Primera convocatòria, 15 de juny de 2009

1.– Considereu la corba parametritzada $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$. Trobeu-ne la curvatura $\kappa(t)$, la torsió $\tau(t)$, i el seu triedre de Frenet $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$.

2.– Sigui $\alpha(u)$ amb $u \in I$ una corba regular parametritzada per l'arc, amb torsió igual a 1 i $r < \min\{1/\kappa(u), u \in I\}$, on $\kappa(u)$ és la curvatura de $\alpha(u)$. Sigui

$$\beta(u) = \alpha(u) + r(\cos u\, \mathbf{n}(u) + \sin u\, \mathbf{b}(u)).$$

a) Proveu que la condició sobre r implica que β és una parametrització regular

b) Proveu que la longitud L_β de β és igual a

$$L_\alpha - r \int_I \kappa(u) \cos u\, du.$$

c) Proveu que la curvatura de β és

$$\kappa_\beta(u) = \frac{\kappa(u)}{1 - r\kappa(u) \cos u}$$

Solució: *Utilitzant que* α *és unitària i que* $\tau = 1$ *es veu fàcilment que* $\beta'(u) = (1 - r\kappa \cos(u))\mathbf{t}(u)$ *on* $\alpha'(u) = \mathbf{t}(u)$. *La condició sobre* r *implica, quan* $r > 0$, *que* β *és regular. De fet tenim que* $1 - r\kappa \cos(u) > 0$. *Per calcular la longitud fem*

$$L_\beta = \int_I |\beta'(u)| du = \int_I (1 - r\kappa \cos(u)) du = L_\alpha - r \int_I \kappa(u) \cos(u) du.$$

La curvatura κ_β *de* β *serà*

$$\kappa_\beta = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}.$$

Com que $\beta'(u) = (1 - r\kappa \cos(u))\mathbf{t}(u)$ *tenim que* $\beta' \times \beta'' = \kappa(1 - r\kappa \cos(u))^2 \mathbf{n}(u)$. *D'aquí deduïm l'expressió de la curvatura.*

3.– Sigui $\alpha(u)$ una corba regular continguda en un superfície Σ amb vector normal unitari $\mathbf{N}$.

a) Digueu quina condició ha de satisfer $\alpha'(u)$ per que α sigui una línia de curvatura de Σ.

b) Considerem la superfície S parametritzada per $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{N}(\alpha(u))$. Proveu que α és línia de curvatura de Σ si i només si la curvatura de Gauss de S és zero.

4.– Considerem una superfície parametritzada de manera que la primera forma fonamental es pot escriure $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ amb $\lambda > 0$ (coordenades isotermals).

a) Trobeu l'equació de les geodèsiques i doneu l'expressió dels símbols de Christoffel.

b) Proveu que la curvatura de Gauss és igual a

$$K = \frac{-1}{2\lambda} \Delta \log \lambda,$$

on $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ és l'operador de Laplace al pla.

Solució: *Trobem les equacions de les geodèsiques a partir de les equacions d'Euler-Lagrange associades a la Lagrangiana* $L(u,v,u',v') = \lambda(u,v)(u'^2 + v'2)$. *Les equacions són* $(L_{u'})' = L_u$ *i* $(L_{v'})' = L_v$. *Tenim llavors*

$$2(\lambda_u(u')^2 + \lambda u'') = \lambda_u(u'^2 + v'2), \qquad 2(\lambda_v(v')^2 + \lambda v'') = \lambda_v(u'^2 + v'2).$$

Reordenant tenim que les equcions de les geodèsiques són

$$u'' + \frac{\lambda_u}{2\lambda}(u')^2 + \frac{\lambda_v}{\lambda}u'v' - \frac{\lambda_u}{2\lambda}(v')^2 = 0$$

i

$$v'' - \frac{\lambda_v}{2\lambda}(u')^2 + \frac{\lambda_u}{\lambda}u'v' + \frac{\lambda_v}{2\lambda}(v')^2 = 0.$$

D'aquí deduïm que $\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_u}{2\lambda}$, $\Gamma^2_{11} = \frac{-\lambda_v}{2\lambda}$, $\Gamma^1_{22} = \frac{-\lambda_u}{2\lambda}$, $\Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_v}{2\lambda}$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\lambda_v}{2\lambda}$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\lambda_u}{2\lambda}$.
Sabem que la curvatura de Gauss K *es pot obtenir a partir de la primera forma fonamental i les seves derivades. Un mètode simple per calcular* K, *és fer servir una referència mòbil* $\{e_1, e_2\}$ *ortonormal. Aleshores si* ω_i *són les formes duals i* ω_{12} *la forma de connexió, tindrem que* $d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2$. *Prenem* $e_1 = \partial_u/\sqrt{\lambda}$ *i* $e_2 = \partial_v/\sqrt{\lambda}$. *Aleshores* $\omega_1 = \sqrt{\lambda}du$ *i* $\omega_2 = \sqrt{\lambda}dv$. *Les equacions d'estructura diuen que* $d\omega_1 = -\omega_{12} \wedge \omega_2$ *i* $d\omega_2 = -\omega_{21} \wedge \omega_1$. *Posem* $\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2$. *Substituïm a les equacions d'estructura i trobem que* $\omega_{12} = (\lambda_v\omega_1 - \lambda_u\omega_2)/2\lambda\sqrt{\lambda}$. *Fem* $d\omega_{12}$ *i obtenim*

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\lambda_u}{2\lambda}\right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{2\lambda}\right)_v\right]\omega_1 \wedge \omega_2 = K\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Desenvolupant $\frac{-1}{2\lambda}\Delta \log \lambda$ *es comprova que és igual a la* K *que acabem de calcular.*

5.– Calculeu la circul·lació del camp $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, 0)$ al llarg de la corba intersecció de $x^2 + y^2 = 9$ i $3y + 4z = 5$ amb l'orientació que trieu.

Solució: *Sabem que la circul·lació d'un camp sobre una corba tancada és igual al flux del rotacional del camp a través d'una superfície que tingui aquesta corba com a vora. En el nostre cas el rotacional és* $(-2z, 0, -2y)$. *Com a superfície que té aquesta corba com a vora podem considerar* $(x,y) \to (x, y, (5-3y)/4)$ *amb* (x,y) *en el disc* D *de radi* 3 *centrat a l'origen. El normal unitari de la superfície és proporcional al vector* $(0,3,4)$ *llavors el flux és proporcional a la integral* $\int_D \langle(-2z, 0, -2y), (0,3,4)\rangle dx\ dy = -8\int_D y dx\ dy = 0$. *Llavors la circul·lació és nul·la.*

6.– Considereu el camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)/r^\nu$ a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, amb $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i $\nu \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu la divergència de $\mathbf{F}$.

b) Si S és la vora d'un domini compacte Ω de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ amb l'orientació induïda i $\Phi := \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ és el flux de $\mathbf{F}$ a través de S, digueu raonadament quines de les següents afirmacions són certes:

i) Φ és sempre positiu;

ii) Φ és sempre zero;

iii) Φ només depèn de ν;

iv) Φ depèn de ν i de S.

7.– Sigui

$$\omega = z dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - f \right) dy \wedge dz.$$

a) Caracteritzeu les funcions $f(x, y, z)$ diferenciables a tot $\mathbb{R}^3$ tal que la forma ω és tancada.

b) Demostreu que la forma ω restringida a l'esfera unitat S^2 és tancada per a qualsevol funció f.

8.– Formes en varietats

a) Proveu que tota forma de grau màxim mai nul·la en una varietat diferenciable M compacte i sense vora no pot ser exacta.

b) Sigui $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la parametrització del tor $\{(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$, $0 < b < a$, donada per

$$\varphi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u).$$

Siguin $\omega_1 = x dx \wedge dz + y dy \wedge dz$ i $\omega_2 = y dx \wedge dz - x dy \wedge dz$ 2-formes a $\mathbb{R}^3$.

i) Proveu $\omega_1 = d\alpha$ per a una certa 1-forma α de $\mathbb{R}^3$.

ii) Proveu que $\varphi^* \omega_1 = 0$.

iii) Calculeu $\varphi^* \omega_2$ i proveu que és exacta. Contradiu això la primera part del problema? Per què?