# Capítol 8

# Teorema de Gauss-Bonnet

Al llarg de tot aquest capítol $S$ representarà una superfícies de $\mathbb{R}^3$ orientada. Observarem que totes les nocions que s'introdueixen i tots els resultats que s'obtenen són intrínsecs, és a dir que no depenen de la segona forma fonamental de la superfície.

## 8.1 Teorema de Gauss-Bonnet. Versió local

**Definició 8.1.1.** Diem que un subconjunt compacte $R$ de $S$ és una **regió simple** si $R$ és homeomorf a un disc tancat i $\partial R$ és una corba diferenciable a trossos, tancada i simple.

En aquesta secció suposarem que una regió simple $R$ de la superfície orientada $S$ ha estat fixada. Suposarem també que $R$ està continguda en la imatge d'una parametrització $(U, \varphi = \varphi(u, v))$, compatible amb l'orientació de $S$, i que la seva vora $\partial R$ està orientada positivament. Fixem una parametrització de $\partial R$ donada per $\alpha\colon [0, \ell] \to \partial R \subset S$, amb $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ diferenciable, i on $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = \ell$. Notem que $\alpha(t_0) = \alpha(t_{k+1})$.

Denotem les derivades laterals de $\alpha$ en els punts $t_i$ de la següent forma:

$$\alpha'(t_i^-) = \lim_{h \mapsto 0^-} \frac{\alpha(t_i + h) - \alpha(t_i)}{h}, \qquad \alpha'(t_i^+) = \lim_{h \mapsto 0^+} \frac{\alpha(t_i + h) - \alpha(t_i)}{h} \tag{8.1}$$

**Definició 8.1.2.** Amb la notació anterior, els arcs de corba $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ s'anomenen **arestes** de $R$, els punts $\alpha(t_i)$ s'anomenen **vèrtexs** de $R$ i, en cada un dels vèrtexs $\alpha(t_i)$, s'anomena **angle exterior** de $R$, en aquell punt, a l'angle $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ format pels vectors $\alpha'(t_i^-)$ i $\alpha'(t_i^-)$, anant del primer al segon en el sentit de gir més curt i amb el signe determinat per l'orientació de $S$.

Suposarem també fixades determinacions diferenciables $\tau_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ de l'angle de $\varphi_u$ a $\alpha'(t)$, per $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

**Teorema 8.1.3** (Teorema de les tangents giratòries)**.** *En les hipòtesis i amb la notació anteriors es compleix*

$$\sum_{i=0}^{k} \big(\tau_i(t_{i+1}) - \tau_i(t_i)\big) + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = \pm 2\pi, \tag{8.2}$$

*on el signe és positiu si i només si la parametrització $\alpha$ de $\partial R$ és positiva.*

**Teorema 8.1.4** (Teorema de Gauss-Bonnet. Versió local)**.** *Suposem que es compleixen les hipòtesis anteriors i, a més, que la parametrització $\varphi$ de $S$ és* **ortogonal** *(i.e. $F = 0$) i que la parametrització $\alpha = \alpha(s)$ de $\partial R$ està parametritzada per l'arc i orientada positivament. Llavors es compleix*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \iint_R K\,dS + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi = 2\pi\,\chi(R). \tag{8.3}$$

*Comentaris* 8.1.5. a) Si $R$ és una regió simple llavors la seva característica d'Euler és $\chi(R) = 1$.

b) Com varem veure al Corol·lari 6.1.30, sempre és possible trobar una parametrització ortogonal en un entorn suficentment petit d'un punt donat de $S$.

*Nota* 8.1.6. Anomenarem **triangle** a tota regió simple $T$ de $S$ que tingui tres arestes.

**Corol·lari 8.1.7** (Fórmula de l'excés)**.** *Suposem que $T$ és un triangle geodèsic de $S$, és a dir un triangle les arestes del qual són geodèsiques. Aleshores es compleix*

$$\iint_T K\,dS = \sum_{i=0}^{2} \phi_i - \pi, \tag{8.4}$$

*on $\phi_i = \pi - \theta_i$ són els angles interiors del triangle.*

*Nota* 8.1.8. La quantitat $\sum_{i=0}^{2} \phi_i - \pi$ s'anomena **excés del triangle**.

*Comentari* 8.1.9. Si $T$ és un triangle geodèsic de l'esfera unitat $S^2$ llavors la suma dels seus angles (interiors) és $\sum_{i=0}^{2} \phi_i > \pi$, mentre que si $T$ és un triangle geodèsic del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$ llavors $\sum_{i=0}^{2} \phi_i < \pi$.

*Demostració.* Al ser el triangle geodèsic, la curvatura geodèsica $k_g$ de les seves arestes és nul·la. Pel teorema de Gauss-Bonnet ha de ser

$$\begin{aligned}\iint_T K\,dS + \sum_{i=0}^{2} \theta_i &= \iint_T K\,dS + \sum_{i=0}^{2} (\pi - \phi_i) \\ &= \iint_T K\,dS + 3\pi - \sum_{i=0}^{2} \phi_i = 2\pi,\end{aligned}$$

d'on es dedueix $\iint_T K\,dS = \sum_{i=0}^{2} \phi_i - \pi$ com volíem demostrar. □

*Demostració del Teorema 8.1.4.* Sigui $\big(U, \varphi = \varphi(u,v)\big)$ una parametrització local de $S$, compatible amb l'orientació i tal que $R \subset \varphi(U)$. D'acord amb el Corol·lari 6.1.30, podem suposar que la parametrització $\varphi$ és **ortogonal**. Notem que $A = \varphi^{-1}(R)$ és una regió simple de $U \subset \mathbb{R}^2$. Posem $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ i siguin $\tau_i = \tau_i(s)$ determinacions diferenciables de l'angle de $\varphi_u$ a $\alpha'(s)$ en $[s_i, s_{i+1}]$.

Hem vist (Proposició 5.1.13 i Proposició 5.4.9) que si les coordenades són ortogonals llavors la curvatura de Gauss $K$ i la curvatura geodèsica $k_g$ estan donades respectivament per

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} \quad \text{i} \quad k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{ds} - E_v\frac{du}{ds}\right\} + \frac{d\tau}{ds}.$$

Utilitzant aquestes identitats i aplicant la fórmula de Green obtenim

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds &= \sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left\{\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{ds}-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{ds}\right\}ds+\sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}}\frac{d\tau_i}{ds}ds \\
&= \iint_A \left\{\Big(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\Big)_v+\Big(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\Big)_u\right\}du\,dv\;+\;\sum_{i=0}^{k}\int_{s_i}^{s_{i+1}}\frac{d\tau_i}{ds}ds \\
&= \iint_A \big(-K\sqrt{EG}\big)\,du\,dv\;+\;\sum_{i=0}^{k}\big(\tau_i(s_{i+1})-\tau_i(s_i)\big) \\
&= -\iint_R K\,dS\;\pm\;2\pi-\sum_{i=0}^{k}\theta_i \\
&\overset{(*)}{=} -\iint_R K\,dS\;+\;2\pi-\sum_{i=0}^{k}\theta_i,
\end{aligned}
$$

on, a $(*)$, hem utilitzat que l'orientació de $\alpha$ és positiva. □

*Comentari* 8.1.10. Sigui $p$ un punt de $S$ i considerem una petita regió simple $R$ contenint $p$ en el seu interior i sigui $\alpha\colon[0,\ell]\to S$ una parametrització de $\partial R$ que suposarem positiva. Fixem un vector unitari $\vec{w}_0\in T_{\alpha(0)}S$. Sigui $W=W(t)$ el seu transport paral·lel al llarg de $\alpha=\alpha(t)$ i sigui $\tau=\tau(t)$ una determinació diferenciable de l'angle de $\varphi_u$ a $W(t)$. Raonant com a la demostració del teorema anterior obtenim

$$
\begin{aligned}
0=\int_0^{\ell}\Big[\frac{DW}{dt}\Big]dt &= \int_0^{\ell}\left\{\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\frac{dv}{dt}-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\frac{du}{dt}\right\}dt+\int_0^{\ell}\frac{d\tau}{dt}ds \\
&= -\iint_R K\,dS\;+\;\tau(\ell)-\tau(0),
\end{aligned}
$$

és a dir que es compleix

$$\Delta\tau:=\tau(\ell)-\tau(0)=\iint_R K\,dS. \tag{8.5}$$

Notem que l'increment angular $\Delta\tau$ no depèn de les eleccions de $\vec{w}_0$ o de $\tau=\tau(t)$. En particular es compleix

$$\lim_{R\mapsto p}\frac{\Delta\tau}{A(R)}=\lim_{R\mapsto p}\frac{\iint_R K\,dS}{\iint_R dS}=K(p). \tag{8.6}$$

## 8.2 Teorema de Gauss-Bonnet. Versió global

**Definició 8.2.1.** Diem que un subconjunt compacte $R$ de $S$ és una **regió regular** si $\partial R$ és unió finita de corbes regulars a trossos $C_1,\dots,C_n$ que són tancades i simples i que no es tallen entre si.

**Definició 8.2.2.** Sigui $R$ una regió regular de $S$. Una triangulació $\mathcal{T}$ és un conjunt finit de triangles tancats $\{T_i\}$ de $S$ tals que $R = \bigcup T_i$ i de manera que es compleix una de les dues condicions següents

a) $T_i \cap T_j = \emptyset$, o bé

b) $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ i llavors la intersecció és un vèrtex comú o una aresta comuna als dos triangles.

**Definició 8.2.3.** Suposem fixada una triangulació $\mathcal{T} = \{T_i\}$ de $R$, regió regular de $S$. Anomenem **cara** de $\mathcal{T}$ a cada un dels seus triangles, **aresta** de $\mathcal{T}$ als segments de corba que són arestes d'algun triangle i **vèrtex** a cada punt de $R$ que és vèrtex d'algun triangle. Denotarem per $F$, $E$ i $V$ el nombre de cares, arestes i vèrtexs de $\mathcal{T}$ respectivament. Es defineix la **característica d'Euler-Poincaré** de $R$ associada a la triangulació $\mathcal{T}$ com

$$\chi(R, \mathcal{T}) = F - E + V. \tag{8.7}$$

**Teorema 8.2.4.** *Sigui $S$ una superfície. Aleshores es compleix*

a) *Tota regió regular $R$ de $S$ admet una triangulació $\mathcal{T} = \{T_i\}$ que pot ser escollida arbitràriament petita, és a dir que si $\{U_\alpha\}$ és un recobriment obert de $R$, llavors cada triangle $T_i$ està contingut en un dels oberts $U_\alpha$.*

b) *La característica d'Euler-Poincaré $\chi(R, \mathcal{T})$ de $R$ és independent de $\mathcal{T}$.*

*El nombre $\chi(R) = \chi(R, \mathcal{T})$ s'anomena* **característica d'Euler-Poincaré de** *$R$.*

**Exemples 8.2.5.** 1) Si $T$ és un triangle llavors $\chi(T) = 1$.

2) Si $\Sigma_g$ és una superfície compacta orientable de gènere $g$ llavors $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

**Teorema 8.2.6** (Teorema de Gauss-Bonnet. Versió global)**.** *Sigui $S$ una superfície orientada i $R$ una regió regular de $S$. Siguin $C_1, \ldots, C_n$ les components connexes de $\partial R$ i denotem per $\theta_1, \ldots \theta_p$ els angles exteriors de les corbes $C_i$. Llavors es compleix*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K\, dS + \sum_{i=\ell}^{p} \theta_\ell = 2\pi\, \chi(R). \tag{8.8}$$

*Demostració.* Sigui $\mathcal{T} = \{T_j\}$ una triangulació de $R$ de manera que cada triangle $T_j$ està contingut en la imatge d'una parametrització amb coordenades ortogonals i compatible amb l'orientació de $S$. Així mateix, considerem les vores dels triangles $T_j$ orientades positivament. Aplicant a cada triangle el teorema de Gauss-Bonnet local obtenim

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, dS + \sum_{\substack{j = 1 \ldots F \\ k = 1,2,3}} \theta_{j,k} = 2\pi\, F, \tag{8.9}$$

on $F = \sharp\mathcal{T}$ i $\theta_{j,1}$, $\theta_{j,2}$ i $\theta_{j,3}$ són els angles exteriors de $T_j$. Denotem per $\phi_{j,k} = \pi - \theta_{j,k}$ els corresponents angles interiors. Denotem

$$E_e = \sharp\{\text{ arestes exteriors de } \mathcal{T}\,\}$$
$$E_i = \sharp\{\text{ arestes interiors de } \mathcal{T}\,\}$$
$$V_e = \sharp\{\text{ vèrtexs exteriors de } \mathcal{T}\,\}$$
$$V_i = \sharp\{\text{ vèrtexs interiors de } \mathcal{T}\,\}$$

Es compleix

$$\sum_{j,k} \theta_{j,k} \;=\; \sum_{j,k} (\pi - \phi_{j,k}) \;=\; 3\pi\, F - \sum_{j,k} \phi_{j,k},$$

$$E_e = V_e \quad \text{(ja que les corbes } C_i \text{ són tancades)},$$

$$3\,F = 2\,E_i + E_e.$$

D'aquí resulta

$$\sum_{j,k} \theta_{j,k} \;=\; 2\pi\, E_i + \pi\, E_e - \sum_{j,k} \phi_{j,k}.$$

Posem ara $V_e = V_{ec} + V_{et}$ on

$$V_{ec} = \sharp\{\text{ vèrtexs exteriors de les corbes } C_i\,\} = p$$

$$V_{et} = \sharp\{\text{ vèrtexs exteriors de la triangulació } \mathcal{T} \text{ que no són vèrtexs de corbes } C_i\,\}$$

Com que la suma d'angles de cada vèrtex interior és $2\pi$, tenim

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} \theta_{j,k} &= 2\pi\, E_i + \pi\, E_e - 2\pi\, V_i - \pi V_{et} - \sum_{\ell=1}^{p} (\pi - \theta_\ell) \\ &\overset{(*)}{=} 2\pi\, E_i + 2\pi\, E_e - 2\pi\, V_i - \pi V_e - \pi\, V_{et} - \pi\, V_{ec} + \sum_{\ell=1}^{p} \theta_\ell \\ &= 2\pi\, E - 2\pi\, V + \sum_{\ell=1}^{p} \theta_\ell,\end{aligned}$$

on la igualtat $(*)$ resulta de sumar i restar $\pi\, E_e$ a l'expressió anterior i de tenir en compte que $E_e = V_e$. D'aquí

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{C_i} k_g(s) ds \;+\; \iint_R K\, dS \;+\; \sum_{i=\ell}^{p} \theta_\ell = 2\pi\,(F - E + V) = 2\pi\,\chi(R),$$

i això prova el teorema. □

**Corol·lari 8.2.7.** *Si $S$ és una superfície compacta i orientable llavors*

$$\iint_S K\, dS \;=\; 2\pi\,\chi(S). \tag{8.10}$$

*Comentari* 8.2.8. Suposem que $S$ és una superfície compacta i orientable.

a) Si $K \geq 0$ i $K \not\equiv 0$, llavors $S$ és homeomorfa a una esfera.

b) Si $K \equiv 0$ llavors $S$, és homeomorfa a un tor.

## 8.3 Teorema Poincaré-Hopf

**Definició 8.3.1.** Sigui $X$ un camp vectorial tangent a la superfície $S$. Es diu que $p \in S$ és un **punt singular** de $X$ si $X_p = 0$. Diem que $p$ és un **punt singular aïllat** si hi ha un entorn de $p$ en el que $X$ s'anul·la únicament a $p$.

Sigui $p$ un punt singular aïllat del camp vectorial $X$ i sigui $R$ una regió simple de $S$ que contingui $p$ (en el seu interior) com a únic punt singular de $X$. Suposem que $R$ està continguda en la imatge d'una parametrització $\varphi = \varphi(u, v)$ compatible amb l'orientació de $S$ i sigui $\alpha\colon [0, \ell] \to S$ parametrització positiva de $\partial R$. Sigui $W = W(t)$ la restricció a la corba $\alpha = \alpha(t)$ del camp vectorial unitari $\dfrac{X}{\|X\|}$ i sigui $\tau = \tau(s)$ una determinació diferenciable de l'angle de $\varphi_u$ a $W(t)$. En aquesta situació hi ha un enter $I \in \mathbb{Z}$ unívocament determinat per la condició

$$2\pi\, I = \tau(\ell) - \tau(0) = \int_0^\ell \frac{d\tau}{dt} dt. \tag{8.11}$$

*Comentari* 8.3.2. L'enter $I$ no depèn de l'elecció de la regió simple $R$ ni de la parametrització $\varphi$, però el seu signe depèn de l'orientació de $S$.

**Definició 8.3.3.** Sigui $p$ un punt singular aïllat del camp vectorial $X$. S'anomena **índex de $X$ en** $p$ a l'enter $I \in \mathbb{Z}$ definit per la relació (8.11).

Continuant amb la situació i notació anteriors, suposem que $P = P(t)$ és un camp vectorial unitari i paral·lel al llarg de la corba $\alpha = \alpha(t)$. Hem vist a (8.5) que si $\psi = \psi(t)$ és una determinació diferenciable de l'angle de $\varphi_u$ a $P(t)$ llavors

$$\iint_R K\, dS = \psi(\ell) - \psi(0), \tag{8.12}$$

en particular al diferència angular $\Delta\psi = \psi(\ell) - \psi(0)$ no depèn de $P$. Combinant les igualtats (8.11) i (8.12), resulta

$$\iint_R K\, dS \;-\; 2\pi\, I = (\psi - \tau)(\ell) - (\psi - \tau)(0) = \Delta(\psi - \tau). \tag{8.13}$$

Notem que la diferencia $\psi - \tau$ mesura l'angle entre $X$ i $P$ en cada punt de la corba.

**Teorema 8.3.4** (Teorema de Poincaré-Hopf)**.** *Sigui $S$ una superfície compacta i orientada. Sigui $X$ un camp vectorial tangent a $S$ amb singularitats aïllades (que seran en nombre finit) i siguin $I_i$ els seus índexs. Aleshores es compleix*

$$\sum_i I_i \;=\; \frac{1}{2\pi} \iint_S K\, dS \;=\; \chi(S). \tag{8.14}$$

*Demostració.* Sigui $\mathcal{T} = \{T_j\}$ una triangulació de $S$ escollida de manera que es compleix:

i) Cada triangle $T_j$ està contingut a la imatge d'una parametrització positiva.

ii) Cada triangle $T_j$ conté, com a molt, un únic punt singular aïllat de $X$.

iii) La vora de cada triangle $T_j$ està orientada positivament i no conté punts singulars del camp vectorial $X$.

Llavors, de la igualtat (8.13), aplicada a cada un dels triangles $T_i$, deduïm

$$\iint_S K\, dS = 2\pi \sum_i I_i,$$

ja que cada aresta de la triangulació pertany a exactament dos triangles i aquests dos triangles, en l'aresta comuna, tenen orientacions oposades. L'enunciat resulta llavors del Corol·lari 8.2.7. □

**Corol·lari 8.3.5.** *En les hipòtesis del teorema anterior, si la superfície $S$ és homeomorfa a l'esfera $S^2$ o a una superfície $\Sigma_g$ de gènere $g \geq 2$, llavors el camp $X$ té zeros. De forma equivalent, si $S$ és una superfície compacta i orientable amb un camp vectorial sense zeros, llavors $S$ és homeomorfa a un tor.*