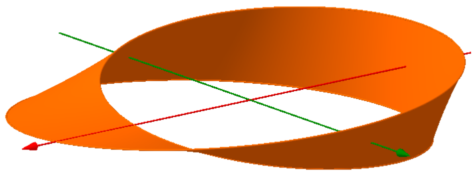
9 Superfícies: Curvatura. Línies de curvatura

Exercici 94: (La banda de Möbius) La imatge següent



que s'obté considerant $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-1/4, 1/4)$ i definint la parametrització

$$\varphi(u, v) = \Big((1 + v\ \cos(u/2))\ \cos(u), (1 + v\ \cos(u/2))\ \sin(u), v\ \sin(u/2)\Big)$$

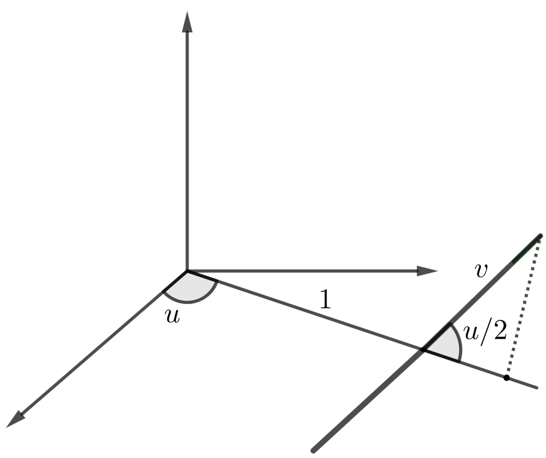
és el recorregut d'un segment de longitud $1/2$ que es desplaça sobre la circumferència unitat al mateix temps que gira sobre si mateix, a una velocitat igual a la meitat de la velocitat que té sobre la circumferència, i determina una superfície homeomorfa a una banda de Möbius. (En particular, és una superfície reglada).

1. Calculeu el vector normal a la superfície i comproveu que quan $u \to 0$ i quan $u \to 2\pi$ els vectors normals tendeixen a dos vectors diferents.

2. Doneu una expressió en funció dels paràmetres (u, v) per a la curvatura de Gauss. Comproveu que no és 0 en cap punt (sempre és estrictament negativa).

(Podeu trobar instruccions per a construir bandes de Möbius amb curvatura nul·la a l'article de l'enllaç següent: `http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2013/v2013n07.pdf`. Aquestes superfícies seran les que millor s'adapten a la construcció d'una cinta de paper amb els extrems enganxats després de donar mitja volta a un dels dos).

Solució: L'equació de la banda de Möbius es dedueix sense problemes del dibuix següent.



1.

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, v \cos\left(u\right) \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) - \left(v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) + 1\right) \sin\left(u\right) \\ -\frac{1}{2}\, v \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) + \left(v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) + 1\right) \cos\left(u\right) \\ \frac{1}{2}\, v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \cos\left(u\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \end{pmatrix}$$

$$E = \left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\, u\right)\right) v^2 + 2\, v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) + 1$$
$$F = 0$$
$$G = 1$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(2\, \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \cos\left(u\right) \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) - \sin\left(u\right)\right) v + \cos\left(u\right) \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \\ \frac{1}{2}\left(2\, \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) + \cos\left(u\right)\right) v + \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) \\ -v \cos^2\left(\frac{1}{2}\, u\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\, u\right)\right) v^2 + 2\, v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) + 1}} \left(\varphi_u \wedge \varphi_v\right)$$

Ara queda clar que, quan $u \to 0$ i quan $u \to 2\,\pi$, la direcció de $\mathcal{N}$ tendirà en el primer cas a la direcció de $(0, v/2, -v-1)$ i en el segon cap a la del vector $(0, v/2, -v+1)$ (que si es mira sobre $v = 0$ són $(0, 0, -1)$ i $(0, 0, 1)$).

2. Tenint en compte que $F = 0$ i $G = 1$, el determinant de la primera forma fonamental coincideix amb el valor del coeficient E. Per un altre costat, és clar que $\varphi_{vv} = 0$ (això implica que $g = 0$) i, per tant, per a calcular la curvatura de la superfície ($K = (e\, g - f^2)/(E\, G - F^2)$) només es necessitarà calcular el valor del coeficient f de la segona forma fonamental.

   Si es calcula la derivada segona corresponent

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, \cos\left(u\right) \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \cos\left(u\right) - \frac{1}{2}\, \sin\left(\frac{1}{2}\, u\right) \sin\left(u\right) \\ \frac{1}{2}\, \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) \end{pmatrix}$$

   de forma que

$$f = \langle \mathcal{N}, \varphi_{uv} \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\, u\right)\right) v^2 + 2\, v \cos\left(\frac{1}{2}\, u\right) + 1}}$$

i la curvatura serà

$$K = \frac{-f^2}{E} = \frac{-\frac{1}{4\left(\left(\frac{5}{4}-\sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2+2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)+1\right)}}{\left(\frac{5}{4}-\sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2+2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)+1} = \frac{-1}{4\,\left(\left(\frac{5}{4}-\sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2+2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)+1\right)^2}$$

Que resulta estrictament negativa en tots els punts del recorregut (i amb valor $-1/4$ sobre la corba $v=0$).

Exercici 95: Recordeu que una línia de curvatura d'una superfície és una corba tal que el seu vector tangent és una direcció principal en cada punt.

1. Demostreu que una corba $\alpha : I \to S$ és línia de curvatura de S si i només si $(\mathcal{N}\circ\alpha)'(t)$ és múltiple de $\alpha'(t)$ $\forall t \in I$, on $\mathcal{N}$ és el normal a S.
2. **Teorema de Joachimstal.**[28] Suposem que dues superfícies S_1 i S_2 es tallen en una corba C, que és línia de curvatura de S_1. Demostreu que C és línia de curvatura de S_2 si i només si l'angle entre S_1 i S_2 és constant al llarg de C.

Solució:

1. Són línies de curvatura les corbes que tenen com a vector tangent un vector propi de $d\mathcal{N}$ en cada punt. La condició diu exactament això (Olinde).
2. Sigui $\alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C i $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ els vectors normals a S_1 i S_2 respectivament. Si calculem la derivada del producte escalar dels normals al llarg de C (calculem el cosinus de l'angle entre les superfícies) es té

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle\mathcal{N}_1(\alpha(s)),\mathcal{N}_2(\alpha(s))\rangle &= \langle d\mathcal{N}_1(\alpha'(s)),\mathcal{N}_2(\alpha(s))\rangle + \langle\mathcal{N}_1(\alpha(s)),d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))\rangle \\ &= \langle\mathcal{N}_1(\alpha(s)),d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))\rangle\end{aligned}$$

ja que el primer sumand és 0 donat que $\alpha'(s)$ és tangent a les dues superfícies i si C és línia de curvatura en S_1 es compleix

$$d\mathcal{N}_1(\alpha'(s)) = \lambda(s)\,\alpha'(s)\,.$$

Així també és clar que, quan C també és línia de curvatura en S_2, $\langle\mathcal{N}_1(\alpha(s)),d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))\rangle$ també és 0 (val la mateixa observació) i l'angle entre els vectors normals a les superfícies és constant.

Recíprocament, si l'angle entre les superfícies és constant i diferent de 0 (les superfícies tenen vectors normals diferents), l'expressió anterior dirà que $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ és perpendicular a $\mathcal{N}_1$. Però com que els vectors $\mathcal{N}_i$ són unitaris també es compleix

$$\langle d\mathcal{N}_2(\alpha'(s)),\mathcal{N}_2(\alpha(s))\rangle = 0$$

de forma que $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ i $\alpha'(s)$ són dos vectors perpendiculars a $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ al mateix temps. Com que la dimensió és 3, això només pot passar si $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ és un múltiple de $\alpha'(s)$ (que se suposa que és un vector no nul ja que parametritzem per l'arc) i, per tant, $\alpha(s)$ també és una línia de curvatura en S_2. És clar que si les superfícies son tangents al llarg de C (els vectors normals coincideixen sobre la corba) no s'ha de demostrar res.

[28] *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 30 (1846), 347-350.

Exercici 96: Considereu un helicoide parametritzat per

$$\varphi(u,v) = (v\,\cos(u), v\,\sin(u), c\,u)$$

(on c és una constant qualsevol). Determineu les seves línies de curvatura.

Solució: Tenint en compte que, respecte aquesta parametrització, es té:

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-v\,\sin(u), v\,\cos(u), c)\\
\varphi_v &= (\cos(u), \sin(u), 0)\\
I &= \begin{pmatrix} c^2+v^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}\,(-c\,\sin(u), c\,\cos(u), -v)\\
\varphi_{uu} &= (-v\,\cos(u), -v\,\sin(u), 0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin(u), \cos(u), 0)\\
\varphi_{vv} &= (0,0,0)\\
II &= \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
W &= \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c^2+v^2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es pot plantejar l'equació que han de complir les línies de curvatura com

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{vmatrix} v'^2 & -u'\,v' & u'^2\\ c^2+v^2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

que correspon a

$$-v'^2 + (c^2+v^2)u'^2 = 0$$

i, aïllant, a

$$u' = \pm\frac{v'}{\sqrt{c^2+v^2}}$$

S'obté, doncs, que una corba de la forma $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ serà línia de curvatura si, i només si

$$v = c\,\sinh(\pm u + \text{ct.}) = \pm c\,\sinh(u + \text{ct.})$$

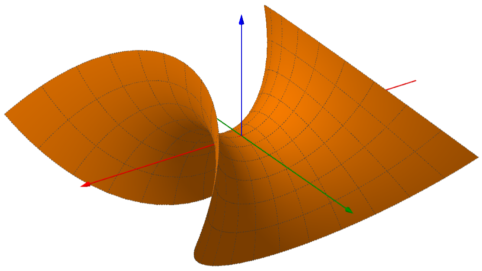
Es pot arribar al mateix resultat si es té en compte que, en cada punt de la superfície, els vectors propis de W són els mateixos que els de la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c^2+v^2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Com que els valors propis de M són $\pm\frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}$, és clar que els vectors propis de la forma (u', v') d'aquesta matriu seran els que compleixin

$$u' \pm \frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}\,v' = 0$$

I aquesta és la mateixa equació que abans.

Exercici 97: (Superfície de Enneper) Sigui S la superfície parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (u + u\,v^2 - u^3/3, v + u^2\,v - v^3/3, u^2 - v^2)\,.$$



1. Calculeu els coeficients de la primera i la segona formes fonamentals.
2. Comproveu que la curvatura mitjana és 0 (superfície minimal).
3. Quines són les curvatures principals?
4. Determineu les línies de curvatura.[29]

Solució:

1. Les derivades de primer i segon ordre de φ són:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1 - u^2 + v^2, 2\,u\,v, 2\,u) \\ \varphi_v &= (2\,u\,v, 1 + u^2 - v^2, -2\,v) \\ \varphi_{uu} &= (-2\,u, 2\,v, 2) \\ \varphi_{uv} &= (2\,v, 2\,u, 0) \\ \varphi_{vv} &= (2\,u, -2\,v, -2) \end{aligned}$$

   Amb uns quants càlculs (fàcils) es veu que

$$I = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Tampoc costa massa calcular

$$\mathcal{N} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(-2\,u, 2\,v, 1 - u^2 - v^2)$$

   i, aleshores,

$$II = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. A partir dels càlculs anteriors és immediat obtenir

$$W = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   que té traça nul·la i, per tant, la curvatura mitjana de la superfície és 0.

[29] Vegeu `https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/enneper/enneper.shtml`.

3.

4. Les curvatures principals són $\pm 2/\left(1+u^2+v^2\right)^2$ i les línies de curvatura seran les línies coordenades ja que l'expressió de W ja és diagonal i, per tant, el seus vectors propis són φ_u i φ_v.

Exercici 98: Sigui S la superfície de revolució generada per la corba $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ (parametritzada per l'arc i amb $a(u) > 0$) donada per

$$\varphi(u,v) = \big(a(u)\,\cos(v), a(u)\,\sin(v), b(u)\big)$$

Determineu les curvatures principals i les línies de curvatura.

Solució: Per a una superfície de revolució amb aquesta parametrització els càlculs donen (tenint en compte que el paràmetre u és el paràmetre arc de la corba α)

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (a'(u)\,\cos(v), a'(u)\,\sin(v), b'(u))\\
\varphi_v &= (-a(u)\,\sin(v), a(u)\,\cos(v), 0)\\
\mathcal{N} &= (-b'(u)\,\cos(v), -b'(u)\,\sin(v), a'(u))
\end{aligned}$$

De forma que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_u &= (-b''(u)\,\cos(v), -b''(u)\,\sin(v), a''(u))\\
\mathcal{N}_v &= (b'(u)\,\sin(v), -b'(u)\,\cos(v), 0)
\end{aligned}$$

Sense haver de fer cap càlcul es veu de forma immediata que l'expressió de $\mathcal{N}_v$ també es pot escriure com

$$\mathcal{N}_v = -\frac{b'(u)}{a(u)}\,\varphi_v$$

mentre que, si tenim en compte que el vector normal (al pla) de la corba α és $(-b'(u), a'(u))$ i la curvatura es pot obtenir, doncs, de la igualtat $(a''(u), b''(u)) = k(u)\,(-b'(u), a'(u))$ de forma que $a''(u) = -k(u)\,b'(u)$, $b''(u) = k(u)\,a'(u)$, l'expressió de $\mathcal{N}_u$ serà equivalent a

$$\mathcal{N}_u = -k(u)\,\varphi_u = \frac{a''(u)}{b'(u)}\,\varphi_u = -\frac{b''(u)}{a'(u)}\,\varphi_u$$

Aquestes dues expressions mostren que φ_u i φ_v són els vectors propis de W i que els valors propis corresponents (curvatures principals) són k i $b'(u)/a(u)$. En resum, les línies de curvatura són les corbes coordenades i estan donades, doncs, per $u = $ ct., $v = $ ct.

Nota: Naturalment, calculant W com $I^{-1}\cdot II$ s'arriba al mateix resultat. En efecte,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} a'b'' - a''b' & 0 \\ 0 & ab' \end{pmatrix}$$

Per tant

$$W = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{b'}{a} \end{pmatrix}$$

També queda demostrat, sense fer més càlculs ni simplificacions, que la curvatura de Gauss de la superfície serà $K = -\dfrac{a''(u)}{a(u)}$ (corresponent al producte de les dues curvatures principals).

10 Superfícies: Curvatura normal. Geodèsiques

Exercici 99: Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular, i sigui $\alpha\colon I \to S$ una corba regular continguda a S. Suposem que α és una corba asimptòtica de S (i.e. que la seva curvatura normal és zero).

1. Demostreu que $B = \nu \circ \alpha$, on B és el binormal a α i ν és el normal a S.
2. Calculeu $I\!I(T,T)$ i $I\!I(N,T)$, on T i N són respectivament el tangent i el normal principal a α, i $I\!I$ és la segona forma fonamental. (Observeu que N és tangent a la superfície, per l'apartat anterior, i per tant té sentit fer aquest càlcul).
3. Demostreu que per tot $t \in I$ es compleix la igualtat $K(\alpha(t)) = -\tau(t)^2$, on τ és la torsió de α i K és la curvatura de Gauss de S.[30]

Solució:

1. Com que α té el seu recorregut sobre S és clar que

   $$\langle(\nu \circ \alpha), T\rangle = 0$$

   Derivant respecte el paràmetre arc de α

   $$0 = \langle(\nu \circ \alpha), T\rangle' = \langle(\nu \circ \alpha)', T\rangle + \langle(\nu \circ \alpha), T'\rangle$$

   Per hipòtesi, el primer terme de la suma és 0 ($0 = k_n(T) = -\langle(d\nu)(T), T\rangle = I\!I(T,T)$) i en el segon $T' = k\,N$ (cal tenir en compte que si s'està parlant del vector binormal és necessari que el triedre de Frenet estigui definit i, per tant, que $k \neq 0$) de forma que la igualtat diu que T i N són perpendiculars a ν sobre la corba α. Per tant és clar que B i ν són iguals (excepte un signe que depèn de l'orientació que s'hagi considerat a la superfície).

   Noteu que aquest resultat també es pot enunciar dient que el pla osculador de α coincideix amb el pla tangent de la superfície i que, en realitat, el resultat és una equivalència.

2. Ja s'ha fet servir que $I\!I(T,T) = 0$ i aquesta igualtat és una de les formes possibles d'expressar la hipòtesi sobre la corba α.

   Per a calcular $I\!I(N,T)$ es pot tenir en compte que (considerant el paràmetre arc de la corba)

   $$I\!I(N,T) = -\langle N, (d\nu)(T)\rangle = -\langle N, (\nu \circ \alpha)'\rangle$$

   (tenint en compte que N és perpendicular a ν)

   $$= \langle N', (\nu \circ \alpha)\rangle$$

[30] Aquest resultat va ser publicat per A. Enneper, *Uber asymptotische Linien*, 1870, i també per E. Beltrami *Dimostrazione di due formole del Sig. Bonnet,* 1866, i per això es coneix com Teorema de Beltrami-Enneper.

(recordant les fórmules de Frenet i utilitzant la curvatura k i la torsió τ de la corba)

$$= \langle -k\,T - \tau\,B, \nu \circ \alpha \rangle$$

(s'ha vist a l'apartat anterior que $\nu \circ \alpha = B$)

$$= \langle -k\,T - \tau\,B, B \rangle = -\tau$$

3. Les expressions (matrius) de la primera i segona forma fonamentals de la superfície (en els punts de la corba) prenent com a base de l'espai tangent el parell T, N seran

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & * \end{pmatrix}$$

de forma que la matriu de l'endomorfisme de Weingarten serà també

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & * \end{pmatrix}$$

i la curvatura de Gauss

$$K = \det(W) = -\tau^2$$

Exercici 100: Sigui $\gamma(s)$ una corba sobre una superfície S (no necessàriament parametritzada per l'arc). Demostreu que la seva curvatura normal k_n es pot calcular com

$$k_n(s) = \frac{\langle \gamma''(s), \mathcal{N}(\gamma(s)) \rangle}{|\gamma'(s)|^2}$$

(on $\mathcal{N}$ és el vector normal de la superfície).

Solució: Si interpretem la curvatura normal com el valor de la segona forma fonamental sobre el vector tangent (unitari) a la corba:

$$\begin{aligned} k_n(s) &= -\langle (d\mathcal{N})(\frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}), \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} \rangle = -\frac{1}{|\gamma'(s)|^2} \langle (d\mathcal{N})(\gamma'(s)), \gamma'(s) \rangle \\ &= -\frac{1}{|\gamma'(s)|^2} \langle (\mathcal{N} \circ \gamma)'(s), \gamma'(s) \rangle = \frac{1}{|\gamma'(s)|^2} \langle (\mathcal{N} \circ \gamma)(s), \gamma''(s) \rangle \end{aligned}$$

($\mathcal{N}$ i γ' són perpendiculars).

Exercici 101: Demostreu que la curvatura mitjana H en un punt d'una superfície es pot calcular com

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta)\, d\theta\,,$$

on $k_n(\theta)$ és la curvatura normal, en aquest punt, en la direcció que forma un angle θ amb una direcció prefixada.

Solució: Tenint en compte que les direccions principals són perpendiculars i prenent l'origen per a mesurar els angles en una qualsevol d'elles, la curvatura normal $k_n(\theta)$ es calcula amb

$$k_n(\theta) = k_1\,\cos^2(\theta) + k_2\,\sin^2(\theta)$$

si k_1, k_2 són les curvatures principals. Aleshores

$$\begin{aligned}\int_0^\pi k_n(\theta)\,d\theta &= \int_0^\pi (k_1\,\cos^2(\theta) + k_2\,\sin^2(\theta))\,d\theta\\ &= \int_0^\pi \left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_1-k_2}{2}\,\cos(2\,\theta)\right)\,d\theta\\ &= \frac{k_1+k_2}{2}\,\pi\end{aligned}$$

Si s'escull qualsevol altre direcció com origen dels angles, l'únic canvi és una translació de θ que no modifica els resultats.

Exercici 102: Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ donada pels punts del pla horitzontal $(x, y, 0)$.

1. Calculeu els símbols de Christoffel de S quan es parametritza S per les coordenades cartesianes (x, y).
2. Considereu la parametrització de S per les coordenades polars (de forma que $x = r\,\cos(t)$, $y = r\,\sin(t)$) i calculeu un altre cop els símbols de Christoffel respecte aquesta parametrització.
3. En els dos casos, apliqueu la fórmula de Gauss per a calcular la curvatura de S.

Solució:

1. Tenint en compte que les derivades segones de la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$ són nul·les, tots els símbols de Christoffel són 0.
2. La parametrització per les coordenades polars del pla $z = 0$ serà

   $$\varphi(r,\theta) = (r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta), 0)$$

   de forma que els vectors tangents són

   $$\begin{aligned}\varphi_r &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\\ \varphi_\theta &= (-r\,\sin(\theta), r\,\cos(\theta), 0)\end{aligned}$$

   i, òbviament, el vector normal serà

   $$\mathcal{N} = (0, 0, 1)$$

   Les derivades segones són

   $$\begin{aligned}\varphi_{rr} &= (0, 0, 0)\\ \varphi_{r\theta} &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)\\ \varphi_{\theta\theta} &= (-r\,\cos(\theta), -r\,\sin(\theta), 0)\end{aligned}$$

   Sense més càlculs es pot veure que

   $$\begin{aligned}\varphi_{r\theta} &= \frac{1}{r}\,\varphi_\theta\\ \varphi_{\theta\theta} &= -r\,\varphi_r\end{aligned}$$

de forma que

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^{1}=0 & \Gamma_{11}^{2}=0 \\
\Gamma_{12}^{1}=0 & \Gamma_{12}^{2}=\dfrac{1}{r} \\
\Gamma_{22}^{1}=-r & \Gamma_{22}^{2}=0
\end{array}
$$

(associant l'índex 1 a les derivades respecte r i el 2 a les derivades respecte θ).

Segon mètode. Aplicar directament les fórmules que donen els símbols de Christoffel a partir de la primera forma foamental

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{11}^{2} &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}, \\
\Gamma_{12}^{1} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{12}^{2} &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}, \\
\Gamma_{22}^{1} &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma_{22}^{2} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}
$$

Com en el nostres cas $E=1, F=0, G=r^2$ s'obté immediatament el resultat anterior.

3. La fórmula de Gauss de la curvatura en termes dels símbols de Christoffel és

$$E\,K = (\Gamma_{11}^{2})_\theta - (\Gamma_{12}^{2})_r + \Gamma_{11}^{1}\,\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\,\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\,\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{2}\,\Gamma_{12}^{2}$$

És clar que en el cas de les coordenades cartesianes no hi ha cap càlcul a fer per a comprovar que surt $K=0$.

En el cas de les coordenades polars, hi ha coeficients diferents de 0 i, per tant, caldrà veure que hi ha compensacions per tal d'obtenir el mateix resultat. En concret

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^{2})_\theta &= 0 \\
(\Gamma_{12}^{2})_r &= -\frac{1}{r^2} \\
\Gamma_{11}^{1}\,\Gamma_{12}^{2} &= 0 \\
\Gamma_{12}^{1}\,\Gamma_{11}^{2} &= 0 \\
\Gamma_{11}^{2}\,\Gamma_{22}^{2} &= 0 \\
\Gamma_{12}^{2}\,\Gamma_{12}^{2} &= \frac{1}{r^2}
\end{aligned}
$$

Exercici 103: Considereu una superfície S de $\mathbb{R}^3$ amb una parametrització de la forma (gràfic)

$$\varphi(u,v) = (u, v, a(u,v))\,,$$

on a és una funció diferenciable.

Doneu, en termes de a i de les seves derivades, l'expressió dels símbols de Christoffel de S.

Solució: Com que

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (1, 0, a_u) \\
\varphi_v &= (0, 1, a_v) \\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2}} \, (-a_u, -a_v, 1) \\
\varphi_{uu} &= (0, 0, a_{uu}) \\
\varphi_{uv} &= (0, 0, a_{uv}) \\
\varphi_{vv} &= (0, 0, a_{vv})
\end{aligned}$$

Les parts normals de les segones derivades queden determinades per

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{uu}, \mathcal{N} \rangle &= \frac{a_{uu}}{\sqrt{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2}} = e \\
\langle \varphi_{uv}, \mathcal{N} \rangle &= \frac{a_{uv}}{\sqrt{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2}} = f \\
\langle \varphi_{vv}, \mathcal{N} \rangle &= \frac{a_{vv}}{\sqrt{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2}} = g
\end{aligned}$$

De forma que, per a les parts tangents,

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} - e\,\mathcal{N} &= \frac{a_{uu}}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} \, (a_u\,\varphi_u + a_v\,\varphi_v) \\
\varphi_{uv} - f\,\mathcal{N} &= \frac{a_{uv}}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} \, (a_u\,\varphi_u + a_v\,\varphi_v) \\
\varphi_{vv} - g\,\mathcal{N} &= \frac{a_{vv}}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} \, (a_u\,\varphi_u + a_v\,\varphi_v)
\end{aligned}$$

Això dóna els símbols de Christoffel

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{a_{uu}\,a_u}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} & \Gamma^2_{11} &= \frac{a_{uu}\,a_v}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{a_{uv}\,a_u}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} & \Gamma^2_{12} &= \frac{a_{uv}\,a_v}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{a_{vv}\,a_u}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2} & \Gamma^2_{22} &= \frac{a_{vv}\,a_v}{1 + (a_u)^2 + (a_v)^2}
\end{aligned}$$

Deixem com exercici obtenir els símbols de Christoffel directament. a partir dels coeficients de la primera forma fonamental.

Exercici 104: Calculeu els símbols de Christoffel de l'esfera de radi r arbitrari en el sistema de coordenades (esfèriques) naturals donades per la longitud (θ) i la colatitud (φ)

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\
y &= r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\
z &= r\,\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Solució: Diem $X(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ a la parametrització corresponent. Aleshores

$$\begin{aligned}
X_\theta &= r\,(-\sin(\theta)\,\sin(\varphi), \cos(\theta)\,\sin(\varphi), 0) \\
X_\varphi &= r\,(\cos(\theta)\,\cos(\varphi), \sin(\theta)\,\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \\
\mathcal{N} &= -(\cos(\theta)\,\sin(\varphi), \sin(\theta)\,\sin(\varphi), \cos(\varphi))
\end{aligned}$$

($\mathcal{N}$ és el vector unitari en la direcció del vector posició)

$$\begin{aligned}
X_{\theta\theta} &= r\,(-\cos(\theta)\,\sin(\varphi), -\sin(\theta)\,\sin(\varphi), 0)\\
X_{\theta\varphi} &= r\,(-\sin(\theta)\,\cos(\varphi), \cos(\theta)\,\cos(\varphi), 0)\\
X_{\varphi\varphi} &= r\,(-\cos(\theta)\,\sin(\varphi), -\sin(\theta)\,\sin(\varphi), -\cos(\varphi))
\end{aligned}$$

D'aquestes igualtats es dedueixen, de forma immediata, les relacions

$$\begin{aligned}
X_{\theta\varphi} &= \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\,X_\theta\\
X_{\varphi\varphi} &= r\,\mathcal{N}
\end{aligned}$$

que corresponen als valors dels símbols de Christoffel

$$\Gamma^1_{12} = \cot(\varphi), \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0$$

Com que

$$\langle X_{\theta\theta}, \mathcal{N}\rangle = r\,\sin^2(\varphi)$$

la seva part tangent serà

$$X_{\theta\theta} - r\,\sin^2(\varphi)\,\mathcal{N} = (-r\cos^2(\varphi)\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi), -r\,\cos^2(\varphi)\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta), r\,\cos(\varphi)\,\sin^2(\varphi))$$

des d'on no costa gaire veure (traient els factors comuns adequats) que també es compleix

$$X_{\theta\theta} - r\,\sin^2(\varphi)\,\mathcal{N} = -\cos(\varphi)\,\sin(\varphi)\,X_\varphi$$

I aquesta igualtat dóna els símbols de Christoffel que faltaven

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = -\cos(\varphi)\,\sin(\varphi)$$

Deixem com exercici obtenir els símbols de Christoffel directament. a partir dels coeficients de la primera forma fonamental.

Exercici 105: Doneu una parametrització del cercle màxim de l'esfera obtingut per la intersecció amb el pla $y = z$ en termes de les coordenades esfèriques (expresseu la colatitud com funció de la longitud). Es compleix l'equació diferencial de les geodèsiques per a aquesta corba (amb aquesta parametrització)?

Solució: Tenint en compte que la parametrització ve donada per

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\\
y &= r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\\
z &= r\,\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

la condició $y = z$ s'escriurà en funció de (θ, φ)

$$r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) = r\,\cos(\varphi)$$

de forma que es podrà prendre

$$\tan(\varphi) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

i, per tant,

$$\varphi = \arctan(1/\sin(\theta))$$

L'equació que hauria de complir una geodèsica de l'esfera si es suposa que la parametrització és del tipus $\varphi = \varphi(\theta)$ serà de la forma

$$\begin{aligned}
\theta'' + \Gamma^1_{11}\,(\theta')^2 + 2\,\Gamma^1_{12}\,\theta'\,\varphi' + \Gamma^1_{22}\,(\varphi')^2 &= 0\\
\varphi'' + \Gamma^2_{11}\,(\theta')^2 + 2\,\Gamma^2_{12}\,\theta'\,\varphi' + \Gamma^2_{22}\,(\varphi')^2 &= 0
\end{aligned}$$

(on cal tenir en compte que, si el paràmetre respecte al que es deriva és θ, $\theta' = 1$, $\theta'' = 0$). Prenent els valors dels Γ en funció de les variables les equacions que s'han de complir seran

$$\begin{aligned}
2\,\cot(\varphi)\,\varphi' &= 0\\
\varphi'' - \cos(\varphi)\,\sin(\varphi) &= 0
\end{aligned}$$

Clarament, aquestes equacions no es verifiquen si $\varphi = \arctan(1/\sin(\theta))$. Això no és cap contradicció amb el fet de que “els meridians són geodèsiques”, com es veu a l'exercici següent.

Exercici 106: Quina condició (tipus equació diferencial) ha de complir una corba sobre una superfície per tal de poder afirmar que, fent un canvi de paràmetre, s'obté una geodèsica?

Solució: Per tal de condensar la notació, escrivim $\alpha(t) = (u_1(t), u_2(t))$ per designar una corba qualsevol en la superfície (referida a una parametrització donada que no cal especificar). Recordem que si reparametritzem la corba α respecte un paràmetre nou $t = t(s)$ es poden relacionar les derivades respecte els dos paràmetres amb

$$\begin{aligned}
\frac{du_i}{ds} &= \frac{du_i}{dt}\,\frac{dt}{ds}\\
\frac{d^2u_i}{ds^2} &= \frac{d^2u_i}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du_i}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2}
\end{aligned}$$

Utilitzant aquests convenis, les equacions que ha de complir una corba $\alpha(s)$ per tal de ser una geodèsica s'escriuran com

$$\frac{d^2u_\ell}{ds^2} + \sum \Gamma^\ell_{ij}\,\frac{du_i}{ds}\,\frac{du_j}{ds} = 0$$

(amb $\ell, i, j = 1, 2$). Si es fa un canvi de parametrització, aquestes equacions es converteixen en

$$\frac{d^2u_\ell}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du_\ell}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2} + \sum \Gamma^\ell_{ij}\,\frac{du_i}{dt}\,\frac{du_j}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

que es poden reescriure com

$$\left(\frac{d^2u_\ell}{dt^2} + \sum \Gamma^\ell_{ij}\,\frac{du_i}{dt}\,\frac{du_j}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -\frac{du_\ell}{dt}\,\frac{d^2t}{ds^2}$$

i es pot deixar com una expressió del tipus

$$\frac{d^2u_\ell}{dt^2} + \sum \Gamma^\ell_{ij}\,\frac{du_i}{dt}\,\frac{du_j}{dt} = f(t)\,\frac{du_\ell}{dt} \tag{17}$$

per a una certa funció f (que queda determinada pel canvi de paràmetres, concretament $f(t) = -(d^2t/ds^2)/(dt/ds)^2$).

Molt important que observeu que $f(t)$ no depèn de l.

Aquest càlcul demostra el resultat següent. *Condició necessària i suficient per tal de que una corba $\gamma(t)$ sobre una superfície es pugui reparametritzar de tal manera que amb aquesta nova parametrització sigui geodèsica és que existeixi una funció $f(t)$ per a la qual es verifiqui l'equació* (17).

En efecte si la corba és directament geodèsica només hem d'agafar $f(t) = 0$. Recíprocament, si l'equació (17) es compleix per a una certa $f(t)$ es considera un canvi de paràmetres $t = t(s)$ per al que

$$\frac{d^2t}{ds^2} + f(t)\,\frac{dt}{ds} = 0$$

i refent el camí que ens ha portat a la fórmula (17) en sentit invers trobarem l'equació de les geodèsiques.

Amb una mi ca de paciència es pot veure com la corba de l'esfera donada per la intersecció amb el pla $y = z$, que es pot parametritzar per $\varphi = \arctan(1/\sin(\theta))$, és una geodèsica quan es considera la parametrització adequada sense haver de fer explícita aquesta parametrització.

En efecte, donada la corba $\varphi = \arctan(1/\sin(\theta))$ hem de veure (per la fórmula (17)) si existeix $f(\theta)$ tal que (els símbols de Christoffel de l'esfera estan calculats a l'exercici 104)

$$\begin{aligned} 2\cot\varphi\,\varphi' &= f(\theta)\theta' \\ \varphi'' - \sin(\varphi)\cos(\varphi) &= f(\theta)\varphi' \end{aligned}$$

(θ'=1).

Fen els càlculs obtenim

$$\begin{aligned} 2\cot\varphi\,\varphi' &= -\frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2(\theta)} \\ \varphi'' - \sin(\varphi)\cos(\varphi) &= -\frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2(\theta)}\varphi'. \end{aligned}$$

és a dir, la condició es compleix per a $f(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2(\theta)}$ i per tant el meridià donat és geodèsica. [31]

[31] Si un punt es mou sobre un superfície, sense forces externes, aquest punt segueix una geodèsica. En efecte, per la llei de Newton

$$m\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \lambda\nu + \mu T$$

on $\gamma(t)$ és la trajectòria del punt, T la tangent unitària en aquesta direcció, i ν la normal a la superfície. Les funcions λ, μ són coeficients de roçament, i tenim roçament degut a la superfície i per tant en la direcció normal a aquesta i un altra roçament oposat al deslliçament de la partícula i per tant oposat a la seva direcció.. Escrivim la derivada segona en termes del paràmetre arc s de $\gamma(t)$, concretament,

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}T + (\frac{ds}{dt})^2\frac{dT}{ds}.$$

substituïm aquest valor a l'anterior equació i multipliquem el resultat escalarment per $T \wedge \nu$, de manera que tindrem un zero a la dreta, i obtenim $N(T \wedge \nu) = 0$ que implica $N = \nu$ i la corba és geodèsica.

Exercici 107: Considereu l'helicoide parametritzat per

$$\varphi(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\sin(v), v)$$

1. Determineu les equacions diferencials que han de complir $(u(s), v(s))$ per tal que la corba $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ sigui una geodèsica.
2. Comproveu que les corbes de la forma $v = $ ct., convenientment parametritzades, són geodèsiques.
3. Si una corba sobre l'helicoide talla amb un angle constant les corbes de la forma $v = $ ct., pot ser una geodèsica?

Solució:

1. Per a la parametrització de l'helicoide que s'ha donat:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos(v), \sin(v), 0) \\ \varphi_v &= (-u\,\sin(v), u\,\cos(v), 1) \\ \mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin(v), -\cos(v), u) \end{aligned}$$

De forma que per a les derivades segones es té:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= (0,0,0) \\ \varphi_{uv} &= (-\sin(v), \cos(v), 0), \qquad & \langle \varphi_{uv}, \mathcal{N}\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \varphi_{vv} &= (-u\,\cos(v), -u\,\sin(v), 0), & \langle \varphi_{vv}, \mathcal{N}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

D'aquestes igualtats surt, sense més càlculs,

$$0 = \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22}, \quad \Gamma^1_{22} = -u$$

I si es té en compte que

$$\varphi_{uv} + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathcal{N} = \frac{u}{1+u^2}(-u\,\sin(v), u\,\cos(v), 1) = \frac{u}{1+u^2}\varphi_v$$

s'obtenen els coeficients que falten

$$\Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{u}{1+u^2}$$

Aquests càlculs serveixen per dir que una corba $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ serà geodèsica quan es compleixin les igualtats

$$\begin{aligned} u'' - u\,(v')^2 &= 0 \\ v'' + 2\,\frac{u}{1+u^2}\,u'\,v' &= 0 \end{aligned}$$

2. Quan $v = $ ct. es té $v' = 0$ i, per tant, la segona equació es verifica de forma automàtica mentre que la primera es redueix a $u'' = 0$ i l'única restricció que imposa és que el paràmetre u ha de ser una funció lineal de la variable s (les rectes $v = $ ct., que són òbviament geodèsiques, s'ha de parametritzar linealment respecte el paràmetre).

3. Tenint en compte que la primera forma fonamental de l'helicoide (respecte la parametrització que s'està considerant) és $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$, l'angle entre una corba qualsevol $\alpha(s) = (u(s), v(s))$ (parametritzada per l'arc), que té com a vector tangent $\alpha'(s) = u'\,\varphi_u + v'\,\varphi_v$, i les corbes $v =$ ct., que tenen com a vector tangent φ_u, tindrà com a cosinus el valor u'. Si l'angle és constant es complirà $u'' = 0$ i aleshores, mirant la primera equació de les geodèsiques, la corba α només podrà ser geodèsica en el cas que $u = 0$ (l'eix vertical) o quan $v' = 0$ (les mateixes rectes $v =$ ct.).

Nota final: Si us fixeu en el tipus d'equacions que determinen les geodèsiques de l'helicoide, no resulta trivial establir parametritzacions explícites d'aquestes corbes. Un dels primers resultats de la consulta `geodesic lines helicoid` a Google porta a l'article *"The Geodesic Lines on the Helicoid"*, de S. E. Rasor (Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 11, No. 2 (Jan., 1910), pp. 77-85) on es pot veure com aquestes parametritzacions no són gens fàcils d'obtenir.

Exercici 108:

1. Suposem que dues superfícies són tangents al llarg d'una certa corba C. Demostreu que si C és geodèsica en una de les dues superfícies també ho és a l'altra.

2. Demostreu que tota corba $\alpha(s)$ de $\mathbb{R}^3$ és geodèsica d'alguna superfície.

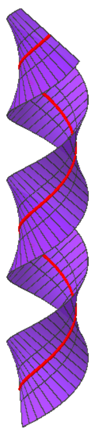
   (**Nota:** Si no veieu com obtenir aquesta superfície, proveu la superfície reglada $\varphi(s,t) = \alpha(s) + t\,B(s)$, on $B(s)$ és el vector binormal de la corba).

3. Descriviu un mètode per determinar les geodèsiques d'una superfície per medi d'una banda adhesiva (cel·lo).

Solució:

1. Només cal tenir en compte que una corba és geodèsica d'una superfície si, i només si el seu vector normal coincideix amb la direcció del vector normal de la superfície. Amb aquesta caracterització és clar que, si dues superfícies comparteixen la direcció normal al llarg de la corba en ser tangents, la condició de geodèsica serà simultània. (El càlcul del vector normal a la corba no té cap relació amb la superfície que la conté).

2. Si es suposa que s és el paràmetre arc de α. La superfície parametritzada per
$$\varphi(s,t) = \alpha(s) + t\,B(s)$$
té l'espai tangent generat per
$$\begin{aligned} \varphi_s &= T + t\,B' = T + t\,\tau\,N \\ \varphi_t &= B \end{aligned}$$
de forma que el seu vector normal, que en general serà el determinat per la direcció
$$\varphi_s \wedge \varphi_t = -N + t\,\tau\,T\,,$$
serà, quan $t = 0$, paral·lel al vector normal a la corba N.



3. Es marca una línia recta al llarg de la cinta i s'enganxa, sense arrugar, aquesta cinta a la superfície al llarg d'aquesta línia. Com que en la cinta no s'ha modificat la mètrica (sense arrugar!!!!), la línia marcada és una geodèsica en les dues superfícies ja que en aquesta operació les dues superfícies són tangents.

Exercici 109: Sigui $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ una corba regular de $\mathbb{R}^2$. Considereu la parametrització del cilindre $\varphi(u, v) = (\cos(v), \sin(v), u)$ i la corba $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$. Determineu, en termes dels invariants de α, la curvatura geodèsica de β.

Solució: La parametrització del cilindre determina una isometria local entre el pla euclidià $(u, v, 0)$ i la superfície ja que els vectors tangents són:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (0, 0, 1) \\ \varphi_v &= (-\sin(v), \cos(v), 0) \end{aligned}$$

Com que els isometries local conserven la curvatura geodèsica, les de les corbes α i β coincideixen. Però la curvatura geodèsica de la corba α (en el pla $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$) serà igual a la seva curvatura.

Segon mètode. Per càlcul directe. Suposem α parametritzada per l'arc. Com

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= (-v'\sin(v), v'\cos(v), u') \\ \beta'' &= (-v'^2 cos(v) - v''\sin(v), -v'^2\sin(v) + v''\cos(v), u'') \\ \nu &= (-cos(v), -\sin(v), 0) \end{aligned}$$

tenim

$$k_g = \frac{\langle \beta'', \nu \wedge \gamma' \rangle}{||\beta'||^3} = u'v'' - v'u'' = k_\alpha$$

ja que la curvatura de α es determina per l'equació $(u'', v'') = k_\alpha(-v', u')$.

Exercici 110: Siguin $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular i $C \subset S$ una corba regular continguda a S. Demostreu les següents afirmacions.

1. C és geodèsica de S i línia asimptòtica de S si i només si C està continguda en una recta de $\mathbb{R}^3$.

2. Suposem que C és geodèsica de S. Aleshores C és línia de curvatura de S si i només si C és plana.

3. Podeu donar un exemple de línia curvatura plana però que no sigui geodèsica?

Solució:

1. ($\Longrightarrow$) Per ser C una geodèsica tenim que la curvatura geodèsica de C és nul·la. D'altra banda, per ser línia asimptòtica la curvatura normal de C és també nul·la. Per tant la curvatura de α com a corba de $\mathbb{R}^3$ és zero. I ja sabem que una corba regular amb curvatura zero està continguda en una recta de $\mathbb{R}^3$.

   ($\Longleftarrow$) Recíprocament, si C està continguda a una recta de $\mathbb{R}^3$ la seva curvatura com a corba de $\mathbb{R}^3$ és nul·la. De la igualtat $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$ en deduïm que $k_n = k_g = 0$ i això ens diu respectivament que C és una línia asimptòtica i una geodèsica.

2. Les línies de curvatura són els vectors propis de l'aplicació de Weiergarten, és a dir, si donada una parametrització $\alpha(t)$ es compleix que $-d\nu(\alpha'(t))$ és múltiple de $\alpha'(t)$. Sigui $\alpha(t)$ una parametrització per l'arc de C. Per ser $\alpha(t)$ una geodèsica sabem que $\alpha''(t) = \lambda \cdot \nu(\alpha(t))$. Si $\lambda = 0$ la corba és una recta i en particular és plana. Si $\lambda \neq 0$, tenim $N = \nu$ sobre $\alpha(t)$ i

$$\langle -d\nu(\alpha'(t)), B(t)\rangle = \langle -\frac{d}{dt}\nu(\alpha(t)), B(t)\rangle = \langle \nu(\alpha(t)), \tau(t)N(t)\rangle = \tau(t).$$

   Per tant, si és línia de curvatura (el terme de l'esquerra s'anul·la) la torsió és zero i la corba és plana. Si, recíprocament, la corba és plana, llavors $-d\nu(\alpha'(t))$ és ortogonal a $B(t)$, però com és tangent a la superfície també és ortogonal a $N = \nu$ i per tant té la direcció de $\alpha'(t)$, i.e. és una direcció principal i α és línia de curvatura.

3. En una superfície de revolució les corbes coordenades són les línies de curvatura però els *paral·lels* (que són sempre circumferències) només són geodèsiques si la tangent a la corba que gira per a generar la superfície és paral·lela a l'eix de rotació. En concret, tots els paral·lels d'una esfera són línies de curvatura planes que no són geodèsiques, fora del que correspon a l'equador.

Exercici 111: Sigui S una superfície connexa i suposem que tots els seus punts són *umbilicals* (un punt es diu *umbilical* si les curvatures principals en aquest punt són iguals). Demostreu que S està continguda en una esfera o en un pla.

Solució: En aquestes hipòtesis tota corba sobre la superfície és línia de curvatura. En particular, les línies coordenades són línies de curvatura. Apliquem el teorema d'Olinde[32] a les corbes $u = constant$ i $v = constant$ (suposem $\varphi(u, v)$ una parametrització local d'aquesta superfície).

$$\begin{aligned} \nu_u(u,v) &= \lambda(u,v)\varphi_u(u,v) \\ \nu_v(u,v) &= \lambda(u,v)\varphi_v(u,v) \end{aligned}$$

Observem que la hipòtesis de que tots els punts són umbilicals és la que ens ha permès posar la mateixa funció $\lambda(u, v)$ tant a $\nu_u(u, v)$ com a $\nu_v(u, v)$. Escriurem abreujadament

$$\begin{aligned} \nu_u &= \lambda\varphi_u \\ \nu_v &= \lambda\varphi_v \end{aligned}$$

Imposant $\nu_{uv} = \nu_{vu}$ obtenim

$$\lambda_u\varphi_v = \lambda_v\varphi_u.$$

Però com φ_u i φ_v són linealment independents, ha de ser $\lambda_u = \lambda_v = 0$, i per tant $\lambda = constant$. Si aquesta constant és zero estem en el cas del pla. Suposem, doncs, a partir d'ara $\lambda \neq 0$. Integrant obtenim

$$\nu = \lambda\varphi + \vec{a}$$

[32] Condició necessària i suficient per a que una corba C sobre una superfície sigui línia de curvatura és que

$$\nu'(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$$

on $\nu(t) = \nu(\gamma(t))$, essent $\gamma(t)$ *qualsevol* parametrització de C. En aquest cas, $-\lambda(t)$ és la curvatura principal de la superfície al llarg de $\gamma(t)$.

on $\vec{a}$ és un vector constant. Com $\nu \cdot \nu = 1$ tenim

$$1 = \lambda^2 \varphi \cdot \varphi + 2\lambda \varphi \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a}.$$

Així

$$(\varphi + \frac{\vec{a}}{\lambda}) \cdot (\varphi + \frac{\vec{a}}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Per tant, tots els punts de la forma $\varphi(u,v)$ pertanyen a l'esfera de centre $-\vec{a}/\lambda$ i radi $1/\lambda$.

Exercici 112: Sigui S una superfície connexa en la que totes les geodèsiques són corbes planes. Demostreu que S està continguda en un pla o en una esfera.

Solució: El fet que les geodèsiques siguin planes implica que són línies de curvatura. L'única possibilitat que això passi és que totes les curvatures normals siguin iguals (hi ha una geodèsica tangent a cada vector tangent a la superfície i, per tant, tots els vectors són vectors propis de W). En particular tots els punts de S són umbilicals i pel problema anterior hem acabat.

Exercici 113: Calculeu la curvatura geodèsica del paral·lel superior del tor de revolució generat per revolució del cercle

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, y = 0$$

al voltant de l'eix z $(a > r > 0)$.

Solució: Recordem que la curvatura geodèsica d'una corba $\gamma(s)$ sobre una superfície S, en un punt $P = \gamma(0)$, coincideix, llevat del signe, amb la curvatura de la corba que s'obté en projectar $\gamma(s)$ ortogonalment sobre el pla tangent a S en P. Per tant la curvatura geodèsica és la curvatura del cercle superior que té radi a, i.e. $k_g = 1/a$.

Exercici 114: Considerem dos meridians C_1 i C_2 d'una esfera que formen un angle φ en el punt P. Fem el transport paral·lel d'un vector w tangent a C_1 en P al llarg de C_1 i també al llarg de C_2 fins el punt Q on els meridians es tornen a trobar (Q és doncs l'antipodal de P). Siguin w_1 i w_2 els dos vectors tangents a l'esfera en Q així obtinguts. Quin angle formen w_1 i w_2?

Solució: Utilitzant que els meridians són geodèsiques i que el transport paral·lel conserva angles es veu que l'angle final és 2φ. En efecte, w_1 és tangent a C_1, per tant forma un angle φ amb la tangent a C_2 en Q; per la seva banda w_2 forma també un angle φ amb C_2, però per estar w_1 i w_2 a diferents costats respecte de la tangent a C_2 en Q aquests angles s'han de sumar i s'obté el valor 2φ.

Exercici 115: Sigui P un pol de l'esfera S^2 i siguin Q, R dos punts del corresponent equador tals que els meridians PQ, PR formen un angle θ en P. Sigui w un vector unitari tangent al meridià PQ en P. Fem el transport paral·lel de w al llarg de la corba tancada $PQRP$ (meridià-equador-meridià).

a) Determineu l'angle que forma w amb el seu transportat paral·lel al final de la corba, és a dir, en P.

b) Repetir l'exercici anterior quan Q, R són punts d'un paral·lel de colatitud φ_0 (si $\varphi_0 = \pi/2$ estem en el cas anterior).

Solució: Com el transport paral·lel al llarg de geodèsiques (en aquest cas els meridians) és molt fàcil, anem a estudiar només el transport paral·lel al llarg d'un paral·lel.

Sigui P el punt de coordenades $(\theta, \varphi) = (0, \varphi_0)$ i sigui $w \in T_P S^2$. Volem transportar w paral·lelament al llarg del paral·lel $\varphi = \varphi_0$ fins al punt $Q = (\theta_0, \varphi_0)$.

Denotem $X(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$ i posem

$$w = a_0 \frac{\partial X}{\partial \theta}_{|P} + b_0 \frac{\partial X}{\partial \varphi}_{|P}.$$

Busquem un camp tangent $W(\theta)$ al llarg del meridià tal que

$$\frac{DW}{d\theta} = 0, \quad W(0) = w.$$

Aquest camp $W(\theta)$ es pot escriure com

$$W(\theta) = aX_\theta + bX_\varphi$$

amb $a = a(\theta)$, $b = b(\theta)$ i $X_\theta = \frac{\partial X(\theta,\varphi_0)}{\partial\theta}$, $X_\varphi = \frac{\partial X(\theta,\varphi_0)}{\partial\varphi}$

Derivant tenim

$$\frac{dW}{dt} = a'X_\theta + b'X_\varphi + aX_{\theta\theta} + bX_{\theta\varphi}$$

Per tant, la condició $\frac{DW}{dt} = 0$ és (igualem a zero els coeficients de X_θ i X_φ)

$$\begin{aligned} a' + a\Gamma^1_{11} + b\Gamma^1_{12} &= 0 \\ b' + a\Gamma^2_{11} + b\Gamma^2_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Substituint els valors dels símbols de Christoffel

$$\begin{aligned} a' + b\cot\varphi_0 &= 0 \\ b' - a\cos\varphi_0\sin\varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ara es resol el sistema amb les condicions inicials donades i tenim el resultat. Per simplificar els càlculs anem a fer, a partir d'aquí, el cas en que $w = X_\varphi(P)$, és a dir, que tindrem les condicions inicials $a(0) = 0$, $b(0) = 1$.

Derivant la primera equació del sistema i utilitzant la segona tenim

$$\frac{d^2a}{d\theta^2} + a\cos^2(\varphi_0) = 0$$

que té solució amb $a(0) = 0$ donada per

$$a(\theta) = B\sin(c\theta), \quad c = \cos(\varphi_0)$$

Com

$$b = -\frac{a'}{\cot(\varphi_0)} = -B\sin(\varphi_0)\cos(c\theta)$$

tenim

$$B = -\frac{1}{\sin\varphi_0}.$$

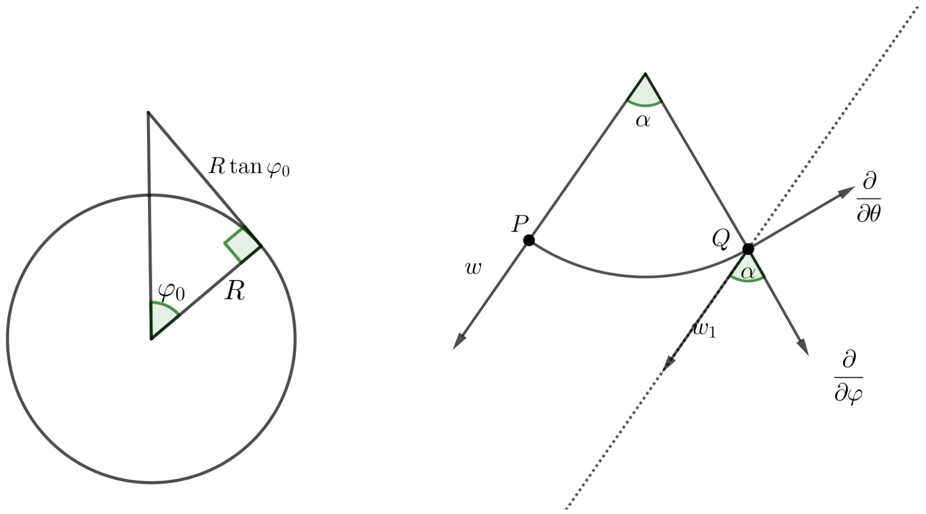
Resumint

$$
\begin{aligned}
a(\theta) &= -\frac{1}{\sin(\varphi_0)}\sin(c\theta) \\
b(\theta) &= \cos(c\theta).
\end{aligned}
$$

Tenim doncs determinat $W(\theta)$ i w transportat a qualsevol punt del paral·lel de paràmetre θ_0 s'obté simplement escrivint $W(\theta_0)$

$$
W(\theta) = -\frac{1}{\sin(\varphi_0)}\sin(c\theta)X_\theta + \cos(c\theta)X_\varphi.
$$

Segon mètode. Considerem el con tangent a l'esfera al llarg del paral·lel $\varphi = \varphi_0$. La longitud de la base és igual doncs a la longitud del paral·lel, $2\pi R\sin\varphi_0$. I un cop desplegat aquest con sobre el pla obtenim un sector circular d'angle $\alpha = 2\pi\cos\varphi_0$.



La longitud del paral·lel entre els punts P i Q és $R\theta_0\sin\varphi_0$. Mira't en el con desplegat tenim un sector circular d'angle $\alpha_0 = \theta_0\cos\varphi_0$ ja que la generatriu del con mesura $R\tan\varphi_0$. Observem que amb la notació de més amunt $\alpha_0 = c\theta_0$.

Com es veu a la figura anterior, dreta, el transportat paral·lelament del vector $w \in T_PS^2$ a Q és el vector $w_1 \in T_QS^2$ que forma un angle α_0 amb el meridià, és a dir, a mb $X_\varphi(P)$.

Per tant

$$
w_1 = A\frac{X_\theta}{|X_\theta|} + B\frac{X_\varphi}{|\varphi|}
$$

amb

$$
\begin{aligned}
A &= \langle w_1, \frac{1}{\sin\varphi_0}X_\theta\rangle = \cos(\alpha_0 + \pi/2) = -\sin\alpha_0 \\
B &= \langle w_1, X_\varphi\rangle = \cos\alpha_0
\end{aligned}
$$

és a dir,

$$
W(\theta) = -\frac{1}{\sin(\varphi_0)}\sin(c\theta)X_\theta + \cos(c\theta)X_\varphi.
$$