Geometria diferencial
Curs 2017–18

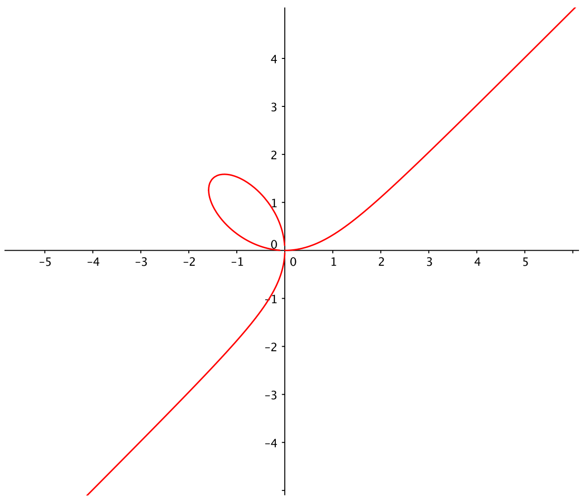
Varietats amb vora. Integració de formes.

Exercici 1: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tal que $df \neq 0$ sobre $f^{-1}(0)$. Demostreu que $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ és una n-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$. (Com és ∂M?)

Feu un dibuix de la regió de $\mathbb{R}^2$ donada pels punts (x, y) tals que $x^3 - y^3 - 3\,x\,y \leq 0$ per tal de comprovar que la condició sobre df és necessària.

Solució:

Notem en primer lloc que ∂M estarà formada pel punts x tals que $f(x) = 0$. Suposem ara que p és un d'aquest punts i, sense perdre generalitat, que $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$ (no es pot saber, a priori, quin dels coeficients de df és diferent de 0 en p però sempre n'hi ha algun i, canviant d'ordre les coordenades es pot pensar que és l'últim). Aleshores l'aplicació $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donada per $\Psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_n))$ serà un difeomorfisme (en algun entorn de p) i la seva inversa $\Phi = \Psi^{-1}$ parametritzarà M, que es veurà com la imatge del semiespai $x_n \leq 0$ (i, en particular, parametritzarà ∂M com una subvarietat de dimensió $n-1$ considerant $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$).



Exercici 2: Siguin f i g funcions de $\mathbb{R}^n$ amb valors reals i diferenciables. Quines condicions s'haurien d'imposar per tal de poder assegurar que el conjunt $M = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = 0 \text{ i } g(p) \leq 0\}$ és una varietat amb vora (de dimensió $n-1$, és clar)?

Doneu un mètode equivalent a l'anterior per tal d'obtenir varietats amb vora de dimensió arbitrària. (Quines condicions s'han d'imposar a f, g per tal de poder dir que els punts p que compleixen $f(p) = 0$ i $g(p) \leq 0$ donen una varietat amb vora de dimensió k).

Solució:

L'únic que cal imposar a les funcions f, g és una condició d'independència entre els nuclis de les seves diferencials (transversalitat) per tal de poder adaptar el raonament anterior.

Exercici 3: Sigui γ la corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per $\gamma(s) = (s, s^2, s^3)$ amb $s \in [0,1]$. Calculeu

$$\int_\gamma (dx + dz)$$

Solució:

Per definició,

$$\int_\gamma dx + dz = \int_{[0,1]} \gamma^*(dx + dz) = \int_0^1 d(x \circ \gamma) + d(z \circ \gamma) = \int_0^1 ds + ds^3 = \int_0^1 (1 + 3\,s^2)\,ds = 2.$$

Exercici 4: Considereu $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3\,y - z = 2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Determineu

$$\int_S dx \wedge dz$$

si l'orientació en S és la que correspon al vector normal $(-1, -3, 1)$. (Noteu que si s'escriu $dx \wedge dz$ s'està pensant que s'integra una forma de $\mathbb{R}^3$ sobre la subvarietat S).

Solució:

La parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, x + 3\,y - 2)$ conserva l'orientació ja que $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-1, -3, 1)$. Per definició

$$\int_S dx \wedge dz = \int_{[0,1]^2} \varphi^*(dx \wedge dz) = \int_0^1 \int_0^1 dx \wedge d(x + 3\,y - 2) = 3 \int_0^1 \int_0^1 dx \wedge dy = 3.$$

Exercici 5: Sigui $\mathbb{S}^2$ l'esfera unitària de $\mathbb{R}^3$ (on es pren l'orientació determinada pel normal exterior).

Quin valor té la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} dx \wedge dy$?

Es pot relacionar aquest càlcul amb el T. de Stokes?

Solució:

Sense Stokes. Sigui $\psi : U \longrightarrow S^2$, amb $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, donada per

$$\psi(\theta, \varphi) = (\sin(\varphi)\,\cos(\theta), \sin(\varphi)\,\sin(\theta), \cos(\varphi))$$

una parametrització (positiva) de l'esfera. Llavors

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_U \psi^*(dx \wedge dy) = \int_U (d(x \circ \psi) \wedge d(y \circ \psi)) = \int_U d(\sin(\varphi)\,\cos(\theta)) \wedge d(\sin(\varphi)\,\sin(\theta)).$$

Com que

$$d(\sin(\varphi)\,\cos(\theta)) = \cos(\varphi)\,\cos(\theta)\,d\varphi - \sin(\varphi)\,\sin(\theta)\,d\theta,$$
$$d(\sin(\varphi)\,\sin(\theta)) = \cos(\varphi)\,\sin(\theta)\,d\varphi + \sin(\varphi)\,\cos(\theta)\,d\theta\,,$$

substituint tenim

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_U \cos(\varphi)\,\sin(\varphi)\,d\varphi \wedge d\theta = 2\pi \Big[\frac{1}{2}\sin^2(\varphi)\Big]_0^\pi = 0\,.$$

Amb Stokes. Com que S^2 no té vora i $dx \wedge dy$ és exacta la integral és zero:

$$\int_{S^2} dx \wedge dy = \int_{S^2} d(x\,dy) = \int_{\partial S^2} x\,dy = 0,$$

ja que $\partial S^2 = \emptyset$.