Capítol 4

Aplicació de Gauss i segona forma fonamental

4.1 Orientació de superfícies

Definició 4.1.1. Diem que una superfície regular S de $\mathbb{R}^3$ és **orientable** si S admet un **camp normal unitari**, és a dir una aplicació diferenciable $\nu\colon S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, on S^2 és l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$, de manera que $\nu_p = \nu(p)$ és ortogonal a T_pS per a tot $p \in S$.

Observem que si S és orientable i connexa llavors S admet exactament dos camps normals unitaris, ν i $-\nu$. L'elecció d'un d'aquests camps s'anomena **orientació** de S. Notem que l'elecció d'un tal camp ν determina una orientació en cada espai tangent T_pS: diem que una base ordenada $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ de T_pS és positiva si $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \nu_p)$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Localment sempre existeix un camp normal unitari en una superfície S donada: si $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ és una parametrització local de S llavors

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \tag{4.1}$$

és un camp normal unitari definit a $\varphi(\Omega) \subset S$. Notem també que $\left(\varphi_u, \varphi_v, \nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}\right)$ és base positiva de $\mathbb{R}^3$. Diem que l'orientació a $\varphi(\Omega)$ definida per (4.1) és l'orientació definida per la parametrització φ. D'aquesta observació es dedueix el criteri d'orientabilitat donat a la Proposició següent.

Proposició 4.1.2. *Una superfície S és orientable si i només si S pot ser recoberta per les imatges $\varphi_i(\Omega_i)$ d'una família de parametritzacions $\{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i \in J}$ tals que es compleix*

$$\det J(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i) > 0 \qquad \forall\, i, j \in J.$$

Demostració. Observem primer que si $\varphi = \varphi(u,v)$ i $\psi = \psi(\bar{u}, \bar{v})$ són dues parametritzacions de S, definim $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ i posem $\bar{u} = h_1(u,v)$ i $\bar{v} = h_2(u,v)$, llavors $\varphi(u,v) = \psi\big(h(u,v)\big) = \psi\big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$. Per tant

$$\begin{cases} \varphi_u &=& \psi_{\bar{u}} \frac{\partial h_1}{\partial u} + \psi_{\bar{v}} \frac{\partial h_2}{\partial u} \\ \varphi_v &=& \psi_{\bar{u}} \frac{\partial h_1}{\partial v} + \psi_{\bar{v}} \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{cases}$$

i d'aquí resulta

$$\nu_\varphi = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \text{signe}\big(\det J_h\big) \cdot \frac{\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}}{\|\psi_{\bar{u}} \wedge \psi_{\bar{v}}\|} = \text{signe}\big(\det J_h\big) \cdot \nu_\psi,$$

on J_h és la matriu jacobiana de h. D'altra banda que si $\varphi = \varphi(u,v)$ és una parametrització de S i definim $\psi = \psi(u,v)$ per $\psi(u,v) = \varphi(v,u)$, llavors φ i ψ defineixen orientacions oposades.

L'enunciat resulta ara de manera immediata d'aquestes dues observacions. □

Exemples 4.1.3. 1. Si S és, globalment, la gràfica d'una funció o, de manera més general, si S pot ser recoberta per la imatge d'una única parametrització, llavors S és orientable.

2. Si S es pot recobrir per les imatges de dues parametritzacions (Ω_1, φ_1) i (Ω_2, φ_2) de manera que $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ és connexa (com és el cas de, per exemple, una esfera) llavors S és orientable.

3. Si S pot ser definida globalment per una única submersió llavors S és orientable.

Nota 4.1.4. Totes les consideracions que farem al llarg d'aquest capítol seran purament locals de manera que, excepte menció explícita, totes les superfícies seran suposades orientades per un camp normal unitari ν globalment definit.

4.2 Aplicació de Gauss

Definició 4.2.1. Sigui S una superfície orientable. S'anomena **aplicació de Gauss** de S a l'aplicació

$$\nu\colon S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \tag{4.2}$$

definida per un camp normal unitari ν que suposarem fixat.

Comentari 4.2.2. Els plans T_pS i $T_{\nu_p}S^2$ són paral·lels i es poden identificar, de forma que la diferencial $d\nu_p$ de l'aplicació de Gauss es pot pensar com un endomorfisme de T_pS

$$d\nu_p\colon T_pS \longrightarrow T_pS \equiv T_{\nu_p}S^2.$$

D'ara endavant farem aquesta identificació donant sentit a la definició següent.

Definició 4.2.3. Sigui S una superfície orientada per un camp normal unitari ν. L'endomorfisme

$$W_p\colon T_pS \longrightarrow T_pS \tag{4.3}$$

definit per $W_p = -d\nu_p$, s'anomena **endomorfisme de Weingarten** de S en el punt p.

Exemples 4.2.4. 1. Si S és un pla, llavors ν és constant i $W_p = -d\nu_p \equiv 0$.

2. Considerem l'esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ amb l'orientació determinada per $\nu = (x, y, z)$. Si $\alpha(t) = (x(y), y(t), z(t))$ és una corba sobre S llavors

$$\nu(t) := \nu \circ \alpha(t) = (x(y), y(t), z(t))$$

i es compleix

$$W_p(\alpha'(t_0)) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\nu \circ \alpha)(t) = (-x'(y), -y'(t), -z'(t)) = -\alpha'(t_0).$$

Per tant $W_p(\vec{w}) = -\vec{w}$. (Si invertíssim l'orientació seria $W_p = \mathrm{Id}$.)

3. Sigui C el cilindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$ amb l'orientació donada per $\nu = (x, y, 0)$. Observem que la imatge de ν és un cercle. Els autovalors de $W_p = -d\nu_p$ són -1 i 0 en tot punt p, i serien 1 i 0 en cas d'invertir l'orientació.

4. Considerem el paraboloide hiperbòlic $\{z = x^2 - y^2\}$ parametritzat per $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Aleshores

$$\varphi_u = (1, 0, 2u), \quad \varphi_v = (0, 1, -2v), \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1/4}}(-u, v, 1/2).$$

Es comprova que, en el punt $p = (0, 0, 0)$, l'endomorfisme de Weingarten $W_0 = -d\nu_0$ té autovectors $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$ de valors pròpis 2 i -2 respectivament.

El següent enunciat dona l'expressió de l'aplicació $d\nu_p$ en coordenades.

Lema 4.2.5. *Siguin $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrització local d'una superfície S, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ corba de S i $p = \alpha(0)$. Posem $\nu(t) = (\nu \circ \alpha)(t) = \nu(u(t), v(t))$. Aleshores*

$$d\nu_p(\alpha'(0)) = d\nu_p\big(u'(0)\varphi_u + v'(0)\varphi_v\big) = u'(0)\,\nu_u + v'(0)\,\nu_v \tag{4.4}$$

En particular $d\nu_p(\varphi_u) = \nu_u$ i $d\nu_p(\varphi_v) = \nu_v$.

Demostració. Es compleix

$$d\nu_p(\alpha'(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\nu \circ \alpha)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu(u(t), v(t)) = u'(0)\,\nu_u + v'(0)\,\nu_v$$

L'última afirmació resulta de prendre com a corba cada una de les línies coordenades. □

Proposició 4.2.6. *Sigui S una superfície orientada amb camp normal unitari ν i sigui $p \in S$. L'endomorfisme de Weingarten $W_p = -d\nu_p$ és autoadjunt respecte del producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. és a dir que es compleix*

$$\langle W_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle_p = \langle \vec{v}, W_p(\vec{w}) \rangle_p \qquad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in T_pS \tag{4.5}$$

Demostració. Per la linealitat de l'endomorfisme de Weingarten i la simetria del producte escalar, és suficient provar que, si $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ és una base de T_pS llavors es compleix $\langle W_p(\vec{w}_1), \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{w}_1, W_p(\vec{w}_2) \rangle$. En virtud del lema anterior aquesta igualtat és equivalent a

$$\langle \nu_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, \nu_v \rangle \tag{4.6}$$

però això es dedueix de

$$\langle \nu, \varphi_v \rangle = 0 \implies \langle \nu_u, \varphi_v \rangle + \langle \nu, \varphi_{vu} \rangle = 0$$
$$\langle \varphi_u, \nu \rangle = 0 \implies \langle \varphi_u, \nu_v \rangle + \langle \varphi_{uv}, \nu \rangle = 0$$

ja que llavors $\langle \nu_u, \varphi_v \rangle = -\langle \nu, \varphi_{vu} \rangle = -\langle \varphi_{uv}, \nu \rangle = \langle \varphi_u, \nu_v \rangle$. □

Proposició 4.2.7. *Sigui p un punt d'una superfície S. L'endomorfisme de Weingarten W_p té valors pròpis reals i diagonalitza en una base ortonormal de T_pS.*

Demostració. Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base ortonormal de T_pS. Per ser l'endomorfisme W_p autoadjunt, la matriu que representa en aquesta base és simètrica, és a dir que serà

$$\begin{cases} W_p(\vec{v}_1) &= a\,\vec{v}_1 + b\,\vec{v}_2 \\ W_p(\vec{v}_2) &= b\,\vec{v}_1 + c\,\vec{v}_2. \end{cases}$$

El seu polinomi característic és llavors $\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$ amb discriminant

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Si aquest discriminant D és zero llavors $a = c$ i $b = 0$ i per tant $W_p = a\,\mathrm{Id}$, que diagonalitza en qualsevol base. Suposem doncs que D és diferent de zero. Llavors W_p té dos valors propis reals diferents k_1 i k_2. Siguin $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ vectors propis respectius que podem suposar unitaris. Llavors, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ formen una base de T_pS i l'expressió de W_p en aquesta base és

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Observem finalment que $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ són ortogonals. En efecte,

$$\begin{aligned} k_1\langle\, \vec{w}_1 \,,\, \vec{w}_2 \,\rangle &= \langle\, k_1\vec{w}_1 \,,\, \vec{w}_2 \,\rangle = \langle\, W_p(\vec{w}_1) \,,\, \vec{w}_2 \,\rangle \\ &= \langle\, \vec{w}_1 \,,\, W_p(\vec{w}_2) \,\rangle = \langle\, \vec{w}_1 \,,\, k_2\vec{w}_2 \,\rangle = k_2\langle\, \vec{w}_1 \,,\, \vec{w}_2 \,\rangle, \end{aligned} \tag{4.7}$$

i això implica $\langle\, \vec{w}_1 \,,\, \vec{w}_2 \,\rangle = 0$ □

Definició 4.2.8. Sigui S una superfície regular i p un punt de S. S'anomenen **direccions principals** i **curvatures principals** de S en p a les direccions pròpies (en T_pS) i als valors propis, respectivament, de l'endomorfisme de Weingarten W_p. El punt $p \in S$ es diu **umbilical** si $W_p = \lambda\,\mathrm{Id}$.

Comentari 4.2.9. Si el punt p de S és umbilical, totes les direccions de T_pS són principals i les curvatures principals són iguals. En cas contrari hi ha exactament dues direccions principals, determinades per vectors $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ que formen base ortonormal, i dues curvatures principals diferents $k_1 \neq k_2$ caracteritzats per $d\nu_p(\vec{w}_1) = -k_1\vec{w}_1$ i $d\nu_p(\vec{w}_2) = -k_1\vec{w}_2$.

Definició 4.2.10. Es defineixen la **curvatura de Gauss** K i la **curvatura mitjana** H de la superfície S en un punt $p \in S$ com

$$\begin{aligned} K(p) &= \det W_p &= k_1\,k_2 \\ H(p) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,W_p &= \frac{k_1 + k_2}{2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

on k_1, k_2 són les curvatures principals de S en p.

Comentari 4.2.11. Les curvatures principals k_1, k_2 són les solucions del polinomi $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ i per tant

$$k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{4.9}$$

4.3 Segona forma fonamental

Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$, que suposarem orientada per un camp normal unitari ν, i sigui p un punt de S. L'aplicació

$$\begin{aligned} T_pS \times T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle\, W_p(\vec{v}), \vec{w}\,\rangle_p = -\langle\, d\nu_p(\vec{v}), \vec{w}\,\rangle_p \end{aligned} \tag{4.10}$$

és bilineal i simètrica ja que $\langle\, W_p(\vec{v}), \vec{w}\,\rangle = \langle\, \vec{v}, W_p(\vec{w})\,\rangle = \langle\, W_p(\vec{w}), \vec{v}\,\rangle$.

Definició 4.3.1. S'anomena **segona forma fonamental** de la superfície S en el punt $p \in S$ a la forma quadràtica associada a la forma bilineal (4.10), és a dir a la forma quadràtica $\mathrm{II}_p\colon T_pS \to \mathbb{R}$ definida per

$$\mathrm{II}_p(\vec{w}) = \langle\, W_p(\vec{w}), \vec{w}\,\rangle_p \tag{4.11}$$

Comentari 4.3.2. Notem que, al ser simètrica la forma bilineal (4.10), la identitat de polarització és vàlida, de manera que (4.10) està unívocament determinada per la forma quadràtica (4.11). Per tant, si no hi ha perill de confusió, parlarem de segona forma fonamental per a referir-nos a la forma bilineal i a la forma simètrica indistintament. En particular, i fent un abús de notació, escriurem

$$\mathrm{II}_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle\, W_p(\vec{v}), \vec{w}\,\rangle_p. \tag{4.12}$$

Definició 4.3.3. Sigui C una corba regular d'una superfície S passant per $p \in S$. Sigui k la curvatura de C en p i posem $\cos\theta = \langle N, \nu\rangle$, on N és el vector normal a C en p. S'anomena **curvatura normal** de $C \subset S$ en p al nombre $k_n \in \mathbb{R}$ definit per

$$k_n = k\,\cos\theta, \tag{4.13}$$

és a dir que k_n és la projecció de $k\,N$ sobre la recta normal a S en el punt p.

Comentari 4.3.4. La curvatura normal k_n no depèn de l'orientació de la corba C però el seu signe varia amb el signe de ν.

Proposició 4.3.5 (Meusnier)**.** *Sigui $\alpha\colon I \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrització per l'arc d'una corba C de la superfície S i sigui $\alpha(0) = p$. Aleshores la curvatura normal de S en p és*

$$k_n = \mathrm{II}_p(\alpha'(0)). \tag{4.14}$$

En particular, k_n tant sols depèn de la recta tangent a C en p.

Demostració. Posem $\nu(s) = (\nu \circ \alpha)(s)$. Com que $\langle\, \nu(s), \alpha'(s)\,\rangle \equiv 0$, es compleix

$$\langle\, \nu(s), \alpha''(s)\,\rangle + \langle\, \nu'(s), \alpha'(s)\,\rangle = 0$$

i per tant

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(\alpha'(0)) &= -\langle\, d\nu_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\,\rangle = -\langle\, \nu'(0), \alpha'(0)\,\rangle \\ &= \langle\, \nu(0), \alpha''(0)\,\rangle = \langle\, \nu, k\,N\,\rangle = k_n \end{aligned}$$

igualtat que prova la proposició. □

Comentaris 4.3.6. a) Notem que, llevat del signe, les curvatures normals d'una superfície S en un punt p són les curvatures de les corbes de S que s'obtenen com seccions normals, i.e. com intersecció de S amb els diferents plans normals a S que passen per p. El signe depèn de la posició relativa de ν i N.

b) Podem redefinir la noció de curvatura normal de la següent forma: donat $\vec{v} \in T_pS$ amb $\|\vec{v}\| = 1$ es defineix la curvatura normal de S en la direcció $\vec{v}$ com

$$k_n = k_n(\vec{v}) = \mathrm{II}_p(\vec{v}). \tag{4.15}$$

Notem que $k_n(\vec{v}) = k_n(-\vec{v})$.

c) Sigui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base ortonormal de T_pS formada per vectors propis de W_p, és a dir que $W_p(\vec{e}_i) = k_i\, \vec{e}_i$ on k_1 i k_2 són les curvatures principals. Llavors

$$k_n(\vec{e}_i) = \mathrm{II}_p(\vec{e}_i) = \langle\, W_p(\vec{e}_i), \vec{e}_i\,\rangle = \langle\, k_i\, \vec{e}_i, \vec{e}_i\rangle = k_i$$

és a dir que les curvatures principals són curvatures normals

$$k_i = k_n(\vec{e}_i). \tag{4.16}$$

Exercicis 4.3.7. Determineu les curvatures normals de les superfícies següents:

i) Un pla.
ii) Una esfera de radi R.
iii) El cilindre d'equació $x^2 + y^2 = 1$.
iv) La superfície de revolució S obtinguda al girar la corba $z = y^4$ entorn de l'eix Oz, en el punt $p = (0, 0, 0)$.

Definició 4.3.8. Sigui S superfície regular i $p \in S$. Diem que la direcció de T_pS determinada per un vector $\vec{v} \in T_p$, on $\|\vec{v}\| = 1$, és una **direcció asimptòtica** si $k_n(\vec{v}) = \mathrm{II}_p(\vec{v}) = 0$.

Definició 4.3.9. Diem que una corba C d'una superfície S és **línia de curvatura** (resp. **línia asimptòtica**) de S si la recta tangent a C en cada punt $p \in C \subset S$ és direcció principal (resp. asimptòtica) de S.

Proposició 4.3.10 (Olinde Rodrigues)**.** *Sigui C corba regular de S i sigui $\alpha = \alpha(t)$ una parametrització de C amb $\alpha'(t) \neq 0$. Denotem $\nu(t) = (\nu \circ \alpha)(t)$. Aleshores C és línia de curvatura de S si i només si es compleix*

$$\nu'(t) = \lambda(t)\, \alpha'(t) \tag{4.17}$$

on $\lambda = \lambda(t)$ és una funció diferenciable. En aquest cas $-\lambda(t)$ és la curvatura principal de S en la direcció $\alpha'(t)$.

Demostració. Si $\alpha'(t)$ és una direcció principal llavors $\alpha'(t)$ és un autovector de $d\nu_p$, i.e.

$$d\nu_p(\alpha'(t)) = \nu'(t) = \lambda(t)\, \alpha'(t),$$

i $\lambda = \lambda(t)$ és diferenciable ja que $\alpha'(t) \neq 0$. El recíproc és evident. $\square$

Proposició 4.3.11 (Fórmula d'Euler)**.** *Sigui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base ortonormal de T_pS formada per vectors principals i siguin k_1 i k_2 les corresponents curvatures principals. Llavors*

$$k_n(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta. \tag{4.18}$$

Demostració. Sigui $\vec{w} = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2$. Es compleix

$$\begin{aligned} k_n(\vec{w}) = \mathrm{II}_p(\vec{w}) &= \langle\, W_p(\vec{w})\,,\, \vec{w}\,\rangle \\ &= \langle\, W_p(\cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2)\,,\, \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\,\rangle \\ &= \langle\, k_1\cos\theta\,\vec{e}_1 + k_2\sin\theta\,\vec{e}_2\,,\, \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2\,\rangle \\ &= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \end{aligned}$$

que és la igualtat buscada. □

Corol·lari 4.3.12. *Les curvatures principals k_1 i k_2 de S en p corresponen als extrems, màxim i mínim, de les curvatures normals de S en p.*

Demostració. Les curvatures principals k_1 i k_2 són els extrems de la funció $k_n(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$. □

Nota 4.3.13. Recordem que la curvatura de Gauss K i curvatura mitjana H de S en un punt $p \in S$ es defineixen com

$$K = \det W_p = k_1\,k_2 \qquad\qquad H = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,W_p = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Notem que el signe de K no depèn del signe de ν però que el signe de H si que ho fa.

Exercici 4.3.14. Comproveu que es compleix

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(\theta)\,d\theta.$$

Definició 4.3.15. Sigui p un punt d'una superfície regular. Diem que p és:

a) **el·líptic** si $K(p) > 0$ (llavors $k_1, k_2 \neq 0$ i tenen el mateix signe),

b) **hiperbòlic** si $K(p) < 0$ (llavors $k_1, k_2 \neq 0$ i tenen signe diferent),

c) **parabòlic** si $K(p) = 0$ i $W_p \neq 0$ (llavors $k_1 = 0$ i $k_2 \neq 0$),

d) **pla** si $W_p = 0$ (llavors $k_1 = k_2 = 0$).

Exercici 4.3.16. Determineu el caràcter (en el sentit de l'anterior definició) dels punts de les següents superfícies: pla, esfera, cilindre, tor de revolució, superfície de revolució obtinguda al girar la corba $z = y^4$ (o $z = y^2$) entorn de l'eix Oz.

Proposició 4.3.17. *Sigui S una superfície parametritzada (i.e. imatge d'una sola parametrització) i connexa tal que tots els seus punts són umbilicals. Llavors S està continguda en una esfera o en un pla.*

Demostració. Sigui $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ parametrització de S amb $S = \varphi(\Omega)$ i posem $\nu = \nu(u,v)$. Aleshores, si $\vec{w} = a\,\varphi_u + b\,\varphi_v \in T_pS$, tenim $d\nu(\vec{w}) = a\,\nu_u + b\,\nu_v$. Si S és umbilical es complirà

$$a\,\nu_u + b\,\nu_v = d\nu(\vec{w}) = \lambda\,\vec{w} = \lambda(a\,\varphi_u + b\,\varphi_v)$$

on $\lambda = \lambda(u,v)$. En particular,

$$\nu_u = \lambda\,\varphi_u \qquad \text{i} \qquad \nu_v = \lambda\,\varphi_v$$

Derivant aquestes dues identitats respecte v i respecte u i prenent la diferència s'obté

$$\lambda_v \varphi_u - \lambda_u \varphi_u = 0.$$

Com que φ_u i φ_v són linealment independents en cada punt, tindrem $\lambda_u = \lambda_v \equiv 0$. És a dir que λ és constant, $\lambda \equiv \lambda_0$. Pot passar

$\underline{\lambda \equiv 0}$: Tenim $\nu_u = \nu_v \equiv 0$ i $\nu \equiv \nu_0$ és constant. Llavors

$$\langle \varphi, \nu_0 \rangle_u = \langle \varphi, \nu_0 \rangle_v \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi, \nu_0 \rangle = \text{constant}$$

i per tant $S = \mathrm{im}(\varphi)$ està continguda en un pla.

$\underline{\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0}$: Llavors $\psi(u,v) := \varphi(u,v) - \dfrac{1}{\lambda_0}\nu(u,v)$ és constant, $\psi = \psi_0$, ja que es compleix

$$\left(\varphi - \frac{1}{\lambda_0}\nu\right)_u = \left(\varphi - \frac{1}{\lambda_0}\nu\right)_v \equiv 0$$

i com que $\|\varphi - \psi_0\|^2 = \dfrac{1}{\lambda_0^2}$ resulta que els punts de S estan en una esfera de radi $\dfrac{1}{|\lambda_0|}$ i centre ψ_0. $\square$

4.4 L'aplicació de Gauss en coordenades

En aquest apartat suposarem fixada una superfície regular S orientada per un vector normal unitari ν així com una parametrització $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ de S compatible amb l'orientació, és a dir complint $\nu = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$.

Donada una corba $\alpha = \alpha(t)$ de S amb imatge continguda a $\varphi(\Omega)$ podem escriure $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ i per tant $\alpha' = u'\,\varphi_u + v'\,\varphi_v$. Posem $\nu(t) = (\nu \circ \varphi)(t) = \nu(u(t), v(t))$. Aleshores

$$d\nu_p(\alpha') = -W_p(\alpha') = -u'\,W_p(\varphi_u) - v'\,W_p(\varphi_v) = u'\,\nu_u + v'\,\nu_v.$$

Observem que $\nu_u, \nu_v \in T_pS$ i podem posar

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \nu_u & = & a_{11}\,\varphi_u + a_{21}\,\varphi_v \\ \nu_v & = & a_{12}\,\varphi_u + a_{22}\,\varphi_v \end{array} \right.$$

D'aquí resulta que la matriu de $d\nu_p = -W_p$ en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ és

$$d\nu_p = -W_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

D'altra banda

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_p(\alpha') &= -\langle\, d\nu_p(\alpha'), \alpha' \,\rangle = -\langle\, u'\,\nu_u + v'\,\nu_v\,,\; u'\,\varphi_u + v'\,\varphi_v \,\rangle \\ &= e\,(u')^2 + 2f\,u'\,v' + g\,(v')^2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

on, utilitzant que $\langle\, \nu, \varphi_u \,\rangle = \langle\, \nu, \varphi_v \,\rangle = 0$, és

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} e & = & -\langle\, \nu_u, \varphi_u \,\rangle & = & \langle\, \nu, \varphi_{uu} \,\rangle \\ f & = & -\langle\, \nu_v, \varphi_u \,\rangle & = & \langle\, \nu, \varphi_{uv} \,\rangle = \langle\, \nu, \varphi_{vu} \,\rangle = -\langle\, \nu_u, \varphi_v \,\rangle \\ g & = & -\langle\, \nu_v, \varphi_v \,\rangle & = & \langle\, \nu, \varphi_{vv} \,\rangle \end{array} \right. \tag{4.21}$$

Com que $\nu_u = d\nu_p(\varphi_u) = -W_p(\varphi_u)$ i $\nu_v = d\nu_p(\varphi_v) = -W_p(\varphi_v)$ llavors la matriu de II_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ és

$$\mathrm{II}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

De la relació $\mathrm{II}_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle\, W_p(\vec{v}), \vec{w}\,\rangle$ resulta que, matricialment, podem escriure

$$\mathrm{II}_p = W_p^t \cdot \mathrm{I}_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

d'on $W_p^t = \mathrm{II}_p \cdot \mathrm{I}_p^{-1}$ o, com que les matrius I_p i II_p són simètriques,

$$W_p = \mathrm{I}_p^{-1} \cdot \mathrm{II}_p \tag{4.24}$$

És a dir

$$\begin{aligned} W_p &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{E\,G - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{E\,G - F^2} \begin{pmatrix} e\,G - f\,F & f\,G - g\,F \\ -e\,F + f\,E & -f\,F + g\,E \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

D'aquí resulta immediatament la

Proposició 4.4.1. *Es compleix*

$$\begin{cases} K &= \det W_p = \dfrac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} \\ H &= \dfrac{1}{2}\operatorname{tr} W_p = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e\,G - 2f\,F + g\,E}{E\,G - F^2} \end{cases} \tag{4.26}$$

A més, les curvatures principals estan donades per $k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Proposició 4.4.2. *Sigui* $\alpha = \varphi(u(t), v(t))$ *corba sobre la superfície* S*. Aleshores*

a) la corba α *és asimptòtica si i només si*

$$e\,(u')^2 + 2f\,u'\,v' + g\,(v')^2 = 0, \tag{4.27}$$

b) la corba α *és línia de curvatura si i només si*

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'\,v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \tag{4.28}$$

Demostració. La part a) se segueix de la relació (4.20). Per provar b) observem primer que un vector no nul (x, y) de $\mathbb{R}^2$ és vector propi d'una matriu A, és a dir es compleix

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

per a un cert λ, si i només si

$$\begin{vmatrix} ax + by & x \\ cx + dy & y \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -c\,x^2 + (a - d)\,x\,y + b\,y^2 = 0.$$

Recordem d'altra banda que α és línia de curvatura si i només si $\alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$ és vector propi de l'endomorfisme de Weingarten $W_{\alpha(t)}$ per a cada t. El criteri anterior aplicat a la matriu de W_p donada per (4.25) ens diu que α és línia de curvatura si i només si es compleix

$$\big(f\,E - e\,F\big)\,(u')^2 + \big(g\,E - e\,G\big)\,u'\,v' + \big(g\,F - f\,G\big)\,(v')^2 = 0, \tag{4.29}$$

relació equivalent a la igualtat (4.28). □

Exercici 4.4.3. Considerem el tor de revolució T^2 parametritzat per

$$\varphi(u,v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big), \qquad u, v \in [0, 2\pi]$$

on $0 < r < R$. Comproveu que es compleix:

a) $\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$.

b) $A(T^2) = 4\pi^2 r\,R$.

c) $\nu = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$.

d) $\mathrm{II}_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$.

e) $K = \dfrac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$.

f) $H = \dfrac{R + 2r\cos u}{2r(R + r\cos u)}$.

g) $\{k_1, k_2\} = \Big\{\dfrac{1}{r}, \dfrac{\cos u}{(R + r\cos u)}\Big\}$.

Exercici 4.4.4. Repetiu els càlculs de l'anterior exercici per a les superfícies següents:

1) cilindre definit per $x^2 + y^2 = 1$,

2) superfície "uralita" definida per $z = \sin y$.

Comentari 4.4.5. Sigui S una superfície regular i fixem un punt $p \in S$. Escollim coordenades cartesianes de manera que es compleixi: i) $p = (0,0,0)$, ii) en un entorn de p la superfície S és la gràfica d'una funció en la forma $x_3 = f(x_1, x_2)$, iii) $\nu_p = (0,0,1)$, i.e. T_pS és el pla Ox_1x_2. El desenvolupament de Taylor de la funció f en $(0,0)$ és

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(0,0) + \sum_i \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 x_i\,x_j + R \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 x_i\,x_j + R. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Considerem una corba de S, $\alpha(t) = \big(x_1(t), x_2(t), f(x_1(t), x_2(t))\big)$, tal que $\alpha(0) = p = (0,0,0)$. Aleshores

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_p(\alpha'(0)) &= -\langle\, d\nu_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\,\rangle = -\langle\, \nu'(0)), \alpha'(0)\,\rangle = -\langle\, \nu(0), \alpha''(0)\,\rangle \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} f\big(x_1(t), x_2(t)\big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t), x_2(t)\big)\, \dot{x}_i(t) \\
&= \sum_{i,j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 \dot{x}_i(0)\, \dot{x}_j(0) + \sum_{i,j} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_0 \ddot{x}_i(0) \\
&= \sum_{i,j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 \dot{x}_i(0)\, \dot{x}_j(0).
\end{aligned}$$

és a dir que, llevat del factor 2, la segona forma fonamental és l'aproximació quadràtica a la superfície donada per la fórmula de Taylor.

4.5 Interpretació geomètrica de la curvatura de Gauss

Recordem que si C és una corba plana i $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ és una parametrització per l'arc de C llavors el vector tangent de C es pot escriure

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

on $\theta = \theta(s)$ és l'angle format per $T(s)$ amb una direcció fixa (per exemple la determinada per $\vec{e}_1$) i s'anomena la **indicatriu de les tangents**. Reprenent la notació introduïda a la secció 1.6, es compleix

$$\frac{dT}{ds} = \theta'(s)\,\big(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\big) = \kappa\, \hat{N}.$$

Per tant, si pensem $\theta = \theta(s)$ com una aplicació $\theta\colon I \to S^1$, obtenim

$$\kappa(p) = \pm \lim_{s \mapsto 0} \frac{\theta}{s} \tag{4.31}$$

on s és la longitud d'arc d'un petit segment de C contenint p i θ és la longitud de la seva imatge per la indicatriu de les tangents.

En aquest apartat veurem que la curvatura de Gauss admet una interpretació similar que, de fet, és al definició de curvatura que originalment va donar Gauss. Abans però provem el lema següent.

Lema 4.5.1. *Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de T_pS i sigui $A\colon T_pS \to T_pS$ un isomorfisme lineal. Aleshores es compleix*

$$A\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2 = \det A \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2). \tag{4.32}$$

Demostració. Fixem un vector $\vec{w}$ no nul i perpendicular a T_pS. Notem que els dos termes de (4.32) són vectors múltiples de $\vec{w}$. Estenem l'aplicació lineal A a un isomorfisme $\hat{A}$ de $\mathbb{R}^3$ definint $\hat{A}\vec{w} = \vec{w}$, llavors $\det \hat{A} = \det A$ i tenim

$$\begin{aligned}
\langle\, A\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2, \vec{w}\,\rangle &= \langle\, \hat{A}\vec{v}_1 \wedge \hat{A}\vec{v}_2, \hat{A}\vec{w}\,\rangle = \det(\hat{A}\vec{v}_1, \hat{A}\vec{v}_2, \hat{A}\vec{w}) \\
&= \det \hat{A}\, \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}) = \det A\, \langle\, \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2, \vec{w}\,\rangle
\end{aligned}$$

i aquesta igualtat és equivalent a l'equació (4.32). □

Sigui S una superfície regular orientada i sigui ν el corresponent camp normal unitari que podem pensar com una aplicació $\nu\colon S \to S^2$. Com hem fet anteriorment, identifiquem el pla T_pS tangent a S en p amb el pla $T_{\nu_p}S^2$ tangent a l'esfera unitat S^2 en el punt ν_p. Al mateix temps aquesta identificació determina una orientació en S^2. D'altra banda, del Lema 4.5.1 resulta que, si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T_pS$, llavors

$$d\nu_p(\vec{w}_1) \wedge d\nu_p(\vec{w}_2) = \det d\nu_p \cdot \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2 = K(p) \cdot \vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2. \tag{4.33}$$

Per tant, si $d\nu_p$ és no degenerada (i.e. si $K(p) \neq 0$) aleshores l'aplicació $\nu\colon S \to S^2$ conserva orientacions si i només si $K(p) > 0$.

Per tenir compte d'aquest fet introduirem la següent notació. Sigui R una regió de S en la que la curvatura de Gauss K no s'anul·la. Anomenarem **àrea amb signe** de la imatge $\nu(R) \subset S^2$ de R per l'aplicació de Gauss al nombre $A^s\big(\nu(R)\big)$ definit per

$$A^s\big(\nu(R)\big) = \text{signe}(K) \cdot A\big(\nu(R)\big). \tag{4.34}$$

Amb aquesta notació es compleix.

Proposició 4.5.2. *Sigui p un punt de la superfície S en el que $K(p) \neq 0$ i sigui V un entorn connex de p en S on la curvatura de Gauss K no canvia de signe. Llavors*

$$K(p) = \lim_{B_n \mapsto p} \frac{A^s\big(\nu(B_n)\big)}{A(B_n)}, \tag{4.35}$$

on el límit es pren en una successio de regions $B_n \subset V$ de S que convergeixen al punt p.

Demostració. Sigui $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ parametrització de S, compatible amb l'orientació i tal que $p \in \varphi(\Omega) \subset V$. Com hem vist abans

$$\nu_u \wedge \nu_v = d\nu(\varphi_u) \wedge d\nu(\varphi_v) = K\, \varphi_u \wedge \varphi_v.$$

D'aquí resulta, en particular, que $\nu = \nu \circ \varphi$ és una parametrització local de l'esfera S^2. Per tant, si posem $Q = \varphi^{-1}(R)$ tindrem

$$A(R) = \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv$$

i

$$A\big(\nu(R)\big) = \int_Q \|\nu_u \wedge \nu_v\|\, du\, dv = \int_Q |K|\, \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv.$$

Amb el conveni anterior resulta

$$A^s\big(\nu(R)\big) = \int_Q K\, \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv.$$

Aleshores es compleix

$$\lim_{R \mapsto p} \frac{A^s\big(\nu(R)\big)}{A(R)} = \lim_{Q \mapsto p} \frac{A^s\big(\nu(R)\big)/A(Q)}{A(R)/A(Q)} = \frac{\displaystyle\lim_{Q \mapsto p} \frac{1}{A(Q)} \int_Q K\, \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv}{\displaystyle\lim_{Q \mapsto p} \frac{1}{A(Q)} \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, du\, dv}$$

$$= \frac{K(p)\, \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|(p)}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|(p)} = K(p),$$

on hem utilitzat el teorema del valor mitjà integral. $\square$