Capítol 6

Formes diferencials

6.1 Camps vectorials de $\mathbb{R}^n$

Sigui $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$ i denotem per $T_p\mathbb{R}^n$ l'espai vectorial definit per

$$T_p\mathbb{R}^n = \{(p, \vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}. \tag{6.1}$$

Definició 6.1.1. Un **camp vectorial** sobre un obert $U \subset \mathbb{R}^n$ és una correspondència

$$X \colon p \in U \longmapsto X(p) \equiv X_p \in T_p\mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

Exemple 6.1.2. Les correspondències $E_i \colon p \mapsto (p, \vec{e}_i)$ són camps vectorials de $\mathbb{R}^n$. Per a cada punt $p \in \mathbb{R}^n$, el vectors $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ formen una base de $T_p\mathbb{R}^n$.

Comentari 6.1.3. Observem que tot camp vectorial X sobre U s'escriu, de manera única, com

$$X(p) \equiv X_p = \sum X^i(p)\, E_i \equiv \big(X^1(p), \dots, X_n(p)\big). \tag{6.3}$$

Diem que el camp vectorial X és **diferenciable** si les funcions $X^i = X^i(p)$ són diferenciables.

Exemples 6.1.4. 1) $X = x\,E_1 + y\,E_2 + z\,E_3 = (x, y, z)$ (camp radial).

2) $X = -y\,E_1 + x\,E_2 = (-y, x)$.

3) $X = x^2\,E_1$.

4) $\operatorname{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x^1}\,E_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x^n}\,E_n = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x^n}\Big)$.

Definició 6.1.5. Sigui U un obert de $\mathbb{R}^n$. Denotarem per $C^\infty(U)$ el conjunt de les funcions diferenciables (de classe C^∞) de U i per $\mathcal{X}(U)$ el conjunt dels camps vectorials diferenciables sobre U. Aleshores, $C^\infty(U)$ té una estructura natural d'anell i de $\mathbb{R}$-àlgebra. Al seu torn, $\mathcal{X}(U)$ té una estructura natural de $\mathbb{R}$-espai vectorial i de $C^\infty(U)$-mòdul.

Definició 6.1.6. Donats $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ es defineix el seu producte escalar com la funció diferenciable $\langle X, Y\rangle \colon U \to \mathbb{R}$ definida per

$$\langle X, Y\rangle(p) := \langle X_p, Y_p\rangle. \tag{6.4}$$

Definició 6.1.7. Donats $f \in C^\infty(U)$ i $X = \sum X^i E_i \in \mathcal{X}(U)$, denotem per Xf la funció diferenciable definida per

$$Xf(p) = X_p f := \sum X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \tag{6.5}$$

Comentari 6.1.8. Notem que $Xf(p)$ és la derivada direccional de f en p i en la direcció X_p. En particular $E_i f$ és la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ de f. Per aquest motiu, a partir d'ara denotarem

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6.6}$$

Aleshores escriurem

$$X = \sum X^i E_i = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6.7}$$

Lema 6.1.9. *Sigui $X \in \mathcal{X}(U)$. L'aplicació $X\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ definida per*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{X} & C^\infty(U) \\ f & \longmapsto & Xf \end{array}$$

i) *és $\mathbb{R}$-lineal*

ii) *i compleix $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$*

Comentari 6.1.10. Una **derivació** de l'àlgebra $C^\infty(U)$ és una aplicació $D\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ que compleix les condicions i), ii) del lema anterior. Es pot demostrar que tota derivació D de $C^\infty(U)$ prové d'un únic camp vectorial $X_D \in \mathcal{X}(U)$.

Lema 6.1.11. *Es compleix*

$$Xf = \langle X, \operatorname{grad} f \rangle.$$

Demostració. Tenim

$$\begin{aligned} Xf(p) &= \sum X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \langle X(p), \operatorname{grad} f(p) \rangle \\ &= \langle X, \operatorname{grad} f \rangle(p) \end{aligned}$$

que prova el lema. □

Comentari 6.1.12. D'aquí resulta que el camp $\operatorname{grad} f$ és ortogonal a les hipersuperfícies de nivell de la funció f.

Definició 6.1.13. Diem que una corba parametritzada $\gamma = \gamma(t)$ és una **corba integral** de $X \in \mathcal{X}(U)$ si es compleix

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \qquad \forall\, t. \tag{6.8}$$

És a dir, les corbes integrals $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ de $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ són les solucions del sistema d'equacions diferencials ordinàries autònom

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)). \tag{6.9}$$

El teorema d'existència i unicitat per equacions diferencials ordinàries dona

Proposició 6.1.14. *Donats $X \in X(U)$ i $p \in U$, hi ha un entorn obert V de p en U, un nombre $\epsilon > 0$ i una aplicació diferenciable, única, $\psi\colon (\epsilon, \epsilon) \times V \to U$ de manera que per a tot $x \in V$ es compleix*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\psi}{dt}(t,x) & = & X_{\psi(t,x)} \\ \psi(0,x) & = & x \end{array} \right. \tag{6.10}$$

Exercici 6.1.15. Determineu les corbes integrals dels camps vectorials de l'Exemple (6.1.4).

Proposició 6.1.16. *Donat $X \in \mathcal{X}(U)$, sigui $\psi = \psi(t,x)$ l'aplicació donada per la proposició anterior i posem $\psi_t(x) = \psi(t,x)$. Aleshores es compleix*

1) $\psi_0 = \mathrm{Id}$,
2) $\psi_t(\psi_s(x)) = \psi_{t+s}(x)$, *en el domini de definició comú dels dos termes de la igualtat.*

Demostració. La corba $\beta(u) = \psi_{u+s}(x)$ és solució del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta'(u) & = & X_{\beta(u)} \\ \beta(0) & = & \psi_s(x). \end{array} \right.$$

D'altra banda, la corba $\alpha(u) = \psi_u(\psi_s(x))$ és solució del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(u) & = & X_{\alpha(u)} \\ \alpha(0) & = & \psi_s(x). \end{array} \right.$$

Per la unicitat de solucions ha de ser $\alpha = \beta$. □

Nota 6.1.17. Notem que les transformacions $x \mapsto \psi_t(x)$ són difeomorfismes locals. Diem que ψ_t és el **grup uniparamètric** (local), o flux, generat per X.

Exercici 6.1.18. Determineu el flux determinat pels camps vectorials de l'Exemple (6.1.4).

Definició 6.1.19. Diem que $F \in C^\infty(U)$ és una **integral primera** de $X \in \mathcal{X}(U)$ si es compleix

a) $dF_p \neq 0, \ \forall\, p \in U$, i
b) F és constant sobre les corbes integrals de X, i.e. si $XF = 0$.

Comentari 6.1.20. La condició a) de la definició anterior diu que F és una submersió i, per tant, que les hipersuperfícies de nivell $F^{-1}(c)$ de F són subvarietats de $\mathbb{R}^n$.

Proposició 6.1.21. *Suposem $n \geq 2$. Sigui $X \in \mathcal{X}(U)$ i suposem que, en un punt $p \in U$, és $X_p \neq 0$. Aleshores hi ha un entorn obert V de p en U i $F\colon V \to \mathbb{R}$ funció diferenciable que és integral primera de X en V.*

Demostració. Escollint un sistema de coordenades convenient podem suposar que $p = (0, \ldots, 0)$ i que $X_p = \lambda\,(1, 0, \ldots, 0)$. Sigui ψ_t el flux associat al camp vectorial X. Considerem l'aplicació $f\colon (-\epsilon, \epsilon) \times W \to U$, on W és un entorn de p en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, donada per

$$f(t, x^2, \ldots, x^n) = \psi_t(0, x^2, \ldots, x^n).$$

Aleshores f transforma les línies rectes $t \mapsto (t, x^2, \ldots, x^n)$ en les corbes integrals de X. A més, df_p és invertible i per tant, prenent W i ϵ prou petits, podem suposar que f és un difeomorfisme del seu domini sobre un entorn V de p en U. Llavors l'aplicació $F = \pi_2 \circ f^{-1}$, on $\pi_2(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^2$, compleix les condicions requerides. □

Comentari 6.1.22. Notem que qualssevol de les funcions $F_k = \pi_k \circ f^{-1}$, per $k = 2, 3, \ldots, n$, on $\pi_k(x^1, x^2, \ldots, x^n) = x^k$ és també una integral primera de X. Així, podem trobar $(n-1)$ integrals primeres que són independents en el sentit que la $(n-1)$-forma diferencial $dF_2 \wedge \cdots \wedge dF_n$ és diferent de zero en un entorn de p. De fet, la demostració de l'anterior proposició prova una afirmació encara més forta: si $X_p \neq 0$ hi ha coordenades locals $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ definides en un entorn V de p amb la propietat que, en V, es compleix

$$X = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

Exercici 6.1.23. Determineu integrals primeres pels camps vectorials de l'Exemple (6.1.4).

La noció de camp vectorial diferenciable que hem introduït és coherent amb la definició de camp vectorial tangent a una superfície S de $\mathbb{R}^3$ donada a la Secció 5.2. Donem ara una definició una mica més general.

Definició 6.1.24. Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Un **camp vectorial sobre** S és una correspondència $X\colon p \in S \to X_p \in T_p\mathbb{R}^3$. Si $\varphi = \varphi(u, v)$ és una parametrització local de S llavors podem escriure

$$X = X(u, v) = \sum_{i=1}^{3} X^i(u, v)\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.11}$$

on $X^i(u, v) = (X^i \circ \varphi)(u, v)$. Diem que el camp vectorial X és diferenciable si les funcions components $X^i = X^i(u, v)$ són diferenciables (notem que aquesta condició no depèn de l'elecció de la parametrització local).

Comentari 6.1.25. Notem que la restricció a S d'un camp diferenciable definit en un obert de $\mathbb{R}^3$ és un camp vectorial sobre S.

Exemples 6.1.26. 1) L'aplicació de Gauss $\nu\colon S \to S^2$ és un camp diferenciable.

2) Si $\varphi = \varphi(u, v)$ és una parametrització local de S, llavors $\varphi_u = \frac{\partial}{\partial u}$ i $\varphi_v = \frac{\partial}{\partial v}$ són camps vectorials diferenciables tangents a S.

Comentari 6.1.27. Diem que el camp vectorial X definit a (6.11) és **tangent a** S si es compleix $X_p \in T_pS$ per a tot $p \in S$. En aquest cas localment s'escriurà

$$X = X^1\,\varphi_u + X^2\,\varphi_v.$$

La Proposició 6.1.21 que assegura l'existència d'integrals primeres en un entorn d'un punt no singular d'un camp vectorial també és vàlida per a camps tangents a una superfície.

Exercici 6.1.28. Siguin S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$, U un obert de $\mathbb{R}^3$ i $X \in \mathcal{X}(U)$ tal que la seva restricció a S és tangent a S. Demostreu que les corbes integrals de X que passen per punts de S estan totalment contingudes en S.

Proposició 6.1.29. *Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$ i siguin X, Y camps vectorials diferenciables tangents a S tals que en un punt $p \in S$ els vectors $X_p, Y_p \in T_pS$ són linealment independents. Hi ha una parametrització local $(\Omega, \varphi = \varphi(u, v))$ de S, amb $p \in \varphi(\Omega)$, tal que*

$$X = \lambda\, \varphi_u, \qquad Y = \mu\, \varphi_v.$$

Demostració. Siguin f i g integrals primeres de X i Y respectivament, definides en un entorn W de p. Aleshores, per a tot punt $q \in W$, es compleix $df_q(X_q) = 0$ i $df_q(Y_q) = a(q) \neq 0$, així com $dg_q(X_q) = b(q) \neq 0$ i $dg_q(Y_q) = 0$. Considerem la funció F definida per $F = (g, f)\colon W \subset S \to \mathbb{R}^2$. Llavors, si prenem els vectors $\{X_q, Y_q\}$ com a base de T_qS i els vectors $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ com a base de $T_{F(q)}\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, la matriu que representa dF_q és

$$dF_q = \begin{pmatrix} b(q) & 0 \\ 0 & a(q) \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

D'aquí es desprèn que F transforma les corbes integrals dels camps vectorials X i Y en les línies coordenades $v = const.$ i $u = const.$ de $\mathbb{R}^2$, respectivament. També resulta de (6.12) que dF_p és no singular i per tant que F és un difeomorfisme d'un entorn de p en S sobre un obert Ω de $\mathbb{R}^2$. Aleshores $(\Omega, \varphi = F^{-1})$ és una parametrització local de S que compleix les condicions de la proposició. □

Corol·lari 6.1.30. *Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Donat un punt $p \in S$, hi ha una parametrització local $\varphi = \varphi(u, v)$, amb imatge contenint un entorn de p, que és ortogonal, és a dir complint $F = 0$.*

Demostració. Sigui $\psi = \psi(\bar{u}, \bar{v})$ una parametrització qualsevol de S i siguin E_ψ, F_ψ, G_ψ els coeficients de la primera forma fonamental de S en aquesta parametrització. Definim els camps vectorials

$$X = \psi_{\bar{u}}, \qquad Y = \psi_{\bar{v}} - \frac{F_\psi}{E_\psi}\, \psi_{\bar{u}}.$$

Llavors X i Y són ortogonals i l'enunciat resulta de la proposició anterior aplicada a aquests camps. □

6.2 Àlgebra multilineal

Sigui E un espai vectorial de dimensió n i sigui E^* el seu espai dual. Els elements de E^* s'anomenen **formes lineals**. Donada una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E i denotarem per $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ la corresponent base dual.

Definició 6.2.1. Una **aplicació multilineal de grau** k

$$\omega\colon E \times \overset{k}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diu **alternada** (o antisimètrica) si compleix

$$\omega\big(u_{\sigma(1)}, \ldots u_{\sigma(k)}\big) = \epsilon(\sigma)\, \omega\big(u_1, \ldots, u_k\big) \qquad \forall \sigma \in S_k$$

on S_k denota el grup de permutacions de k elements i $\epsilon(\sigma) = \pm 1$ és la signatura de la permutació $\sigma \in S_k$.

Exemples 6.2.2. 1) Donats $\alpha, \beta \in E^*$, l'aplicació $\alpha \otimes \beta \colon E \times E \to \mathbb{R}$, definida per

$$\alpha \otimes \beta(v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w),$$

és bilineal i l'aplicació

$$\alpha \wedge \beta := \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$$

és bilineal i alternada.

2) L'aplicació determinant

$$\begin{array}{rcl} \det \colon \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det(u_1, \dots, u_n) \end{array}$$

és una aplicació multilineal alternada.

Exercicis 6.2.3. 1) Demostreu que una aplicació multilineal $\omega \colon E \times \overset{k}{\cdots} \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ és alternada si i només si ω s'anul·la sempre que dos dels arguments són iguals, i.e. si $\omega(\dots, u, \dots, u, \dots) = 0$.

2) Sigui $E = \mathbb{R}^4$. Comproveu que l'aplicació $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ no és **descomposable**, és a dir que no es pot escriure en la forma $\alpha \wedge \beta$.

Definició 6.2.4. Es denota per $\Lambda^k E^*$ l'espai vectorial de les aplicacions k-multilineals alternades. Els elements de $\Lambda^k E^*$ s'anomenen **formes multilineals**. Notem que $\Lambda^1 E^* = E^*$. Per conveni es posa $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ i es denota

$$\Lambda^* E^* = \bigoplus_k \Lambda^k E^* \tag{6.13}$$

Comentari 6.2.5. Notem que, si $m > n = \dim E$, aleshores $\Lambda^m E^* = 0$.

Definició 6.2.6. Donats $\alpha \in \Lambda^p E^*$ i $\beta \in \Lambda^q E^*$, es defineix el seu **producte exterior** com l'aplicació multilineal $\alpha \wedge \beta$ definida per

$$\alpha \wedge \beta\, (u_1, \dots, u_{p+q}) = \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \epsilon(\sigma)\, \alpha\big(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}\big) \cdot \beta\big(u_{\sigma(p+1)}, \dots, u_{\sigma(p+q)}\big). \tag{6.14}$$

Comentari 6.2.7. Notem que la definició de producte exterior coincideix amb la definició de $\alpha \wedge \beta$ donada a l'Exemple 6.2.2 quan $\alpha, \beta \in \Lambda^1 E^* = E^*$. Notem també que, en aquest cas, es compleix $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

Proposició 6.2.8. *Siguin $\alpha \in \Lambda^p E^*$, $\beta \in \Lambda^q E^*$ i $\gamma \in \Lambda^r E^*$. Es compleix*

a) $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} E^*$ *(i.e. $\alpha \wedge \beta$ és alternada).*

b) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

c) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha$.

Demostració. a) Cal veure que $(\alpha \wedge \beta)\big(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(p+q)}\big) = \epsilon(\tau)\, (\alpha \wedge \beta)\big(u_1, \dots, u_{p+q}\big)$. Tenim

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)\big(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(p+q)}\big) &= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \epsilon(\sigma)\, \alpha\big(u_{\sigma\tau(1)}, \dots, u_{\sigma\tau(p)}\big) \cdot \beta\big(u_{\sigma\tau(p+1)}, \dots, u_{\sigma\tau(p+q)}\big) \\ &\overset{\rho = \sigma\tau}{=} \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\rho \in S_{p+q}} \epsilon(\sigma)\, \alpha\big(u_{\rho(1)}, \dots, u_{\rho(p)}\big) \cdot \beta\big(u_{\rho(p+1)}, \dots, u_{\rho(p+q)}\big) \\ &= \epsilon(\tau)\, (\alpha \wedge \beta)\big(u_1, \dots, u_{p+q}\big), \end{aligned}$$

ja que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\rho)\epsilon(\tau^{-1}) = \epsilon(\tau)\epsilon(\rho)$. Deixem les parts b) i c) com exercici. $\square$

Proposició 6.2.9. *Siguin* $\omega^1, \dots, \omega^k \in E^* = \Lambda^1 E^*$. *Es compleix*

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k\big(u_1, \dots, u_k\big) = \begin{vmatrix} \omega^1(u_1) & \cdots & \omega^1(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^k(u_1) & \cdots & \omega^k(u_k) \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

Demostració. Provem-ho per inducció sobre k. El cas $k = 1$ és evident. Suposem-ho cert fins a $k-1$.

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k\big(u_1, \dots, u_k\big) &= \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_1, \dots, u_k\big) \\
&= \frac{1}{1!\,(k-1)!} \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma)\, \omega^1(u_{\sigma(1)})\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \sigma(1) = i}} \epsilon(\sigma)\, \omega^1(u_i)\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big) \\
&\overset{(?)}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\, \omega^1(u_i)\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k\big) \\
&\overset{H.I.}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\, \omega^1(u_i) \begin{vmatrix} \omega^2(u_1) & \cdots & \widehat{\omega^2(u_i)} & \cdots & \omega^2(u_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega^k(u_1) & \cdots & \widehat{\omega^k(u_i)} & \cdots & \omega^k(u_k) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \omega^1(u_1) & \cdots & \omega^1(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^k(u_1) & \cdots & \omega^k(u_k) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Observem que hi ha $(k-1)!$ permutacions $\sigma \in S_k$ amb $\sigma(1) = i$. Per demostrar la igualtat (?) és suficient provar que cada una d'elles compleix

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\sigma)\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big) \\
&\qquad\qquad = (-1)^{i+1}\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k\big).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Comprovem doncs aquesta identitat. Notem que la permutació

$$(1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, k) \xmapsto{\tau} (\sigma(2), \dots, \sigma(k))$$

compleix $\epsilon(\sigma) = (-1)^{i-1}\epsilon(\tau)$ ja que σ és la composició $\sigma = \tilde{\tau} \circ \kappa$, on

$$(1, 2, \dots, i, \dots, k) \xmapsto{\kappa} (i, 1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, k) \xmapsto{\tilde{\tau}} (i, \sigma(2), \dots, \sigma(k)),$$

i clarament $\epsilon(\kappa) = (-1)^{i-1}$ i $\epsilon(\tilde{\tau}) = \epsilon(\tau)$. Per tant

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma)\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)&\big(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big) \\
&= (-1)^{i-1}\epsilon(\tau)\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}\big) \\
&= (-1)^{i+1}\, \epsilon(\tau)\, \epsilon(\tau^{-1})\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k\big) \\
&= (-1)^{i+1}\, (\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^k)\big(u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k\big).
\end{aligned}$$

Això prova la igualtat (6.16) i completa la demostració. $\square$

Corol·lari 6.2.10. *Sigui $E = \mathbb{R}^n$ i sigui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canònica. Aleshores es compleix*

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \,(u_1, \ldots, u_n) = \det(u_1, \ldots, u_n). \tag{6.17}$$

Comentari 6.2.11. Notem que l'anterior proposició també implica la següent relació. Sigui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E i sigui $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la corresponent base dual. Suposem que $\{i_1, \ldots, i_k\}$ i $\{j_1, \ldots, j_k\}$ són dos conjunts de k índexs (diferents). Llavors

$$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \,(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \{i_1, \ldots, i_k\} = \{j_1, \ldots, j_k\} \\ 0 & \text{en els altres cassos.} \end{cases} \tag{6.18}$$

Proposició 6.2.12. *Sigui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E i sigui $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la corresponent base dual. Donats $\omega \in \Lambda^k E^*$ i $u_1, \ldots, u_k \in E$, es compleix*

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} A_{j_1 \ldots j_k}\, \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}), \tag{6.19}$$

on

$$A_{j_1 \ldots j_k} := \begin{vmatrix} e_{j_1}^*(u_1) & \cdots & e_{j_1}^*(u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j_k}^*(u_1) & \cdots & e_{j_k}^*(u_k) \end{vmatrix} = e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_k}^* \,(u_1, \ldots, u_k). \tag{6.20}$$

Per tant és

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})\, e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_k}^*. \tag{6.21}$$

Demostració. Notem primer que la primera igualtat en (6.20) és la definició dels coeficients $A_{j_1 \ldots j_k}$ mentre que la segona és conseqüència de la Proposició 6.2.9. De fet, si posem $u_j = \sum a_j^i e_i$, llavors $e_i^*(u_j) = a_j^i$ i per tant $A_{j_1 \ldots j_k}$ és el menor $j_1, \ldots, j_k$ de la matriu rectangular

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_k^n \end{pmatrix}$$

Amb aquesta notació tenim

$$\begin{aligned} \omega(u_1, \ldots, u_k) &= \omega\,\Big(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k} a_k^{j_k} e_{j_k}\Big) = \sum_{j_1 \ldots j_k} a_1^{j_1} \cdots a_k^{j_1}\, \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} a_1^{\sigma(j_1)} \cdots a_k^{\sigma(j_1)}\, \omega\big(e_{\sigma(j_1)}, \ldots, e_{\sigma(j_k)}\big) \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma)\, a_1^{\sigma(j_1)} \cdots a_k^{\sigma(j_1)}\, \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} A_{j_1 \ldots j_k}\, \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \end{aligned}$$

i la igualtat (6.19) queda provada. Finalment, la identitat (6.21) resulta de combinar (6.19) amb (6.20). $\square$

Corol·lari 6.2.13. *El conjunt* $\{e^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{j_k}\mid j_1<\cdots<j_k\}$ *és una base de* $\Lambda^k E^*$. *En particular*

$$\dim\Lambda^k E^* = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

Demostració. La proposició anterior implica que l'espai vectorial $\Lambda^k E^*$ està generat pel conjunt $\{e^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{j_k}\mid j_1<\cdots<j_k\}$. A més els elements del conjunt són linealment independents. En efecte, si

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k}\lambda_{j_1\dots j_k}\, e^*_{j_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{j_k}=0,$$

aplicant aquesta suma a $(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ veiem que ha de ser $\lambda_{j_1\dots j_k}=0$. □

Comentaris 6.2.14. a) Recordem que $\Lambda^m E^*=0$ si $m>n=\dim E$.

b) Notem que $\Lambda^n E^*\cong\mathbb{R}$. De fet, si $\{e_1,\dots,e_n\}$ és base de E llavors

$$\Lambda^n E^* = \{\lambda\, e^*_1\wedge\cdots\wedge e^*_n \mid \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

c) L'aplicació determinant, det, és un element no nul de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$. La proposició que segueix dona una interpretació geomètrica de det que ja hem vist abans.

El següent resultat resulta immediatament de la Proposició 6.2.12

Corol·lari 6.2.15. *Sigui* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *una altra base de* E *i posem* $A=\left(a_i^j\right)$, *on* $v_i=\sum_j a_i^j e_j$. *Aleshores es compleix*

$$v^*_1\wedge\cdots\wedge v^*_n=\det(A)\cdot e^*_1\wedge\cdots\wedge e^*_n. \tag{6.23}$$

Proposició 6.2.16. *Siguin* $\vec v_1,\dots,\vec v_n\in\mathbb{R}^n$. *El volum del paral·lelepípede* P *definit per* $\vec v_1,\dots,\vec v_n$ *està donat per*

$$\operatorname{Vol}P=\left|\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n)\right|. \tag{6.24}$$

Demostració. Podem suposar que els vectors són linealment independents. Demostrem-ho per inducció sobre n. Si $n=1$, és obvi. Suposem-ho cert fins a $n-1$. Observem que

$$\operatorname{Vol}P=\operatorname{Vol}(\vec v_1,\dots,\vec v_n)=\operatorname{Vol}(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1})\cdot h,$$

on h és l'altura de P sobre l'hiperplà $E=\langle\vec v_1,\dots,\vec v_n\rangle\cong\mathbb{R}^{n-1}$. Posem $\vec v_n=\vec u+h\,N$, on $\vec u\in E$ i N és un vector unitari ortogonal a E. Aleshores, per inducció, és

$$\operatorname{Vol}(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1})=\left|\det(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1})\right|\cdot h,$$

però

$$\begin{aligned}\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n)&=\det(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1},\vec u+h\,N)\\&=\det(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1},h\,N)=h\cdot\det(\vec v_1,\dots,\vec v_{n-1}),\end{aligned}$$

i per tant $\operatorname{Vol}P=\left|\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n)\right|$. □

6.3 Formes diferencials

Definició 6.3.1. Sigui U un obert de $\mathbb{R}^n$. Una k**-forma diferencial de grau** k sobre U és una aplicació diferenciable

$$\omega\colon U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$$

Podem pensar $\omega(p) = \omega_p$ com un element de $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ on $T_p\mathbb{R}^n = \{(p,\vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}$.

Comentari 6.3.2. Denotem per $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Una k-forma diferencial ω s'escriu

$$\omega(p) = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \omega_{j_1\dots j_k}(p)\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}. \tag{6.25}$$

La diferenciabilitat de ω equival a la diferenciabilitat de les funcions components $\omega_{j_1\dots j_k}$.

Definició 6.3.3. Denotem per $\Omega^k(U)$ el conjunt de les k-formes diferencials sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ i posem $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$. Llavors $\Omega^k(U)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i un $C^\infty(U)$-mòdul. El producte exterior de formes multilineals passa a les formes diferencials fent

$$(\alpha \wedge \beta)(p) = \alpha(p) \wedge \beta(p). \tag{6.26}$$

Les propietats del producte exterior de formes multilineals establertes a la secció anterior són també vàlides per al producte exterior de formes diferencials definit per (6.26).

Exemple 6.3.4. A $\mathbb{R}^3$,

- Les 0-formes diferencials són les funcions diferenciables.
- Les 1-formes diferencials estan generades per dx, dy, dz, és a dir que són combinacions lineals de la forma
$$\alpha = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$
amb $f_i = f_i(x,y,z)$ funcions diferenciables. Per exemple, $\alpha = x^2y\, dx - e^z\, dy + \sin x\, dz$.
- Les 2-formes diferencials són combinacions lineals de $dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx$, és a dir, són combinacions lineals de la forma
$$\beta = f_1\, dx \wedge dy + f_2\, dy \wedge dz + f_3\, dz \wedge dx$$
amb $f_i = f_i(x,y,z)$ funcions diferenciables. Per exemple $\beta = z^3\, dx \wedge dy + \cos x\, dy \wedge dz - e^{xy}\, dz \wedge dx$.
- Les 3-formes diferencials estan generades per $dx \wedge dy \wedge dz$, és a dir que són de la forma
$$\gamma = f\, dx \wedge dy \wedge dz$$
amb $f = f(x,y,z)$ funció diferenciable. Per exemple $\gamma = e^{x-y} \sin z\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Definició 6.3.5. Una k-forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ defineix una aplicació $C^\infty(U)$-multilineal alternada, que denotarem pel mateix símbol ω, donada per

$$\begin{array}{rccc} \omega\colon & \mathcal{X}(U) \times \overset{k}{\cdots} \times \mathcal{X}(U) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ & (X_1, \dots, X_k) & \longmapsto & \omega(X_1, \dots, X_k) \end{array} \tag{6.27}$$

on $\omega(X_1, \dots, X_k)$ és la funció definida per $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_p\big((X_1)_p, \dots, (X_k)_p\big)$.

Comentari 6.3.6. Observem que la forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ està unívocament determinada per la seva acció sobre els camps vectorials indicada per (6.27). De fet, per determinar ω és suficient conèixer la seva acció sobre k-uples de vectors de la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Exercici 6.3.7. Calculeu la funció $\alpha(X, Y)$ on

$$\alpha = z^3 dx \wedge dy, \qquad X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = e^x\frac{\partial}{\partial x} - \sin z\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Definició 6.3.8. Donada una funció $h \in C^\infty(U)$, es definex la seva **diferencial** com la 1-forma diferencial dh definida per

$$dh = \sum \frac{\partial h}{\partial x^i}\, dx^i = \frac{\partial h}{\partial x^1}\, dx^1 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x^n}\, dx^n. \tag{6.28}$$

Proposició 6.3.9. *Donats $h \in C^\infty(U)$ i $X \in \mathcal{X}(U)$ es compleix*

$$dh(X) = Xh. \tag{6.29}$$

Demostració. Donat un punt $p \in U$ es compleix

$$\begin{aligned} dh(X)(p) = dh(p)\,(X_p) &= \Big(\sum_i \frac{\partial h}{\partial x^i}(p)\, dx^i\Big)\,\Big(\sum_j X^j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \\ &= \sum_j X^j(p)\frac{\partial h}{\partial x^j}(p) = X_p(h) = Xh(p), \end{aligned}$$

d'on resulta $dh(X) = Xh$ com volíem provar. □

Comentari 6.3.10. Notem que la 1-forma diferencial $dx^i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ es pot pensar com la diferencial de la funció coordenada $h(x^1, \ldots, x^n) = x^i$. Observem també que es compleix

$$dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Definició 6.3.11. Sigui $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable. Sigui $k \geq 1$. Es defineix el **pull-back per** f com l'aplicació lineal

$$f^*\colon \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U) \tag{6.30}$$

definida per

$$(f^*\omega)\big(X_1, \ldots, X_k\big)(p) = \omega_{f(p)}\big(df_p(X_1), \ldots, df_p(X_k)\big). \tag{6.31}$$

Si $h \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ es defineix el pull-back $f^*h \in \Omega^0(U)$ com

$$f^*h = h \circ f. \tag{6.32}$$

Proposició 6.3.12. *Siguin $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ i $g\colon V \subset \mathbb{R}^m \to W \subset \mathbb{R}^r$ aplicacions diferenciables i siguin $\omega \in \Omega^k(V)$ i $\eta \in \Omega^k(V)$. Es compleix*

a) $f^*(a\,\omega + b\,\eta) = a\,f^*\omega + b\,f^*\eta \qquad$ *on* $\quad a, b \in \mathbb{R}$.

b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

c) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

d) *Si* $h \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ *llavors*

$$f^* dh \;=\; d(h \circ f) \;=\; d(f^* h). \tag{6.33}$$

Demostració. Les dues primeres afirmacions es comproven de manera directa a partir de les definicions i la tercera és conseqüència de la regla de la cadena. Per demostrar d), comprovem primer que si $Y \in \mathcal{X}(U)$ llavors es compleix

$$df(Y)(h) = Y(h \circ f). \tag{6.34}$$

Denotem per $(x^1, \ldots, x^n)$ i per $(y^1, \ldots, y^m)$ les coordenades de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ respectivament i posem $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$. Llavors

$$df(Y) = \sum_{i,k} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} Y^i \frac{\partial}{\partial y^k}$$

i per tant

$$\begin{aligned} df(Y)(h) &= \sum_{i,k} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} Y^i \frac{\partial h}{\partial y^k} = \sum_{i,k} Y^i \frac{\partial h}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \\ &= \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} (h \circ f) = Y(h \circ f). \end{aligned}$$

D'aquí deduïm

$$(f^* dh)(Y) = dh(df(Y)) = df(Y)(h) = Y(h \circ f) = d(h \circ f)(Y).$$

Això prova la primera igualtat de (6.33). La segona resulta de la definició (6.32). □

D'aquesta proposició es desprèn el resultat següent.

Corol·lari 6.3.13. *Sigui* $f \colon U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ *una aplicació diferenciable i siguin* $\omega \in \Omega^k(V)$, $h \in \Omega^0(V)$. *Aleshores es compleix*

a) $f^*(h \cdot \omega) = (h \circ f) \cdot f^* \omega$.

b) $f^* dy^i = d(y^j \circ f) = df^j \qquad$ *on* $f = (f^1, \ldots, f^m)$.

c) *Si* $\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega_{j_1 \cdots j_k} \, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}$, *llavors*

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= f^* \Big(\sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega_{j_1 \cdots j_k} \, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \Big) \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (\omega_{j_1 \cdots j_k} \circ f) \, df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Definició 6.3.14. Siguin $X \in \mathcal{X}(U)$ i $\omega \in \Omega^k(U)$, on $k \geq 1$. Es defineix la **contracció interior** de ω per X com la $(k-1)$-forma diferencial $i_X \omega \in \Omega^{k-1}(U)$ definida per

$$i_X \omega \, (Y_2, \ldots, Y_k) = \omega \, (X, Y_2, \ldots, Y_k) \tag{6.36}$$

Per conveni $i_X h = 0$ si $h \in \Omega^0(U)$.

Deixem com exercici la comprovació del següent resultat.

Proposició 6.3.15. *Siguin $X \in \mathcal{X}(U)$ i $\alpha \in \Omega^k(U)$ i $\beta \in \Omega^m(U)$. Llavors*

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X(\beta). \tag{6.37}$$

Exercici 6.3.16. Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació donada per $f(u,v) = (v^2, \sin(uv), e^{u+v})$ i considerem les formes diferencials $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $\beta \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ i el camp vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ donats per

$$\alpha = z^2\, dx \wedge dy, \qquad \beta = x\, dx \wedge dy \wedge dz, \qquad X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Calculeu

a) $f^*\alpha$, $f^*\beta$.

b) $i_X\alpha$, $i_X\beta$.

Recordem que a $\mathbb{R}^n$ la forma multilineal determinant, det, es pot escriure

$$\det = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*,$$

on $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^n$ (cf. 6.17), i que per tant

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n). \tag{6.38}$$

Així mateix

$$\det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \operatorname{Vol} P$$

on P és el paral·lelepípede definit pels vectors $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ (cf. 6.24). Aquestes consideracions motiven la següent definició.

Definició 6.3.17. La forma diferencial $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ definida per

$$\eta = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{6.39}$$

s'anomena **element de volum** de $\mathbb{R}^n$.

Comentari 6.3.18. Notem que es compleix

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = 1$$

Lema 6.3.19. *L'element de volum $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ està caracteritzat per la següent propietat: si $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ és una base ortonormal positiva de $T_p\mathbb{R}^n$ llavors*

$$\eta_p\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 1. \tag{6.40}$$

Demostració. Posem $\vec{u}_j = \sum a^i_j\, e_i$ i denotem $A = \left(a^i_j\right)$. Aleshores $A \in \mathrm{SO}(n)$ i, en virtut de 6.38, tenim

$$\eta_p(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \det A = 1$$

ja que $A \in \mathrm{SO}(n)$. Suposem ara que $\tau \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ és un altre element que també té la propietat enunciada a (6.40). Notem que $\tau = h \cdot \eta$, on h és una funció. Llavors la condició $\tau_p(e_1, \ldots, e_n) = 1$ implica $h \equiv 1$. $\square$

Proposició 6.3.20. *Sigui* $f\colon U \to V$ *aplicació diferenciable entre oberts de* $\mathbb{R}^n$. *Aleshores*

$$f^*\eta = \mathrm{J}_f \cdot \eta = \det\big(\mathrm{J}(f)\big) \cdot \eta \tag{6.41}$$

on $\mathrm{J}(f)$ *és la matriu jacobiana de* f *i* $\mathrm{J}_f = \det\big(\mathrm{J}(f)\big)$.

Demostració. Utilitzant la Proposició 6.2.9 veiem que es compleix

$$f^*\eta\Big(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big) = df^1\wedge\cdots\wedge df^n\Big(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big)$$
$$= \begin{vmatrix} df^1\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big) & \cdots & df^1\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big) \\ \vdots & & \vdots \\ df^n\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big) & \cdots & df^n\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{J}(f))$$

d'on es dedueix la identitat (6.41). □

Comentari 6.3.21. Si $(y^1,\dots,y^n)$ és un sistema local de coordenades, no necessàriament cartesianes, a l'espai d'arribada V i $(x^1,\dots,x^n)$ és un sistema local de coordenades a l'espai de sortida U, llavors la demostració de la proposició anterior mostra també que es compleix

$$f^*\big(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\big) = \det\big(\mathrm{J}(f)\big)\cdot dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \tag{6.42}$$

Notem que aquesta identitat s'aplica en particular al cas en que f expressa la transformació identitat en dos sistemes de coordenades diferents.

Definició 6.3.22. Donat $k \geq 0$, s'anomena **diferencial exterior** a l'aplicació lineal $d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ definida de la manera següent. Si

$$\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \omega_{j_1\dots j_k}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k},$$

llavors

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j_1<\cdots<j_k} d\omega_{j_1\dots j_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k} \\ &= \sum_{m,\, j_1<\cdots<j_k} \frac{\partial \omega_{j_1\dots j_k}}{\partial x^m}\, dx^m\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Comentari 6.3.23. Notem que si $\omega = h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ llavors l'anterior definició coincideix amb la noció de diferencial de la funció h, dh, donada a la Definició 6.3.8.

Proposició 6.3.24. *La diferencial exterior té les propietats següents:*

a) $d\,(\alpha\wedge\beta) = d\,\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\,\beta$ *(si* $\alpha\in\Omega^k(U)$*).*

b) $d^2 = 0$.

c) $f^*\circ d = d\circ f^*$.

Demostració. La part a) es comprova de forma immediata a partir de les definicions. Atesa la linealitat de l'operador diferencial exterior, per demostrar b) és suficient provar-ho per a formes del tipus $\omega = h\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ i això resulta de la identitat de Schwarz. En efecte

$$\begin{aligned} d^2(h\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d\Big(\sum_j \frac{\partial h}{\partial x^j}\,dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\Big) \\ &= \sum_{m,j} \frac{\partial^2 h}{\partial x^m \partial x^j}\,dx^m \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = 0. \end{aligned}$$

Finalment, demostrem c) per inducció sobre k. El cas $k = 0$ està provat per la identitat 6.33. Provem-ho per $\omega = dx^i \wedge \tau$ amb $\tau \in \Omega^{k-1}(U)$. Es compleix

$$\begin{aligned} (f^* \circ d)\,\omega &= f^*\big(d(dx^i \wedge \tau)\big) = f^*(-dx^i \wedge d\tau) = -f^*(dx^i) \wedge f^* d\tau \\ &\overset{HI}{=} -d\,(x^i \circ f) \wedge d\,f^*\tau = d^2(x^i \circ f) \wedge f^*\tau - d\,(x^i \circ f) \wedge d\,f^*\tau \\ &= d\big(d(x^i \circ f) \wedge f^*\tau\big) = d\big(f^* dx^i \wedge f^*\tau\big) \\ &= (d \circ f^*)(dx^i \wedge \tau) = (d \circ f^*)\,\omega. \end{aligned}$$

I això completa la demostració de la proposició. □

Exercici 6.3.25. Es consideren les formes diferencials de $\mathbb{R}^3$ següents:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos y\,dx + xy^2\,dy + e^{xz}\,dz \\ \beta &= xz^2\,dx \wedge dy \\ \gamma &= \sin y\,dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Calculeu $d\alpha$, $d\beta$ i $d\gamma$.