GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari 14

Integració de formes diferencials: Teorema d'Stokes

Exercici 14.1. Donat el camp $\mathbf{X} = X_1\partial/\partial x + X_2\partial/\partial y + X_3\partial/\partial z$ i una funció f suficientment derivables, definim $\omega^1_{\mathbf{X}} = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz, \omega^2_{\mathbf{X}} = X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy, \omega^3_f = f\ dx \wedge dy \wedge dz$. Usant les identitats $d(\omega^1_{\mathbf{X}}) = \omega^2_{\mathrm{rot}\,\mathbf{X}}$ i $d(\omega^2_{\mathbf{X}}) = \omega^3_{\mathrm{div}\,\mathbf{X}}$, deduïu del teorema de Stokes les fórmules clàssiques: $\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{X} \cdot dS = \int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot dL$ i $\int_U \mathrm{div}\,\mathbf{X}\, dV = \int_{\partial U} \mathbf{X} \cdot dS$, amb $dL = \vec{t}\ ds$, $dS = \vec{N}\ dA$ on $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície amb vora i $U \subset \mathbb{R}^3$ és un domini acotat. Les orientacions donades per $\vec{t}$ i $\vec{N}$ són les orientacions compatibles. Recordeu que $\mathrm{div}\,\mathbf{X} = \nabla\cdot\mathbf{X}$ i que $\mathrm{rot}\,\mathbf{X} = \nabla\times\mathbf{X}$, on ∇ és l'operador diferencial vectorial $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Aquestes dues fórmules es coneixen com *teorema del rotacional* (o de Stokes) i *teorema de la divergència* (o de Gauss) respectivament.

Solució: *Pel teorema de Stokes tenim* $\int_U d\omega^2_{\mathbf{X}} = \int_{\partial U} \omega^2_{\mathbf{X}}$ *i* $\int_S i^* d\omega^1_{\mathbf{X}} = \int_{\partial S} i^*\omega^1_{\mathbf{X}}$ *on i és l'aplicació d'inclusió. Fent servir les igualtats tenim, per una banda*

$$\int_{\partial U} \mathbf{X}\cdot dS = \int_{\partial U} \omega^2_{\mathbf{X}} = \int_U d\omega^2_{\mathbf{X}} = \int_U \omega^3_{\mathrm{div}\,\mathbf{X}} = \int_U \mathrm{div}\,\mathbf{X}\, dV$$

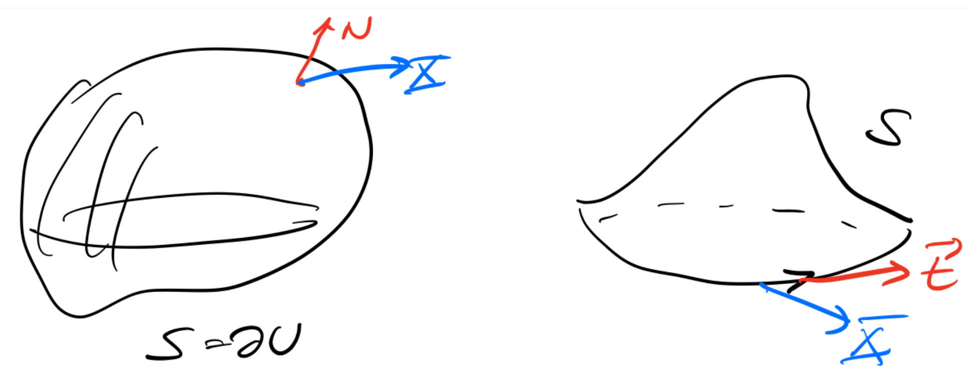
on la primera igualtat es pot veure fent servir una parametrització $\varphi(u,v)$ de ∂U compatible amb l'orientació. En efecte

$$\varphi^*\omega^2_{\mathbf{X}} = X_1\circ\varphi\ d(y\circ\varphi)\wedge d(z\circ\varphi) + X_2\circ\varphi\ d(z\circ\varphi)\wedge d(x\circ\varphi) + X_3\circ\varphi\ d(x\circ\varphi)\wedge d(y\circ\varphi) = \cdots = \mathbf{X}\cdot dS.$$

Per altra banda

$$\int_{\partial S} \mathbf{X}\cdot dL = \int_{\partial S} i^*\omega^1_{\mathbf{X}} = \int_S i^* d\omega^1_{\mathbf{X}} = \int_S i^*\omega^2_{\mathrm{rot}\mathbf{X}} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{X}\cdot dS.$$

La primera igualtat es veu parametritzant ∂S per $\gamma(t)$ compatible amb l'orientació i la darrera igualtat es veu com hem fet per la primera igualtat de l'eanterior fórmula.



$\int_{\partial U} X \cdot d\vec{S}$ " $\int_U \mathrm{div}\, X \cdot dV$

$\int_{\partial S} X \cdot d\vec{L}$ " $\int_S \mathrm{rot}\, X \cdot d\vec{S}$

Exercici 14.2. Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3-3xy^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-3x^2y)\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. al llarg de la trajectòria que va seguint les arestes del cub, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ i $0 \le z \le 1$ sortint de l'origen, seguint després a $(0,0,1)$ a $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$ i que finalment torna a l'origen per la diagonal des de $(1,1,1)$. Calculeu el rotacional de $\mathbf{F}$ i deduïu-ne que existeix una funció f tal que $\mathbf{F} = \nabla f = \mathrm{grad} f$. Expliciteu-la.

Solució: *Tenim els camins $c1$ de $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$, $c2$ de $(0,0,1)$ a $(0,1,1)$, $c3$ de $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$*

i el de tornada $c4$ de $(1,1,1)$ a l'origen. Fem la circulació per cada un d'ells.

$$\int_{c1} \mathbf{F} = \int_0^1 (0,0,z)\cdot(0,0,1)dz = \frac{1}{2}.$$

Anàlogament $\int_{c2} \mathbf{F} = \frac{1}{4}$ i $\int_{c3} \mathbf{F} = -\frac{5}{4}$. Fem el darrer cas. Parametritzem la corba com $\alpha(t) = (1-t)(1,1,1)$. Llavors

$$\oint_{c4} \mathbf{F} = \int_0^1 (4(1-t)^3 + t - 1)dt = \frac{1}{2}.$$

Per tant la circulació que volem calcular és 0.
Si fem el rotacional veiem que és zero.
Per trobar un camp potencial podem triar un camí $\gamma(t)$ que quan $t = t_0$ passi per (x_0, y_0, z_0) i quan $t = t_1$ passi per (x,y,z), llavors $f(x,y,x) = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{L}$ ens donarà una funció potencial.
Triem com a corba la corba trencada que segueix (paral·lela als eixos) el cami $(0,0,0)-(x,0,0)-(x,y,0)-(x,y,z)$. Fem el càlcul i obtenim $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2$.

(1) Fem $f(x,y,z) = \int_0^x \mathbb{X}_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y \mathbb{X}_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z \mathbb{X}_3(x,y,t)\,dt$.

(2) Diguem que està ben definida. ($\mathrm{rot}(\mathbb{X})=0$ i no depèn del camí)

(3) Cal provar que $\mathrm{grad}(f) = \mathbb{X}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \mathbb{X}_1(x,0,0) + \int_0^y \frac{\partial \mathbb{X}_2}{\partial x}(x,t,0)\,dt + \int_0^z \frac{\partial \mathbb{X}_3}{\partial x}(x,y,t)\,dt \,. \quad (*)$$

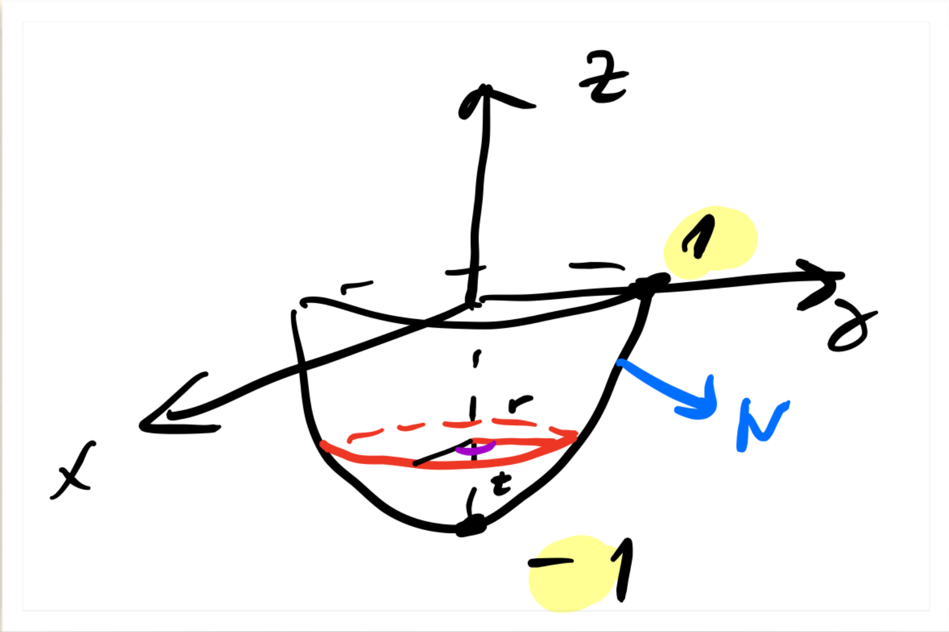
Fem servir que $\mathrm{rot}\,\mathbb{X}=0 \iff \left.\begin{array}{l} \frac{\partial \mathbb{X}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbb{X}_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathbb{X}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbb{X}_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathbb{X}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbb{X}_1}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$ Substituïm a (*) i veiem que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \mathbb{X}_1(x,y,z)$.

Anàlogament per $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Exercici 14.3. Trobeu la integral de superfície (o flux) del camp radial $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ a través de la superfície amb vora donada per $S = \{(x,y,z), z = x^2+y^2-1, -1 \leq z \leq 0\}$.

Solució: *Parametritzem la superfície com $\varphi(t,r) = (r\cos t, r\sin t, r^2-1)$. Llavors considerem la direcció de flux donada pel normal $\varphi_t \times \varphi_r$. Tenim*

$$\mathrm{Flux}_S(\mathbf{X}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos t, r\sin t, r^2-1)\cdot(2r^2\cos t, 2r^2\sin t, -r)dr\ dt = \frac{3}{2}\pi.$$



Exercici 14.4. Apliqueu el teorema de Gauss per calcular el flux del camp $\mathbf{F} = xy^2\frac{\partial}{\partial x} + x^2y\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ a través de la superfície tancada delimitada pel cilindre $x^2 + y^2 = 1$ i els plans $z = 1$ i $z = -1$.

Solució: *La divergència de* $\mathbf{F}$ *és* $x^2 + y^2 = \rho^2$. *Integrem,* $\int_{\mathrm{CilSolid}} \rho^2 \rho d\rho d\theta dz = \pi$.

Exercici 14.5. Calcular el flux del camp $\mathbf{X} = r\frac{\partial}{\partial r} + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - 3r\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}$ a través de la semiesfera superior de radi R i centrada a l'origen.

Solució: *El normal exterior unitari és* $N = \partial/\partial r$ *llavors* $X \cdot N = r$. *Llavors els flux és* $2\pi R^3$.

Exercici 14.6. Sigui $\mathbf{F} = ye^z \dfrac{\partial}{\partial x} + xe^z \dfrac{\partial}{\partial y} + xye^z \dfrac{\partial}{\partial z}$, demostreu que la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg d'una corba tancada que és vora d'una superfície és zero.

Solució: *El rotacional és zero.*

Exercici 14.7. Considerem la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x^2 + 2y^2 + 8z^2 = 1, z \geq 0\}$ i el camp $\mathbf{X}(x, y, z) = (4x + 2, 2y + 5, 5z - 1)$. Calculeu el flux de $\mathbf{X}$ a través de S.

Solució: *La divergència del camp en qüestió és* 11*. Llavors el flux demanat serà*

$$11 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{vol(Elipsoide)} - \mathrm{Flux(Tapa}\ z = 0) = \frac{11\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\sqrt{6}} \approx 2.0427$$

Exercici 14.8. Una partícula comença a moure's al punt $(-2,0)$ i es desplaça al llarg de l'eix d'abscisses fins al punt $(2,0)$. Després comença a moure's al llarg del semicercle $y=\sqrt{4-x^2}$ fins a tornar al començament. Determineu la circulació del camp $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+(x^3+3xy^2)\mathbf{j}$ al llarg de la trajectòria que descriu la partícula.

Solució: 12π.

Exercici 14.9. Avalueu $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})$, on $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ i S és la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

Solució: *El rotacional del camp és* $(0, -2z, 3y - 1)$. *Com que el normal unitari exterior és* $(x, y, z)/4$ *el flux del rotacional és*

$$\frac{1}{4} \int_{\text{semiesfera}} (-2zy + 3yz - z) dA = -\frac{1}{4} \int_{\text{semiesfera}} z \, dA = -16\pi.$$

Com que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{X})) = 0$ *el flux de* $\operatorname{rot}(\mathbf{X})$ *a travès d'una superfície tancada és zero. Llavors el flux de* $\operatorname{rot}(\mathbf{X})$ *a traves de la superfície* S *que es dona i a través de la superfície* T *definida per* $x^2 + y^2 \leq 16, z = 0$ *amb normal* $(0, 0, -1)$ *és igual de signe contrari. Tenim que*

$$\text{Flux}_T(\operatorname{rot}(\mathbf{X})) = \int_T \langle (0, -2z, 3y - 1), (0, 0, -1) \rangle dx \, dy = \int_T (1 - 3y) dx \, dy = 16\pi.$$

També es pot calcular directament la circul·lació a través de la corba parametritzada positivament per $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 0)$.

$$\oint_\gamma \langle (12\cos^2 t + 4\sin t - 4, 3 \cdot 16 \cos t \sin t, 0), (-4\sin t, 4\cos t, 0) \rangle dt = -16 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -16\pi.$$

Exercici 14.10. Calculeu el flux del camp $\mathbf{X} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a través de la superfície limitada pels cilindres $x^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 9$ i els plans $z = -1$ i $z = 2$.

Solució: $225\pi/2$.

Exercici 14.11. Calculeu la circulació del camp $\mathbf{X}$ que en coordenades cilíndriques de $\mathbb{R}^3$ s'expressa com $\mathbf{X} = \rho \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \rho z \dfrac{\partial}{\partial \theta} + \rho^3 \dfrac{\partial}{\partial z}$ al llarg de la corba $L = \{\rho = \sin\theta, z = 0 : \theta \in [0, \pi]\}$.

Solució: 0.