Segon Lliurament

Geometria Diferencial
(3r curs, Grau en Matemàtiques)
Universitat Autònoma de Barcelona

Marc Graells Ricardo

5 de juny de 2020

Exercici $\mathcal{2}$

Considereu a $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ la 1-forma

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy$$

1. Demostreu que ω és tancada.
2. Proveu que ω no és exacta.
3. Trobeu un obert $U \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ on ω sigui exacta.

Solució **2.1:**

Direm que la 1-forma diferencial del enunciat ω és tancada si es compleix que $d\omega = 0$, és a dir, que la seva derivada exterior és nul·la.

Recordem que

$$\begin{cases} d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2 \\ d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1 \wedge \omega_2) + (-1)^k(\omega_1 \wedge d\omega_2) \end{cases}$$

; i en conseqüència,

$$d\omega = d\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\right)\wedge dx + d\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)\wedge dy$$

A més, com que tenim que $d\omega(x,y) = \omega_x dx + \omega_y dy$, aplicant-ho tenim,

$$d\omega = \left(\frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}dx - \frac{-(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}dy\right)\wedge dx$$

$$+\left(\frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}dy + \frac{-(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}dx\right)\wedge dy$$

I com que $dx\wedge dx = 0$ i $dy \wedge dy = 0$, la suma resultant resulta nul·la, és a dir, $d\omega = 0$. Per tant ω **és tancada**, com volíem veure.

Solució **2.2:**

Volem veure que ω no pot és una 1-forma exacta, és a dir, que no *existeix* ν 0-forma tal que compleixi que $\omega = d\nu$. Recordem que estem considerant $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.

Raonem que per reducció a l'absurd i suposem que si que existeix ν. Com que ω és una 1-forma i aleshores ν buscada és una 0-forma, podem escriure,

$$\omega = d\nu = \nu_x dx + \nu_y dy$$

$$= \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy$$

Integrant (respecte ν, x i y; respectivament) i igualant, tenim

$$\begin{cases} \nu = \displaystyle\int \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx \\ \nu = \displaystyle\int \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy \end{cases}$$

Resolent les integrals obtenim que,

$$\begin{cases} \nu = -\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + K_1(y) \\ \nu = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) + K_2(x) \end{cases}$$

Com que $\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)$ no és continua sobre la recta $x = 1$, tampoc és diferenciable. Això ho podem veure ja que el límit per l'esquerra és $-\pi/2$ i per la dreta $\pi/2$. Anàlogament per $y = 0$, tenim la mateixa problemàtica. Fet que és una contradicció ja que hem suposat ν diferenciable. Per tant, aquí ja podem veure que ω **no és exacta**, com volíem.

Solució **2.3:**

Ara volem trobar $U \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ on ω sigui exacta. Continuant amb la solució del punt anterior **2.2**, queda veurà si poden existir les constants funcions K_2, K_1 que compleixin les condicions anterior equivalents a:

$$K_1(y) - K_2(x) = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{y}\right)$$

Recordant la identitat trigonomètrica que segueix,

$$\arctan(\theta) + \arctan(\phi) = \arctan\left(\frac{\theta+\phi}{1-\theta\phi}\right)$$

I aplicant-la amb $\theta = \left(\frac{x-1}{y}\right)$ i $\phi = \left(\frac{y}{x-1}\right)$ tenim que,

$$K_1(y) - K_2(x) = \arctan\left(\frac{\frac{x-1}{y} + \frac{y}{x-1}}{1 - \frac{y(x-1)}{(x-1)y}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

En conseqüència

$$\nu = \arctan\left(\frac{y}{x-1}\right) - \frac{2}{\pi}$$

compleix $\omega = d\nu$, però si ho mirem al obert

$$\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)|x=1\} \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}.$$

No tenim la problemàtica d'abans, i per tant, tenim un conjunt obert subconjunt del pla menys el punt $(1,0)$ on la 1-forma ω **és exacta en U**.

Exercici $\mathcal{3}$

Comproveu el *Teorema del rotacional* per al camp:

$$X = (-y, x^2 + xz^2, x^2 + y^2 + z^2)$$

i la volta de Viviani.

Solució **3:**

Recordem el *Teorema del rotacional*:

> **Teorema 7.6.9 (Teorema del rotacional):** *Sigui S una superfície orientada de $\mathbb{R}^3$ amb vora i sigui X un camp vectorial definit en un entorn de S. Aleshores,*
>
> $$\int_S rot(X) \cdot dS = \int_{\partial S} X dL$$

Considerem la *volta de Viviani* com a intersecció de les dos superfícies: l'esfera unitat i el cilindre d'equació $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. Que podem parametritzar (com a corba o frontera ∂S) per $\alpha(t) = (cos(t)sin(t), cos^2(t), sin(t))$. Observem que aquesta corba, intersecció de dos superfícies queda al semiespai $y \geq 0$.

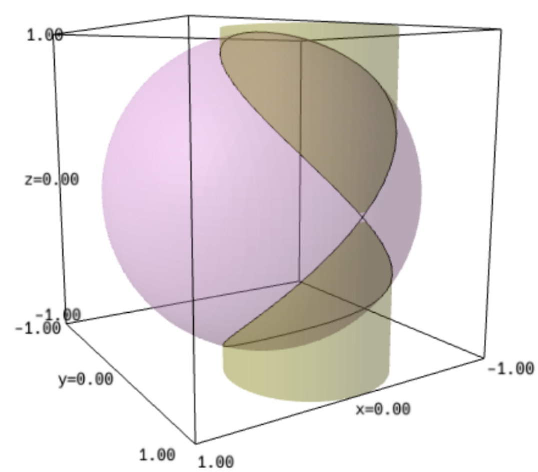

Figura 1: Volta de Viviani com a intersecció d'un con i esfera.

Volem comprovar el *Teorema del rotacional* per a la corba i camp donats. Per tant el que hem de veure és que les anteriors dos integrals del teorema valen el mateix, en aquest cas.

Comencem calculant el vector normal a la superfície ,com és intersecció de dues superfícies, podem fixar una superfície i considerar l'altre com una *condició* a complir pels punts de la corba.

$$N = \varphi_x \wedge \varphi_y = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

i el rotacional del camp X,

$$rot(X) = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_2}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right)$$
$$= \left(0, 0, -3x^2 - y^2 + 2x + 2\right)$$

Calculem ara la primera integral:

$$\int_S rot(X) \cdot dS = \int_S \langle rot(X), N \rangle dydx$$
$$= 2\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} -3x^3 + 2x + 2 - y^2 dx \right) dy$$
$$= -\frac{3\pi}{4}$$

Ara queda calcular la segona integral, recordant que ∂S és equivalent a la traça de la parametrització $\alpha(t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$. Calculant la derivada de α respecte t:

$$\begin{cases} \alpha(t) = (cos(t)sin(t), cos^2(t), sin(t)) \\ \alpha'(t) = (\cos^2(t) - sin^2(2), -2\cos(t)\sin(t), \cos(t)) \end{cases}$$

Aplicant el camp a la corba com a composició d'aplicacions, tenim:

$$X(\alpha(t)) = \Big(-\cos(t)^2,$$
$$\cos(t)^2 \sin(t)^2 + \cos(t)\sin(t)^3,$$
$$\cos(t)^4 + \cos(t)^2 \sin(t)^2 + \sin(t)^2\Big)$$

Realitzant el producte escalar $\langle X(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle$ i integrant, amb l'ajuda d'un manipulador algebraic o amb *paciència*, obtenim:

$$\int_0^{2\pi} \langle X(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle dt = -\frac{3}{4}\pi$$

Obtenint de nou el mateix valor per l'integral, com volíem. Per tant **es compleix** el *Teorema del rotacional* pel camp i corba donats.

***Annex* :**

Pels *escèptics* deixem un codi de `Sagemaths 8.1` amb els *càlculs* de la darrera integral del darrer exercici, i del gràfic per si es vol reproduir la construcció.

```
var('x y z t');
#Cilindre
c_1=implicit_plot3d(x^2 + (y - 1 / 2)^2 -1
/ 4, (x,-1,1), (y,-1,1), (z,-1,1),
opacity=0.4, color='olive');
#Esfera unitat
c_2=implicit_plot3d(x^2 + y^2 +z^2-1,
(x,-1,1), (y,-1,1),(z,-1,1), opacity=0.5,
color='plum');
#Corba de Viviani
c_3=parametric_plot3d((cos(t)*sin(t),cos(t)
*cos(t),sin(t)), (t,0,2*pi), color='black');
c_3+c_1+c_2
```

Codi 1: Volta de Viviani com a intersecció d'un con i una esfera.

```
var('t');
#Components de la corba
x=cos(t)*sin(t);
y=cos(t)*cos(t);
z=sin(t);
#Components composicio corba camp X
A=-y;
B=x^2+x*z^2;
C=x^2+y^2+z^2;
#Camp vectorial
X=vector([A,B,C]);
show('X=',X);
#Parametritzacio corba i primera derivada
alpha(t)=(x,y,z);
diff(alpha,t);
show('alpha(t)',alpha(t));
show("alpha'(t)")
#Producte escalar
show("<X(alpha(t)),alpha'(t)>=",
(X*diff(alpha,t)));
# Calcul Integral
show('Integral=',
(X*diff(alpha,t)).integral(t,0,2*pi));
```

Codi 2: Càlculs de la darrera integral del exercici 3.