

---

# GEOMETRIA DIFERENCIAL

---

Seminari 9

*Corbes sobre superfícies*

---

En aquest seminari considerarem tres tipus de corbes sobre superfícies:

(A) Línies de curvatura, donades per l'equació diferencial de primer ordre

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u' v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

(B) Línies asimptòtiques, donades per l'equació diferencial de primer ordre

$$e (u')^2 + 2f u' v' + g (v')^2 = 0$$

sobre la regió on la curvatura de Gauss  $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$  és negativa.

(C) Geodèsiques, donades per les equacions diferencials de segon ordre

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u' v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0, \quad v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u' v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0.$$

(A) Segueixen les direccions principals

(B) Segueixen direccions amb curvatura normal 0

(C) Segueixen les trajectòries que  
minimitzen la distància (localment)



**§1 Superfícies de revolució.** Recordeu que la superfície de revolució obtinguda fent girar la corba regular  $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ , amb  $a(u) > 0$ , al voltant de l'eix  $OZ$  admet la parametrització

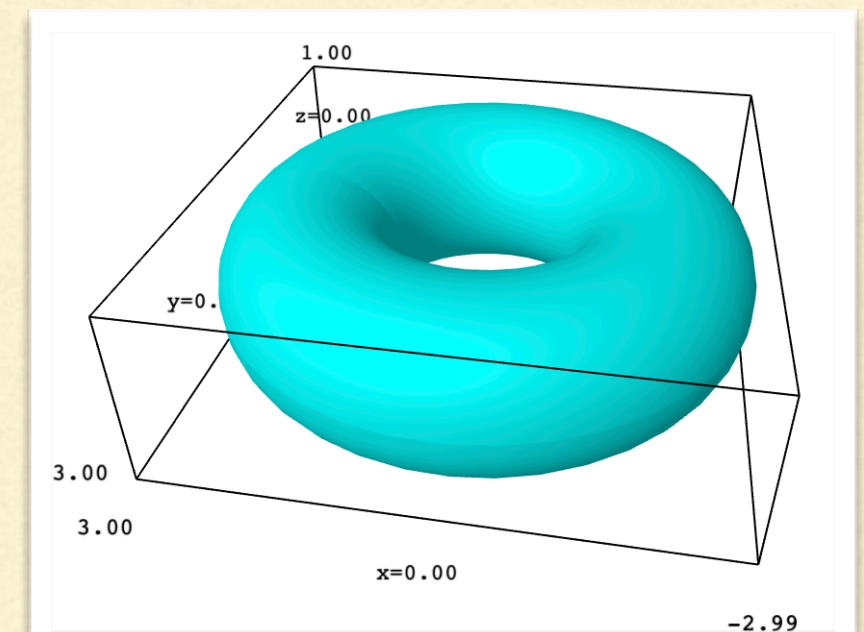
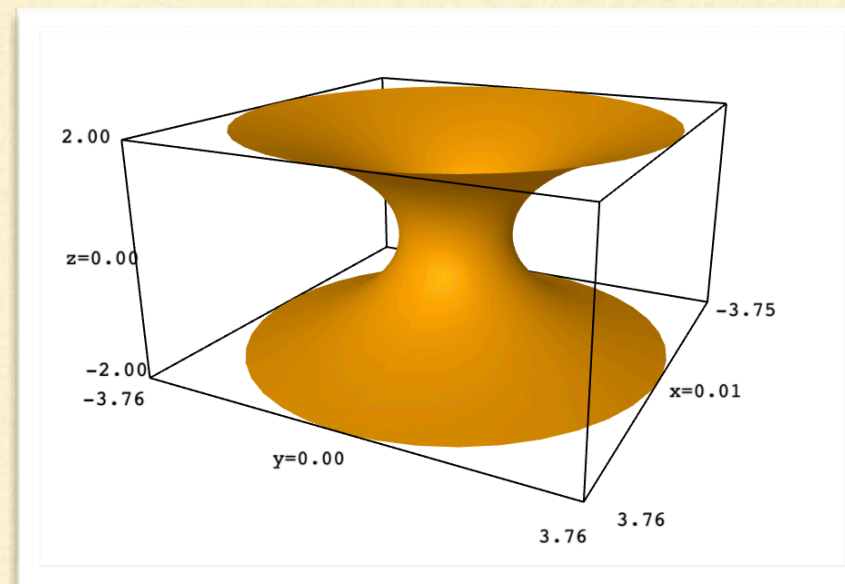
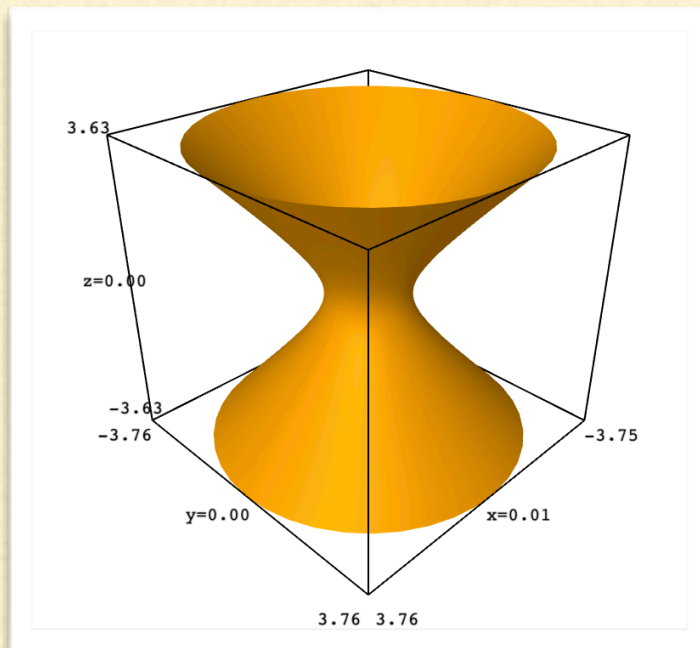
$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$

i els coeficients de les seves primera i segona formes fonamentals són

$$E = (a')^2 + (b')^2, \quad F = 0, \quad G = a^2, \quad e = \frac{a'b'' - a''b'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{ab'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}.$$

Observeu que les línies de curvatura són les línies coordenades: paral·lels i meridians.

**Exercici 9.1.** Comproveu que podem parametritzar les línies asimptòtiques sobre  $\{K \leq 0\}$  com  $v = h(u)$  amb  $h(u) = \pm \int \sqrt{\frac{a''b' - a'b''}{ab'}} du = \pm \int \sqrt{-e/g} du$ .



**Exercici 9.1.** Comproveu que podem parametritzar les línies asimptòtiques sobre  $\{K \leq 0\}$  com  $v = h(u)$  amb  $h(u) = \pm \int \sqrt{\frac{a''b' - a'b''}{ab'}} du = \pm \int \sqrt{-e/g} du$ .

*Suposant  $u' = 1$ , l'equació de les línies asimptòtiques equival a  $v' = \pm \sqrt{-e/g}$ .*

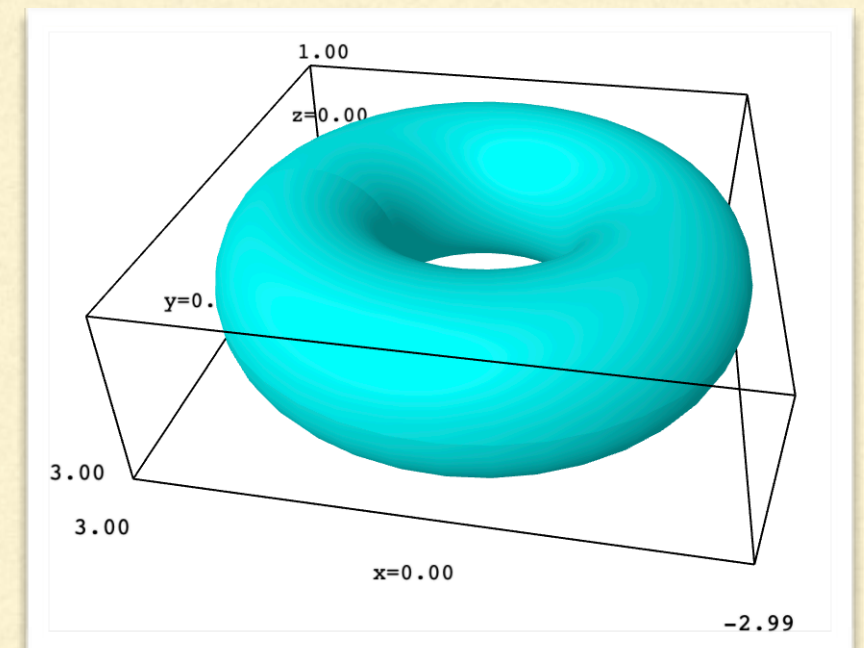
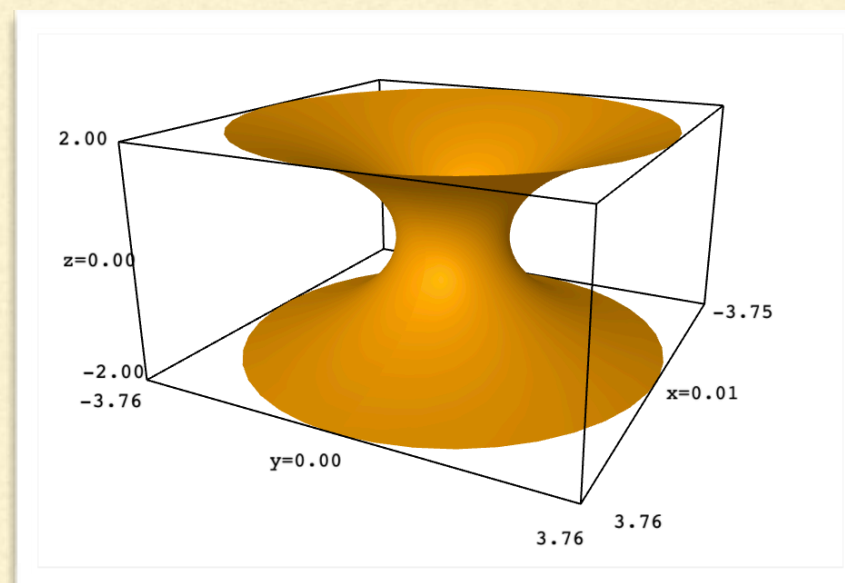
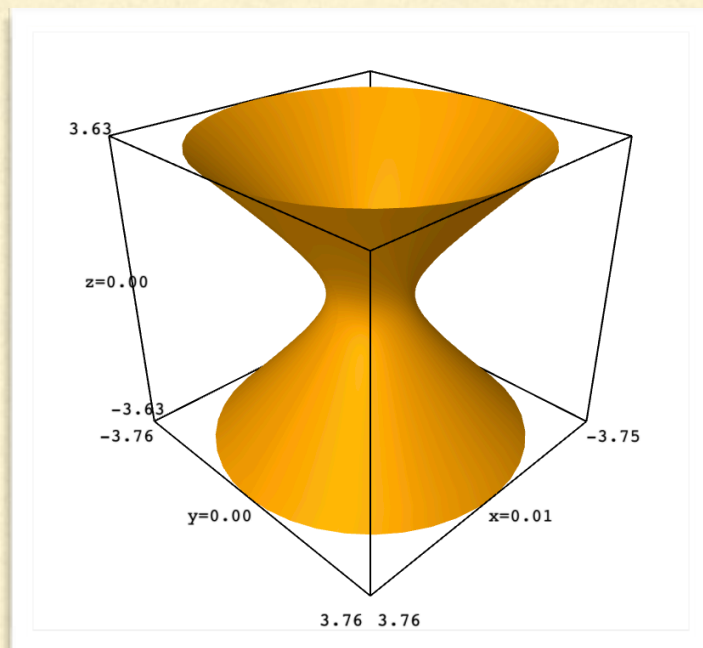


**Exercici 9.2.** Trobeu parametritzacions de les següents superfícies de revolució:

- (a) l'hiperboloide, obtingut a partir de la hipèrbola  $\rho^2 - z^2 = 1$ ,
- (b) la catenoide, obtinguda a partir de la catenària  $\rho = \cosh z$ ,
- (c) el tor, obtingut a partir de la circumferència  $(\rho - R)^2 + z^2 = r^2$ .

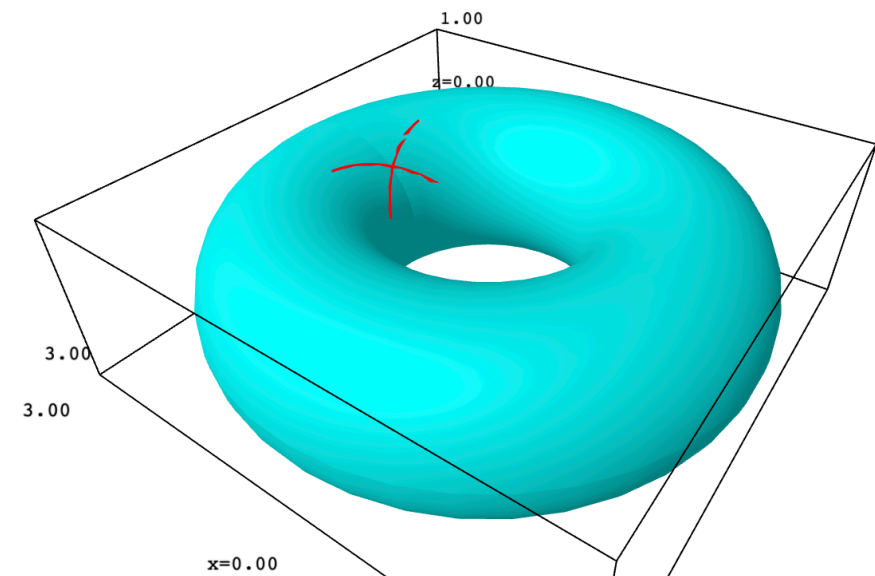
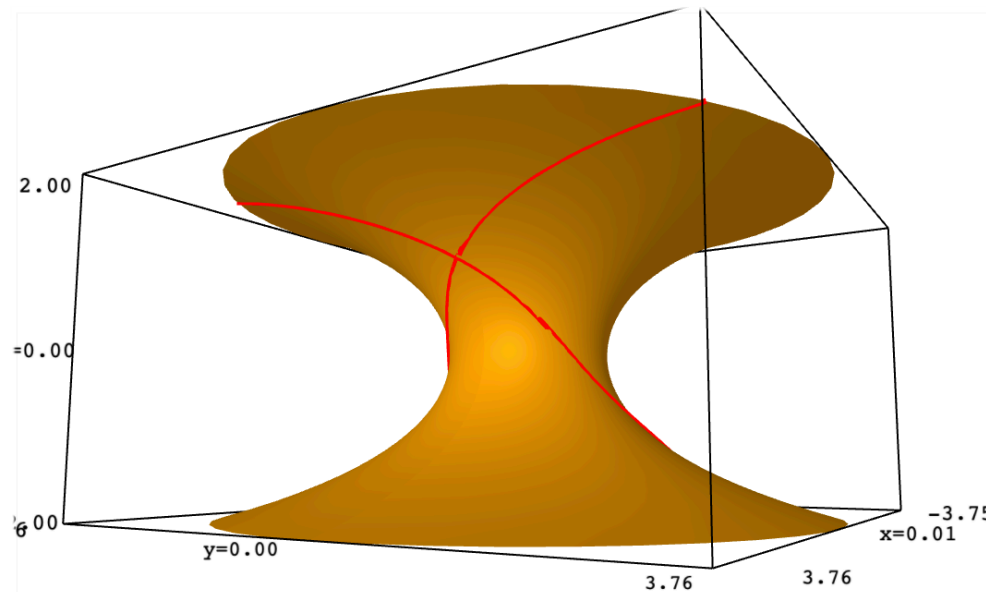
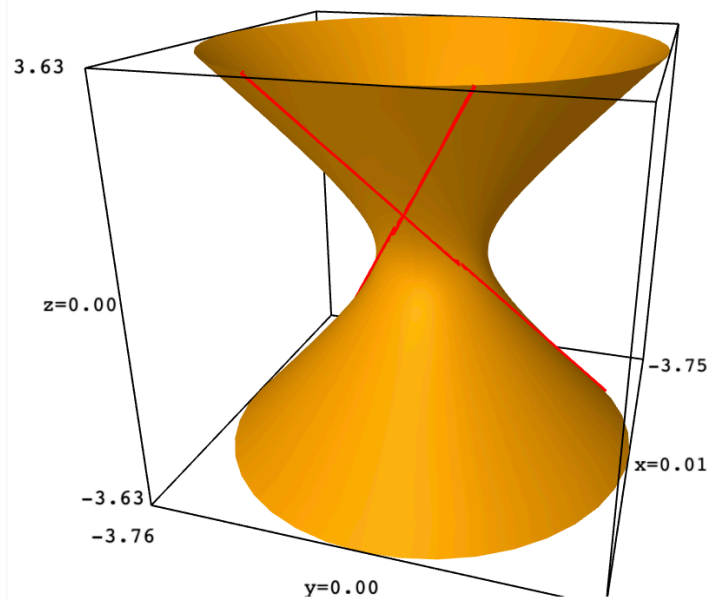
```
hiperboloide = ParametrizedSurface3D((cosh(u)*cos(v),cosh(u)*sin(v),sinh(u)), (u, v), 'Hiperboloide');  
catenoide = ParametrizedSurface3D((cosh(u)*cos(v),cosh(u)*sin(v),u), (u, v), 'Catenoide');  
tor12 = ParametrizedSurface3D(((2+cos(u))*cos(v),(2+cos(u))*sin(v),sin(u)), (u, v), 'Tor');
```

```
hiperbplot=hiperboloide.plot((-2,2), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='orange')  
catenoideplot=catenoide.plot((-2,2), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='orange')  
torplot=tor12.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='cyan')
```



**Exercici 9.3.** Podem fer representacions gràfiques de les superfícies de revolució anteriors amb algunes de les seves línies asimptòtiques i geodèsiques. Per exemple amb **sage** fem les línies asimptòtiques del tor amb radi de rotació  $R = 2$  i radi de la secció  $r = 1$

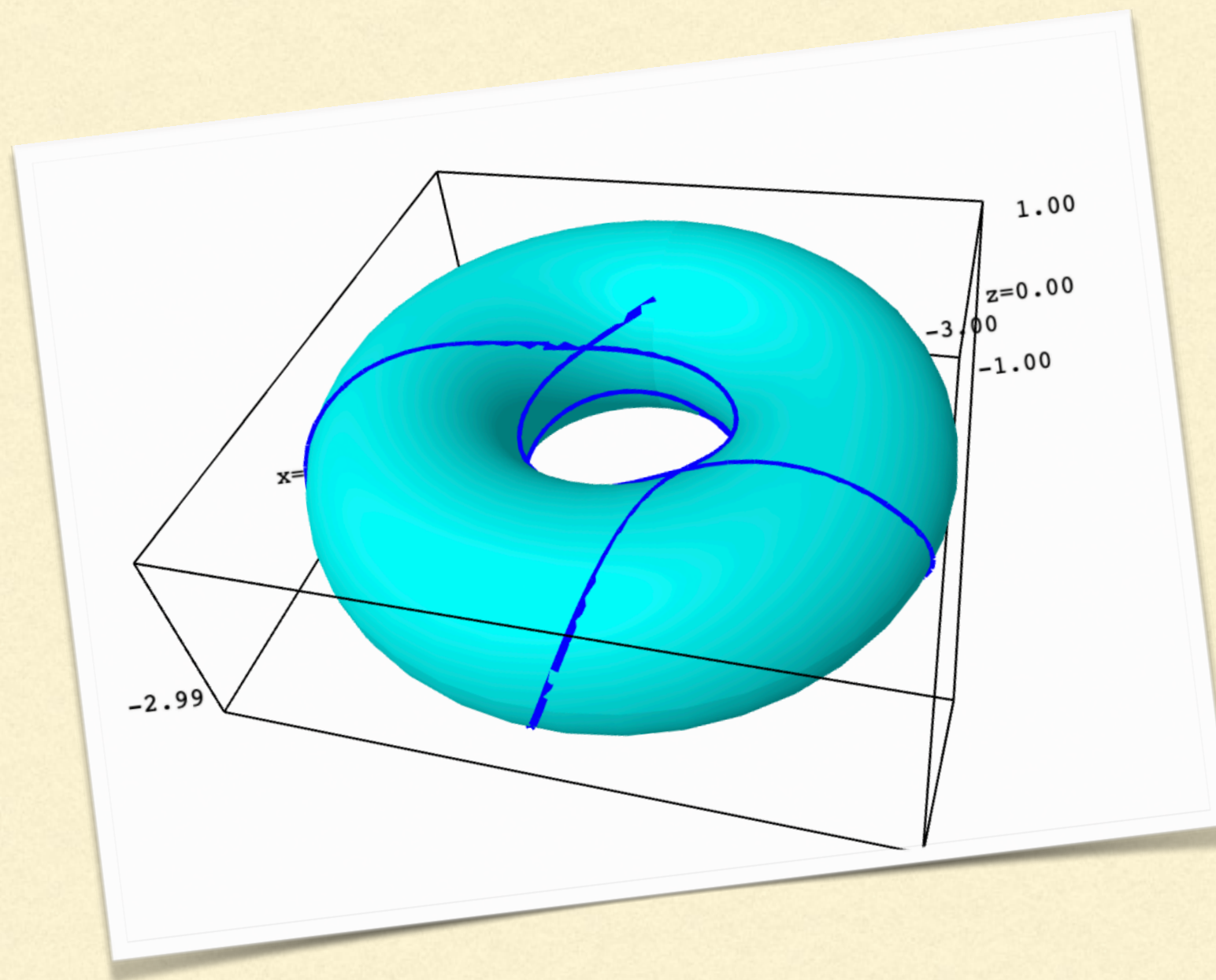
```
var('u','v','t')
tor12 = ParametrizedSurface3D(((2+cos(u))*cos(v),(2+cos(u))*sin(v),sin(u)), (u, v),'Tor')
torplot=tor12.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='cyan')
e=tor12.second_fundamental_form_coefficient((1,1))
g=tor12.second_fundamental_form_coefficient((2,2))
h1=sqrt(-e/g)
inici=pi/2+pi/4 # cal pi/2+pi/4 <= inici <= 3*p/2
def h(u):
    return numerical_integral(h1,inici,u)[0];
lc1tor=parametric_plot3d( [lambda u: (2+cos(u))*cos(h(u)),lambda u: (2+cos(u))*sin(h(u)),lambda u: sin(u)],
                          (u,inici-0.4,inici+0.4),color='red',thickness=3)
lc2tor=parametric_plot3d( [lambda u: (2+cos(u))*cos(-h(u)),lambda u: (2+cos(u))*sin(-h(u)),lambda u: sin(u)],
                          (u,inici-0.4,inici+0.4),color='red',thickness=3)
torplot+lc1tor+lc2tor
```





Procediu de manera similar amb les altres superfícies. Per dibuixar geodèsiques podem fer servir la rutina interna de sage. Per exemple la geodèsica pel punt de coordenades  $(\pi/2 + \pi/4, 0)$  amb direcció  $(1, 1)$  en el tor es pot dibuixar fent el següent:

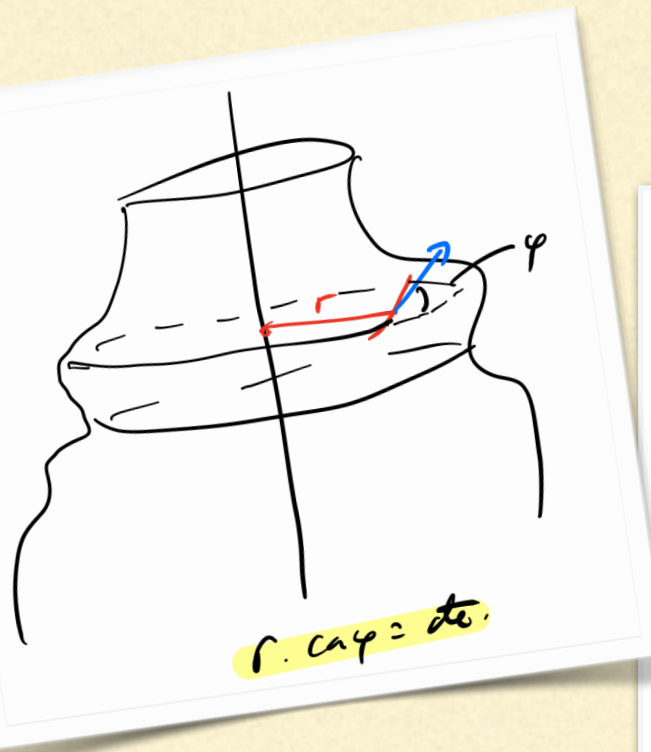
```
g1 = [c[-1] for c in tor12.geodesics_numerical((pi/2+pi/4,0),(1,1),(0,30,100))];  
geotor = line3d(g1,color='blue',thickness=5);  
torplot+geotor
```



**Exercici 9.4.** El teorema de Clairaut afirma que el producte de la distància a l'eix de gir pel cosinus de l'angle que forma amb els paral·lels roman constant al llarg de tota geodèsica d'una superfície de revolució. Comproveu que aquesta relació s'escriu

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{(a')^2 + (b')^2}{a^2 - c^2}} = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{E}{G - c^2}}$$

amb  $c$  constant.



**Solució:** Sigui  $\alpha(u) = \varphi(u, v(u))$  pre-geodèsica. Com que  $a = \sqrt{G}$  = distància a l'eix,  $\varphi_v$  = direcció paral·lels i  $\alpha' = \varphi_u + v'\varphi_v$ , el teorema de Clairaut diu

$$c = a \frac{\langle \alpha', \varphi_v \rangle}{|\alpha'| |\varphi_v|} = \frac{a^2 v'}{|\alpha'|}$$

ja que  $F = 0$ . Deduïm que

$$(v')^2 = \frac{c^2 |\alpha'|^2}{a^4} = \frac{c^2}{a^4} (E + (av')^2)$$

i aïllant

$$(v')^2 = \frac{c^2}{a^2} \frac{E}{a^2 - c^2}.$$



**Exercici 9.5.** Utilitzant la parametrització de la tractriu donada per  $a(u) = \operatorname{sech} u$  i  $b(u) = u - \tanh u$  comproveu que la relació de Clairaut sobre la pseudoesfera es pot escriure com

$$\cosh^2 u + (v - v_0)^2 = k^2,$$

amb  $k = 1/c$ . Podem fer una representació gràfica de la pseudoesfera amb algunes de les seves geodèsiques parametritzant  $u = \operatorname{arccosh}(k \cos \theta)$  i  $v = k \sin \theta$  amb  $|\theta| \leq \arccos(1/k)$ . (També ho podeu fer amb les tècniques pròpies de **sage**.) Veieu com ‘tornen’ les geodèsiques!

**Solució:** Tenim  $a = \frac{1}{\cosh u}$ ,  $b = u - \tanh u$ . I operant una mica trobem

$$E = \tanh^2 u, F = 0, G = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Fem servir l’expressió de  $dv/du$  de l’exercici 4 i obtenim, després de simplificar,

$$v' = \pm \frac{c \sinh u \cosh u}{\sqrt{1 - c^2 \cosh^2 u}}$$

Integrant per canvi de variables trobem

$$v = \pm \frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 u} + v_0$$

d’on es dedueix l’enunciat.

```

> pseudo = ParametrizedSurface3D((sech(u)*cos(v),sech(u)*sin(v),u-tanh(u)),
(u, v),'Pseudosfera');
> pseudoplot=pseudo.plot((0,4), (0,2*pi),aspect_ratio=1, color='cyan')
> g2 = [c[-1] for c in pseudo.geodesics_numerical((2,0),(1.2,1),(0,5,100))];
> geopseudo=line3d(g2,color='blue',thickness=5);
> pseudoplot+geopseudo

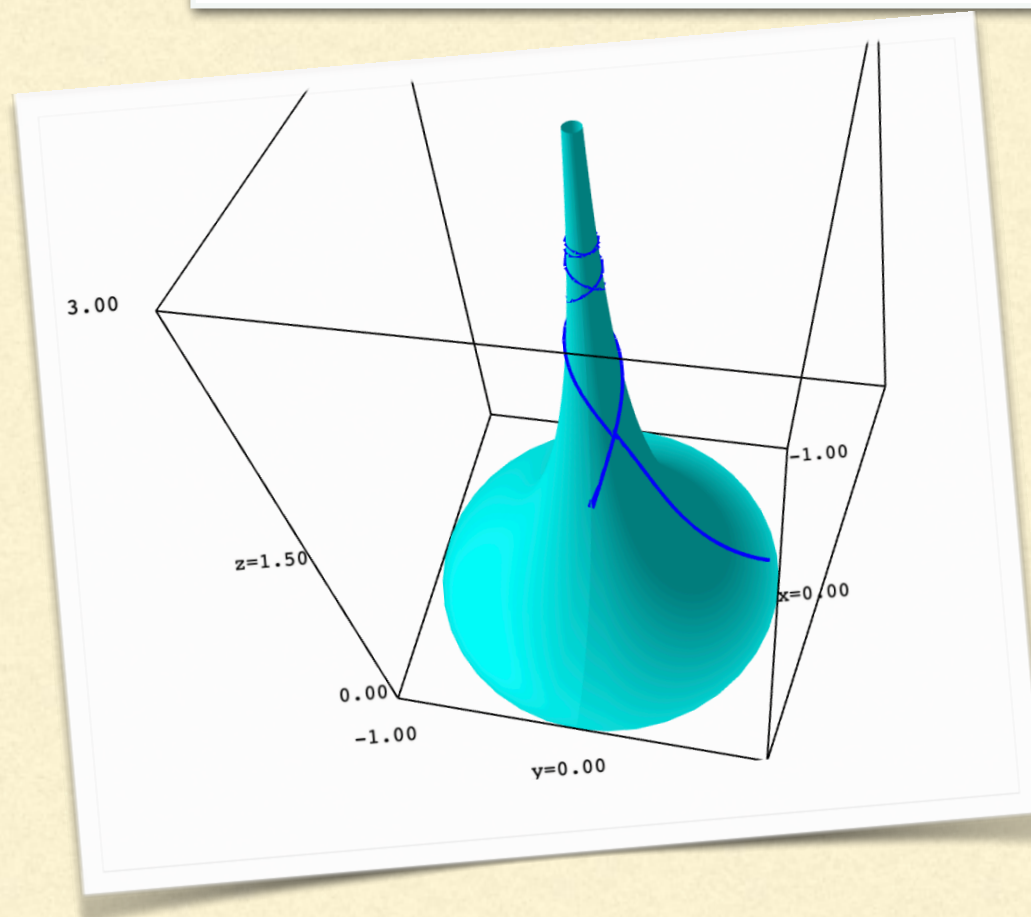
```

*o bé*

```

> k=7;
> var('theta');
> fu=arccosh(k*cos(theta));
> fv=k*sin(theta);
> parametric_plot3d([sech(fu)*cos(fv),sech(fu)*sin(fv),fu-tanh(fu)],
(theta,arccos(1/k),arccos(1/k)),color='red',thickness=3)+pseudoplot

```





**§2 Tubs amb radi constant.** Recordeu que si  $\alpha(u)$  és una corba parametritzada per l'arc amb triedre de Frenet  $T, N, B$  aleshores el tub  $S$  de radi constant  $r > 0$  al voltant de  $\alpha$  admet la parametrització

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + r \cos v N(u) + r \sin v B(u)$$

i els coeficients de les seves primera i segona forma fonamental són

$$E = (1 - r\kappa c)^2 + r^2\tau^2, \quad F = -r^2\tau, \quad G = r^2, \quad e = \kappa c(r\kappa c - 1) + r\tau^2, \quad f = -r\tau, \quad g = r,$$

on  $\kappa = \kappa(u)$  i  $\tau = \tau(u)$  són la curvatura i la torsió de  $\alpha$  i  $c = \cos v$ .

**Solució:** *Es dedueixen de*

$$\begin{aligned} \nu &= \cos(v)N(u) + \sin(v)B(u) \\ \nu_u &= -\cos(v)\kappa(u)T(u) - \cos(v)\tau(u)B(u) + \sin(v)\tau(u)N(u) \\ \nu_v &= -\sin(v)N(u) + \cos(v)B(u) \end{aligned}$$

**Exercici 9.6.** Comproveu que les línies de curvatura són els cercles *verticals*  $u = u_0$  i les corbes *horitzontals*  $v = \int \tau(u) du$ .

**Solució:**  $\phi_v$  és direcció principal ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = Fg - Gf = -r^3\tau + r^3\tau = 0$$

Com que  $\phi_u + \tau\phi_v$  és ortogonal a  $\phi_v$ , també és direcció principal.

**Exercici 9.7.** Si  $\alpha$  és una corba tancada aleshores  $S$  és un tor (posiblement anusat). Comproveu que les línies de curvatura horitzontals de  $S$  són tancades si i només si  $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau(u) du \in \mathbb{Q}$  on  $L$  és la longitud de la corba tancada  $\alpha(u)$ .

**Solució:** La corba donada per  $(u, v(u))$  serà tancada si i només si  $v(qL) = v(0) + 2p\pi$ . Això s'escriu  $v(0) + q \int_0^L \tau(u) du = v(0) + 2p\pi$ , hem acabat.

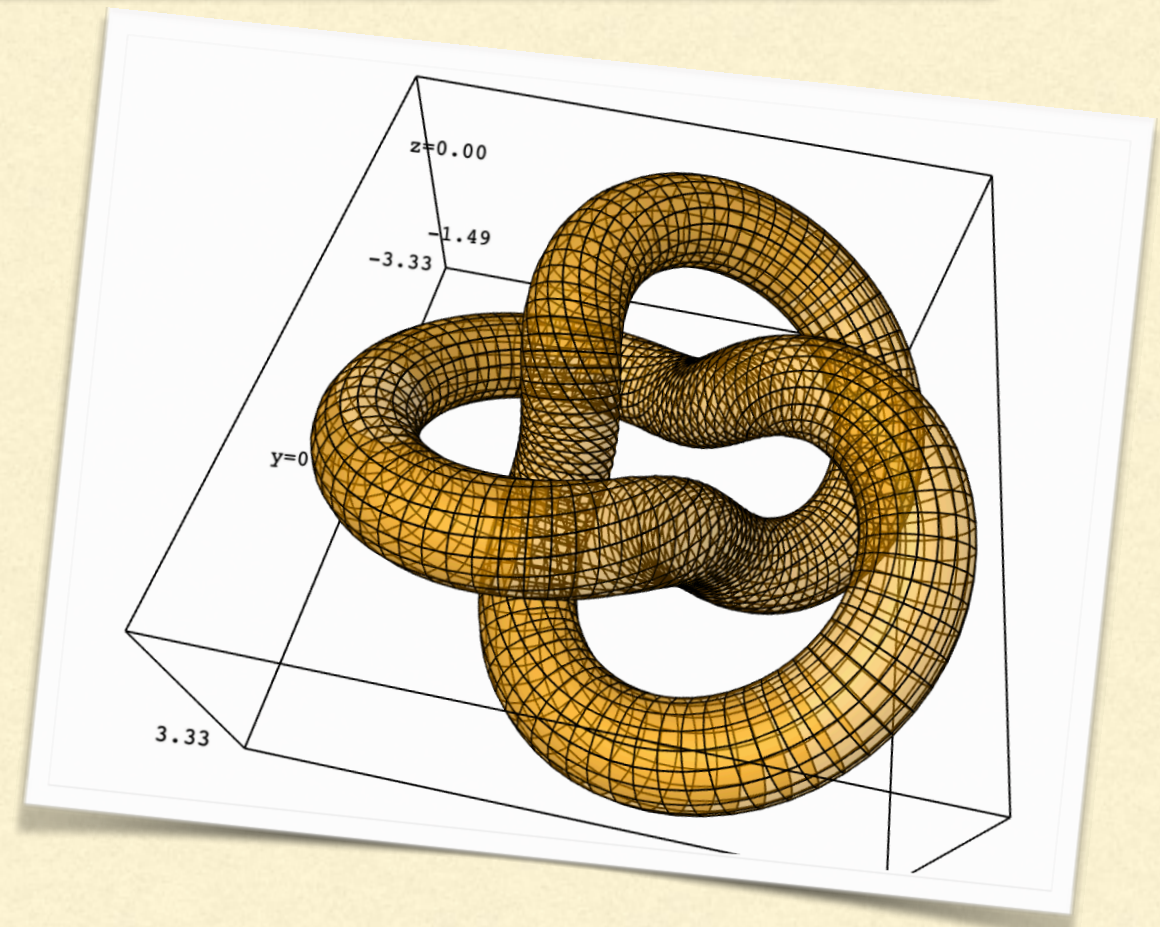
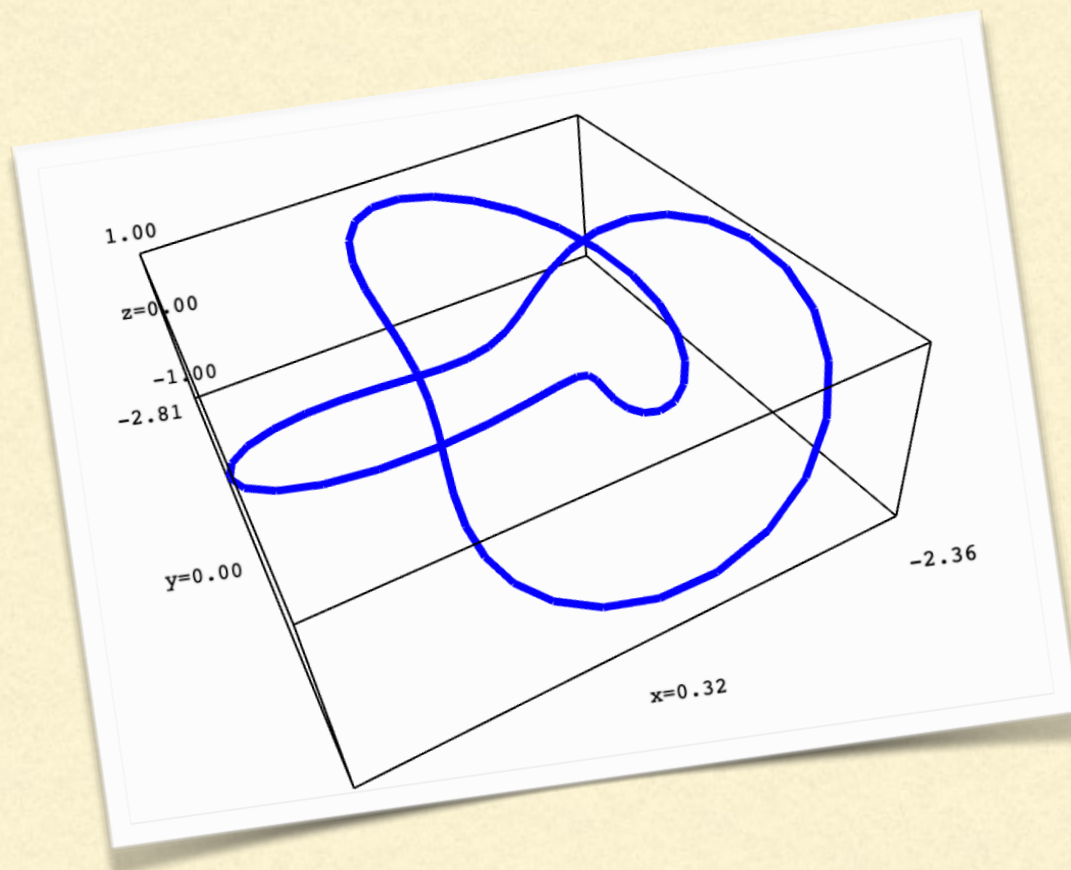


**Exercici 9.8.** Considereu el cas del nus trèvol parametritzat per

$$\alpha(t) = ((2 + \cos(3t)) \cos(2t), (2 + \cos(3t)) \sin(2t), \sin(3t)) \quad \text{amb } t \in [0, 2\pi].$$

Representem gràficament el tub al voltant de  $\alpha$  amb radi  $r = 0.5$ .

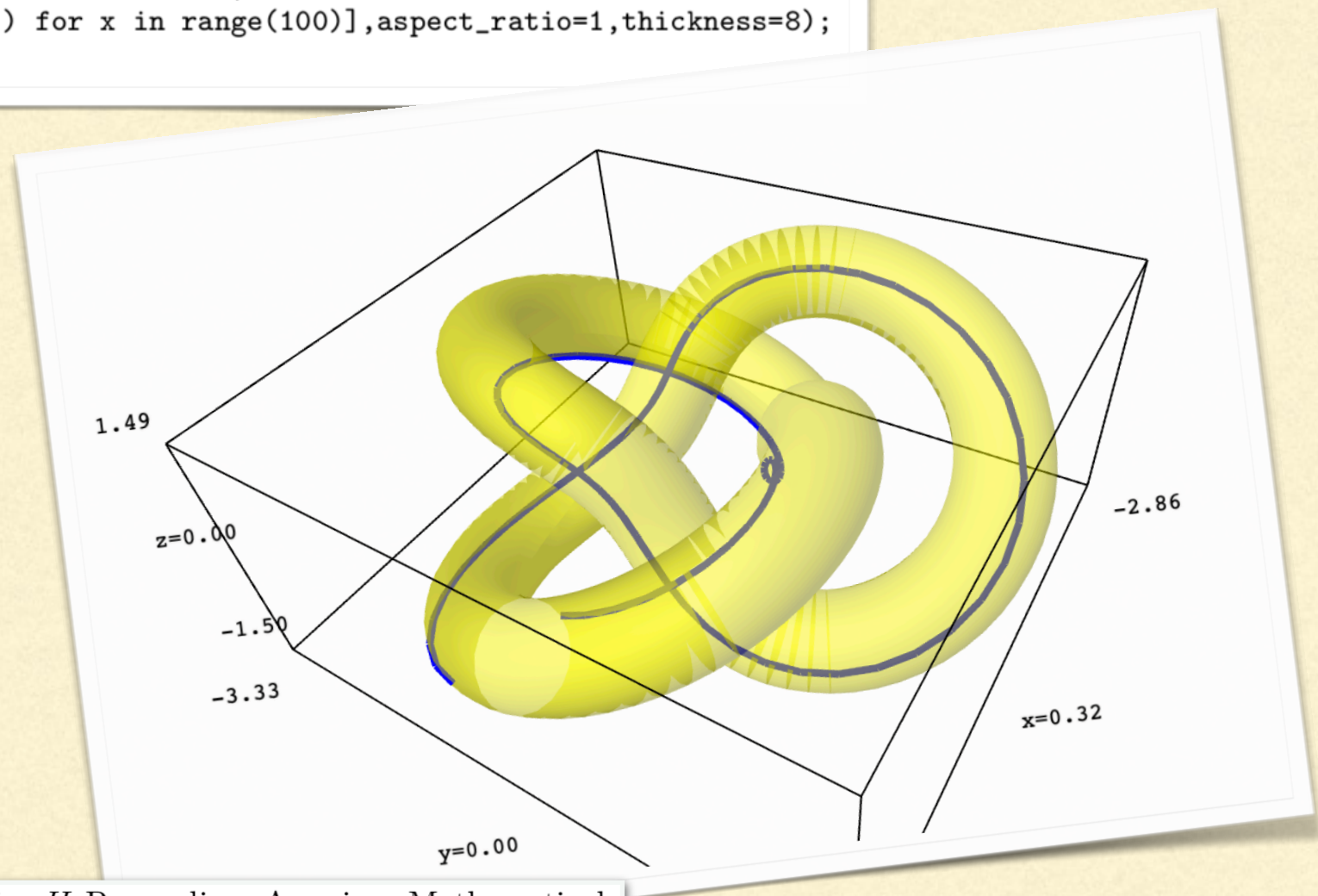
```
alpha=vector([(2+cos(3*t))*cos(2*t),(2+cos(3*t))*sin(2*t), sin(3*t)])
alpha1=alpha.diff(t);alpha2=alpha.diff(t,2);
b=alpha1.cross_product(alpha2);n=b.cross_product(alpha1);
b1=b.normalized();n1=n.normalized();
nus=parametric_plot3d(alpha,(t,0,2*pi),aspect_ratio=1,thickness=5);nus
tub=ParametrizedSurface3D(alpha+0.5*cos(u)*n1+0.5*sin(u)*b1, (t, u));
super=tub.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1,opacity=0.5,mesh=true,color='orange', plot_points=200);super
```





A continuació calculem numèricament la integral de la torsió de  $\alpha$  i una línia de curvatura horitzontal usant de nou **sage**:

```
alpha12=alpha1.cross_product(alpha2);
alpha3=diff(alpha2,t);
torsio=-alpha3.dot_product(alpha12)/alpha12.norm()^2;
def g(t):
    return numerical_integral((torsio*alpha1.norm()).subs(t=u),0,t)[0]
alphaf=alpha.function(t);
n1f=n1.function(t);
b1f=b1.function(t);
def phi(t,u):
    return alphaf(t)+0.5*cos(u)*n1f(t)+0.5*sin(u)*b1f(t);
corba=line3d([phi(2*pi*x/100,g(2*pi*x/100)) for x in range(100)],aspect_ratio=1,thickness=8);
super+corba
```



A l'article de J.L. Weiner, *Closed curves of constant torsion II*, Proceedings American Mathematical Society 67 n.2 (1977), pp. 306–308, es prova que per qualsevol  $L > 0$  suficientment petit existeixen corbes tancades regulars amb torsió  $\tau \equiv 1$  i longitud  $L$ .



**Exercici 9.9.** Deduïu que existeixen superfícies tòriques amb línies de curvatura denses.

---

Properament deixarem el 'pdf'  
d'aquest seminari al Campus Virtual

Gràcies per seguir  
estudiant a casa!

---