6 Superfícies: Parametritzacions. Espai tangent.

Exercici 71:

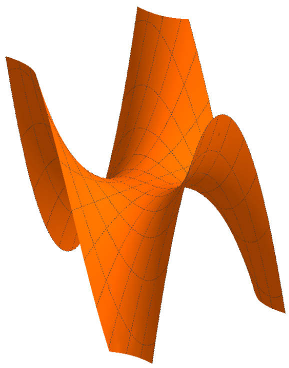
1. Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació $f(x, y, z) = 0$, on 0 és un valor regular de la funció f. Comproveu que el pla tangent a S en un punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ qualsevol es pot escriure com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\,(z - z_0) = 0$$

2. Com serà l'equació del pla tangent a una superfície de $\mathbb{R}^3$ si és el gràfic d'una funció de dues variables ($z = h(x, y)$)?

   (Fixeu-vos que podeu aplicar el resultat anterior o fer els càlculs des del principi).

Exercici 72: Demostreu que el subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ determinat per la condició $x^3 - 3\,x\,y^2 = z$ és una superfície regular i determineu l'equació que té el seu pla tangent en un punt qualsevol $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.



Exercici 73: Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^3$ determinat per l'equació $x + y = z^3 + 1$.

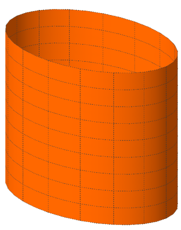
1. Comproveu que S és una superfície regular.

2. Doneu una parametrització de S.

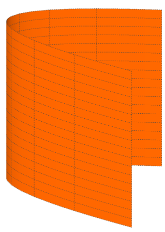
3. Determineu per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ el vector $v = (a, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ és tangent a S en el punt $P = (1, 1, 1)$.

Exercici 74: Doneu parametritzacions regulars (definides en algun obert prou significatiu) de les quàdriques:

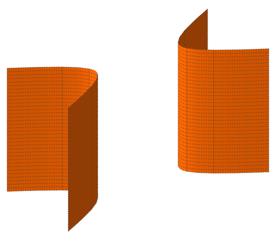
1. Cilindres:



Cilindre el·líptic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

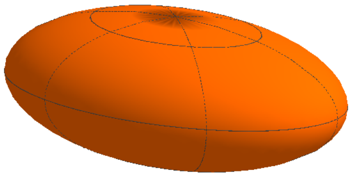


Cilindre parabòlic
$$y = c\,x^2$$



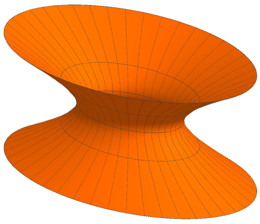
Cilindre hiperbòlic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

2. El·lipsoides:



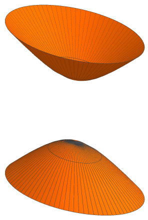
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

3. Hiperboloides:



Hiperboloide d'un full

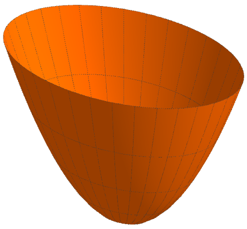
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$



Hiperboloide de dos fulls

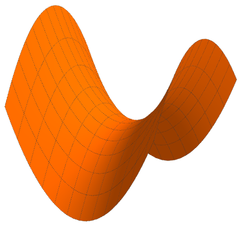
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1$$

4. Paraboloides:



Paraboloide el·líptic

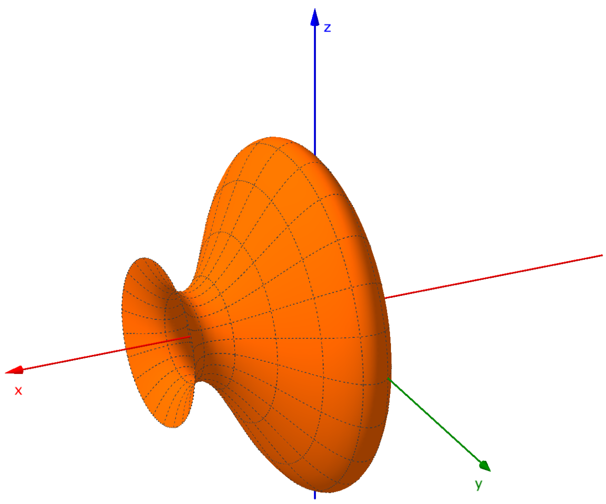
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c\,z$$



Paraboloide hiperbòlic

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c\,z$$

Exercici 75: Considereu una corba de la forma $y = f(x)$ en el pla xy (pensat dins $\mathbb{R}^3$ com els punts amb $z = 0$), on f és una funció diferenciable amb $f(x) > 0$ per a tots els x. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ obtingut en fer girar la corba anterior al voltant de l'eix de les x ($y = z = 0$).



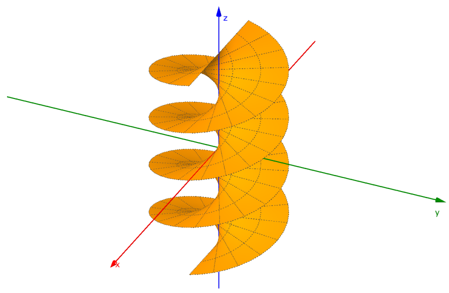
1. Demostreu que S és una superfície regular veient que $S = \Phi^{-1}(0)$ per a una submersió $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Doneu una parametrització (regular) de S.

3. Comproveu que, per a cada punt $p = (x, y, z)$ de S, el pla tangent és perpendicular al vector $N = (f(x)\, f'(x), -y, -z)$.

Exercici 76: (L'helicoide)

1. Comproveu que
$$\varphi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), a\, v)$$
és una parametrització regular de la superfície S de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació
$$y \cos(z/a) - x \sin(z/a) = 0$$



2. Determineu el pla tangent (i la direcció normal) a S per a un punt arbitrari de la superfície.

Exercici 77: El conjunt de punts descrit per una corba plana regular $C \subset \Pi$ al girar sobre un eix contingut en el pla Π i que no talla a la corba C és una superfície regular anomenada *superfície de revolució* generada per la corba C.

1. Proveu que si $C = \{(x, 0, z) \in \Pi = \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3,\ f(x, z) = 0\}$ i es pren com a eix de gir Oz aleshores la superfície de revolució generada per C ve donada per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$. Apliqueu-ho al cas particular en que C és una circumferència que no conté en el seu interior l'origen de coordenades.

2. Demostreu que si $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ és una parametrització regular de C aleshores
$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$
és una parametrització regular de S. Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen paral·lels si $u = u_0$ i meridians si $v = v_0$. Trobeu una parametrització regular del tor de revolució.

3. Trobeu la primera forma fonamental d'una superfície de revolució utilitzant la parametrització de l'apartat anterior (podeu suposar que $u \in [0, l]$ és el paràmetre arc de C).

4. **Teorema de Pappus.** Amb les mateixes notacions dels apartats (b) i (c), comproveu que l'àrea de S està donada per
$$2\pi \int_0^l a(u) du.$$