Geometria diferencial
Curs 2017–18

Superfícies: Segona forma fonamental. Curvatura

Exercici 1: Determineu la primera i segona formes fonamentals, i les curvatures de Gauss i mitjana, de la superfície parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (u+v, u\,v, v)$$

(Noteu que es tracta de la quàdrica $y = z\,(x-z)$ i, per tant, els càlculs es poden fer utilitzant les fórmules corresponents al gràfic d'una funció de l'exercici següent).

Solució:

Si es comença calculant els vectors tangents a les corbes coordenades s'obté:

$$\varphi_u = (1, v, 0)$$
$$\varphi_v = (1, u, 1)$$

Els productes escalars que determinen la primera forma fonamental seran:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + v^2$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 1 + u\,v$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2 + u^2$$

Agrupat matricialment

$$I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1+u\,v \\ 1+u\,v & 2+u^2 \end{pmatrix}$$

Per tal de determinar la segona forma fonamental caldrà calcular el vector normal a la superfície i les derivades segones de la parametrització. La direcció del vector normal és la del producte vectorial $\varphi_u \wedge \varphi_v = (v, -1, u-v)$ de forma que el vector normal serà

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1 + (u-v)^2}}\,(v, -1, u-v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v}}(v, -1, u-v)$$

Els coeficients de la segona forma fonamental es poden calcular fent el producte escalar de les derivades segones de la parametrització

$$\varphi_{uu} = (0,0,0)$$
$$\varphi_{uv} = (0,1,0)$$
$$\varphi_{vv} = (0,0,0)$$

amb aquest vector normal, així s'obtindrà:

$$e = \langle \mathcal{N}, \varphi_{uu} \rangle = 0$$
$$f = \langle \mathcal{N}, \varphi_{uv} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v}}$$
$$g = \langle \mathcal{N}, \varphi_{vv} \rangle = 0$$

Expressat en forma de matriu:

$$II = \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Amb les dades dels càlculs que s'han fet fins ara, es pot calcular immediatament la curvatura de Gauss com:

$$K = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} = \frac{-1/(1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v)}{1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v} = \frac{-1}{(1 + u^2 + 2\,v^2 - 2\,u\,v)^2}$$

Finalment, per tal d'obtenir la curvatura mitjana H caldrà calcular la traça de $W = -d\mathcal{N} = I^{-1} \cdot II$. Fent unes quantes operacions

$$W = \frac{1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^{3/2}} \begin{pmatrix} u\,v+1 & -(u^2+2) \\ -(v^2+1) & u\,v+1 \end{pmatrix}$$

De forma que la curvatura mitjana serà

$$H = \frac{1}{2}\,\text{traça}(W) = \frac{u\,v+1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^{3/2}}$$

Exercici 2: Donada una funció de dues variables $h(x,y)$, doneu en funció de les derivades parcials de h, les expressions del vector normal, l'aplicació de Weingarten i la curvatura de Gauss per a la superfície S que s'obté considerant el gràfic de h.

Solució:

Quan es defineix una superfície S prenent el gràfic d'una funció de dues variables $h(x,y)$, la parametrització natural consisteix a prendre

$$\varphi(x,y) = (x,y,h(x,y))$$

de forma que els vectors tangents corresponents seran

$$\varphi_x = (1,0,h_x)$$
$$\varphi_y = (0,1,h_y)$$

(on els subíndex denoten, com és habitual en aquests casos, derivades parcials respecte les variables). Aleshores la direcció del vector normal és la del producte vectorial $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-h_x,-h_y,1)$ i el vector normal unitari serà

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1+(h_x)^2+(h_y)^2}}(-h_x,-h_y,1)$$

Per tal d'obtenir la curvatura de Gauss i l'expressió de W, el més pràctic serà considerar

$$I = \begin{pmatrix} 1+(h_x)^2 & h_x\,h_y \\ h_x\,h_y & 1+(h_y)^2 \end{pmatrix}$$

(que té determinant donat per $1+(h_x)^2+(h_y)^2$) i calcular la segona forma fonamental a partir de les derivades segones

$$\varphi_{xx} = (0,0,h_{xx})$$
$$\varphi_{xy} = (0,0,h_{xy})$$
$$\varphi_{yy} = (0,0,h_{yy})$$

de forma que s'obtenen els coeficients

$$e = \langle \mathcal{N}, \varphi_{xx} \rangle = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1+(h_x)^2+(h_y)^2}}$$
$$f = \langle \mathcal{N}, \varphi_{xy} \rangle = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1+(h_x)^2+(h_y)^2}}$$
$$g = \langle \mathcal{N}, \varphi_{yy} \rangle = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1+(h_x)^2+(h_y)^2}}$$

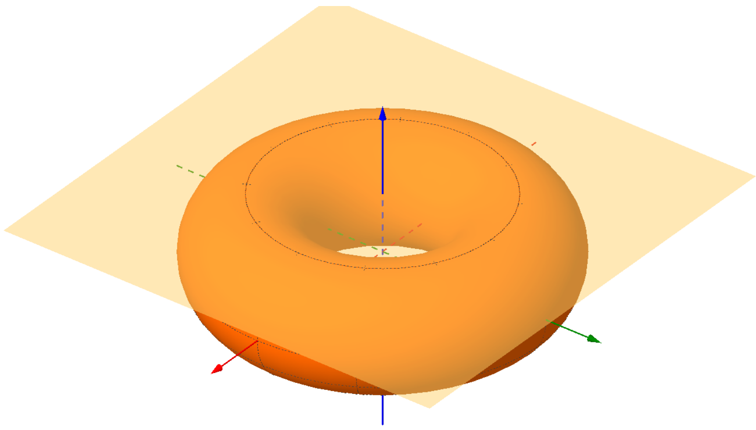
i la matriu de W serà

$$\begin{aligned} W = I^{-1} \cdot II &= \frac{1}{(1+(h_x)^2+(h_y)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+(h_y)^2 & -h_x\,h_y \\ -h_x\,h_y & 1+(h_x)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+(h_x)^2+(h_y)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} h_{xx}\,(1+(h_y)^2) - h_{xy}\,h_x\,h_y & h_{xy}\,(1+(h_y)^2) - h_{yy}\,h_x\,h_y \\ h_{xy}\,(1+(h_x)^2) - h_{xx}\,h_x\,h_y & h_{yy}\,(1+(h_x)^2) - h_{xy}\,h_x\,h_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per un altre costat, la fórmula per a la curvatura de Gauss serà

$$K = \frac{e\,g-f^2}{E\,G-F^2} = \frac{(h_{xx}\,h_{yy}-(h_{xy})^2)/(1+(h_x)^2+(h_y)^2)}{1+(h_x)^2+(h_y)^2} = \frac{h_{xx}\,h_{yy}-(h_{xy})^2}{(1+(h_x)^2+(h_y)^2)^2}$$

Exercici 3: Sigui S una superfície regular que és tangent a un pla fix per a tots els punts d'una certa corba (regular). Què es pot dir de la curvatura de Gauss de S en els punts d'questa corba? Preneu com exemple un tor de revolució com el de l'esquema següent



Solució:

Sigui p un punt qualsevol de la corba en S on la superfície és tangent al pla fix. Si la corba és regular, el seu vector tangent $\vec{v}$ en p serà un vector tangent a la superfície i diferent de $\vec{0}$. Com que el vector normal a la superfície serà constant al llarg de la corba (ja que coincideix amb el vector normal al pla amb el que es produeix la tangència) es compleix, per la definició general de diferencial d'una aplicació,

$$d\mathcal{N}(\vec{v}) = \vec{0}$$

(es restringeix l'aplicació a una corba tangent qualsevol al vector i es busca el vector tangent a aquesta restricció, que és una corba en el espai imatge de l'aplicació).

Tenint en compte que la curvatura de Gauss K d'una superfície és el determinant de $W = -d\mathcal{N}$ i que s'acaba de trobar un vector no nul en el nucli de W ($W(\vec{v}) = \vec{0}$), és clar que s'acaba de veure que $K = 0$ en p.

Exercici 4: Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Suposeu que S es connexa. Demostreu que són equivalents:

(a) La segona forma fonamental de S és constant igual a zero.

(b) L'aplicació de Gauss de S és constant.

(c) S està continguda en un pla.

Solució:

(a) $\Longleftrightarrow$ (b)

Tenint en compte les definicions, el valor de la segona forma fonamental $I\!I$ actuant sobre un parell de vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ s'obté amb

$$I\!I(\vec{u}, \vec{v}) = \langle -d\mathcal{N}(\vec{u}), \vec{v} \rangle$$

Aleshores, dir que aquesta segona forma fonamental és nul·la és equivalent a dir que la diferencial de l'aplicació de Gauss $d\mathcal{N}$ és 0 en tots els punts i, per tant, que $\mathcal{N}$ és una aplicació constant.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c)

És clar que quan la superfície està continguda en un pla el seu vector normal serà constant.

Recíprocament, si $\mathcal{N}$ és constant, es considera un punt qualsevol p_0 en S i una parametrització $\varphi(u,v)$ al voltant de p_0, es complirà

$$\frac{\partial}{\partial u}\langle\varphi(u,v)-p_0,\mathcal{N}\rangle = \langle\varphi_u,\mathcal{N}\rangle + \langle\varphi-p_0,\mathcal{N}_u\rangle = 0$$

(i el mateix respecte v) ja que φ_u és un vector tangent a la superfície (perpendicular a $\mathcal{N}$) i $\mathcal{N}$ és constant. Així es té que $\langle\varphi(u,v)-p_0,\mathcal{N}\rangle = 0$ i, per tant, el recorregut de φ és al pla pla que passa per p_0 i té $\mathcal{N}$ com a vector perpendicular. Com que s'ha suposat des del principi que S és connexa, tots els seus punts compleixen aquesta propietat. (L'argument mostra que el conjunt de punts de S i en aquest pla és obert).

Exercici 5: Sigui S una superfície regular i connexa. Suposeu que totes les rectes normals a la superfície passen pel mateix punt. Demostreu que S està continguda en una esfera.

Solució:

Sigui φ una parametrització de S (no cal que el seu recorregut sigui tota la superfície). La condició que s'ha imposat diu que existeix un punt c_0 tal que $\varphi(u,v)-c_0$ és normal a la superfície. En particular

$$\langle\varphi-c_0,\varphi_u\rangle = \langle\varphi-c_0,\varphi_v\rangle = 0$$

Però això diu que la funció de (u,v) donada per

$$r(u,v) = \langle\varphi(u,v)-c_0,\varphi(u,v)-c_0\rangle$$

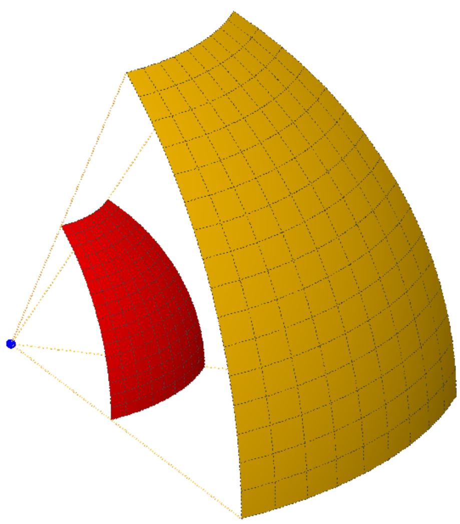
té les dues derivades parcials r_u i r_v iguals a 0 i, per tant, que és una funció constant r_0. Com que S és connexa, això demostra que la superfície està continguda en l'esfera de centre c_0 i radi r_0. (L'argument mostra que el conjunt de punts a una distància fixada de c_0 és obert ja que inclou el recorregut d'una parametrització al voltant de qualsevol del seus punts).

Exercici 6: Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'homotècia de raó positiva λ. Comproveu que $\bar{S}=F(S)$ és també una superfície i expresseu la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de $\bar{S}$ en termes de les de S.

Solució:

Com que les homotècies F són difeomorfismes de $\mathbb{R}^3$, cada parametrització $\varphi(u,v)$ de S dóna, fent la composició, una parametrització de $\bar{S}=F(S)$ que es podrà escriure com

$$\bar{\varphi}(u,v) = \lambda\,\varphi(u,v)$$



Aleshores les derivades parcial d'aquesta parametrització que generen l'espai tangent seran

$$\bar{\varphi}_u = \lambda\,\varphi_u, \quad \bar{\varphi}_v = \lambda\,\varphi_v$$

de forma que el vector normal $\bar{\mathcal{N}}$ de $\bar{S}$ coincidirà amb el vector normal $\mathcal{N}$ de S (en els punts corresponents) ja que $\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v = \lambda^2\,\varphi_u \wedge \varphi_v$.

A partir d'aquí s'obté de forma immediata que les primeres formes fonamentals I i $\bar{I}$ de S i $\bar{S}$ respectivament s'obtenen una a partir de l'altre per la relació

$$\bar{I} = \lambda^2\,I$$

mentre que la relació entre les segones formes fonamentals II i $\bar{II}$ vindrà donada per (productes escalars de les derivades segones amb el mateix vector normal)

$$\bar{II} = \lambda\,II$$

D'aquí es dedueix que la relació entre curvatures de Gauss serà (quocient de determinants)

$$\bar{K} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4}\,K = \frac{1}{\lambda^2}\,K$$

i la relació entre curvatures mitjanes (traça del producte $I^{-1}\cdot II$)

$$\bar{H} = \frac{1}{\lambda}\,H$$

($\bar{I}^{-1} = (1/\lambda^2)\,I^{-1}$ i els escalars *surten fora* en els productes de matrius i en el càlcul de les traces).

Exercici 7: Considereu un helicoide

$$\varphi(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\sin(v), a\,v)$$

Calculeu-ne la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana.

Solució:

Per a aquesta parametrització de la superfície

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\cos(v), \sin(v), 0)\\
\varphi_v &= (-u\,\sin(v), u\,\cos(v), a)\\
\varphi_u \wedge \varphi_v &= (a\,\sin(v), -a\,\cos(v), u)\\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,(a\,\sin(v), -a\,\cos(v), u)\\
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}\\
\varphi_{uu} &= (0,0,0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin(v), \cos(v), 0)\\
\varphi_{vv} &= (-u\,\cos(v), -u\,\sin(v), 0)\\
II &= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\\
K &= \frac{-a^2/(u^2+a^2)}{u^2+a^2} = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2} = -\left(\frac{a}{u^2+a^2}\right)^2\\
I^{-1}\cdot II &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2+a^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -a/\sqrt{u^2+a^2} \\ -a/\sqrt{u^2+a^2} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a/\sqrt{u^2+a^2} \\ -a/(u^2+a^2)^{3/2} & 0 \end{pmatrix}\\
H &= 0
\end{aligned}$$

Exercici 8: (Superfícies paral·leles o semitubs).

Donada una parametrització $\varphi(u,v)$, d'una superfície S, es defineix la superfície paral·lela o semitub a distància t, S_t, com la superfície donada per

$$\varphi^t(u,v) = \varphi(u,v) + t\,\nu(u,v),$$

on $\nu = \nu(u,v)$ és el vector normal unitari de S (escollim un dels dos).

(a) Trobeu, respecte de les coordenades u, v, l'expressió de l'element d'àrea de S_t.

(b) Proveu que la curvatura de Gauss $K^t = K^t(u,v)$ està donada per

$$K^t = \frac{K}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,,$$

on $K = K(u,v)$ i $H = H(u,v)$ són les curvatures de Gauss i mitjana de la superfície inicial en el punt corresponent.

(c) Proveu que la curvatura mitjana $H^t = H^t(u,v)$ de S_t està donada per

$$H^t = \frac{H - K\,t}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,.$$

(d) Si S és una superfície amb curvatura mitjana constant $c \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{2\,c}$ té curvatura de Gauss constant $K = 4\,c^2$.

(e) Si S és una superfície amb curvatura de Gauss constant $a^2 \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{a}$ té curvatura mitjana constant $H = -a/2$.

Solució:

(a) Tenint en compte que les relacions entre els vectors tangents a les dues superfícies corresponents a les parametritzacions respectives són

$$(\varphi^t)_u = \varphi_u + t\,\nu_u$$
$$(\varphi^t)_v = \varphi_v + t\,\nu_v$$

escriurem (aplicació de Weingarten)

$$\nu_u = a_{11}\,\varphi_u + a_{12}\,\varphi_v$$
$$\nu_v = a_{21}\,\varphi_u + a_{22}\,\varphi_v$$

de forma que

$$\varphi_u \wedge \nu_v = a_{22}\,\varphi_u \wedge \varphi_v$$
$$\nu_u \wedge \varphi_v = a_{11}\,\varphi_u \wedge \varphi_v$$
$$\nu_u \wedge \nu_v = K\,\varphi_u \wedge \varphi_v \quad (K \text{ és el determinant})$$

i aleshores

$$(\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v = (1 - 2\,H\,t + K\,t^2)\,\varphi_u \wedge \varphi_v$$

$(a_{11} + a_{22} = -2\,H)$.

Aquest càlcul mostra que, si dS és l'element d'àrea de la superfície original, es complirà

$$dS^t = \left|1 - 2\,H\,t + K\,t^2\right|\,dS$$

Noteu que, com a propina, també es veu que els vectors normals ν i ν^t coincideixen en els punts corresponents als mateixos paràmetres (u,v) de les dues superfícies.

(b) Per tal d'establir la relació entre les curvatures de Gauss K i K^t es pot partir del fet general (que ja ha aparegut en els càlculs anterior) donat per les igualtats

$$\nu_u \wedge \nu_v = K\, \varphi_u \wedge \varphi_v, \quad (\nu^t)_u \wedge (\nu^t)_v = K^t\, (\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v$$

tenint en compte que els vectors normals de les dues superfícies coincideixen. Així s'obtindrà:

$$K\, \varphi_u \wedge \varphi_v = \nu_u \wedge \nu_v = (\nu^t)_u \wedge (\nu^t)_v = K^t\, (\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v = K^t\, (1 - 2\, H\, t + K\, t^2)\, \varphi_u \wedge \varphi_v\, .$$

De forma que

$$K^t = \frac{K}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}$$

tal i com diu l'enunciat.

(c) Partint de les relacions

$$(\varphi^t)_u = \varphi_u + t\, \nu_u$$
$$(\varphi^t)_v = \varphi_v + t\, \nu_v$$

i tenint en compte

$$\nu_u = a_{11}\, \varphi_u + a_{12}\, \varphi_v$$
$$\nu_v = a_{21}\, \varphi_u + a_{22}\, \varphi_v$$

s'obtenen *les equacions del canvi de base* (els plans tangents a S i S^t són paral·lels)

$$(\varphi^t)_u = (1 + t\, a_{11})\, \varphi_u + t\, a_{12}\, \varphi_v$$
$$(\varphi^t)_v = t\, a_{21}\, \varphi_u + (1 + t\, a_{22})\, \varphi_v\, .$$

Fent els càlculs de la matriu inversa corresponent, i incorporant $K = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ (determinant), $-2\, H = a_{11} + a_{22}$ (traça)

$$\varphi_u = \frac{1}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}\, \big((1 + t\, a_{22})\, (\varphi^t)_u - t\, a_{12}\, (\varphi^t)_v\big)$$
$$\varphi_v = \frac{1}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}\, \big(-t\, a_{21} (\varphi^t)_u + (1 + t\, a_{11})\, (\varphi^t)_v\big)$$

Com que els vectors normals coincideixen, les relacions anteriors permeten obtenir

$$(\nu^t)_u = \nu_u = \frac{1}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}\, \big((a_{11} + t\, K)\, (\varphi^t)_u + a_{12}\, (\varphi^t)_v\big)$$
$$(\nu^t)_v = \nu_v = \frac{1}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}\, \big(a_{21}\, (\varphi^t)_u + (a_{22} + t\, K)\, (\varphi^t)_v\big)$$

Ara només cal tenir en compte que la curvatura mitjana de S^t serà igual a la meitat de la traça d'aquesta relació (matriu) canviada de signe. És a dir

$$H^t = \frac{H - K\, t}{1 - 2\, H\, t + K\, t^2}$$

Nota: L'argument també es pot fer utilitzant productes vectorials i les relacions entre els vectors tangents a les dues superfícies com en el cas anterior.

En el sentit contrari, la relació entre les curvatures de Gauss també surt amb els càlculs fets com en aquest apartat, encara que resulti una mica més carregòs que tal i com s'ha vist abans amb els productes vectorials.

(d) Aplicar la fórmula anterior amb $H = c$ i $t = 1/(2\, c)$ serà

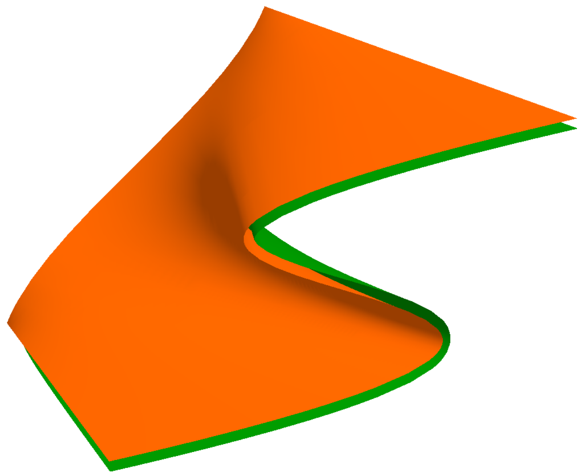
$$K^{1/(2c)} = \frac{K}{1 - 2\, c\, (1/(2\, c)) + K\, (1/(4\, c^2))} = 4\, c^2$$

(e) Com en l'apartat anterior, aplicant la fórmula corresponent amb $K = a^2$ i $t = 1/a$ donarà

$$H^{1/a} = \frac{H - a^2\,(1/a)}{1 - 2\,H\,(1/a) + a^2\,(1/a^2)} = \frac{H - a}{2 - 2\,H/a} = -\frac{a}{2}\,.$$

Nota: El signe de la curvatura mitjana depèn del *signe del vector normal*. Si es canvia ν^t per $-\nu^t$ el signe $-$ de la fórmula desapareix.

Nota final: La parametrització φ_t deixa de ser regular si t no és prou petit per tal que l'expressió $1 - 2\,H\,t + K\,t^2$ sigui diferent de 0. Es pot construir sempre alguna superfície paral·lela? Com hauria de ser una superfície sense cap superfície paral·lela?



La superfície determinada per $\varphi(u, v) = (v, v\,u^3 + (1 - v)\,u, u)$ i la seva paral·lela a distància $t = 0.08$. A distàncies més grans, la paral·lela degenera ràpidament.