Geometria Diferencial — Segon examen parcial. Juny de 2019

1. *(2 punts.)* Una superfície regular S admet una parametrització ortogonal $\varphi = \varphi(u, v)$ en la que la primera forma fonamental té coeficients $E = 1$, $F = 0$ i $G = \cosh^2 u$. Considerem la regió $R = \varphi(Q)$ de S, on Q és el quadrat $Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u, v \leq 1\}$.

(a) Determineu la curvatura de Gauss K de S.

(b) Calculeu l'àrea de R i la integral $\int_R K dS$.

2. *(4 punts.)* Es considera l'helicoide S de $\mathbb{R}^3$ parametritzat per $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

(a) Comproveu que S és una superfície minimal, és a dir que la seva curvatura mitjana H és idènticament nul·la.

(b) Comproveu que els símbols de Christoffel de S corresponents a la parametrització φ són tots nuls excepte els següents

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{1+u^2}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -u.$$

(c) Decidiu si les corbes $\alpha(t) = \varphi(t, v_0)$, on v_0 és constant, i $\beta(t) = \varphi(0, t)$ són o no geodèsiques de S.

(d) Es considera el vector $w = (1, 0, 0) \in T_pS$, on $p = (0, 0, 0) \in S$. Determineu, en tant que vector de $\mathbb{R}^3$, el transport paral·lel $X(t)$ del vector w al llarg de la corba β de l'apartat anterior. Determina, en particular, l'angle format per $X(\pi/2)$ amb el vector $(2, 1, 3) \in T_{\beta(\pi/2)}\mathbb{R}^3$.

3. *(2 punts.)* Sigui S la superfície amb vora de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Es consideren els camps vectorials $X(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y, 0)$ i $Y(x, y, z) = \frac{1}{(x-3)^2+y^2}(x - 3, y, 0)$ definits en un entorn obert de S.

(a) Determineu la divergència dels camps X i Y.

(b) Fixeu una orientació de S i calculeu el flux (o integral de superfície) de X i de Y a través de S.

(c) Calculeu la integral $\int_{\partial S} \omega$ de la 1-forma $\omega = -y\, dx + (x - xz)\, dy + e^x\, dz$ sobre la vora ∂S, amb l'orientació induïda per l'orientació de S.

4. *(1 punt.)* Sigui M una k-subvarietat de $\mathbb{R}^n$ que pot ser recoberta per dues parametritzacions (U, φ) i (V, ψ) (i.e. $M = \varphi(U) \cup \psi(V)$). Demostreu que si l'obert intersecció $\varphi(U) \cap \psi(V)$ és connex llavors M és orientable.

5. *(1 punt.)* Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una parametrització per l'arc d'una corba C de $\mathbb{R}^3$ continguda en una superfície regular S. Decidiu raonadament si la següent afirmació és correcta o no: "si la corba $\alpha = \alpha(s)$ és simultàniament corba asimptòtica i corba geodèsica de S llavors C és un segment de recta".