5 Exercicis complementaris de corbes a l'espai

Exercici 46: Considerem una corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Suposem que $\gamma(t_0)$ i $\gamma'(t)$ són ortogonals a $\vec{v}$ per a tot $t \in I$. Demostreu que $\gamma(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per a tot t.

Exercici 47: Doneu una parametrització diferenciable de la corba determinada per la gràfica de la funció $y = |x|$ a l'interval $-1 < x < 1$.

Exercici 48: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular. Demostreu que si totes les seves rectes tangents passen per un punt fix, llavors la traça de α està continguda en una recta.

Exercici 49: Sigui P un punt de $\mathbb{R}^3$ que no està contingut en la imatge de la corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sigui $s_0 \in I$ tal que el punt $\alpha(s_0)$ és el punt de la corba més proper a P. Demostreu que $\alpha'(s_0)$ és ortogonal al vector $\alpha(s_0) - P$.

Exercici 50: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si totes les seves rectes normals passen per un mateix punt aleshores la traça de α està continguda en una circumferència.

Exercici 51: Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb $k(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$. Demostreu que si tots els plans osculadors de α passen per un punt fix llavors la corba és plana.

Exercici 52: Comproveu que la corba $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ té la imatge sobre un con de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la velocitat i l'acceleració de $\alpha(t)$ en el vèrtex del con.

Exercici 53 (Espiral logarítmica): Considerem la corba plana $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$$

amb $b < 0 < a$.

1. Estudieu el comportament de $\alpha(t)$ quan t tendeix a $+\infty$.

2. Proveu que $\alpha'(t) \to (0,0)$ quan $t \to \infty$ i que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(s)|\, ds$$

   és finit. Es a dir que $\alpha(t)$ té longitud finita a tot interval de la forma $[t_0, \infty)$.

Exercici 54: Sigui $\alpha(s)$ una corba tal que curvatura i torsió no s'anul·len mai. Demostreu que el coneixement del vector binormal $B(s)$ determina la curvatura $k(s)$ i el valor absolut de la torsió $\tau(s)$.

Exercici 55: Sigui $\alpha(t)$ una corba regular i t_0 un valor del paràmetre pel qual la curvatura $k(t_0) \neq 0$. Sigui π la projecció ortogonal sobre el pla osculador de α en t_0. Proveu que el valor $k_0(t_0)$ de la curvatura de la corba projectada $\alpha_0 = \pi \circ \alpha$ coincideix amb $k(t_0)$.

Exercici 56: Sigui $\alpha(s)$ una corba regular. Suposem que la curvatura $k(s)$ i la torsió $\tau(s)$ no s'anul·len en cap punt de la corba.

1. Demostreu que

$$\frac{(N(s) \times N'(s)) \cdot N''(s)}{\|N'(s)\|^2} = \frac{\left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)'}{\left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)^2 + 1}. \tag{1}$$

2. Demostreu que si s és el paràmetre arc, es coneix $N(s)$ en tot punt i en s_0 coneixem el quocient $\dfrac{k(s_0)}{\tau(s_0)}$, llavors podem calcular $k(s)$ i $\tau(s)$ en tot punt de la corba (i per tant, la corba, llevat de moviments rígids).

Exercici 57: Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = 1/s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi pel punt $(1, 0, 0)$ quan $s = 1$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Exercici 58: Trobeu totes les corbes parametritzades per l'arc $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que tinguin vector binormal $B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1)$ i torsió positiva.

Exercici 59: Sigui $\alpha(s)$ una corba regular parametritzada per l'arc, amb curvatura mai nul·la. Definim la seva *indicatriu tangent* com la corba esfèrica $\alpha_1(s) = \alpha'(s)$. Trobeu la curvatura $k_1(s)$ i la torsió $\tau_1(s)$ de $\alpha_1(s)$ en funció de la curvatura $k(s)$ i la torsió $\tau(s)$ de $\alpha(s)$. Deduïu que $\alpha_1(s)$ és plana si i només si $\frac{\tau(s)}{k(s)}$ és constant. Doneu una definició d'*indicatriu binormal* i deduïu fórmules anàlogues.

Exercici 60: Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular plana i $\alpha_1 : I \longrightarrow S^1$ la seva indicatriu de les tangents. Fixem un punt $t_0 \in I$. Donat $t \in I$ denotem per $L(t)$ (resp. $L_1(t)$) la longitud de l'arc de α (resp. α_1) entre t_0 i t. Demostreu que la curvatura $k(t_0)$ de α en t_0 és igual al límit del quocient $\frac{L_1(t)}{L(t)}$ quan $t \to t_0$.

Exercici 61: El triedre de Frenet d'una corba està format per vectors lliures i podem pensar, doncs, que en variar el paràmetre t de la corba, tenim una família de triedres que es mouen amb un punt fix (per exemple, l'origen de coordenades). És ben sabut que quan un cos rígid (en aquest cas, el triedre) es mou amb un punt fix, el moviment és un gir infinitesimal al voltant d'un eix.

Trobeu la velocitat angular en que gira el triedre de Frenet d'una corba.

Exercici 62: Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi per l'origen quan $s = 0$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui

$$\begin{aligned} T(0) &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ N(0) &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ B(0) &= (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Exercici 63: Comproveu que la corba definida per

$$\alpha(s) = (\frac{a}{c} \int \sin \theta(s) ds, \frac{a}{c} \int \cos \theta(s) ds, \frac{b}{c} s),$$

amb $a^2+b^2=c^2$, i on $\theta(s)$ és qualsevol funció amb $\theta'(s)\neq 0$, compleix que $\dfrac{k(s)}{\tau(s)}=\pm\dfrac{a}{b}$ (en particular, és una hèlix).

Exercici 64: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si tots els centres dels cercles osculadors de α estan continguts en una recta aleshores α és una circumferència. Indicació: recordeu que el cercle osculador és el cercle del pla osculador amb centre el punt $\alpha(s)+\rho(s)N(s)$ i radi $\rho(s)$, on $\rho(s)$ és el radi de curvatura de $\alpha(s)$.

el centre del cercle osculador de α en el punt $\alpha(s)$ és

$$\beta(s)=\alpha(s)+\frac{1}{k(s)}N(s).$$

Exercici 65: Demostreu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors és una corba tal que la seva tangent en cada punt és ortogonal a la tangent de la corba inicial en el punt corresponent.

Exercici 66: Vegeu que en un punt que no sigui extrem de la curvatura d'una corba plana, la corba travessa el cercle osculador en aquest punt.

Exercici 67: Demostreu que cercles osculadors pròxims d'una corba plana no es tallen.

Exercici 68 (Corbes de Salkowski)**:** [7] Comproveu amb ordinador que la corba

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{16}{\sqrt{257}}\left(-\frac{\sqrt{257}-1}{4(\sqrt{257}+2)}\sin(1+\frac{2}{\sqrt{257}})t-\frac{\sqrt{257}+1}{4(\sqrt{257}-2)}\sin(1-\frac{2}{\sqrt{257}})t-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\
y(t) &= \frac{16}{\sqrt{257}}\left(\frac{\sqrt{257}-1}{4(\sqrt{257}+2)}\cos(1+\frac{2}{\sqrt{257}})t+\frac{\sqrt{257}+1}{4(\sqrt{257}-2)}\cos(1-\frac{2}{\sqrt{257}})t+\frac{1}{2}\cos(t)\right)\\
z(t) &= 4\cos(\frac{2t}{\sqrt{257}})
\end{aligned}$$

(que és un cas particular de corba de Salkowski) té curvatura constant $k=1$ i torsió variable $\tau(t)=\tan(\frac{t}{\sqrt{257}})$.

Exercici 69 (Corba no rectificable)**:** Considerem la corba $\alpha:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida per

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (t, t\sin(\pi/t)) \qquad \text{per a } t\neq 0\\
\alpha(0) &= (0,0).
\end{aligned}$$

Demostreu que la longitud d'arc de α corresponent a $\frac{1}{n+1}\leq t\leq\frac{1}{n}$ és, com a mínim, $2/(n+\frac{1}{2})$. Utilitzeu aquest fet per demostrar que la longitud d'arc de α a l'interval $1/N\leq t\leq 1$ és més gran que $2\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j+1}$ i, per tant, tendeix a infinit si $N\to\infty$.

Exercici 70 (Clotoide): Trobeu el punt $A=(a,0)$ i la clotoide adequada $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0)=A$, amb $\gamma'(0)=(1,0)$ i que per a un cert valor del paràmetre s la clotoide sigui tangent a la circumferència de centre $(1,1)$ i radi $1/2$.

[7] Vegeu *Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion*, Computer Aided Geometric Design, J. Monterde, Volume 26, Issue 3, March 2009, Pages 271-278