1 Corbes Planes: Parametritzacions. Longitud.

Exercici 1: Es consideren les aplicacions $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definides per

$$\alpha(t) = (\cos(2\,t), \cos(t))$$
$$\beta(t) = (\sin(2\,t), \cos(t))\,.$$

Decidiu si són corbes regulars (derivada mai nul·la).

Exercici 2: Parametritzeu les corbes de $\mathbb{R}^2$ definides implícitament per

1. $4\,x^2 + y^2 = 1$.
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (**Astroide**, Hipocicloide de 4 punxes).
3. $x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0$. (**Folium de Descartes**).
4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$. (**Lemniscata de Bernoulli**).

Exercici 3: Determineu una parametrització de la *cardioide*: corba caracteritzada per ser el lloc geomètric de l'òrbita d'un punt P d'una circumferència de radi a a mesura que gira sense lliscament sobre una altra circumferència fixada del mateix radi que l'anterior.

Exercici 4: Siguin F_1 i F_2 dos punts del pla a distància $2\,c$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > c$. Posem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (semieix menor), $e = \dfrac{c}{a} < 1$ (excentricitat) i $p = \dfrac{b^2}{a}$ (paràmetre focal). L'el·lipse amb focus F_1 i F_2 i semieix major a és el lloc geomètric dels punts P del pla que verifiquen

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a$$

(a) Prenent el pol (origen de coordenades) en un dels dos focus i origen d'angles a la semirecta que l'uneix amb l'altre proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

(b) Prenent coordenades cartesianes centrades en el punt mig de F_1F_2 (centre de l'el·lipse) i amb eix Ox a la semirecta OF_2 proveu que l'equació de l'el·lipse és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(c) Proveu que $\gamma(t) = (a\,\cos(t), b\,\sin(t))$ és una parametrització regular de l'el·lipse.

Exercici 5: Determineu (si es pot) una parametrització per l'arc de les corbes definides per

(a) $y = \log x$,

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$,

(c) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Exercici 6: Parametritzeu la corba anomenada *tractriu*, caracteritzada geomètricament pel fet següent: per tot punt P de la corba, la distància entre aquest punt i el punt Q, d'intersecció entre la recta tangent a la corba en P amb l'eix d'abscisses, és constant i igual a 1. Es diu que és el camí que es veu obligat a fer un gos lligat a una corda, i que va tibant cap al nord, quan el seu amo es passeja cap a l'est. Doneu també una parametrització per l'arc de la *tractriu*.

Exercici 7: La corba plana donada per la gràfica de la funció $y = \cosh(x)$ s'anomena *catenària*. Parametritzeu-la per l'arc.

Exercici 8: Demostreu que una corba regular plana té curvatura constant si i només si està continguda en una circumferència.

Exercici 9: (Coordenades polars).

Es diu que una corba plana γ ve donada *en polars* quan s'expressa com:

$$\gamma(t) = \big(r(t)\,\cos(\theta(t)), r(t)\,\sin(\theta(t))\big)$$

on $r(t)$ i $\theta(t)$ són respectivament les expressions, en funció del paràmetre t, de la distància a l'origen de coordenades (pol) i de l' angle que forma el vector $\gamma(t)$ amb l'eix de les x (origen d'angles). Quan es pren l'angle θ com a paràmetre, l'expressió en polars ve donada per la funció $r = r(\theta)$.

1. Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ centrada a l'origen.

2. Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ i centre $(R, 0)$.

3. Considereu l'angle $\theta \in [a, b]$ com a paràmetre. Demostreu que la longitud L de la corba $r = r(\theta)$ està donada per

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

4. Demostreu que la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ està donada per

$$k(\theta) = \frac{2\,r'^2 - r\,r'' + r^2}{\big(r'^2 + r^2\big)^{3/2}}.$$

5. Proveu que si la funció $r(\theta)$ té un màxim en $\theta = \theta_0$, aleshores la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ en el punt $\theta = \theta_0$ és més gran o igual que $\dfrac{1}{r(\theta_0)}$.

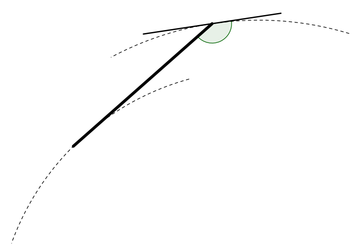
6. Feu una representació gràfica aproximada de la corba definida per $r(\theta) = 1 - \sin(\theta)$.

Exercici 10: Calculeu la curvatura d'una el·lipse determinada per l'expressió en coordenades polars

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

(on p és el paràmetre focal i e l'excentricitat).

Exercici 11: Demostreu que el recorregut que fan les dues rodes d'una bicicleta (sobre un terra pla) que manté el manillar en un angle constant són dues circumferències concèntriques. (Fixeu-vos que en el cas extrem que l'angle del manillar sigui recte, és clar que la roda davantera descriu una circumferència de radi igual a la distància entre els centes de les dues rodes mentre la posterior gira, sense avançar, sobre un punt fix. Mentre que en l'altre extrem, quan la roda del davant està alineada amb el cos de la bicicleta, el recorregut de les dues rodes és una línia recta).



Exercici 12: Demostreu que el signe de la curvatura d'una corba del pla $\mathbb{R}^2$ està donat per $\det(\gamma'(t), \gamma''(t))$ encara que t no sigui paràmetre arc.