## Nom complet:.........................................................NIU:...............

Matemàtiques
Geometria Diferencial — Examen parcial. Abril de 2020

**1.** (*2 punts*) Es considera l'helicoide $S_a = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin\dfrac{z}{a} = y\cos\dfrac{z}{a}\right\}$, on $a > 0$ és un nombre fixat. Donat $r \in \mathbb{R}$, amb $r > 0$, definim la corba $\alpha_r$ de $S_a$ per

$$\alpha_r(t) = (r\cos t, r\sin t, at). \tag{1}$$

a) Comproveu que tant la curvatura $k_r$ com la torsió $\tau_r$ de la corba $\alpha_r$ són independents de $t$.

b) Representeu gràficament cada una de les funcions

$$\begin{array}{ccc} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & k_r \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ccc} (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ r & \longmapsto & \tau_r \end{array}$$

En particular, determineu els límits d'aquestes funcions quan $r \to 0$ i quan $r \to \infty$, així com els seus extrems relatius i absoluts, si existeixen.

c) Determineu la curvatura $k_0$ i la torsió $\tau_0$ de la corba $\alpha_0$, és a dir de la corba definida per (1) prenent $r = 0$. Aquests resultats, es poden deduir de la part b)?

*Resposta:* a) *Observem que*

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-r\sin t, r\cos t, a) \\ \alpha''(t) &= (-r\cos t, -r\sin t, 0) \\ \alpha'''(t) &= (r\sin t, -r\cos t, 0) \\ \alpha'(t)\wedge\alpha''(t) &= (ar\sin t, -ar\cos t, r^2) \end{aligned}$$

*D'aquí*

$$\|\alpha'\| = \sqrt{a^2+r^2} \qquad \|\alpha'\wedge\alpha''\| = r\sqrt{a^2+r^2}$$

*i per tant, la curvatura i la torsió de $\alpha_r$ són*

$$k_r = \frac{\|\alpha'\wedge\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{r}{a^2+r^2}$$

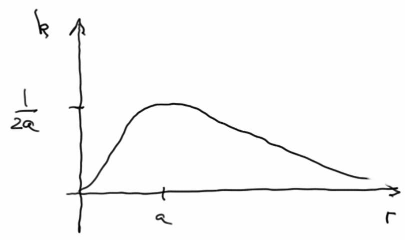
$$\tau_r = -\frac{\langle \alpha'\wedge\alpha'', \alpha'''\rangle}{\|\alpha'\wedge\alpha''\|^2} = -\frac{a}{a^2+r^2}$$

*que no depenen de $t$.*

b) *La funció $k(r) = k_r$ compleix*

$$\lim_{r\mapsto 0} k_r = 0 \qquad \lim_{r\mapsto\infty} k_r = 0 \qquad \frac{dk_r}{dr} = \frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2)^2}.$$

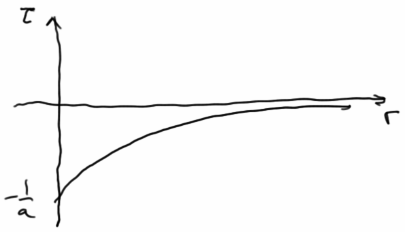
*D'aquí resulta que la funció $r \mapsto k(r) = k_r$ és creixent per $r \in (0,a)$ i decreixent per $r \in (a,\infty)$, que té un màxim relatiu (i de fet absolut) en $r = a$ amb valor $k(a) = \frac{1}{2a}$ i que té un ínfim igual a 0 però que aquest no és un mínim.*
*La seva gràfica és de la forma*




*La funció $\tau(r) = \tau_r$ compleix*

$$\lim_{r \mapsto 0} \tau_r = -\frac{1}{a} \qquad \lim_{r \mapsto \infty} \tau_r = 0 \qquad \frac{d\tau_r}{dr} = \frac{2ar}{(a^2 + r^2)^2}.$$

*D'aquí resulta que la funció $r \mapsto \tau(r) = \tau_r$ és estrictament creixent en el seu domini $(0, \infty)$. El seu valor ínfim (que no és mínim) és $-\frac{1}{a}$ i el seu suprem (que no és màxim) és 0.*
*La seva gràfica és de la forma*




c) *La corba $t \mapsto \alpha_0(t)$ és una recta i per tant la seva curvatura és idènticament zero. Els càlculs anteriors es poden fer per a tot valor de $r \in \mathbb{R}$ obtenint*

$$k_r = \frac{|r|}{a^2 + r^2}$$

*que és una funció contínua. Per tant la curvatura de $\alpha_0$ és, per continuïtat, la curvatura de $\alpha_r$ quan $r \to 0$.*
*En canvi, $t \mapsto \alpha_0(t)$ NO té una torsió ben definida ja que el seu vector normal no està definit. podríem dir que la corba té torsió nul·la ja que està continguda en un pla, però en cap cas podem dir que la torsió de $\alpha_0$ és el límit de la torsió de $\alpha_r$ quan $r \to 0$.*

**2.** ($4$ *punts*) Es considera l'aplicació $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$\varphi(u,v) = \big(\cosh u\, \cos v\,,\, \cosh u\, \sin v\,,\, \sinh u\big). \tag{2}$$

a) Comproveu que la imatge $S$ de $\varphi$ està descrita per l'equació $1 - x^2 - y^2 + z^2 = 0$ i que $S$ és una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Decidiu **raonadament** si $\varphi$ és, o no, una parametrització de $S$.

b) Demostreu que $S$ és una superfície orientable. Quina és la imatge de $S$ per l'aplicació de Gauss? (Indicació: observeu que $S$ és una superfície de revolució.) Depèn aquesta imatge de l'orientació elegida?

c) Comproveu que la corba de $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha(t) = (1, t, t)$ és una corba de $S$. Calculeu la curvatura $k$ de $\alpha$ i la seva curvatura normal $k_n$ (en tant que corba de $S$). Què podem dir de la corba $\alpha$ (en tant que corba de $S$)? Decidiu **raonadament** si $S$ és, o no, una superfície reglada.

d) Determineu la primera i la segona formes fonamentals de $S$ en les coordenades $(u,v)$. Quin és el valor mínim de la curvatura de Gauss de $S$? I el valor màxim?

e) Decidiu **raonadament** si $S$ té algun punt umbílic.

**Resposta**: **a)** *Sigui $F$ la funció definida per $F(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 + z^2 = 0$ i denotem $S' = F^{-1}(0)$. Observem que la matriu jacobiana de $F$*

$$JF = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 2z \end{pmatrix}$$

*té rang màxim en tots els punts de $S'$. Per tant $S'$ és una superfície regular de $\mathbb{R}$ a l'estar definida per la submersió $F$. Notem també que $S \subset S'$ ja que*

$$F \circ \varphi(u,v) = 1 - \cosh^2 u\, \cos^2 v - \cosh^2 u\, \sin^2 v + \sinh^2 u = 1 - \cosh^2 u + \sinh^2 u = 0.$$

*Comprovem finalment que $S' \subset S$, és a dir que el sistema d'equacions*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cosh u\, \cos v \\ y & = & \cosh u\, \sin v \\ z & = & \sinh u \end{array} \right. \tag{3}$$

*té solució sempre que $(x,y,z) \in S'$, és a dir sempre que es compleixi*

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2 \tag{4}$$

*Donat $z$ hi ha un únic $u \in \mathbb{R}$ tal que $z = \sinh u$. Llavors, si posem $r = \cosh u$, es compleix*

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2 = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u = r^2$$

*i hi ha $v \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x = r\cos v = \cosh u\, \cos v \qquad\qquad y = r\sin v = \cosh u\, \sin v.$$

*Això prova que l'equació (3) té solució (sempre que es compleixi (4)) i per tant que $S = S'$ és una subvarietat regular. Notem que el valor $u$ és únic però que $v$ no ho és: dos valors possibles de $v$ difereixen en un múltiple enter de $2\pi$.*

*La matriu jacobiana de $\varphi$ és*

$$\begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \\ \cosh u & 0 \end{pmatrix}$$

*i un dels dos menors*

$$\begin{vmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \cosh u & 0 \end{vmatrix} = \cosh^2 u \sin v$$

$$\begin{vmatrix} \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \\ \cosh u & 0 \end{vmatrix} = -\cosh^2 u \cos v$$

*és necessàriament diferent de zero (ja que les funcions* sin *i* cos *no s'anu·len simultàniament). D'aquí resulta que $\varphi$ és immersió però, si prenen com domini $\Omega = \mathbb{R}^2$, no és una parametrització de $S$ ja que no és injectiva. En canvi sí que ho seria si prenguéssim com a domini de $\varphi$ un obert de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\Omega = \mathbb{R} \times I$, on $I$ és un interval obert de longitud menor o igual a $2\pi$, per exemple $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. En efecte, en aquest cas $\varphi$ és immersió injectiva i necessàriament també és homeomorfisme sobre la seva imatge en virtut de l'exercici 2.3.6 de les notes de curs, doncs ja sabem que $S$ és una superfície regular a l'estar definida per una submersió.*

**b)** *La superfície $S$ és orientable per estar definida per una única submersió, la funció $F$. Podem prendre com camp normal unitari, per exemple, el vector*

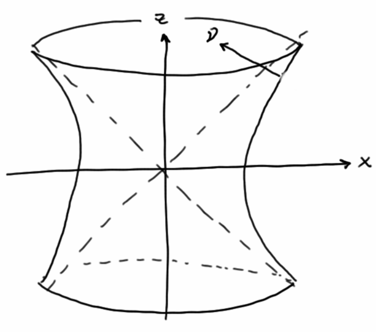
$$\nu_1 = \frac{\operatorname{grad} F}{\|\operatorname{grad} F\|} = \frac{(-x, -y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{5}$$

*Notem que, malgrat que $\varphi$ no és injectiva, el vector*

$$\nu_2 = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{(-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u)}{\sqrt{2\cosh 2u - 1}} \tag{6}$$

*està ben definit i defineix un camp normal unitari globalment definit sobre $S$.*

*Observem que $S$ és la superfície de revolució obtinguda al girar, en torn de l'eix $Oz$, de la hipèrbola del pla $Oyz$ definida per $y^2 - z^2 = 1$. Per fixar idees, prenem com vector normal unitari el vector $\nu = \nu_1 = \nu_2$, definit per* (5) *o* (6). *Com indica la figura següent, la imatge de $S$ per l'aplicació de Gauss és la regió de l'esfera unitat definida per $-\pi/4 < \theta' < \pi/4$ , on aquí $\theta'$ indica la* **latitud** *de $S^2$.*




*De forma més precisa, si parametritzem la branca positiva de la hipèrbola $y^2 - z^2 = 1$ per $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t)$, llavors*

$$\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t) \qquad i \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t} = \sqrt{2\cosh^2 t + 1}.$$

*Per tant, l'angle $\omega \in [0, \pi]$ que forma $\alpha'$ amb el vector $e_1 = (1, 0)$ compleix*

$$\lim_{t \to \mp\infty} \cos \omega = \lim_{t \to \mp\infty} \frac{\sinh t}{\sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

*Això implica que $\omega$ recorre, en sentit invers, l'interval $(\pi/4, 3\pi/4)$ i per tant el vector perpendicular a $\alpha$ recorre l'interval recorregut per $\omega + \pi/2$, és a dir l'interval $J = (3\pi/4, 5\pi/4)$. Al tractar-se d'una superfície de revolució és equivalent a considerar l'interval $J - \pi = (-\pi/4, \pi/4)$ d'on resulta l'afirmació anterior.*

*Observem finalment que la imatge de $S^2$ recoberta per $-\nu$ coincideix exactament amb la imatge recoberta per $\nu$ ja que es compleix*

$$(-\nu)(x, y, z) = \nu(x, y, -z).$$

**c)** *La corba $\alpha(t) = (1, t, t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ és una recta i per tant la seva curvatura $k$ és idènticament nu·la. Clarament està continguda a $S$ ja que $F \circ \alpha \equiv 0$.*

*De manera general, si una superfície $S$ conté una recta $\alpha = \alpha(t)$ llavors la curvatura normal $k_n$ de $S$ en cada punt $\alpha(t)$ en la direcció $\alpha'(t)$ és nul·la i, per tant, la recta és una corba asimptòtica de $S$. En efecte, podem suposar sense restricció que $\|\alpha'\| \equiv 1$ i, si $\nu = \nu(t)$ és la restricció del vector normal unitari al llarg de la corba, llavors $\langle \nu(t), \alpha'(t) \rangle \equiv 0$. Llavors tal i com veiem a la demostració del teorema de Meusnier*

$$\mathrm{II}(\alpha'(t)) = -\big\langle \nu'(t), \alpha'(t) \big\rangle = \big\langle \nu(t), \alpha''(t) \big\rangle = 0.$$

*En el cas de la superfície de l'exercici també podem veure que la corba $\alpha(t) = (1, t, t)$ és asimptòtica a partir dels càlculs de l'apartat* **d)**.

*La superfície $S$ és una superfície de revolució. De fet és invariant per les rotacions $R_s$ d'eix $Oz$, i.e.*

$$R_s = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

*Per aquest motiu, podem pensar que per cada punt de l'"equador"de la superfície $S$, i.e. la circumferència $\beta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ intersecció de $S$ amb el pla $Oxy$, passarà una recta $R_s \circ \alpha$ per a una rotació $R_s$ convenient i que aquesta nova recta estarà continguda es $S$ de forma que $S$ serà la unió de totes aquestes rectes i $S$ serà una superfície reglada. Donem rigor a aquesta idea. Recordem que una superfície reglada és la que es pot parametritzar en la forma*

$$\psi(u, v) = \beta(u) + v\, \gamma(u). \tag{8}$$

*Prenem com a corba $\beta$ la corba equador i com a corba $\gamma = \gamma(u)$ la que s'obté de girar el vector director $\vec{w} = (0, 1, 1)$ de la recta $\alpha$ per medi de la rotació $R_u$, és a dir la corba $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 1)$ ja que es compleix*

$$R_u(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

*Llavors definim*

$$\psi(u, v) = \beta(u) + v\, \gamma(u) = (\cos u - v\, \sin u\,,\, \sin u + v\, \cos u\,,\, v) \tag{10}$$

*Ara és un càlcul immediat veure que $\psi = \psi(u,v)$ és una parametrització de $S$ i resta per comprovar que la imatge de $\psi$ és tota la superfície $S$, és a dir que l'equació*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cos u - v \sin u \\ y & = & \sin u + v \cos u \\ z & = & v \end{array} \right. \tag{11}$$

*té solució sempre i quan es compleixi la relació* (4). *De* (11) *resulta que ha de ser*

$$v = z, \qquad \cos u = \frac{x+yz}{1+z^2}, \qquad \sin u = \frac{y+xz}{1+z^2}. \tag{12}$$

*Finalment veiem que és possible trobar $u$ complint les dues darreres igualtats de* (12) *ja que es compleix*

$$\left(\frac{x+yz}{1+z^2}\right)^2 + \left(\frac{y-xz}{1+z^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{1+z^2} = 1,$$

*en virtut de* (4).

**d)** *Veiem que es compleix*

$$\varphi_u = (\sinh u \, \cos v, \sinh u \, \sin v, \cosh u)$$
$$\varphi_v = (-\cosh u \, \sin v, \cosh u \, \cos v, 0),$$

*i d'aquí*

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cosh^2 u - 1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 u + \sinh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}. \tag{13}$$

*A més*

$$\varphi_{uu} = (\cosh u \, \cos v, \cosh u \, \sin v, \sinh u)$$
$$\varphi_{uv} = (-\sinh u \, \sin v, \sinh u \, \cos v, 0)$$
$$\varphi_{vv} = (-\cosh u \, \cos v, -\cosh u \, \sin v, 0).$$

*Utilitzant que $e = \langle \nu, \varphi_{uu} \rangle$, $f = \langle \nu, \varphi_{uv} \rangle$ i $g = \langle \nu, \varphi_{vv} \rangle$, resulta*

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\cosh^2 u - 1}} & 0 \\ 0 & \frac{\cosh^2 u}{\sqrt{2\cosh^2 u - 1}} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

*D'aquí resulta*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(2\cosh^2 u - 1)^2} < 0 \tag{15}$$

*De fet la funció curvatura pren el seu valor mínim $K(p) = -1$ quan $u = 0$, és a dir en els punts $p \in S$ de la circumferència determinada per $x^2 + y^2 = 1$ i $z = 0$. D'altra banda $\lim_{u \to \pm\infty} K(u,v) = 0$ de manera que l'ínfim de la funció curvatura és 0 però aquest valor no és màxim.*

**e)** *Una superfície amb curvatura de Gauss estrictament negativa, com és el cas de $S$, no té punts umbilicals. En efecte, siguin $k_1 \leq k_2$ les curvatures principals en un punt $p$ d'una superfície. El punt $p$ és umbilical si $W_p = \lambda \,\mathrm{Id}$ o, el que és equivalent, si $k_1 = k_2$. Però si la curvatura de Gauss és negativa llavors $k_1 \cdot k_2 = K(p) < 0$ i per tant ha de ser $k_1 < 0 < k_2$.*