (Regla de càlcul força útil)

- Siguin $\varphi = \varphi(u, v)$ parametrització de S, $\alpha = \varphi(u(t), v(t))$ corbes de S i $p = \alpha(0)$. Posem $\nu(t) = (\nu \circ \alpha)(t) = \nu(u(t), v(t))$.

– Llavors $d\nu_p(\alpha'(0)) = d\nu_p(u'(0)\cdot\varphi_u + v'(0)\cdot\varphi_v) = u'(0)\cdot\nu_u + v'(0)\cdot\nu_v$.
– En particular $\begin{cases} d\nu_p(\varphi_u) = \nu_u, \\ d\nu_p(\varphi_v) = \nu_v \end{cases}$

Demostració

- Suposem Hipòtesis. *La gràcia està en que la diferencial és aplic. lineal* La resta és senzillament regla de la cadena
  –
$$\frac{d}{dt}\nu_p(\alpha'(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\nu\circ\alpha)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\nu(u(t),v(t)) = u'(0)\cdot\nu_u + v'(0)\cdot\nu_v$$
  – En particular, si $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ on ($\nu_0 =$ `constant`), ha de ser $u'(0) = 1$ i $v'(0) = 0$, i en conseqüència $d\nu_p(\varphi_u) = \nu_u$ i $\nu_p(\varphi_v) = \nu_v$. **Q.E.D.**

Exemple (Paraboloide hiperbòlic o *sella*)

Un cas una mica més interessant que ens servira per veure com hem de fer els càlculs i que involucren aquest càlculs és el següent.

Imaginem que tenim una *sella* un paraboloide hiperbòlic determinat per aquesta equació:

- Paraboloide hiperbòlic (*sella* o *pringle*):
  i) $z = x^2 - y^2$
  ii) Parametritzat per $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$
- `Fent les primeres derivades:`
$$\begin{cases} \varphi_u = (1, 0, 2u) \\ \varphi_v = (0, 1, -2v) \end{cases}$$
- `Calculant el producte vectorial per trobar un vector tangent:`
$$\varphi_v \wedge \varphi_u = (-2u, 2v, 1)$$

>Com que el vector té tercera component constant i positiva, ja el podem imagina sempre apuntant cap amunt.

Però el vector que volem obtenir és el normal, per tant ens cal normalitzar, és a dir, dividir pel modul o norma del mateix vector:

$$\nu = \frac{\varphi_v \wedge \varphi_u}{\|\varphi_v \wedge \varphi_u\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}} \cdot (-u, v, 1/2)$$

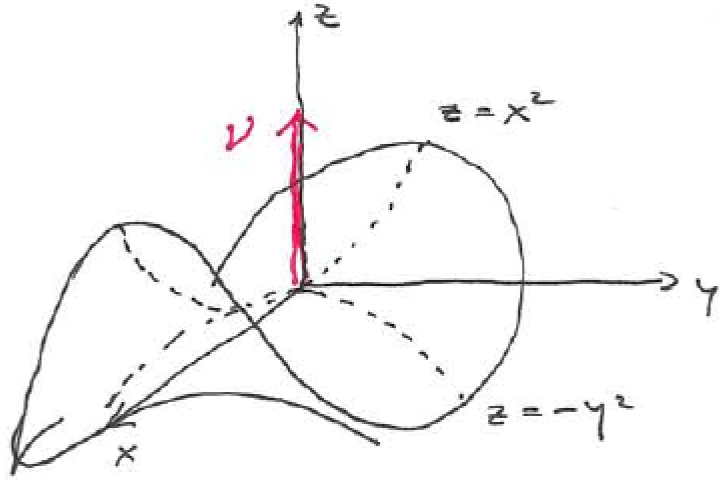

Figure 1: Paraboloide Hiperbòlic amb vector ν normal al punt origen $(0,0,0)$ apuntant cap a fora destingit amb vermmell.

A partir d'aquí... **Què volem conèixer ?** Doncs el Endomorfisme de Weingarten, que per simplificar ho fem en un punt concret $p = (0,0,0)$.

L'exercici que en proposem serà: "Determinar l'endomorfisme de Weingarten en el punt $p = (0,0,0)$ "

Observem que $d\nu_p$ està determinada per $d\nu_p(\varphi_u) = \nu_u$ i $\nu_p(\varphi_v) = \nu_v$, W endomorfisme de Weingarten està determinat, en tant que és aplicació lineal, per les imatges del elements d'una base, doncs és suficient conèixer aquest dos darrers càlculs.

LLavors que hem de fer per determinar l'aplicació de Weingarten ? Doncs calcular aquestes dues derivades. ν_u i ν_v Això és *un pelet* laboriós però no gatiré complicat tampoc.

$$\nu_u = \left(\frac{u^2}{\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, -\frac{uv}{\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{u}{2\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

I per tant $\nu_u(0,0) = \cdots = -2\varphi_u(0,0) = (-2,0,0)$

Però observem que que aquest vector, el $(1,0,0)$ és perpendicular a φ_u quan la u és zero. Aquí hem tingut molta sort perquè resulta que aquesta derivada és precisament menys dues vegades el vector de la base en el que estem fent els càlculs.

I de manera similar que aquí ara no repeteixo fem la derivada del vector normal ν respecte v. Com tenim el **Sage** a mà:

$$\nu_v = \left(\frac{uv}{\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{v^2}{\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}, -\frac{v}{2\left(u^2+v^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

I per tant $\nu_v(0,0) = \cdots = 2\varphi_v(0,0) = (0,2,0)$

Ara obtindríem un múltiple positiu a diferencia d'abans, d'un altre vector de la base, que és el segon. El segon vector. De manera que si volem calcular l'endomorfisme de Weingarten en aquest punt, només ens cal fer servir:

$$W_{(0,0)} = -d\nu_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilitzant aquesta base, que aquesta base és molt convenient, i en aquesta base resulta que l'endomorfisme de Weingarten està donat per una matriu diagonal, que té entrades 2 i -2. Eh. Aquí hem canviat els signes.

Aquí hem tingut molta sort perquè d'entrada veiem que en aquest punt $(1,0,0) = \varphi_u$ i $(0,1,0) = \varphi_v$ són vectors propis de W_0 d'entrades 2 i -2, respectivament. Que **atenció** tenen signe canviat.

Jo voldria que ara paréssiu un moment, i intentéssiu visualitzar el següent:

El vector φ_u en aquest punt (l'origen) és el vector que apunta cap en la direcció del eix de les x. Això vol dir que si ens movem en aquesta direcció i fem moure el vector normal al llarg de la corresponent línia coordenada que seria aquesta paràbola (la pringuel té una cara feliç i trista a la vegada, doncs la alegre cap a dalt) en la direcció de les x, veiem que el moviment d'aquest vector normal, gira justament al revés (des de fora cap a endins). Mentre que en movem des de dins cap a enfora el vector normal va al revés. Des de fora cap a endins. I això explica el signe negatiu de $-2\varphi_u(0,0)$ que en apareix aquí, en aquest valor propi vull dir.

En canvi si ho fem per la direcció determinada pel vector φ_v, que en l'origen vindria donat per l'eix de les y i ens movem dels valors negatius cap als positius. Veiem que el corresponent vector normal també va des de *lo negatiu cap a lo positiu*, és a dir, segueix la mateixa direcció. I això explica que aquí $2 \cdot \varphi_v(0,0)$ tinguem aquest valor propi positiu, en aquest cas.

Els vector de la base en que en donat el Endomorfisme de Weingarten son (φ_u, φ_v)

$(det(W_0) = det(d\nu_0) < 0)$

En qualsevol cas, això té com a conseqüència un fet que després tindrà la seva importància, que és que, el determinant d'aquesta aplicació W_p, que coincideix amb el deteminant de la diferencial, perquè atenció,estem treballant amb matrius de dos per dos de manera que encara que canviem el signe de la matriu, en determinant no varia, surt aquest menys u al quadrat. Tots dos tenen doncs un determinant que
és negatiu, i això el que vol dir, és que aquesta transformació, pensada com una aplicació lineal d'un espai de dimensió dos en si mateix, inverteix orientacions. És exactament el contrari del que pasaba, per exemple, quan consideràvem el cas de l'esfera, veurem que això tindrà implicacions des de el punt de vista geometric. Molt bé, doncs amb això espero que quedi més clar el significat d'aquesta aplicació.

Doncs ara anem a aquestes propietats algebraiques de que parlàvem; la bàsica que no és difícil de demostrar, que és la fonamental, és la que teniu aquí enunciada.

Proposició W_p és autoajunt (respecte $<\ ,\ >_p$) i equivalentment

$$\langle W_p(\vec{v}), \vec{w}\rangle_p = \langle \vec{v}, W_p(\vec{w})\rangle_p \qquad \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_pS$$

Que és que aquest endomorfisme de Weingarten és **autoajunt**, recordo que **autoadjunt, volia dir que si mirem aquest producte escalar i fem W en el primer vector o el fem actuar en el segon vector al fer el producte escalar resulta que el resultat és el mateix**

Demostració: Molt bé doncs per provar aquest enunciat doncs, podem simplificar el raonament, perquè la primera cosa és que, els dos terme que apareixen en l'igualat, són bilineals, el producte escalar és bilineal, W (el endomorfisme de Weingarten), és lineal. De manera que per provar aquesta identitat només cal que ho comprovem pels vectors d'una base , diguemne $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ de T_pS.

La segona simplificació, és que si prenc el mateix vector el primer o el segon $\vec{w_i}$, es igual quin dels dos, i miro el que diuen aquests dos termes (en referencia a els termes separats per comes de $\langle W_p(\vec{w_i}), \vec{w_i}\rangle_p$) doncs resulta que ens estan dient el mateix, perquè aquest producte escalar és simètric , per tant això de:

$$\langle W_p(\vec{w_i}), \vec{w_i}\rangle_p = \langle W_p(\vec{w_i}, \vec{w_i})\rangle_p$$

és compleix sempre.

Per tant ara sols ens queda una sola identitat a provar, que és la que teniu aquí escrita:

$$\langle W_p(\vec{w_1}, \vec{w_2})\rangle_p = \langle \vec{w_1}, W_p(\vec{w_2})\rangle_p$$

que és el cas en que apliquem a dos vectors diferents de la base $\vec{w_1}, \vec{v_2}$. Per tant aquesta seria la única identitat que queda provar.

Per fer-ho possible el que fem és pendre una parametrització i prenem una base, però no una base qualsevol sino la associada a la parametrització, és a dir, la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Llavors aquí el punt és que, aquest vector normal ν és ortogonal al tangent.

Com que ν **és ortogonal** a T_pS obtenim, derivant que:

De manera que tenim aquestes dues relacions, ja que ν és ortogonal a φ_v i també ortogonal a φ_u. I si derivem a cadascuna d'aquestes identitats, respecte una de les variables, de manera convenient, per exemple en la primera que fa aparèixer la derivada respecte v la derivem respecte u doncs tenim aquesta identitat de la dreta (la fila amb el simbol (**1**)). Hem derivat respecte de u fent servir que la regla de *Leibniz* la *derivada del primer per el segon sense derivar més la derivada del primer sense derivar per la derivada del segon.* i en la segona linea el mateix.

$$\begin{cases} \langle \nu, \varphi_v\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nu_u, \varphi_v\rangle + \langle \nu, \varphi_{vu}\rangle = 0 \qquad (\mathbf{1}) \\ \langle \varphi_u, \nu\rangle = 0 \Rightarrow \langle \varphi_u, \nu_v\rangle + \langle \varphi_{uv}, \nu\rangle = 0 \qquad (\mathbf{2}) \end{cases}$$

Aleshores posem juntes , aquestes dues relacions, que per cert aquestes relacions, m'haureu de disculpar aquí estan dient que són iguals a zero, se'm ha colat, faltaria que en les dos files la suma que hi ha, a cada fila, valen zero cadascuna.(**Ja ho he corregit**), disculpeu. Si posem juntes aquestes dues relacions, doncs, doncs que ens estan dient, doncs per exemple aquest primer terme (en el video es pot veure com senyala a $\langle \nu_u, \varphi v\rangle$) és igual a menys aquest altre terme (tot senyalant $\langle \nu, \varphi_{uv}\rangle$ hi ho escrivim així,tot senyalant $\langle -\nu, \varphi_{vu}\rangle$.

Ara bé, com que val la regla de Schwartz,deriva primer respecte de v i després respecte de u, val el mateix que derivada respecte u i després derivada de v, és a dir, és el mateix si intercanviem l'ordre. Doncs o podem substituir per aquest terme (tot senyalant amb el ratolí $\langle \varphi_{uv}, \nu\rangle$). I com que la suma d'això és zero tot senyalant **(2)**, doncs podem subtituir pel primer terme, és a dir, $\langle \varphi_u, \nu_v\rangle$.

Si ara ens en-recordem de allò que havíem dit, d'aquell primer **Lema** que havíem demostrat abans. Resulta que aquesta derivada del vector normal ν, respecte de u, és igual a $W_p(\varphi_u)$ i el mateix passa amb la derivada de ν respecte de v, que val $W_p(\varphi_v)$. Llavors obtenim justament la identitat que volíem probar. I això conclou la demostració d'aquest resultat.

(1)+(2) $\Rightarrow$

$$\langle \nu_u, \varphi_v \rangle = -\langle -\nu, \varphi_{vu} \rangle = -\langle \varphi_{uv}, \nu \rangle = \langle \varphi_u, \nu_v \rangle$$

i pel lema d'abans tenim que

$$\langle W_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle_p = \langle \varphi_u, W_p(\varphi_v) \rangle_p$$

I ja. $\square$

A partir d'aquí podem demostrar el que realment ens interessa, a efectes pràctics, que és que W_p l'endomorfisme **de Weingarten és un endomorfisme que diagonalitza** en una base ortonormal de l'espai vectorial T_pS. I atenció, **diagonalitza amb valors propis reals**.

Això si voleu , és la versió més elemental del que és coneix com a **teorema espectral**, segur que al llarg de la carrera veureu diferents versions del ** *Teorema espectral*.

El cas més senzill, és aquella que ens diu, que una matriu simètrica diagonalitza en una base ortonormal. En aquí es gairebé en aquesta situació tot senyalant amb el ratolí:

Proposició: W_p diagonalitza en una base ortonormal de T_pS (amb valors propis reals).

I encara que segur que ja heu vist aquest teorema, de manera potser més general i tot, deixeu-me que repassi la demostració en aquest cas, perquè serà il · lustratiu pel que ens interessara després.

De manera que provem això. I està clar, que el fet crucial és que, si aquest operador és autoadjunt, llavors quan prenem una base ortonormal qualsevol, d'aquest espai tangent T_pS, **la matriu que representa aquest endomorfisme en aquesta base és simètric**. Aquest és el punt clau. Això que vol dir ? Això vol dir que si escric la imatge de $\vec{v_1}$, és a dir, $W_p(\vec{v_1})$ com a combinació lineal de $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$, tindran uns coeficients , el mateix també per $\vec{v_2}$. Atenció, aquest dos són els mateixos (Tot fent referencia a b). I això és així per què ? Doncs precisament perquè W_p és autoadjunt. Com podem determinar aquest primer coeficient b? El coeficient de $W_p(\vec{v_1})$ expressant en termes de $\vec{v_2}$. Doncs com que la base és ortonormal, hi això ja ho hem comentat algún altre cop, aquest coeficient és calcula fen aquest producte escalar (tot senyalant $b = \cdots$).Però com que W_p

és autoadjunt respecte del producte escalar podem passar aquesta aplicació W_p al altra banda, i resulta que ara aquest terme de la dreta (tot referint-se a $W_p(\vec{v_2})$) és precisament el coeficient d'aquest vector (tot referint-se a $W_p(\vec{v_2})$) que és el que tenim aquí (tot senyalant $W_p(\vec{v_2}) = b \cdot \vec{v_1} + c \cdot \vec{v_2}$), amb el primer vector de la base $\vec{v_1}$ (tot senyalant que els dos vectors estan en el segon producte escalar de la igualtat que comença amb un $b =$), de manera que torna a ser b. De manera que ara tenim que W en aquesta base ortonormal s'escriu o ve donada per una una matriu simètrica.

Demostració:
Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ és una base **ortonormal** de T_pS, la matriu que representa W_p en aquesta base és **simètrica**.

$$\begin{cases} W_p(\vec{v_1}) = a \cdot \vec{v_1} + b \cdot \vec{v_2} \\ W_p(\vec{v_2}) = b \cdot \vec{v_1} + c \cdot \vec{v_2} \end{cases}$$

En efecte:

$$b = \langle W_p(\vec{v_1}), \vec{v_2} \rangle = \langle \vec{v_1}, W_p(\vec{v_2}) \rangle = \cdots$$

Això té conseqüències de cara als **valors i vectors propis** perquè la matriu que l'expressa és
molt particular, i si el que volem conèixer quins són els seus valors propis i/o vectors propis, com ja sabeu, doncs el que fem és escriure el **polinomi característic** i veure com són les seves arrels, en aquest cas particular el polinomi característic, doncs ve donat d'aquesta manera que és: `\lambda` al quadrat menys la traça per `\lambda` més el determinant. I el determinant aquí és bastant particular.

Polinomi característic de W_p:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + c) \cdot \lambda + (ac - b)^2$$

Per veure com són les arrels d'aquest polinomi $P(\lambda)$, doncs podem mirar, lo que fem sempre, el seu discriminant, que si ho re-ordenem ho podem escriure d'aquesta forma, aquest primer quadrat més un segon quadrat, llavors és una suma de quadrats, i per tant és més gran o igual que zero.

Discriminant:

$$D = (a + c)^2 - 4 \cdot (ac - b^2) = (a - c)^2 + 4 \cdot b^2 \geq 0$$

I això el que vol dir és que, quan calculem els zeros de aquest polinomi, les arrels, sean reals. Això vol dir, primera cosa que els valors de propis de W_p són reals. I ara es plantejen dues situacions, la primera seria que, aquest discriminant és zero, és un cas més especific, menys frecuent, però també l'hem de considerar.

Si $D = 0$ resulta que, la situació és particularment senzilla, per a què D sigui zero aquest dos quadrats han de ser cadascun zero, en particular, a ha de ser c, i b també s'ha d'anular, és a dir ha de valdre zero. Si mirem que vol dir això en la matriu de W_p en una base ortonormal, és una matriu diagonal, i no només diagonal sinó que és un múltiple de la identitat, el múltiple és aquest coeficient a. Ara una **matriu constant, diagonalitza en qualsevol base** `(A=a*Id)`. En particular podem pendre una base ortonormal. De manera que això provaria en aquest cas especial.

$\Rightarrow$ Valors propis de W_p **són reals**

Cas 1:

$$D = 0 \Rightarrow a = c \text{ i } b = 0 \Rightarrow W_p = a \cdot Id$$

I diagonalitza en qualsevol base.

El cas general és una mica més interessant, potser hem de raonar una mica més però tampoc és difícil, i que corresponen en el cas en que el discriminants és més gran que zero estrictament. Per tant és diferent de zero i això voldrà dir que el polinomi característic tindrà dos valors propis diferents, això sí, tots dos reals.

Però les arrels del polinomi són precisament els valor propis de W i els anomenem k_1 i k_2 que són diferents.

Cas 2:
$D \neq 0 \Rightarrow$ Els valors propis de $W_p =$ arrels de $P(\lambda)$ són **reals** i **diferents** k_1 i k_2.

I per acabar la demostració, què fem ? Triem una base de vectors propis corresponents a aquest valors propis, seran independents, com que aquest valors propis són diferents, per tant la podem pendre, i ja de passada, els prenem unitaris, per tant tenim dos vector que defineixen una base, on cada un d'ells és vector propi i cada un té norma 1. I ara el únic que necessitaríem veure és que, de fet són ortogonals, és a dir el seu producte escalar és zero.

Per veure doncs fem el següent calcul, multipliquem aquest producte escalar (en referencia a $\langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle$) per el primer del valors propis, és a dir, per k_1. Aquest el podem entrar en el primer terme, però justament, això és la imatge per W, ja que $\vec{w_1}$ és un vector propi de valor propi k_1 de W, i per ser W autoadjunt respecte del producte escalar, podem passar W a la dreta, afectant ara a $\vec{w_2}$, i com que aquest torna a ser un vector propi de W el podrem escriure com k_2 per $\vec{w_2}$, i finalment treure aquest k_2 i tenim aquesta identitat. \$$k_1 \langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle = k_2 \langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle$ i com que necessàriament $k_1 \neq k_2$, aleshores la única possibilitat de que passi això és que aquest producte escalar sigui zero, i per tant autènticament la base es *ortonormal* ja que $\vec{w_1}$ i $\vec{w_2}$ són **ortogonals i unitaris**.

I en particular això ens dirà que, aquest endomorfisme en aquest a base s'escriu d'aquesta forma que teniu aquí, és a dir, que diagonalitza, amb aquest valor propis k_1 i k_2. I això és el que volíem.

Sigui $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ base de vectors propis **unitaris**. $k_1\langle\vec{w_1}, \vec{w_2}\rangle = \langle k_1\vec{w_1}, \vec{w_2}\rangle = \langle W_p(\vec{w_1}), \vec{w_2}\rangle = \langle\vec{w_1}, W_p(\vec{w_2})\rangle = \langle\vec{w_1}, k_2\vec{w_2}\rangle = k_2\langle\vec{w_1}, \vec{w_2}\rangle$.

$\Rightarrow \{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ es base **ortonormal** i

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \quad \{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$$

I més endavant el que farem serà, és precisament interpretar aquest resultat algebraic des de un punt de vista geometric.

De moment però fiquem nom a les coses els noms són els següents que teniu aquí, aquests direccions pròpies donades per els vectors $\vec{w_1}$ i $\vec{w_2}$, o en general qualsevol direcció propia de W_p direm que són **direccions principals**; i direm que els valors propis associats són les **curvatures principals**.

Però veieu que aquí utilitzar la paraula curvatura és una mica sorprenent, estem en un context algebraic i posats aquí a parlar de curvatura serà una cosa que haurem de justificar. Hi ha un cas particular que és en que aquest discriminant era zero, que era aquell cas en que el endomorfisme de Weingarten era un múltiple de la identitat, en aquí totes les direccions són principals, hi ha una única curvatura principal que és aquest `\lambda` és un cas especial, seguint amb la notació considerem això de utilitzar la paraula *curvatura*. Aquí el que fem es considerar els invariants totalment associats a matrius dos per dos, quan tenim una matriu en general n per n, hi han uns coeficients , uns valors numèrics, que no depenen o que són invariants respecte la conjugació , dit d'una altre manera, un endomorfisme, hi han uns invariants numèrics d'aquest endomorfisme, que no depenen de la base en la que expressem l'endomorfisme i aquests són justament els coeficients del polinomi característic, en dimensió dos, doncs només en tenim dos, tindríem la traça i el determinants, de manera que, com són entitats importants, els hi posem un nom
mirem el determinant, primer de tot i després la traça. Aquesta traça la dividirem per dos, aquesta traça la dividirem per dos, això és una mica estrany però ara veurem que té una motivació que entendrem ... bé en fi, té un cert sentit això, ja ho veurem més endavant.

Llavors aquest "traça" que seria la suma de aquestes k's dividit per dos l'anomenarem **curvatura mitjana** i al producte de valors propis k_1 i k_2 que és el determinant de W_p, **curvatura de Gauss**.

Per tant tenim **curvatura de Gauss**, **curvatura mitjana**. De nou la paraula *curvatura*, això tindrà un sentit, ho veurem una mica més endavant.

Ja de passada, observeu que si coneixem la curvatura mitjana i la curvatura de Gauss, automàticament coneixem quines són les **curvatures principals**, eh. Per què ? Doncs perquè k_1 i k_2 són les solucions d'aquest polinomi característic, que és aquell que té com a equació :$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ on H és la curvatura mitjana i K la curvatura de Gauss. De fet podem trobar $k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Ara uns exemple que ja han sortit , però posan de manifest que sembla que potser si que hi haurà d'haver una relació entre, com a mínim, el signe de la curvatura de Gauss i ,potser, la manera de curvar-se d'aquestes superfícies, recordem que són les següents eh:

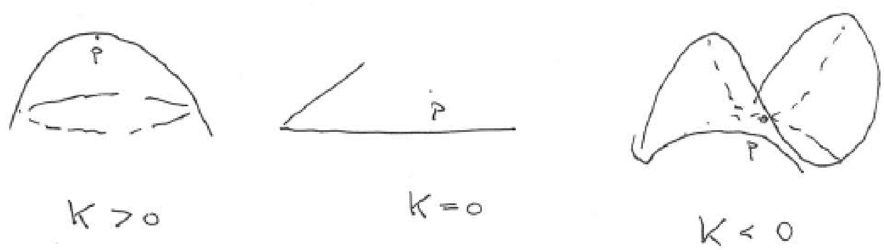

Figure 2: Tres exemples amb curvatura de Gauss diferent: Cúpula de una esfera $k > 0$ (curvat somriure invertit), pla $k = 0$, paraboloide hiperbòlic $k < 0$(somriure no invertit)

en el pla tenim que l'endomorfisme de Weingarten és constant.

Ja veurem més endavant que té curvatura de Gauss reflexa que una superfície localment és com una esfera; i que curvatura negativa té un aspecte local com si fos una *sella*, **el cas curvatura zero, com en el cas general degenerat és més complicat i hi hauran més possibilitats.**

Comencem, finalment, una tercera secció, que és justament la segona forctor normal ma fonamental, que és l'altre topic ,eh, d'aquest capítol,** com sempre prenem una superfície regular orientada per un vector normal i mirem un punt de la superfície**, i podem fer el que hem fet abans, fem el producte escalar de dos vectors, però atenció, afectem un d'ells, el primer per exemple, per l'endomorfisme de Weingarten, o si voleu, canviant el signe, la diferencial de l'aplicació de Gauss, eh!, llavors la primera observació, és que aquesta** aplicació és bilineal i simètrica**,

simètrica, perquè justament, com que l'endomorfisme de Weingarten és autoadjunt al producte escalar, podem passar al terme de la dreta i com que aquest producte escalar és simètric el podem desplaçar al principi.

I s'anomena, per tant això és notació, segona forma fonamental de S en aquest punt la forma quadràtica associada, la forma quadràtica associada en aquesta aplicació bilineal (Tot senyalant: $T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$). De manera que denotarem am aquest `II` aplicat a $\vec{(w)}$ el resultat de fer aquest producte escalar (Mirant $II_p(\vec{w}) := \langle W_p(\vec{w}), \vec{v} \rangle$).

Un comentari senzill és que, com que aquest aplicaió bilineal és simètrica, tenim aquí també una **identitat de polarització**, de manera que si jo aplico per exemple, aquesta segona forma fonamental a una suma i desenvolupo el que això vol dir (tot senyalant el que segueix) amb tots els termes que m'apareixen el primer és la segona forma fonamental aplicat al primer vector, l'ultim és la segona forma fonamental aplicada al segon vector, i aquí tinc dos termes diferents però que per la simetria que tinc que acabem de veure fa una estona són el mateix, jo puc ajuntar-los com aquest únic terme que és el que és desconegut, però si jo conec la segona forma fonamental conec el terme de la esquerra, també conec els dos extrems de la banda dreta i per tant aquest queda inequívocament determinat.

Observació II_p està determinat per (*) ja que val la **identitat de polarització**

$$II_p(\vec{v} + \vec{w}) = \langle W_p(\vec{v} + \vec{w}), \vec{v} + \vec{w} \rangle$$

$$= \langle W_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle + \langle W_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle + \langle W_p(\vec{w}), \vec{v} \rangle + \langle W_p(\vec{w}), \vec{v} \rangle$$

$$= II_p(\vec{v}) + 2\langle W_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle + II_p(\vec{w})$$

De nou, per tant, conèixer la segona forma fonamental o conèixer aquesta aplicació bilineal simètrica definida així, és equivalent , eh, de manera que em permetreu un petit abús de notació, que és anomenar també segona forma fonamental ,i escriure-ho també de la mateixa manera , quan ho pensem com a forma bilineal, eh.

Notació: $II_p(\vec{v}, \vec{w}) := \langle W_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle$

Llavors una ultima, opció que cal tenir en compte, és que aquest quadràtica no té perquè ser definida positiva. Ja ho hem vist abans. Podem tenir signes positius, negatius i zeros, per tant no és un producte escalar.

Atenció!: II_p **NO és necessàriament definida positiva**

Doncs amb això acabaríem el material de aquest primera setmana i el proper dia el que farem serà doncs donar sentit geomètric, al que hem fet avui, eh, de manera que explicarem, perquè hem anomenat curvatures a aquestes curvatures principals i a la curvatura de Gauss i curvatura mitjana, i això és tot per avui, molt bé.