Geometria diferencial
Curs 2017–18

Superfícies: Parametritzacions. Espai tangent.

Exercici 1:

(a) Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació $f(x,y,z)=0$, on 0 és un valor regular de la funció f. Comproveu que el pla tangent a S en un punt $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ qualsevol es pot escriure com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\,(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\,(z-z_0)=0$$

(b) Com serà l'equació del pla tangent a una superfície de $\mathbb{R}^3$ si és el gràfic d'una funció de dues variables ($z=h(x,y)$)?

(Fixeu-vos que podeu aplicar el resultat anterior o fer els càlculs des del principi).

Solució:

(a) Si entenem l'espai tangent a S en p_0 com el format per tots els vectors tangents a corbes $\alpha(t)$ que passen per p_0 ($\alpha(0)=p_0$ sense perdre generalitat) i tenen el seu recorregut en S, es complirà, en particular, $f(\alpha(t))\equiv 0$. Per tant (regla de la cadena)

$$(df)_{p_0}(\alpha'(0))=0$$

Però la diferencial de f és

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

i no cal fer més càlculs.

De fet, l'observació anterior només demostraria que l'espai tangent està *contingut* en el pla que té com a vector normal df però, com que les dimensions dels dos espais coincideixen, la igualtat es dóna sense haver de fer més consideracions.

(b) Si es pensa com en el cas anterior, la superfície definida com el gràfic de $h(x,y)$ també serà la que ve determinada per l'equació $f(x,y,z)=h(x,y)-z=0$. Aleshores, com que

$$df=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y},-1\right)\,,$$

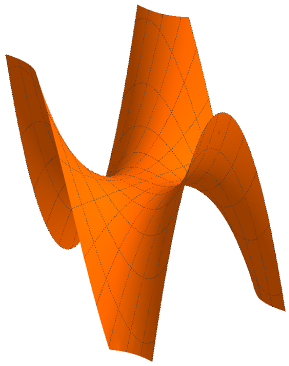
l'equació del pla tangent serà

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}\,(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

(tenint en compte que $z_0=h(x_0,y_0)$).

Naturalment, s'arriba al mateix resultat pensant que el pla tangent té per direcció l'espai generat pels vectors $\varphi_x=(1,0,h_x)$ i $\varphi_y=(0,1,h_y)$, si es considera la superfície parametritzada per $\varphi(x,y)=(x,y,h(x,y))$.

Exercici 2: Demostreu que el subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ determinat per la condició $x^3-3\,x\,y^2=z$ és una superfície regular i determineu l'equació que té el seu pla tangent en un punt qualsevol $p_0=(x_0,y_0,z_0)$.



Solució:

La diferencial de $f(x,y,z) = x^3 - 3\,x\,y^2 - z$ serà

$$df = (3\,x^2 - 3\,y^2, -6\,x\,y, -1)$$

que sempre és diferent de 0. I, aleshores, el vector normal al pla tangent (i a la superfície) serà aquest $(3\,x^2 - 3\,y^2, -6\,x\,y, -1)$.

Alternativament, S és el gràfic de la funció $h(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2$. Si es mira d'aquesta manera, la base de la direcció del pla tangent serà la donada pels vectors $(1, 0, 3\,x^2 - 3\,y^2)$ i $(0, 1, -6\,x\,y)$.

Exercici 3: Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^3$ determinat per l'equació $x + y = z^3 + 1$.

(a) Comproveu que S és una superfície regular.

(b) Doneu una parametrització de S.

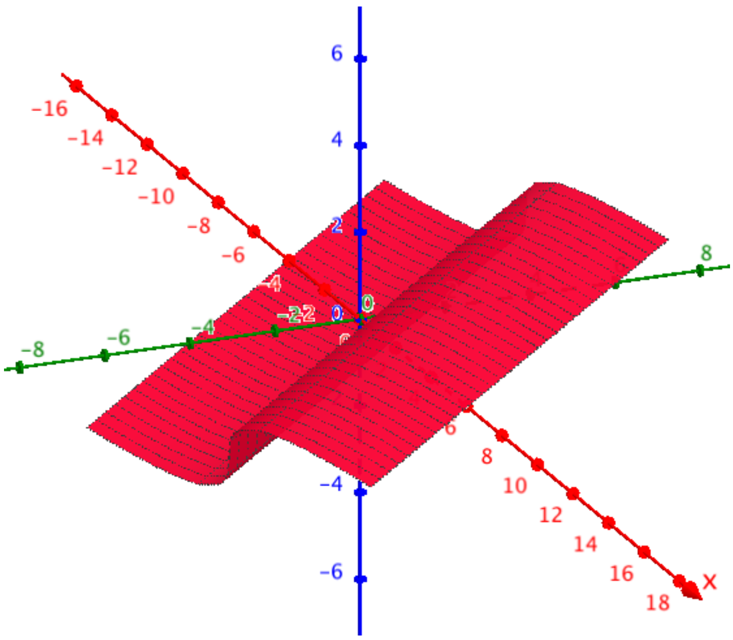
(c) Determineu per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ el vector $\vec{v} = (a, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ és tangent a S en el punt $P = (1, 1, 1)$.

Solució:

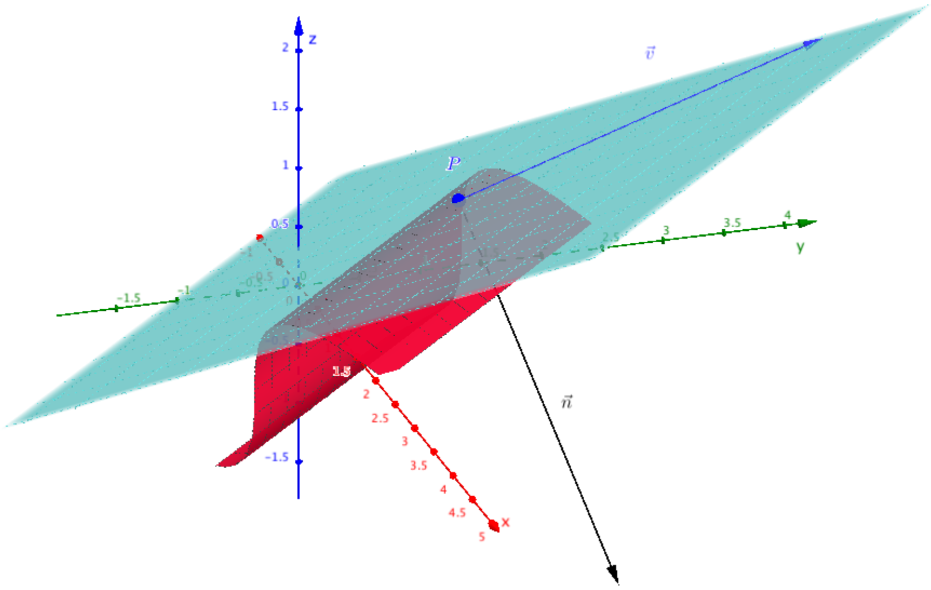
(a) Com que es pot aïllar x o y en funció de les altres dues variables, es té un gràfic i, per tant, una superfície regular de forma automàtica.

(b) N'hi ha prou posant

$$\varphi(y,z) = (z^3 - y + 1, y, z)$$

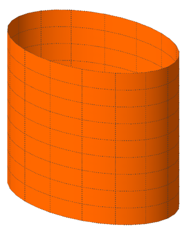


(c) En general el vector perpendicular al pla tangent a S en (x,y,z) serà $\vec{n}=(1,1,-3\,z^2)$ (que correspon a la diferencial de $f(x,y,z)=x+y-z^3-1$). En $P=(1,1,1)$ $(1+1=1^3+1)$ serà $\vec{n}=(1,1,-3)$, de forma que $(a,3,1)=\vec{v}\perp\vec{n}$ quan $0=a+3-3=a$.

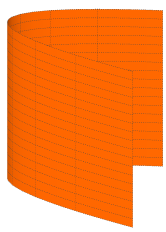


Exercici 4: Doneu parametritzacions regulars (definides en algun obert prou significatiu) de les quàdriques:

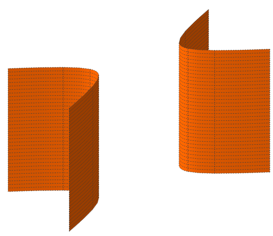
(a) Cilindres:



Cilindre el·líptic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

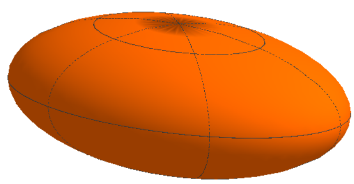


Cilindre parabòlic
$$y=c\,x^2$$



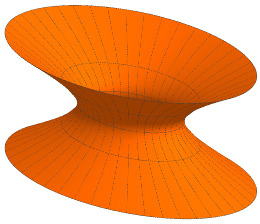
Cilindre hiperbòlic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

(b) El·lipsoides:



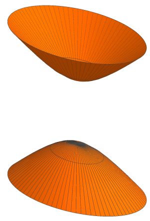
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

(c) Hiperboloides:



Hiperboloide d'un full

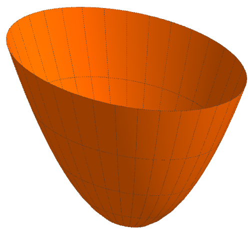
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$



Hiperboloide de dos fulls

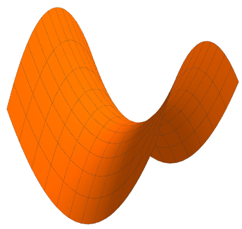
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1$$

(d) Paraboloides:



Paraboloide el·líptic

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$$



Paraboloide hiperbòlic

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$$

Solució:

(a) **Cilindre el·líptic:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

$$(u,v)\longrightarrow(a\,\cos(u),b\,\sin(u),v)$$

La diferencial d'aquesta parametrització serà:

$$\begin{pmatrix}-a\,\sin(u) & 0\\ b\,\cos(u) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Que, clarament, és de rang 2 per a tots els valors dels paràmetres (u,v).

Cilindre parabòlic: $y=c\,x^2$

$$(u,v)\longrightarrow(u,c\,u^2,v)$$

Amb diferencial de rang 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\,c\,u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Cilindre hiperbòlic: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

$$(u,v)\longrightarrow(a\,\cosh(u),b\,\sinh(u),v)$$

(Com que $\cosh(u)$ sempre és positiu caldria posar, en realitat, $\pm\cosh(u)$ i parametritzar per separat les dues *branques*).

Les diferencials corresponents a cada una de les branques s'escriuran com:

$$\begin{pmatrix}\pm a\,\sinh(u) & 0\\ b\,\cosh(u) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

I, tenint en compte que el $\cosh(u)$ sempre és més gran que 1, queda clar que el rang és 2.

(b) **El·lipsoides:**

Es pot pensar *en coordenades esfèriques* (considerant $(x/a)^2 + (y/b)^2 = w^2$ i posant $w = \cos(v)$, $z = c\,\sin(v)$, $(x/a) = w\,\cos(u)$, $(y/b) = w\,\sin(u)$)

$$(u, v) \longrightarrow (a\,\cos(u)\,\cos(v), b\,\sin(u)\,\cos(v), c\,\sin(v))$$

(on $u \in (0, 2\,\pi)$ i $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ per tal de fer una sola volta sobre la superfície). Aleshores la diferencial s'escriu com:

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u)\,\cos(v) & -a\,\cos(u)\,\sin(v) \\ b\,\cos(u)\,\cos(v) & -b\,\sin(u)\,\sin(v) \\ 0 & c\,\cos(v) \end{pmatrix}$$

Com que el determinant de les dues primeres files és $a\,b\,\cos(v)\,\sin(v) = a\,b\,\sin(2\,v)/2$, el rang només podrà ser inferior a 2 si $v = 0$ (recordeu que s'ha triat $v \in (-\pi/2, \pi/2)$) i en aquest cas $\cos(v) = 1$ i la diferencial és

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u) & 0 \\ b\,\cos(u) & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

que és clar que té rang 2 (el sinus i el cosinus del mateix angle mai són nuls simultàniament).

Naturalment, també es podria *aïllar una de les coordenades en funció de les altres dues* i considerar, per exemple,

$$(u, v) \longrightarrow \left(u, v, \pm c\,\sqrt{1 - (u/a)^2 - (v/b)^2}\right)$$

Aquesta parametrització dóna una diferencial de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

(gràfic d'una funció) i, per tant, sempre serà regular. (Noteu, però, que quan $(u/a)^2 + (v/b)^2 \to 1$ l'arrel quadrada perd la diferenciabilitat i també cal restringit el rang dels paràmetres a l'interval obert $(u/a)^2 + (v/b)^2 < 1$).

(c) **Hiperboloide d'un full:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$

Raonant de la mateixa forma que en el cas anterior, però amb funcions hiperbòliques,

$$(u, v) \longrightarrow (a\,\cos(u)\,\cosh(v), b\,\sin(u)\,\cosh(v), c\,\sinh(v))$$

(on $u \in (0, 2\,\pi)$ i $v \in \mathbb{R}$).

Com en el cas anterior, la diferencial és de la forma

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u)\,\cosh(v) & a\,\cos(u)\,\sinh(v) \\ b\,\cos(u)\,\cosh(v) & b\,\sin(u)\,\sinh(v) \\ 0 & c\,\cosh(v) \end{pmatrix}$$

El determinat de les dues primeres files, que val $-a\,b\,\cosh(v)\,\sinh(v)$, només s'anul·la quan $v = 0$ (i $\cosh(0) = 1$) de forma que l'única situació on el rang podria disminuir prové d'una diferencial de la forma

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u) & 0 \\ b\,\cos(u) & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

que també és de rang 2.

Hiperboloide de dos fulls: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1$

Es podria fer el mateix raonament amb funcions hiperbòliques i obtenir les parametritzacions (part superior i part inferior)

$$(u, v) \longrightarrow (a\,\cos(u)\,\sinh(v), b\,\sin(u)\,\sinh(v), \pm c\,\cosh(v))$$

(ara v està restringit als positius). La diferencial d'aquesta parametrització serà:

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u)\,\sinh(v) & a\,\cos(u)\,\cosh(v) \\ b\,\cos(u)\,\sinh(v) & b\,\sin(u)\,\cosh(v) \\ 0 & c\,\sinh(v) \end{pmatrix}$$

I es veu ràpidament, fent càlculs similars als anteriors, que quan $v=0$ (que, estrictament parlant, s'ha exclòs del domini) només té rang 1 i rang 2 en qualsevol altre cas. Noteu que la singularitat correspon als punts dels *vèrtexs* $(0,0,\pm c)$ (on la parametrització, de fet, deixa de ser injectiva). Noteu també que considerar valors de v negatius produeix els mateixos valors que els positius (només que en un *ordre* diferent).

Si es vol evitar una parametrització amb aquesta singularitat tampoc hi ha cap problema aïllant z en funció de x,y

$$(u,v)\longrightarrow\left(u,v,\pm c\,\sqrt{(u/a)^2+(v/b)^2+1}\right)$$

Amb diferencial donada per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c\,u}{a^2\,\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1}} & \frac{cv}{b^2\,\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1}} \end{pmatrix}$$

Que està ben definida per a qualsevol valor de (u,v) i sempre té rang 2.

(d) **Paraboloide el·líptic:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$

Prenent coordenades polars en el pla xy

$$(u,v)\longrightarrow(a\,u\,\cos(v),b\,u\,\sin(v),u^2/c)$$

amb $u>0$ i $v\in(0,2\,\pi)$.

Alternativament,

$$(u,v)\longrightarrow\left(u,v,\frac{(u/a)^2+(v/b)^2}{c}\right)$$

Paraboloide hiperbòlic: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$

Utilitzant funcions hiperbòliques

$$(u,v)\longrightarrow(a\,u\,\cosh(v),b\,u\,\sinh(v),u^2/c)$$

(Noteu que només surt la part amb $z>0$. Per tal d'obtenir la part amb $z<0$ caldrà intercanviar el paper del sinus i el cosinus hiperbòlics per a obtenir les coordenades (x,y)

$$(u,v)\longrightarrow(a\,u\,\sinh(v),b\,u\,\cosh(v),-u^2/c)$$

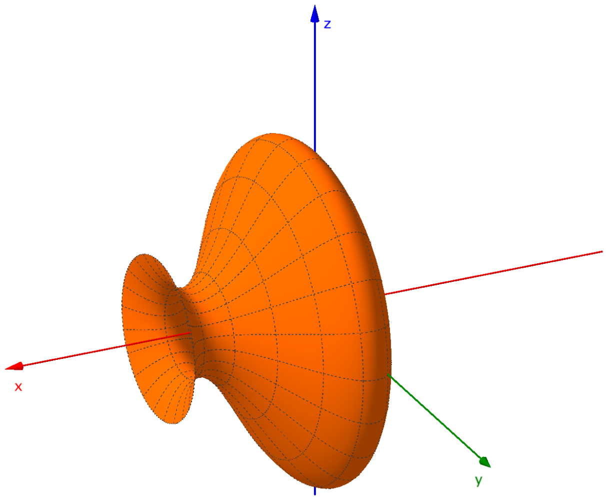
i explicitar el signe de la coordenada z).

Utilitzant x,y com a paràmetres (en aquest cas és, potser, més natural)

$$(u,v)\longrightarrow\left(u,v,\frac{(u/a)^2-(v/b)^2}{c}\right)$$

Aquí $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Exercici 5: Considereu una corba de la forma $y=f(x)$ en el pla xy (pensat dins $\mathbb{R}^3$ com els punts amb $z=0$), on f és una funció diferenciable amb $f(x)>0$ per a tots els x. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ obtingut en fer girar la corba anterior al voltant de l'eix de les x ($y=z=0$).



(a) Demostreu que S és una superfície regular veient que $S = \Phi^{-1}(0)$ per a una submersió $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Doneu una parametrització (regular) de S.

(c) Comproveu que, per a cada punt $p = (x, y, z)$ de S, el pla tangent és perpendicular al vector $\vec{n} = (f(x)\, f'(x), -y, -z)$.

Solució:

(a) Si es pensa que, per a cada x fix, els punts de la superfície corresponen a una circumferència de centre $(x, 0, 0)$ i radi $f(x)$ i per tant es compleix $y^2 + z^2 = (f(x))^2$, només cal considerar

$$\Phi(x, y, z) = y^2 + z^2 - (f(x))^2$$

Com que $f(x) > 0$, les coordenades y i z sobre S no es poden anular simultàniament, per tant la diferencial (gradient) de Φ donada per

$$d\Phi = (-2\, f(x)\, f'(x), 2\, y, 2\, z)$$

sempre és diferent de 0 i, per tant, exhaustiva.

(b) Prenent coordenades polars en cada un dels plans $x =$ ct. es pot parametritzar S posant

$$\varphi(u, v) = (u, f(u)\, \cos(v), f(u)\, \sin(v))$$

Com que

$$\varphi_u = (1, f'(u)\, \cos(v), f'(u)\, \sin(v))$$
$$\varphi_v = (0, -f(u)\, \sin(v), f(u)\, \cos(v))$$

són sempre linealment independents ($f(u) > 0$ i el sinus i el cosinus mai s'anul·len simultàniament) no cal fer més càlculs.

(c) El càlcul de $d\Phi$ ja dóna el resultat.

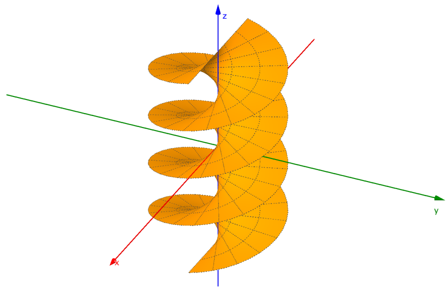
Exercici 6: (L'helicoide)

(a) Comproveu que

$$\varphi(u, v) = (u\, \cos(v), u\, \sin(v), a\, v)$$

és una parametrització regular de la superfície S de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació

$$y\, \cos(z/a) - x\, \sin(z/a) = 0$$



(b) Determineu el pla tangent (i la direcció normal) a S per a un punt arbitrari de la superfície.

Solució:

(a) Noteu en primer lloc que la funció $f(x, y, z) = y\,\cos(z/a) - x\,\sin(z/a)$ té la diferencial de la forma

$$df = (-\sin(z/a), \cos(z/a), -(y\,\sin(z/a) + x\,\cos(z/a))/a)$$

i, per tant, sempre diferent de 0. Això assegura que S és regular.

A més, la parametrització φ cobreix S i es pot observar que totes dues aproximacions descriuen el recorregut d'una recta *que va girant* al mateix temps que *puja sobre l'eix de les z*.

(b) Si es pren un punt p_0 en S corresponent a les *coordenades* (u_0, v_0) (és a dir $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$) el pla tangent en aquest punt serà el que té la direcció generada per $\varphi_u = (\cos(v_0), \sin(v_0), 0)$ i $\varphi_v = (-u_0\,\sin(v_0), u_0\,\cos(v_0), a)$ de forma que el seu vector normal serà $(a\,\sin(v_0), -a\,\cos(v_0), u_0)$. Això coincideix (llevat de múltiples) amb el que apareix si es considera $(df)_{p_0}$ com a vector normal a la superfície.