GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari 13

Integració de formes diferencials

Exercici 13.1. Integrar la forma $\sin y \; dx + \sin x dy$ al llarg del segment que va de $(0, \pi)$ a $(\pi, 0)$.

Solució: *Parametritzem el segment S per $\alpha(t) = (t\pi, (1-t)\pi)$ amb $t \in [0, 1]$ i calculem*

$$\begin{aligned} \alpha^*\omega &= \sin((1-t)\pi)d(t\pi) + \sin(t\pi)d((1-t)\pi) \\ &= \sin(t\pi)\pi dt - \sin(t\pi)\pi dt = 0 \end{aligned}$$

Per tant

$$\int_S \alpha = 0.$$

Exercici 13.2. Integreu la forma $(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ sobre $C = \{(x, y) : |x| \leq 1, y = x^2\}$.

Solució: *Parametritzem C per $\beta(t) = (t, t^2)$ amb $-1 \leq t \leq 1$ i calculem*

$$\begin{aligned} \beta^*\eta &= (t^2 - 2t^3)dt + (t^4 - 2t^3)d(t^2) \\ &= (t^2 - 2t^3)dt + 2t(t^4 - 2t^3)dt \end{aligned}$$

Per tant

$$\int_S \eta = \int_{-1}^{1} (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2)dt = -\frac{14}{15}$$

Exercici 13.3. Integreu sobre la semiesfera superior unitaria $A \subset S^2$ la forma $\omega = xydx \wedge dy + 2xdy \wedge dz + 2ydx \wedge dz$.

Solució: *Parametritzem l'esfera per*

$$\varphi(u,v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u)), \qquad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Calculem

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega =& \cos^2(u)\cos(v)\sin(v)d(\cos(u)\cos(v)) \wedge d(\cos(u)\sin(v)) \\ &+ 2\cos(u)\cos(v)d(\cos(u)\sin(v)) \wedge d(\sin(u)) + 2\cos(u)\sin(v)d(\cos(u)\cos(v)) \wedge d(\sin(u)) \\ &= (-\cos^3(u)\cos(v)\sin(v)\sin(u) - 2\cos^3(u)\cos^2(v) + 2\cos^3(u)\sin^2(v))du \wedge dv\end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_A \omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^3(u)\cos(v)\sin(v)\sin(u) - 2\cos^3(u)\cos^2(v) + 2\cos^3(u)\sin^2(v))dudv = 0$$

Exercici 13.4. Es considera la superfície amb vora $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ a \le z \le b\} \subset \mathbb{R}^3$ orientada amb vector normal $\nu_{|(1,0,0)} = (1,0,0)$. Calculeu $\int_S d\omega$ i $\int_{\partial S} \omega$ en els següents casos:

a) $y^2 dx + x dy$

b) $\omega = f(x,y,z)dz$.

Solució: *La superfície és un hiperboloïde d'un full. Es pot pensar com la superfície de revolució que s'obté fent girar la corba* $v \to (\cosh v, 0, \sinh v)$ *al voltant de l'eix* OZ. *Una parametrització ve donada per*

$$\varphi(u,v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v)$$

amb $(u,v) \in U = [0, 2\pi) \times [\operatorname{arcsinh} a, \operatorname{arcsinh} b]$. *Com que* $\varphi_u(0,0) = (0,1,0)$ *i* $\varphi_v(0,0) = (0,0,1)$ *la parametrització* φ *és compatible amb l'orientació especificada, llavors*

$$\int_S d\omega = \int_U \varphi^* d\omega.$$

La frontera ∂S *està formada per les circumferències* $C_a : x^2 + y^2 = 1 + a^2$ *i* $C_b : x^2 + y^2 = 1 + b^2$. *Les parametritzacions* $\varphi_a(t) = (\sqrt{1+a^2}\cos(t), \sqrt{1+a^2}\sin(t), a)$ *i* $\varphi_b(t) = (\sqrt{1+b^2}\cos(-t), \sqrt{1+b^2}\sin(-t), b)$ *són parametritzacions positives de* C_a *i* C_b, *llavors*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_0^{2\pi} \varphi_a^* \omega + \int_0^{2\pi} \varphi_b^* \omega.$$

Exercici 13.4. Es considera la superfície amb vora $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ a \le z \le b\} \subset \mathbb{R}^3$ orientada amb vector normal $\nu_{|(1,0,0)} = (1,0,0)$. Calculeu $\int_S d\omega$ i $\int_{\partial S} \omega$ en els següents casos:

a) $y^2 dx + x dy$

b) $\omega = f(x,y,z)dz$.

En el cas a), tenim $d\omega = (1-2y)dx \wedge dy$ i $\varphi^* d\omega = -(1 - 2\sin(u)\cosh(v))\cosh v \sinh v du \wedge dv$, aleshores

$$\int_S d\omega = -\int_0^{2\pi} \left(\int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \sinh v \cosh v dv \right) du = -2\pi \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \sinh v \cosh v dv = \pi(a^2 - b^2).$$

Per altra banda tenim que

$$\varphi_a \omega = (-(1+a^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3 t + (1+a^2)\cos^2 t)dt$$
$$\varphi_b \omega = (-(1+b^2)^{\frac{3}{2}} \sin^3 t - (1+b^2)\cos^2 t)dt$$

llavors

$$\int_{\partial S} \omega = \int_0^{2\pi} \varphi_a^* \omega + \int_0^{2\pi} \varphi_b^* \omega = \int_0^{2\pi} (1+a^2)\cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} (1+b^2)\cos^2 t dt = \pi(a^2 - b^2).$$

Exercici 13.4. Es considera la superfície amb vora $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ a \leq z \leq b\} \subset \mathbb{R}^3$ orientada amb vector normal $\nu_{|(1,0,0)} = (1,0,0)$. Calculeu $\int_S d\omega$ i $\int_{\partial S} \omega$ en els següents casos:

a) $y^2 dx + x dy$

b) $\omega = f(x,y,z)dz$.

En el cas b) $\varphi^* df \wedge dz = d(f \circ \varphi) \wedge d(\sinh v) = (f \circ \varphi)_u \cosh v du \wedge dv$ *llavors*

$$\int_S d\omega = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh v \left(\int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)_u du \right) dv = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh v \left[(f \circ \varphi)(u,v) \right]_{u=0}^{v=2\pi} dv = 0.$$

Per altra banda

$$\varphi_a^* \omega = f(\sqrt{1+a^2}\cos(t), \sqrt{1+a^2}\sin(t), a) d(a) = 0$$

i anàlogament $\varphi_b^* \omega = 0$. *Per tant*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_0^{2\pi} \varphi_a^* \omega + \int_0^{2\pi} \varphi_b^* \omega = 0.$$

Exercici 13.5. Considereu la 2-forma $\omega = z\,dx \wedge dy$ i la subvarietat amb vora

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Calculeu $\int_V d\omega$ i $\int_{\partial V} \omega$ amb les orientacions induïdes per l'orientació canònica de $\mathbb{R}^3$.

Solució: *És clar que integrant $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ obtenim el volum del tor que és $2\pi^2 R r^2$. Cosiderem la parametrització*

$$\varphi(\theta, \phi) = (R + r\cos\phi)\cos\theta, (R + r\cos\phi)\sin\theta, r\sin\phi).$$

El normal $\varphi_\theta \times \varphi_\phi$ és exterior al tor, llavors la parametrització φ és compatible amb l'oruentació canònica de $\mathbb{R}^3$. Llavors

$$\varphi^*\omega = (r\sin\phi)^2(R + r\cos\phi)d\theta \wedge d\phi.$$

Integrem

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{[0,2\pi]^2} \varphi^*\omega = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (r\sin\phi)^2(R + r\cos\phi)d\phi \right) d\theta = 2\pi^2 R r^2.$$

Exercici 13.6. Si X és un camp vectorial a $\mathbb{R}^3$, $C \subset \mathbb{R}^3$ una corba orientada i $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície orientada es defineixen

1. la *integral de línia* o *circul·lació* de X al llarg de C com

$$\int_C X \cdot dL := \int_C X \cdot T\, ds = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt,$$

   on $\gamma : (a, b) \to C$ és una parametrització (ben orientada) de C tal que $\dim(C \setminus \operatorname{Im}\gamma) < 1$;

2. el *flux* de X a través de S com

$$\int_S X \cdot dS := \int_S X \cdot \nu\, dA = \int_U X(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\, du\, dv,$$

   on $\varphi : U \to S$ és una parametrització (ben orientada) de S tal que $\dim(S \setminus \operatorname{Im}\varphi) < 2$.

Comproveu que si $X = (X_1, X_2, X_3)$ aleshores

a) $\int_C X \cdot dL = \int_C \omega_X^1$ on $\omega_X^1 = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$,

b) $\int_S X \cdot dS = \int_S \omega_X^2$ on $\omega_X^2 = X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy$.

Solució: *a) Fent servir la parametrització γ tenim*

$$\int_C \omega_X^1 = \int_a^b \gamma^*(X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz) = \int_a^b (X_1(\gamma(t))x'(t) + X_2(\gamma(t))y'(t) + X_3(\gamma(t))z'(t))dt = \int_a^b X(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

b) Fent servir la parametrització φ resulta

$$\varphi^* \omega_X^2 = \varphi^*(X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy) = X(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\, du \wedge dv,$$

Integrem i ja està.