4 Exercicis complementaris de corbes planes

Exercici 30: Trobeu una corba parametritzada $\alpha(t)$ que tingui per traça el cercle $x^2 + y^2 = 1$ i tal que $\alpha(t)$ el recorri en el sentit de les agulles del rellotge amb $\alpha(0) = (0, 1)$.

Exercici 31: Considerem la corba parametritzada $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$.

1. Determineu si els punts $(-1, -1)$, $(4, 2)$ i $(1, 2)$ estan sobre la seva traça.
2. Trobeu els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades.
3. Trobeu una equació que defineixi el conjunt imatge.

Exercici 32 (Trocoide): Trobeu una parametrització de la *trocoide*: corba caracteritzada per ser l'òrbita d'un punt P situat a una distància a del centre d'una circumferència de radi b quan aquesta roda sense lliscament sobre una recta fixada:

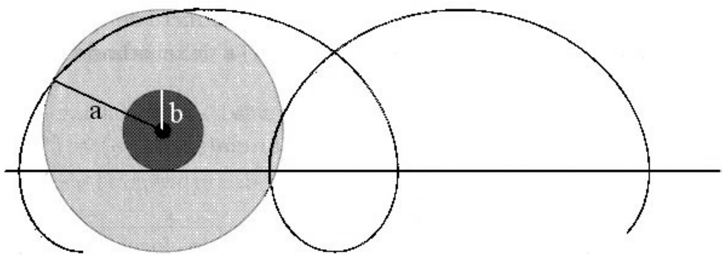


Figura 1: Trocoide amb $a > b$

En el cas $a = b$ s'anomena *cicloide*. Calculeu el paràmetre arc de la *cicloide*.

Exercici 33 (Cicloide com isocrona[6]): A *Moby Dick* de Herman Melville (1851) trobem la següent cita:

Quan no s'utilitzen, aquestes calderes es conserven considerablement netes. A vegades les poleixen amb sabó de sastre i sorra fins que brillen per dins com ponxeres de plata. Durant les guàrdies nocturnes, alguns vells mariners cínics s'hi entaforen, s'hi ajoquen i fan una becadeta. Quan els mariners es dediquen a polir-les -un home a cada caldera, tocar a tocar- es passen moltes comunicacions confidencials per damunt els llavis de ferro. També és un lloc adient per a profundes meditacions matemàtiques. Fou dins la caldera de mà esquerra del Pequod, amb el sabó de sastre que m'envoltava per totes bandes, que per primera vegada em va impressionar el fet remarcable que, en geometria, tots els cossos que llisquen al llarg de la corba cicloide, *el meu sabó de sastre per exemple, baixen en el mateix espai de temps des de qualsevol punt.*

(La destil·leria, Moby Dick)

[6]La *cicloide* també verifica que és la *braquistocrona*, és a dir, la corba al llarg de la qual una partícula llisca sota l'acció de la gravetat i sense fregament en un temps mínim d'un punt A a un punt B situats en verticals diferents (vegeu *Aventuras Matemáticas*, Miguel de Guzmán, Ed. Labor 1988).

Anem a verificar aquesta propietat de la qual ens parlen en forma de problema. S'anomena cicloide invertida una cicloide en la qual s'han canviat de signe les coordenades y dels punts de la corba. Volem comprovar que en una cicloide invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

(a) Comproveu que la cicloide invertida (de paràmetre $a = 1$) està donada per $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t - 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Dibuixeu-la i comproveu que el punt més baix correspon al paràmetre $t = \pi$. Verificarem a continuació que en una *cicloide* invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat (en particular, amb velocitat inicial nul·la) sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

Per a això fem els següents passos:

(b) Suposem que un cos llisca (velocitat inicial zero i sense fregament) sobre la cicloide des del punt $\gamma(t_0)$ fins al punt $\gamma(t)$. Calculeu la velocitat $v(t)$ amb que arriba aquest cos al punt $\gamma(t)$.

(Indicació: Recordeu la llei de conservació de l'energia i les expressions de l'energia potencial i cinètica, $E_p = mgh$ i $E_c = mv^2/2$ respectivament).

(c) Calculeu la distància recorreguda entre $\gamma(t_0)$ i $\gamma(t)$.

(d) Sigui $\tau = \tau(t)$ el temps transcorregut per anar de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$. Observem doncs que $\tau(t_0) = 0$. Calculeu $\tau(\pi)$ (temps d'arribada des de $\gamma(t_0)$ al punt més baix) i comproveu que no depèn de t_0.

Exercici 34: Parametritzeu les hipocicloides: la corba descrita per un punt d'un cercle de radi r que gira sense lliscar a l'interior d'un cercle més gran de radi $R = kr$.

Exercici 35: Recordem que per una corba plana $\gamma(s)$, la definició de curvatura és amb signe de tal manera que si $\gamma(s)$ està parametritzada per l'arc llavors

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)).$$

(a) Sigui $\kappa : I \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i siguin $s_0, s_1, s_2 \in I$. Si posem $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)du$, comproveu que tota corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametritzada per l'arc i amb curvatura igual a aquesta funció donada $\kappa(s)$, es pot escriure, respecte d'una certa referència ortonormal, de la forma

$$\gamma(s) = \Big(\int_{s_1}^{s} \cos\theta(u)du, \int_{s_2}^{s} \sin\theta(u)du \Big).$$

(b) Observeu que un canvi en les constants s_0, s_1, s_2 indueix un moviment rígid (rotació més translació) en la imatge.

(c) Deduïu que tota corba plana de curvatura constant no nul·la és una circumferència.

(d) Sigui $\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = k(s)$. Demostreu que la traça de γ és simètrica respecte de la recta normal de γ en $\gamma(0)$.

(e) Sigui $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = -k(s)$. Demostreu que la traça de α és simètrica respecte del punt $\alpha(0)$.

Exercici 36: Trobeu una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc, amb curvatura

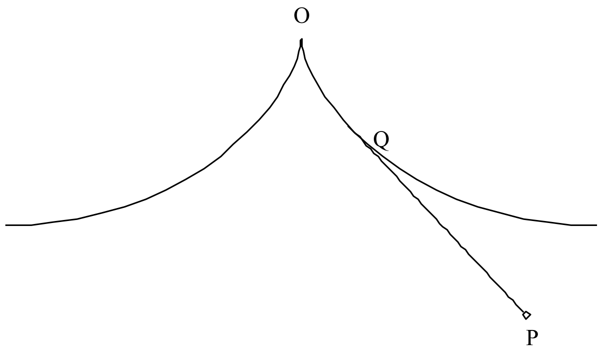
$$k(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

i tal que $\gamma(0) = (0,0)$ i $\gamma'(0) = (1,0)$. Podríeu dir de quin tipus de corba es tracta? (podeu utilitzar que $\int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \operatorname{arcsinh}(s) + c$).

Exercici 37: Rellotges de pèndol, Huygens, 1673. Per evitar que les variacions d'amplitud en les oscil·lacions d'un pèndol provoquessin un error en la mesura del temps, Huygens va idear un sistema basat en les propietats de la *cicloide*. Considerem una cicloide invertida de paràmetre a, és a dir

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(\cos t - 1)), \quad -\pi < t < \pi.$$

Suposem que aquesta corba és rígida, construïda amb un determinat metall. Del vèrtex O de la cicloide (vegeu la figura) pengem un cordill amb un pes a l'altre extrem (punt P de la figura).



El cordill pot oscil·lar, però en el seu moviment no pot travessar mai la cicloide metàl·lica. A la figura hem designat per Q el punt de la cicloide en què el cordill deixa d'estar recolzat sobre la cicloide. La recta determinada per Q i P és tangent a la cicloide. Llavors la corba que descriu l'extrem lliure del pèndol és ortogonal a les rectes tangents; per tant, és una involuta de la *cicloide*. Si s'agafa un cordill de longitud $4a$ aquesta corba és una *cicloide*. Llavors el semi període del pèndol (el temps que triga en anar des d'un extrem a la posició d'equilibri) és independent de l'amplitud degut a que és el temps que tarda un cos en caiguda lliure sobre una *cicloide* en anar al punt més baix. Calculeu la corba descrita per l'extrem del pèndol i comproveu que és una *cicloide*.

Exercici 38 (Evolutes)**:** Diem que una corba regular plana β és l'*evoluta* d'una altra corba regular plana α si i només si α és una involuta de β. Dit d'una altra manera, β és l'envolupant de la família de rectes normals de α. S'anomena *envolupant* d'una família de corbes a una corba que és tangent a totes les corbes de la família.

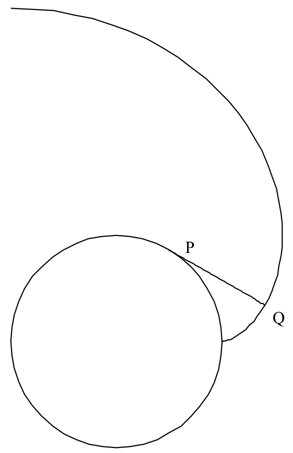
(a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α, suposant que la curvatura de α no s'anul·la.

(b) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda.

(c) Trobeu l'evoluta de la *cicloide*.

Exercici 39 (Involuta)**:** Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una corba regular plana. S'anomena *involuta* de α a qualsevol corba β que talli ortogonalment a totes les rectes tangents de α. Es diu llavors que α és l'*evoluta* de β. La figura següent mostra una involuta de la circumferència.

Observeu, per exemple, que la recta PQ de la figura és tangent a la circumferència en el punt P i normal a la involuta en el punt Q.



Suposem que α està parametritzada pel paràmetre arc s. Per a un s fixat, la recta tangent a α en el punt $\alpha(s)$ és $\alpha(s)+t\alpha'(s),\ t \in \mathbb{R}$, i el punt en què aquesta recta tangent talla la involuta β és de la forma $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s)$ per a un cert valor de $t = \lambda(s)$ (atenció: s és paràmetre arc de α, però no ho serà de β).

1. Trobeu quina ha de ser la funció $\lambda(s)$ sabent que per a un $s = s_0$ fixat $\beta(s_0) = \alpha(s_0)$ (a la figura anterior, s_0 seria el paràmetre de la circumferència corresponent al punt en què la involuta talla la circumferència).

2. Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Podeu utilitzar un cordill.)

3. Trobeu una parametrització de la involuta β quan la corba inicial α no està parametritzada per l'arc sinó per un altre paràmetre.

4. Trobeu la involuta de la *catenària* $y = \cosh x$ que passa pel punt $(0, 1)$. Comproveu que es tracta de la *tractriu*.

5. Trobeu parametritzacions de les involutes de la circumferència i de la cicloide.

Exercici 40: Deduïu geomètricament que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*.

Exercici 41: Relació entre les curvatures d'una corba i de la seva evoluta.

1. Trobeu la curvatura de la *catenària* en paràmetre arc.

2. Trobeu la curvatura de la *tractriu* en el paràmetre induït per la *catenària*.

3. Deduïu una fórmula general per la curvatura d'una involuta de α en el paràmetre induït per l'arc de α.

Exercici 42: Demostreu que la càustica d'una corba Γ respecte un punt P és l'evoluta de l'ortotòmica de Γ respecte de P.

Exercici 43: Demostreu que la càustica d'una circumferència respecte un dels seus punts és la cardioide.

Exercici 44: Una altra expressió de la curvatura per a les còniques. Donada una corba α diferenciable i un punt P sobre ella, la *subnormal* per P és el segment de la recta normal que va de P al tall amb l'eix x. Denotem per N la longitud de la subnormal en P.

Proveu que la curvatura k de l'el·lipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ en el punt P és

$$k = \frac{p^2}{N^3}$$

on $p = b^2/a$ és el paràmetre de l'el·lipse. Proveu el mateix per a la hipèrbola $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$ i la paràbola $y^2 = 2px$.

Exercici 45: Hipèrbola. Siguin F un punt del pla, d una recta a distància δ de F i $e > 1$. Posem

$$p = e\delta, \qquad c = \frac{ep}{e^2-1}, \qquad a = \frac{p}{e^2-1}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

La hipèrbola amb focus F, directriu d i excentricitat e és el lloc geomètric dels punts del pla tals que

$$d(P,F) = e \cdot d(P,d).$$

1. Prenent F com a pol i com a origen d'angles la semirecta per F perpendicular a d i que no talla a d, proveu que l'expressió de la hipèrbola en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

2. Prenent ara coordenades cartesianes amb origen O en el punt de coordenades polars $r = c$, $\theta = \pi$ (centre de la hipèrbola) i amb eix Ox a la direcció OF, proveu que l'equació de la hipèrbola és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3. Proveu que $\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ és una parametrització regular de la hipèrbola.