Examen final, primera convocatòria, 17 de juny de 2010

1.– Sigui C una espiral logarítmica del pla, i.e. parametritzada en coordenades polars per $r = ae^{b\theta}$ amb $a, b > 0$ i $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Proveu que el radi del cercle osculador de C en el punt de coordenades polars $(ae^{b\theta}, \theta)$ és igual a $ae^{b\theta}\sqrt{b^2+1}$. *Indicació*: Si us és més fàcil podeu utilitzar l'exponencial complexa $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

b) Parametritzeu l'evoluta C' de C, és a dir, el lloc geomètric dels centres de curvatura de la corba C. Quin tipus de corba és C'?

c) Hi ha algun valor dels paràmetres $a, b > 0$ de manera que $C' = C$?

Solució: *La curvatura amb signe κ d'una corba plana $\gamma(t)$ es calcula amb la formula $\kappa = \det(\gamma', \gamma'')/|\gamma'|^{3/2}$. Apliquem aquesta formula al nostre cas i, amb més o menys càlculs, arribem a l'expressió $\kappa = 1/ae^{b\theta}\sqrt{b^2+1}$. Com que el radi de curvatura ρ és igual a $1/\kappa$ obtenim el que es demana a l'apartat a). Una parametrització de l'evoluta d'una corba $\gamma(t)$ és $\alpha(t) = \gamma(t) + \rho\,\mathbf{n}(t)$ on $\mathbf{n}$ és el normal unitari donat per $i\mathbf{t} = i\gamma'/|\gamma'|$. El en nostre cas*

$$\gamma'(t) = (r'\cos t - r\sin t, r'\sin t + r\cos t), \quad |\gamma'| = \rho.$$

Llavors

$$\alpha(t) = r'(-\sin t, \cos t) = abe^{bt}(-\sin t, \cos t)$$

és una parametrització de l'evoluta. Es tracta d'una espiral logarítmica girada 90 graus amb mòdul abe^{bt}.

Per veure sota quines condicions $C' = C$ intentem escriure una parametrització de C' de la forma $f(t')(\cos t', \sin t')$. Posem $t = t' - \pi/2 + 2k\pi$ aleshores tenim

$$x(t) = abe^{b(t'-\pi/2+2k\pi)}\cos t', \qquad y(t') = abe^{b(t'-\pi/2+2k\pi)}\sin t'.$$

Volem que $abe^{b(t'-\pi/2+2k\pi)} = ae^{bt'}$. Això passarà quan $\ln b/b = \pi/2 - 2k\pi$. Per valors de k positius aquesta equació sempre te solució en b.

2.– Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització regular d'una superfície orientada amb vector normal unitari

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||}.$$

Considerem la superfície paral·lela parametritzada per

$$\psi(u, v) = \varphi(u, v) + aN(u, v)$$

on a és una constant real.

a) Si K i H són la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de φ, proveu que

$$\psi_u \times \psi_v = (1 - 2Ha + Ka^2)\,\varphi_u \times \varphi_v.$$

b) Proveu que en els punts regulars les curvatures de Gauss i mitjana de ψ són respectivament

$$\frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2} \quad \text{i} \quad \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

c) Utilitzeu l'apartat anterior per provar que si φ té curvatura mitjana constant no nul·la aleshores existeix una superfície paral·lela amb curvatura de Gauss constant.

Solució: *Posem* $-N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ *i* $-N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$*. Com que el determinant i la traça de l'aplicació de Weingarten* $W = -dN$ *són la curvatura de Gauss i el doble de la curvatura mitjana tenim que* $K = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *i* $2H = a_{11} + a_{22}$*. Llavors com que* $\psi_u = \varphi_u + aN_u$ *i* $\psi_v = \varphi_v + aN_v$ *resulta que*

$$\psi_u \times \psi_v = \varphi_u \times \varphi_v + a(\varphi_u \times N_v + N_u \times \varphi_v) + a^2 N_u \times N_v.$$

A partir de l'expressió de N_u *i* N_v *en termes de* φ_u *i* φ_v *deduïm que* $\varphi_u \times N_v + N_u \times \varphi_v = -2aH\varphi_u \times \varphi_v$*. Anàlogament trobem que* $N_u \times N_v = K\varphi_u \times \varphi_v$*. D'aquesta igualtats resulta la identitat que es demana a l'apartat a). Observem que per valors de* a *prou petits l'expressió* $1 - 2Ha + Ka^2$ *és positiva, aleshores de la igualtat demostrada a l'apartat a) deduïm que el normal unitari* $\tilde{N}$ *de la superfície donada per* ψ *és* $N(u, v)$*.*

Siguin $W = (a_{ij})$ *i* $\tilde{W} = (\tilde{a}_{ij})$ *les matrius de les aplicacions de Weingarten de les superfícies* φ *i* ψ *en les bases* $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ *i* $\{\psi_u, \psi_v\}$ *respectivament. Tenim que* $\psi_u = (1 - a\ a_{11})\varphi_u - a\ a_{21}\varphi_v$ *i* $\psi_v = -a\ a_{12}\varphi_u + (1 - a\ a_{22})\varphi_v$*. Llavors la matriu*

$$C = \begin{pmatrix} 1 - aa_{11} & -aa_{12} \\ -aa_{21} & 1 - aa_{22} \end{pmatrix}$$

canvia de la base en φ *a la base en* ψ*. Llavors* $C \cdot \tilde{W} = W$*. Per tant*

$$\tilde{K} = \det(C^{-1} \cdot W), \qquad \tilde{H} = \mathrm{tr}(C^{-1} \cdot W).$$

El determinant de C *val* $1 - 2Ha + Ka^2$ *d'on deduïm la primera part de l'apartat b). L'expressió de la curvatura mitjana es calcula també a partir de l'expressió anterior.*

Si la curvatura mitjana de φ *compleix* $H = c \neq 0$ *prenent* $a = 1/2c$ *obtenim una superfície paral·lela amb* $K = 0$*.*

3.– Sigui $\alpha(s)$ una parametrització per l'arc d'una corba C continguda dins d'una superfície S orientada amb vector normal unitari N. Sigui T el vector tangent unitari de C i $U := N \times T$. Considereu la superfície tubular de radi constant $r > 0$ parametritzada per $\varphi(s, t) := \alpha(s) + r\cos(t)\, U(s) + r\sin(t)\, N(s)$.

a) Definiu la curvatura geodèsica k_g i la curvatura normal k_n d'una corba continguda en una superfície.

b) Trobeu la primera forma fonamental de φ i comproveu que el seu element d'àrea és

$$dA = r(1 - r(\cos(t)\, k_g(s) + \sin(t)\, k_n(s)))\, ds\, dt.$$

Deduïu que si r és prou petit llavors la parametrització φ és regular.

c) Suposant que φ és regular, calculeu els coeficients de la segona forma fonamental de φ i comproveu que la curvatura de Gauss ve donada per la fórmula

$$K(s, t) = -\frac{k_g(s)\cos(t) + k_n(s)\sin(t)}{r(1 - r(k_g(s)\cos(t) + k_n(s)\sin t))}.$$

Indicació: Utilitzar la base T, U, N.

Solució: *Donada una corba* $\gamma(s) \subset S$ *parametritzada per l'arc tenim que* $\gamma'' = \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ *on* κ *és la curvatura de* α*,* $\mathbf{t} = T$ *el vector tangent unitari a* α *i* $\mathbf{n}$ *el vector normal unitari a*

α. Descomposem T' en part tangent i part normal a la superfície, tenim $T' = k_g U + k_n N$ on $U = N \times T$. Observem que la part tangent a la superfície de T' és proporcional a U ja que T' és perpendicular a T i N. Llavors les funcions $k_g(s)$ i $k_n(s)$ són les curvatures geodèsica i normal de α en el punt $\alpha(s)$.

Per trobar la primera forma fonamental cal conèixer $E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle$, $F = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle$ i $G = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$. Tenim que $\varphi_s = T + r\cos(t)U' + r\sin(t)N'$ i $\varphi_t = -r\sin(t)U + r\cos(t)N$. Com que $\langle N', T\rangle = -\langle N, T'\rangle = -k_n$ tenim que $N' = -k_n T + cU$ per una certa funció c (la torsió geodèsica). A més $U' = N' \times T + N \times T' = -cN - k_g T$. Podem escriure aquestes relacions com

$$\begin{array}{rclll} T' & = & & k_g U & +k_n N \\ U' & = & -k_g T & & -cN \\ N' & = & -k_n T & +cU & \end{array}$$

Ara expressem φ_s en la base $\{T, U, N\}$, obtenim

$$\varphi_s = (1 - r(\cos(t)\,k_g(s) + \sin(t)\,k_n(s)))T + rc\sin(t)U - rc\cos(t)N.$$

Llavors $E = (1 - r(\cos(t)\,k_g(s) + \sin(t)\,k_n(s)))^2 + r^2c^2$, $G = r^2$ i $F = -r^2c$. L'element d'àrea és $dA = \sqrt{EG - F^2}ds\,dt$ que val justament el que ens diu l'enunciat del problema.

Quan r és prou petit $(1 - r(\cos(t)\,k_g(s) + \sin(t)\,k_n(s)))$ és a prop de 1 aleshores $||\varphi_s \times \varphi_t|| = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$ i la parametrització és regular.

Fent el càlcul veiem que normal unitari $\tilde{N} = \frac{\varphi_s \times \varphi_t}{||\varphi_s \times \varphi_t||}$ a la superfície φ es pot expressar com

$$\tilde{N}(s,t) = -(\cos(t)U + \sin(t)N).$$

Per calcular la segona forma fonamental hem de trobar els valors de

$$e = \langle \varphi_{ss}, \tilde{N} \rangle, \quad g = \langle \varphi_{tt}, \tilde{N} \rangle, \quad f = \langle \varphi_{st}, \tilde{N} \rangle.$$

Per no carregar massa la notació posem $\delta = 1 - r(\cos(t)\,k_g(s) + \sin(t)\,k_n(s))$. Tenim $\varphi_{ss} = \delta' T + \delta T' + rc\sin(t)U' - rc\cos(t)N'$, fent el producte queda $e = -\delta(\cos(t)k_g + \sin(t)k_n) + rc^2$. Per altra banda $\varphi_{tt} = n\tilde{N}$, llavors $g = r$. I $\varphi_{st} = -r\sin(t)U' + r\cos(t)N'$ per tant $f = rc$. Ens queda la segona forma fonamental

$$II = \begin{pmatrix} -\delta(\cos(t)k_g + \sin(t)k_n) + rc^2 & rc \\ rc & r \end{pmatrix}.$$

Finalment obtenim que la curvatura de la superfície φ és

$$K(s,t) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\delta r(\cos(t)k_g + \sin(t)k_n) + r^2c^2 - r^2c^2}{r^2\delta^2} = -\frac{k_g(s)\cos(t) + k_n(s)\sin(t)}{r(1 - r(k_g(s)\cos(t) + k_n(s)\sin t))}.$$

4.– Sigui C una corba regular tancada amb vector tangent unitari T. Proveu que si C és la vora d'una superfície S aleshores no existeix cap funció diferenciable f tal que $\mathrm{grad}(f) = T$ en tots els punts de C.

Solució: *Raonem per reducció al absurd: si existís una funció diferenciable f tal que $\mathrm{grad}(f)|C = T$ tindríem que*

$$0 < L(C) = \int_C dL = \int_C T\cdot T\,dL = \int_C \mathrm{grad}(f)\cdot T\,dL = \int_S \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f))\,dA = \int_S 0\,dA = 0$$

pel teorema de Stokes i pel fet que $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$.

5.– Considereu a $\mathbb{R}^3$ el camp $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xy, -y^2, z\right)$ i la regió R limitada per la superfície $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ on

$$S_1 = \left\{(x,y,z)|z = 6 - x^2 - y^2, 1 \le z \le 6\right\}$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z)|x^2 + y^2 = 5, 0 \le z \le 1\right\}$$
$$S_3 = \left\{(x,y,z)|x^2 + y^2 \le 5, z = 0\right\}$$

a) Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}$ a través de la superfície S.

b) Calculeu la imatge recíproca o pull-back $T^*(\omega)$ de la forma diferencial

$$\omega = 2xydy \wedge dz + y^2 dx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

per l'aplicació $T : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = \left(\sqrt{5}s\cos(2\pi t), \sqrt{5}s\sin(2\pi t), 6 - 5s^2\right)$.

c) Calculeu $\displaystyle\int_T \omega$.

Solució: *Com que la divergència del camp és 1, el flux a través de S (orientada pel normal exterior) és igual al volum de la regió que envolta. Aquest volum es pot calcular integrant la funció $6 - x^2 - y^2$ sobre el disc de radi $\sqrt{5}$ centrat a l'origen del pla xy. Aquesta integral es fa fàcilment i dona $35\pi/2$. Llavors el flux demanat és $35\pi/2$.*

Tenim que $T^*\omega = \lambda ds \wedge dt$. Podem calcular λ avaluant $(T^*\omega)((1,0),(0,1)) = \omega(\partial T/\partial s, \partial T/\partial t)$. Obtenim

$$T^*\omega = 10\pi s(20\sqrt{5}s^3 \sin(2\pi t)\cos^2(2\pi t) - 10s^3\sin(2\pi t) + 6 - 5s^2)ds \wedge dt.$$

La integral $\int_T \omega$ coincideix amb el flux de l'apartat a) ja que ω és la forma corresponent quan escrivim el flux amb formes. En qualsevol cas, al integral en coordenades, a partir del resultat de b), és senzilla:

$$\int_T \omega = \int_{[0,1]^2} T^*\omega = \int_0^1 \int_0^1 (6 - 5s^2)ds\ dt = \frac{35\pi}{2}.$$

6.– Provar que si $\omega = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$ és una 2-forma tancada en un obert de $\mathbb{R}^3$ en forma d'estrella respecte de l'origen, aleshores $\omega = d\alpha$ on

$$\alpha = (ydz - zdy)\int_0^1 tf(tx,ty,tz)dt + (zdx - xdz)\int_0^1 tg(tx,ty,tz)dt + (xdy - ydx)\int_0^1 th(tx,ty,tz)dt.$$

Trobeu una primitiva α, si existeix, de $\omega = (xz^2 - y)dy \wedge dz - yz^2 dz \wedge dx + xdx \wedge dy$.

Solució: *Per alleujar l'exposició, denotem $I_\varphi(x,y,z) := \int_0^1 t\varphi(tx,ty,tz)\,dt$ per a qualsevol funció $\varphi(x,y,z)$. Aleshores $\alpha = I_f\,(y\,dz - z\,dy) + I_g\,(z\,dx - x\,dz) + I_h\,(x\,dy - y\,dx)$. Per tant*

$$\begin{aligned} d\alpha &= y\,dI_f \wedge dz - z\,dI_f \wedge dy + 2\,I_f\,dy \wedge dz \\ &+ z\,dI_g \wedge dx - x\,dI_g \wedge dz + 2\,I_g\,dz \wedge dx \\ &+ x\,dI_h \wedge dy - y\,dI_h \wedge dx + 2\,I_h\,dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Utilitzant que

$$\begin{array}{rcl} y\,dI_f\wedge dz &=& -y\,\partial_x I_f\,dz\wedge dx + y\,\partial_y I_f\,dy\wedge dz\\ -z\,dI_f\wedge dy &=& -z\,\partial_x I_f\,dx\wedge dy + z\,\partial_z I_f\,dy\wedge dz\\ z\,dI_g\wedge dz &=& -z\,\partial_x I_g\,dx\wedge dy + z\,\partial_y I_g\,dz\wedge dx\\ -x\,dI_g\wedge dz &=& x\,\partial_x I_g\,dz\wedge dx - x\,\partial_y I_g\,dy\wedge dz\\ x\,dI_h\wedge dz &=& x\,\partial_x I_h\,dx\wedge dy - x\,\partial_y I_h\,dy\wedge dz\\ -y\,dI_h\wedge dz &=& y\,\partial_x I_h\,dx\wedge dy - y\,\partial_y I_h\,dz\wedge dx \end{array}$$

obtenim

$$\begin{array}{rcl} d\alpha &=& (2I_f + y\,\partial_y I_f + z\,\partial_z I_f - x(\partial_y I_g + \partial_z I_h))\,dy\wedge dz\\ &+& (2I_g + x\,\partial_x I_g + z\,\partial_z I_g - y(\partial_x I_f + \partial_z I_h))\,dz\wedge dx\\ &+& (2I_h + x\,\partial_x I_h + y\,\partial_y I_h - z(\partial_x I_f + \partial_y I_g))\,dx\wedge dy\\ &=& (2I_f + x\,\partial_x I_f + y\,\partial_y I_f + z\,\partial_z I_f)\,dy\wedge dz\\ &+& (2I_g + x\,\partial_x I_g + y\,\partial_y I_g + z\,\partial_z I_g)\,dz\wedge dx\\ &+& (2I_h + x\,\partial_x I_h + y\,\partial_y I_h + z\,\partial_z I_h)\,dx\wedge dy\\ &-& (\partial_x I_f + \partial_y I_g + \partial_z I_h)(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy). \end{array}$$

Com que ω és tancada tenim que $d\omega = (\partial_x I_f + \partial_y I_g + \partial_z I_h)\,dx\wedge dy\wedge dz = 0$, d'on resulta que el darrer terme de $d\alpha$ s'anul·la. Si $\varphi(x,y,z)$ és una funció arbitrària aleshores

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(t^2\varphi(tx,ty,tz)\big) = 2t\,\varphi(tx,ty,tz)+t^2(x(\partial_x\varphi)(tx,ty,tz)+y(\partial_y\varphi)(tx,ty,tz)+z(\partial_z\varphi)(tx,ty,tz)).$$

D'altra banda, intercanviant la derivada i el signe integral obtenim que

$$\partial_x I_\varphi = \int_0^1 \partial_x\big(t\varphi(tx,ty,tz)\big)\,dt = \int_0^1 t^2(\partial_x\varphi)(tx,ty,tz)\,dt.$$

Per tant

$$2I_\varphi + x\partial_x I_\varphi + y\partial_y I_\varphi + z\partial_z I_\varphi = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(t^2\varphi(tx,ty,tz)\big)\,dt = \Big[t^2\varphi(tx,ty,tz)\Big]_{t=0}^{t=1} = \varphi(x,y,z).$$

D'on resulta que $d\alpha = f(x,y,z)\,dy\wedge dz + g(x,y,z)\,dz\wedge dx + h(x,y,z)\,dx\wedge dy = \omega$.

Com que $\omega = (xz^2-y)dy\wedge dz - yz^2dz\wedge dx + xdx\wedge dy$ està definida a tot $\mathbb{R}^3$ que és estrellat respecte de l'origen, existirà una primitiva α si i només si ω és tancada, que és el cas:

$$d\omega = (z^2 - z^2 + 0)\,dx\wedge dy\wedge dz = 0.$$

La fórmula anterior ens proporciona la primitiva

$$\begin{array}{rcl} \alpha &=& (y\,dz - z\,dy)\displaystyle\int_0^1 t(t^3xz^2 - ty)\,dt + (z\,dx - x\,dz)\int_0^1 t(-t^3yz^2)\,dt + (x\,dy - y\,dx)\int_0^1 t^2x\,dt\\ &=& (y\,dz - z\,dy)\Big(\dfrac{xz^2}{5} - \dfrac{y}{3}\Big) + (z\,dx - x\,dz)\Big(-\dfrac{yz^2}{5}\Big) + (x\,dy - y\,dx)\Big(\dfrac{x}{3}\Big)\\ &=& \Big(-\dfrac{xy}{3} - \dfrac{yz^3}{5}\Big)\,dx + \Big(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{xz^3}{5}\Big)\,dy + \Big(\dfrac{2xyz^2}{5} - \dfrac{y^2}{3}\Big)\,dz. \end{array}$$