15 El Teorema de Stokes i les seves variants.

Exercici 147: Considereu dins l'helicoide S de $\mathbb{R}^3$, parametritzat per $\varphi(s,t) = (s\,\cos(t), s\,\sin(t), t)$, la regió R determinada per $0 \le s \le \pi$, $0 \le t \le \pi$ i la forma $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$. Calculeu les integrals necessàries per tal de comprovar el teorema de Stokes amb aquestes dades.

Exercici 148: Sigui D una regió del pla limitada per una certa corba (diferenciable) tancada γ. Utilitzeu la fórmula de Green (o, equivalentment, el t. de Stokes) per a provar que l'àrea de D es pot calcular com:

$$\text{Àrea}(D) = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx$$

Apliqueu l'anterior per a calcular l'àrea que queda entre la cicloide $\gamma(s) = (s - \sin(s), 1 - \cos(s))$ i l'eix de les x (per a $s \in [0, 2\,\pi]$).

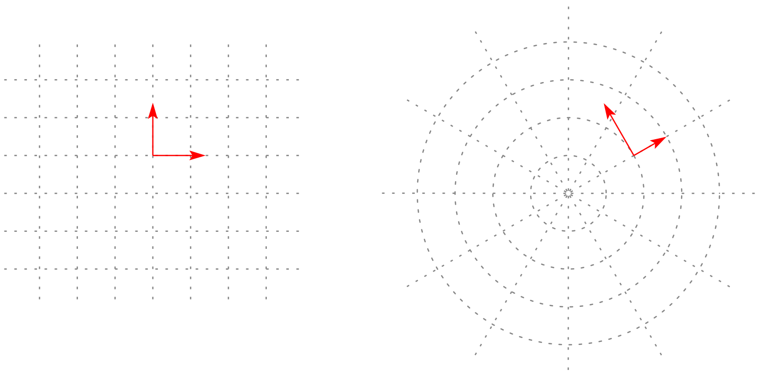
Exercici 149: Determineu la corba tancada γ del pla per a la qual la integral

$$\int_\gamma y^3\,dx + (3\,x - x^3)\,dy$$

té el valor màxim.

Exercici 150: Quan es defineix un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ (o, en general, de $\mathbb{R}^n$) sempre es pot interpretar que l'expressió $X = (a_1, a_2, a_3)$ representa en cada punt el *vector tangent* que s'escriu com combinació lineal dels vectors tangents a les corbes coordenades amb components a_i. Si s'estableix $\frac{\partial}{\partial x} = \left.\frac{d(t,\text{ct.},\text{ct.})}{dt}\right|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \left.\frac{d(\text{ct.},t,\text{ct.})}{dt}\right|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \left.\frac{d(\text{ct.},\text{ct.},t)}{dt}\right|_{t=0}$ l'anterior observació es resumeix en la igualtat $X = a_1\,\frac{\partial}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial}{\partial y} + a_3\,\frac{\partial}{\partial z}$. D'aquesta forma, si es fa un *canvi de coordenades* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Phi(x, y, z)$ també es podrà representar X en funció de $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Per exemple, en $\mathbb{R}^2$,



1. Quina relació hi ha entre els camps tangents corresponents a les coordenades cartesianes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ i els de les coordenades cilíndriques $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}$ de $\mathbb{R}^3$?

2. Com es calcularà la divergència d'un camp de $\mathbb{R}^3$ si es coneix la seva expressió en funció de les coordenades cilíndriques?

Exercici 151: Calculeu el flux del camp definit per $F(x, y, z) = (z^2, x\,z, x - y^2)$ a través de la superfície S determinada per les condicions $x^2 + y^2 = 4 - z$, $z \geq 0$ (amb la orientació que dóna $(0, 0, 1)$ com a vector normal quan $x = y = 0$).

Exercici 152: Considereu el camp determinat per $F(x, y, z) = (x + 1, y - 1, 1 - 2\,z)$ i el cilindre $S = \{x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ (orientat pel vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0)$). Calculeu el flux de F al llarg de S ($\int_S F \cdot dS$) integrant la divergència sobre un domini adequat (i alguna cosa més).

Exercici 153:

1. Sigui $F = (x, y, z)$ el camp radial de $\mathbb{R}^3$ i D una regió qualsevol (amb frontera S prou regular). Proveu que el volum de D es pot calcular com

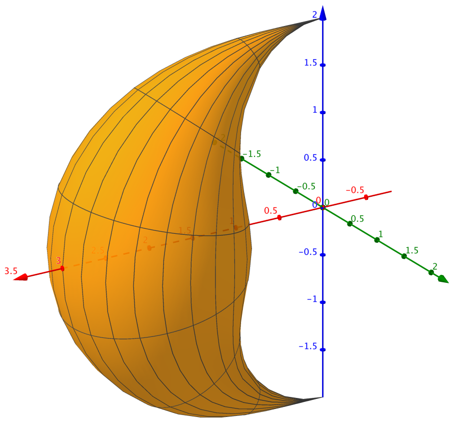
$$\mathrm{Vol}(D) = \frac{1}{3}\int_S F \cdot dS = \frac{1}{3}\int_S (F \cdot \nu)\,dS$$

(un terç del flux del camp radial sobre la superfície).

2. Utilitzeu l'estratègia de l'apartat anterior per a calcular el volum de la regió limitada per la superfície parametritzada com

$$\varphi(u, v) = (2\cos(u) + \cos^3(u)\,\cos(v), \cos^2(u)\,\sin(v), 2\,\sin(u) + \cos^2(u)\,\sin(u)\,\cos(v))$$

Que correspon a $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, 2\,\pi]$.



Exercici 154: Calculeu la circulació del camp definit per

$$F(x, y, z) = (3\,x^2\,y^2 + 4\,x^3\,y\,z^3 + 3\,x^2\,y\,z - y, 2\,x^3\,y + x^4\,z^3 + x^3\,z + x, 3\,x^4\,y\,z^2 + x^3\,y + y - x)$$

al llarg de l'el·lipse parametritzada per $c(t) = (2\,\sin(t), 2\,\cos(t), -\sin(t) - \cos(t))$. Feu el càlcul directe i el corresponent a aplicar el T. de Stokes. (Aneu en compte amb les orientacions i recordeu la versió corresponent al rotacional).

Exercici 155:

1. Calculeu la circulació del camp vectorial

$$F(x, y, z) = (x^3 - 3\,x\,y^2, y^3 - 3\,x^2\,y, z)$$

al llarg de la trajectòria que sortint de l'origen va seguint les arestes del cub, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ i $0 \leq z \leq 1$, anant a $(0, 0, 1)$, a $(0, 1, 1)$, i a $(1, 1, 1)$ i finalment torna a l'origen per la diagonal des de $(1, 1, 1)$.

2. Calculeu el rotacional de F. Observeu que és nul i que aquest fet permet determinar una funció f tal que $F = \nabla f = \mathrm{grad}(f)$. Expliciteu-la.

Exercici 156 (Frobenius)**:** Sigui X un camp de $\mathbb{R}^3$. Les seves trajectòries són normals a una superfície si i només si $\langle X, \mathrm{rot}\, X \rangle = 0$.