GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari 7

Superfícies de revolució

7.1

En el seminari d'aquesta setmana farem servir Sage (`http://sagemath.org`) *per treballar amb superfícies. Podeu trobar a* `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/riemannian_geometry/index.html` *instruccions i exemples per fer càlculs amb superfícies parametritzades.*

Al final del document trobareu un exemple complet, si voleu podeu començar per aquí o bé anar quan calgui.

Exercici 7.1. Sigui $(a(u), b(u))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Considerem la superfície de revolució S parametritzada per $\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$. Calculeu els coeficients de la primera i segona forma fonamental de S en aquesta parametrització i comproveu que la curvatura de Gauss de S ve donada per

$$K(u,v) \quad = \quad -\frac{a''(u)}{a(u)}. \tag{7.1}$$

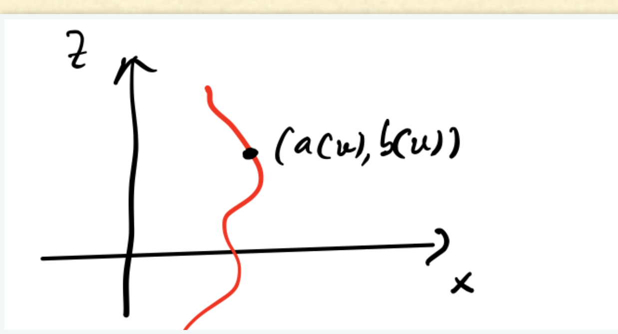
$$\varphi(u,v) = (a(u)\cdot\cos v,\ a(u)\cdot\sin v,\ b(u))$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_u = (a'\cos v, a'\sin v, b') \\ \varphi_v = (-a\sin v, a\cos v, 0) \end{array}\right\}$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u\rangle = a'^2 + b'^2 = 1$$

$$F = 0 \ ; \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v\rangle = a^2$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$



$$\varphi_u \times \varphi_v = a(-b'\cos v, -b'\sin v, a') \qquad N = \frac{1}{a}(-b'\cos v, -b'\sin v, a')$$

$$|\varphi_u \times \varphi_v|^2 = a^2(b'^2 + a'^2) = a^2$$

$$II = \begin{pmatrix} -a''b' + a'b'' & 0 \\ 0 & ab' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \frac{ab'(-a''b' + a'b'')}{a^2}}$$

Però $a'^2 + b'^2 = 1 \Rightarrow a'a'' = -b'b''$ llavors $\boxed{K = -\frac{a''}{a}}$

7.1

Exercici 7.1. Sigui $(a(u), b(u))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Considerem la superfície de revolució S parametritzada per $\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$. Calculeu els coeficients de la primera i segona forma fonamental de S en aquesta parametrització i comproveu que la curvatura de Gauss de S ve donada per

$$K(u,v) \quad = \quad -\frac{a''(u)}{a(u)}. \tag{7.1}$$

```
> var('u,v,t,c',domain='real'); function('a,b');
> srevolucio = ParametrizedSurface3D((a(u)*cos(v),a(u)*sin(v),b(u)), (u, v),'Superficie
de Revolucio');
> srevolucio.first_fundamental_form_coefficients();
> srevolucio.first_fundamental_form_coefficient((1,1));
> srevolucio.second_fundamental_form_coefficients();
> srevolucio.second_fundamental_form_coefficient((1,1));
> K = srevolucio.gauss_curvature();
> K.simplify_full();
```

Qüestió: Cal incorporar la condició $a'^2+b'^2=1$ perquè simplifiqui bé !!

7.2

Exercici 7.2. Particularitzeu-ho al cas d'un tor de revolució i d'una esfera. Feu els dibuixos amb Sage.

Podem fer, pel tor $a(u) = R + r\cos(u/r)$ *i* $b(u) = r\sin(u/r)$ *llavors*

```
> var('R,r');
> tor = ParametrizedSurface3D(((R+r*cos(u/r))*cos(v),(R+r*cos(u/r))*sin(v),r*sin(u/r)),
(u, v),'Tor');
> Ktor = tor.gauss_curvature();
```

Simplifiquem i obtenim que la curvatura de Gauss és $\frac{1}{r}\cos(\frac{u}{r})/(R + r\cos(u/r))$. *És positiva per la part exterior, negativa per la interior i zero quan* $u = \pm\pi/2r$, *els paral·lels superior e inferior.*

7.2

Exercici 7.2. Particularitzeu-ho al cas d'un tor de revolució i d'una esfera. Feu els dibuixos amb Sage.

```
esfera = ParametrizedSurface3D((r*cos(u/r)*cos(v),r*cos(u/r)*sin(v),r*sin(u/r)), (u,
v),'Esfera');
KE = esfera.gauss_curvature();
```

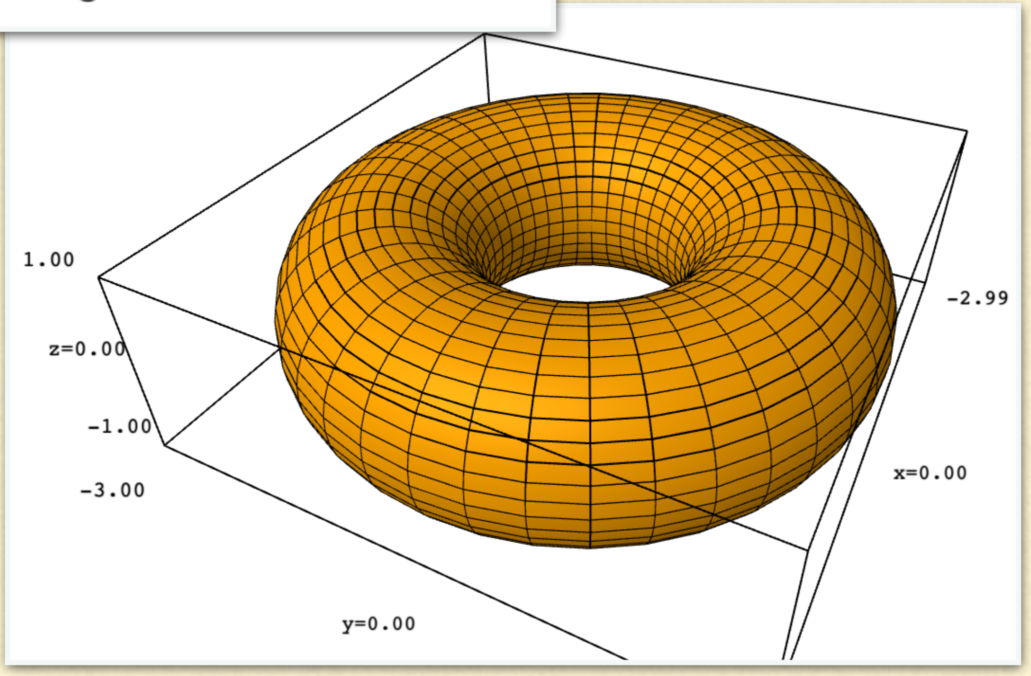
Simplificant obtenim $1/r^2$.

També podem trobar les curvatures principals:

```
PTor=tor.principal_directions();
k1Tor=PTor[0][0]; k2Tor=PTor[1][0];
```

Fem dibuixos.

```
> tor12 = ParametrizedSurface3D(((2+cos(u))*cos(v),(2+cos(u))*sin(v),sin(u)), (u, v),'Tor');
> tor12.plot((0,2*pi), (0,2*pi),aspect_ratio=1, mesh=True, color='orange');
```



7.3

Exercici 7.3. Ens proposem obtenir i dibuixar superfícies de revolució que tinguin curvatura de Gauss constant $K \equiv 1$. Per la igualtat (7.1), això es redueix a resoldre l'equació diferencial $a''(u) = -a(u)$. Comproveu que, llevat d'un canvi $u \to u + C$, les solucions són totes de la forma

$$a(u) = c\cos(u), \qquad b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$$

on la segona expressió prové de la suposició $a'(u)^2 + b'(u)^2 = 1$ (i.e. u és paràmetre arc). Proveu que la correspondència latitud $= u$, longitud $= cv$ defineix una isometria entre un obert de la surpefície anterior i un obert de l'esfera unitat.

Solució: *Cal resoldre $a'' + a = 0$, és clar que les solucions són de la forma $A\cos(u) + B\sin(u) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(u + \varphi)$. Podem suposar que $a(u) = c\cos(u)$ amb $c > 0$. Llavors $b'(u)^2 = 1 - c^2\sin^2(u)$. Triem la constant d'intergració de manera que $b(0) = 0$, llavors*

$$b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt.$$

Estudiem les isometries entre un troç d'esfera i un troç de la superfície donada per les $a(u), b(u)$ trobades. Quan $c = 1$ és la mateixa superfície.

7.3

Fem el cas $c > 1$. Sigui l'obert $U = (-\arcsin(1/c), \arcsin(1/c)) \times (0, 2\pi/c)$ les parametritzacions $\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$ i $\tilde{\varphi}(u,v) = (\cos(u)\cos(cv), \cos(u)\sin(cv), \sin(u))$ cobreixen respectivament un obert de l'esfera i un obert de la 'xixonera'. Per aquestes parametritzacions les primeres formes fonamentals adopten la forma

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^2\cos^2(u) \end{pmatrix}.$$

Aquests oberts són llavors isomètrics. Veiem a quina part de l'esfera i a quina part de la 'xixonera' corresponen. Són bandes com es veuen al dibuix (en verd l'esfera) Si $c < 1$ considerem l'obert $U = (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$. Mirem el gràfic.

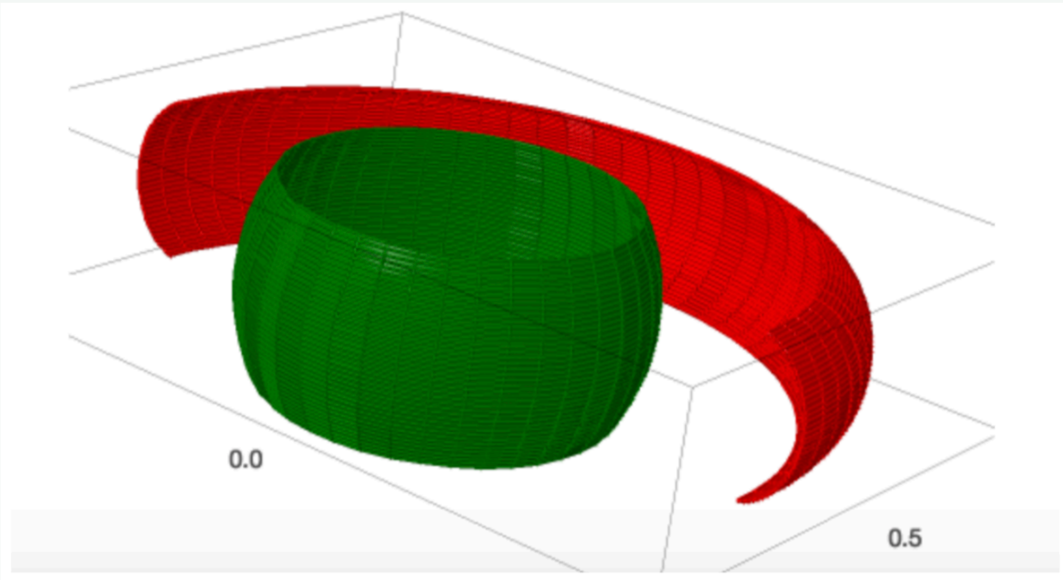


Figura 7.8: Isometria $c > 1$

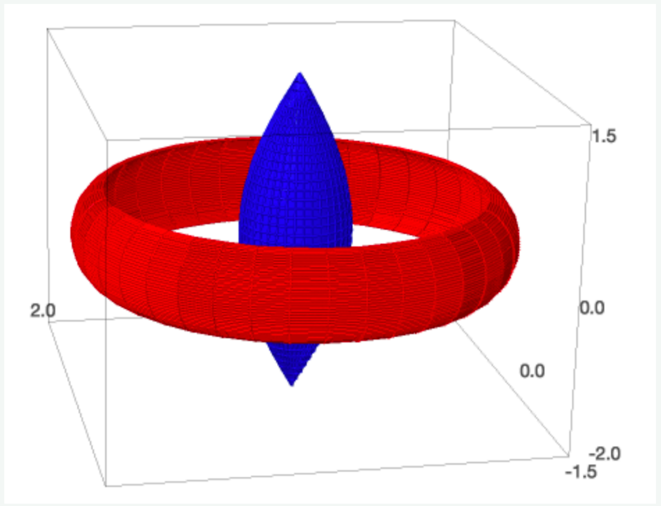
7.4

Exercici 7.4. La integral $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$ és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` que la implementa. En aquest cas $b(u) =$ `elliptic_e`(u, c^2). Tenim tres casos interesessants:

$c = 1, c < 1, c > 1$. En el primer cas tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera). En els dos primers casos l'argument u pot anar de $-\pi/2$ a $\pi/2$ en el tercer, per evitar arrels de nombres negatius, tenim $|u| \leq \arcsin(1/c)$. Fem el dibuix per $c > 1$:

```
sage: xixo = ParametrizedSurface3D(
sage.      (2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v), elliptic_e(u,4)),
sage:      ((u,-arcsin(1/2),arcsin(1/2)),
sagw:      (v,0,2*pi)),'Xixonera')
sage: X = xixo.plot(mesh=True, color='red',aspect_ratio=1)}
sage: X
```

Feu ara els dibuixos pels casos $c \leq 1$.



$$b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt.$$

Això és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` *que la implementa. En aquest cas* $b(u) =$ `elliptic_e`(u, c^2). *Tenim tres casos interesesants:* $c = 1, c < 1, c > 1$. *En el primer cass tenim l'esfera de radi* 1, *en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera). En els dos primers casos l'argument* u *pot anar de* $-\pi/2$ *a* $\pi/2$ *en el tercer, per evitar arrels de nombres negatius, tenim* $|u| \leq \arcsin(1/c)$. *Fem dibuixos.*

```
> xixo = ParametrizedSurface3D((2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v),elliptic_e(u,4)),
((u,-arcsin(1/2),arcsin(1/2)), (v,0,2*pi)),'Xixonera');
> fus = ParametrizedSurface3D((1/2*cos(u)*cos(v),1/2*cos(u)*sin(v),elliptic_e(u,1/4)),
((u,-pi/2,pi/2), (v,0,2*pi)),'Fus');
> X=xixo.plot(mesh=True, color='red',aspect_ratio=1)
> F=fus.plot(mesh=True, color='blue',aspect_ratio=1);
> X+F;
```

7.4

Exercici 7.4. La integral $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2 \sin^2(t)}dt$ és una integral el·líptica, existeix una funció en Sage que la implementa. En aquest cas $b(u) =$ `elliptic_e`(u, c^2). Tenim tres casos interesessants:

$c = 1, c < 1, c > 1$. En el primer cas tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera). En els dos primers casos l'argument u pot anar de $-\pi/2$ a $\pi/2$ en el tercer, per evitar arrels de nombres negatius, tenim $|u| \leq \arcsin(1/c)$. Fem el dibuix per $c > 1$:

```
sage: xixo = ParametrizedSurface3D(
sage.       (2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v), elliptic_e(u,4)),
sage:       ((u,-arcsin(1/2),arcsin(1/2)),
sagw:       (v,0,2*pi)),'Xixonera')
sage: X = xixo.plot(mesh=True, color='red',aspect_ratio=1)}
sage: X
```

Feu ara els dibuixos pels casos $c \leq 1$.

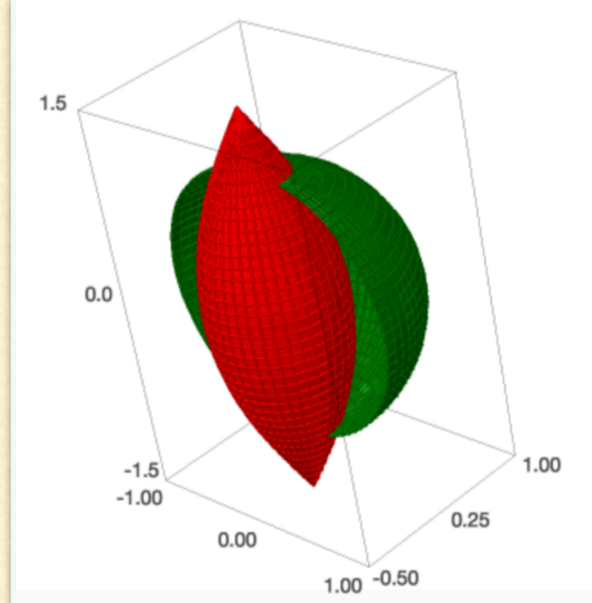
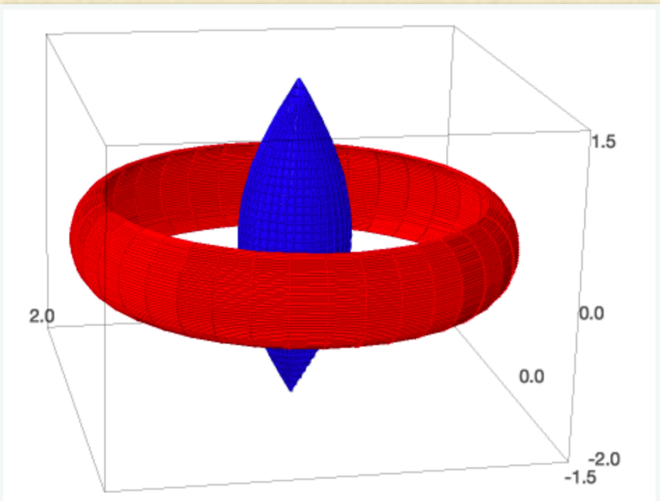


Figura 7.10: Isometria $c < 1$



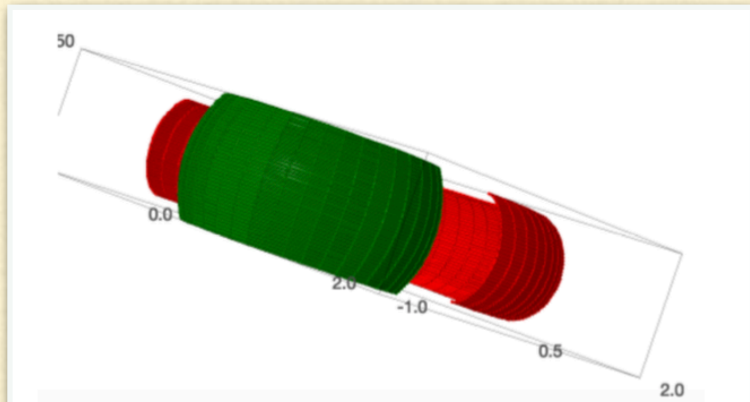


Figura 7.9: Isometria $c > 1$

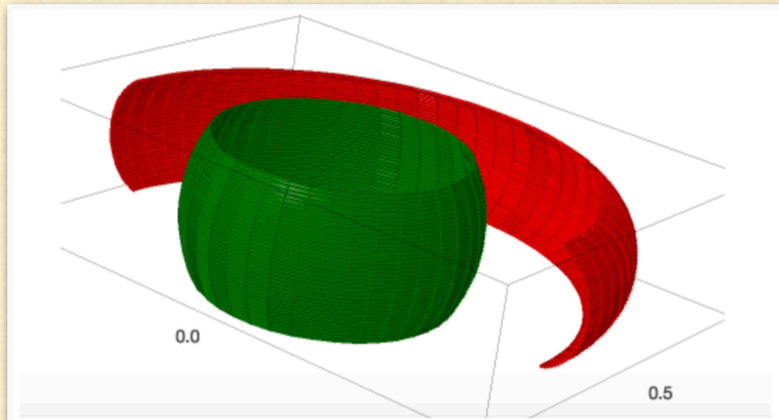


Figura 7.8: Isometria $c > 1$

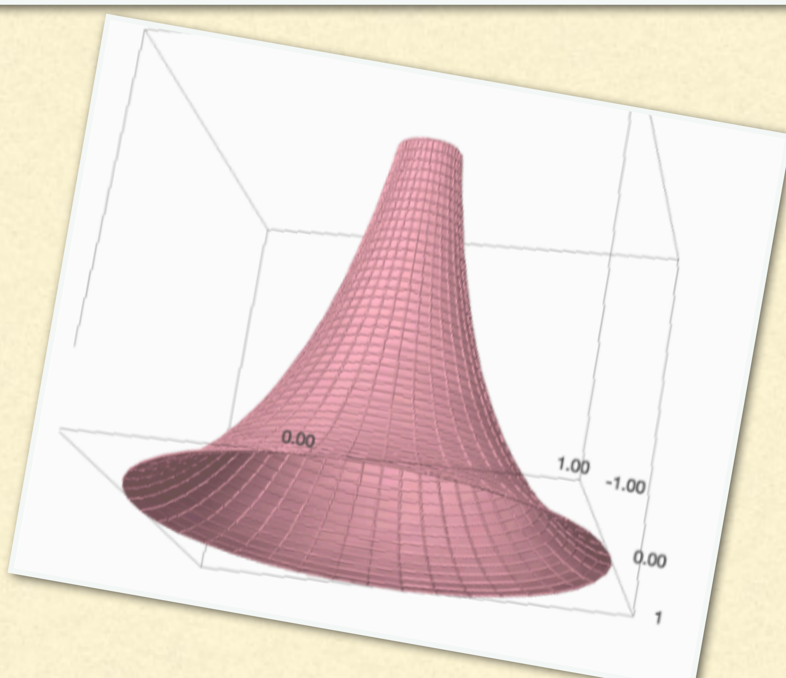
7.5

Exercici 7.5. Utilitzeu l'estratègia anterior per a obtenir i dibuixar superfícies de revolució amb curvatura de Gauss constant $K \equiv -1$. El cas $a(u) = e^{-u}$ és conegut amb el nom de *pseudoesfera*.

Solució: *Ara cal resoldre l'equació $a'' - a = 0$. Les solucions són de la forma $a(u) = Ae^{-u} + Be^{u}$ triem $a(u) = e^{-u}$. Ho posem al* `Sage` *amb*

$$b(t) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}dt = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-2u}}}{1-\sqrt{1-e^{-2u}}}\right) - \sqrt{1-e^{-2u}}$$

```
> Bb(u)=(1/2)*log((1+sqrt(1-e^(-2*u)))/(1-sqrt(1-e^(-2*u))))-(sqrt(1-e^(-2*u)));
> tractriu=ParametrizedSurface3D((e^(-u)*cos(v),e^(-u)*sin(v),Bb(u)), (u, v),'Tractriu');
> KTr=tractriu.gauss_curvature(); KTr.simplify_full();
> tractriu.plot((0,2),(0,2*pi),mesh=True, color='pink',aspect_ratio=1);
```



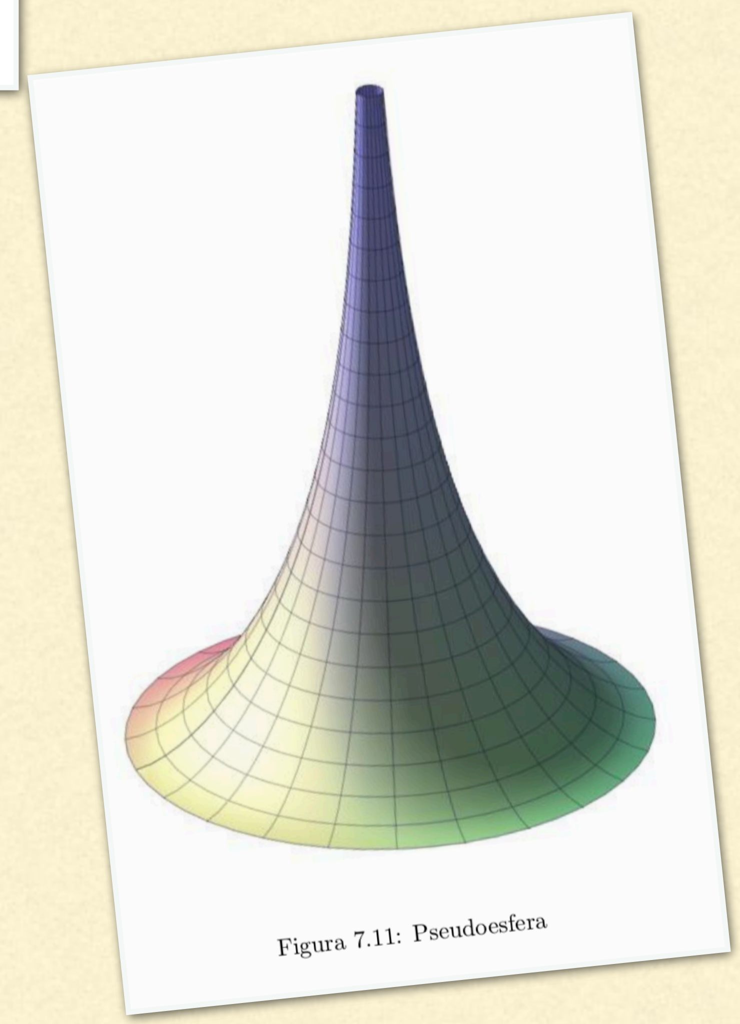
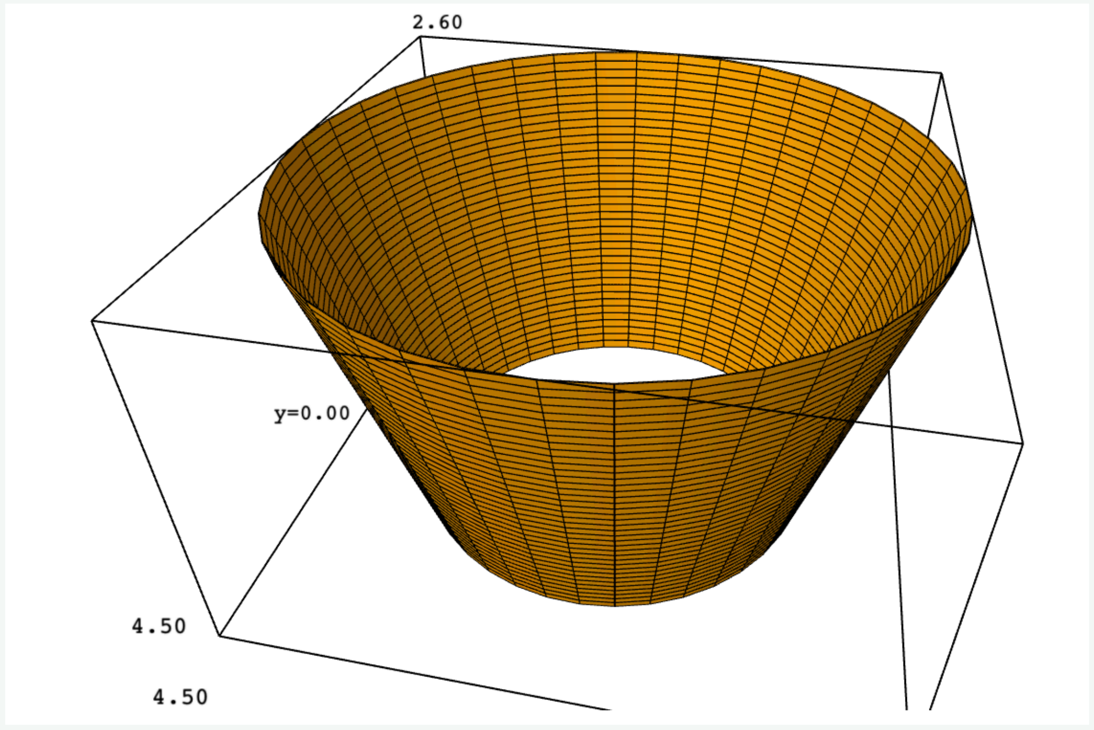


Figura 7.11: Pseudoesfera

7.6

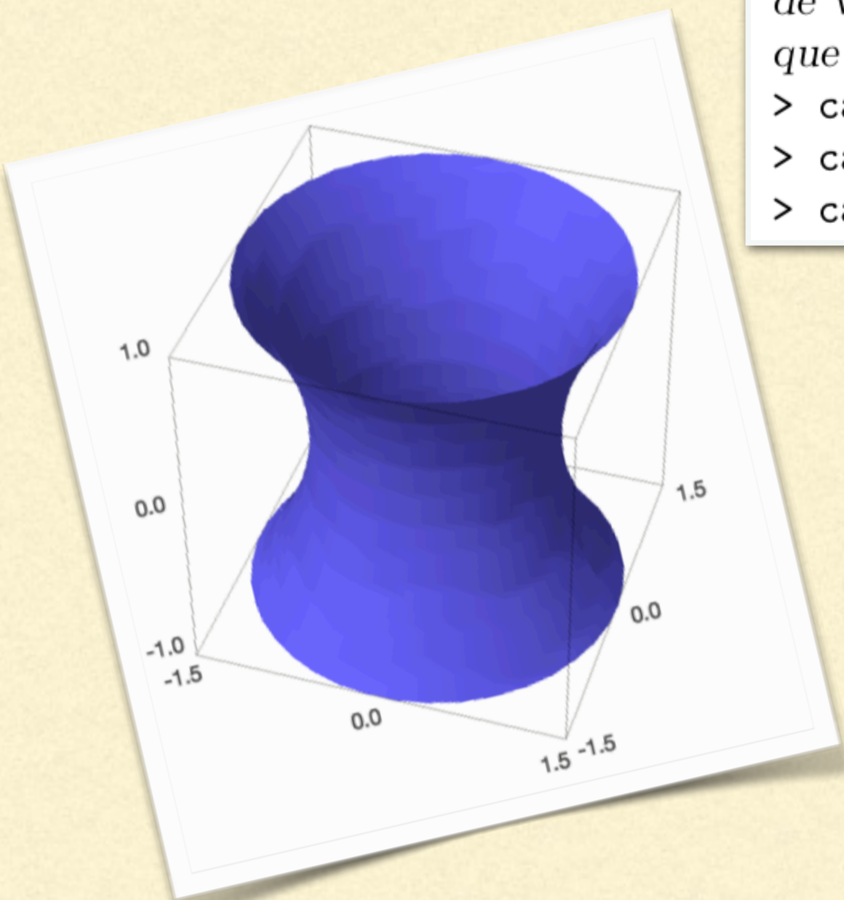
Exercici 7.6. Determineu les superfícies de revolució desenvolupables, és a dir, reglades amb curvatura de Gauss $K \equiv 0$.

Solució: *És clar, ja que $a'' = 0$, que les corbes $(a(u), b(u))$ són rectes i les superfícies que obtenim són troços de con.*



7.7

Exercici 7.7. Utilitzeu l'exercici 7.1 per donar una expressió de la curvatura mitjana $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-dN)$ d'una superfície de revolució. Ho podeu fer també amb `Sage`. Comproveu que la catenoide $\sqrt{x^2+y^2} = \cosh z$, superfície de revolució obtinguda al girar la catenària, té curvatura mitjana nula (és una superfície mínima).



Solució: *Fem-ho amb* `Sage`. *Ara ho provem amb una parametrització en la qual la corba no sigui de velocitat constant. Parametritzem amb* $\varphi(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u)$. *Observem que la catenoide ja està incorparada a* `Sage`*:*

```
> catenoide=surface.Catenoid(); catenoide;
> catenoide.mean_curvature();
> catenoide.plot();
```

Properament deixarem el ‘pdf’
d’aquest seminari al Campus Virtual

Gràcies per seguir estudiant a casa!