Geometria Diferencial

**Segon parcial, 20 Juny 2018**

*E. Gallego, G. Guasp, G. Solanes, A. Reventós*

NOM: ..........................................................

NIU: ..........................................................

## Teoria

1) Definiu curvatura normal i curvatura geodèsica. **[0.5 punts]**

2) Doneu una interpretació geomètrica d'una i només una de les dues. **[2 punts]**

# Problema 1.

Sigui $S$ la catenoide determinada per les condicions

$$x = \cosh(v)\ \cos(u)$$
$$y = \cosh(v)\ \sin(u)$$
$$z = v$$

1. Determineu els coeficients de la primera forma fonamental de $S$ respecte la parametrització que s'obté en funció de $(u, v)$. **[0.5 punts]**

2. Comproveu que l'element d'àrea de $S$ es pot expressar com

$$dS = \cosh^2(v)\, du dv$$

**[0.5 punts]**

3. Calculeu l'expressió de la segona forma fonamental de $S$ i comproveu, a partir d'aquesta expressió, que $S$ té curvatura mitjana $H$ igual a 0 (és una superfície minimal). **[0.5 punts]**

4. Determineu la matriu de l'endomorfisme de Weingarten de $S$ i utilitzeu el resultat per a donar l'expressió de la curvatura de Gauss $K$. **[0.5 punts]**

5. Considereu la superfície $L$ parametritzada per $\psi(s, t) = (t\cos(s), t\sin(s), \ln(t))$. La curvatura de Gauss de $L$ en $\psi(s, t)$ és $K(s, t) = -\frac{1}{(1+t^2)^2}$ (no cal que ho comproveu).

   Decidiu si existeix alguna isometria local $F\colon U \to L$ definida en algun obert $U \neq \emptyset$ de la catenoide. **[0.5 punts]**

**Nota:** Deixeu l'apartat 5 per al final.

## Problema 2.

a) Sigui $S_r^2$ l'esfera de centre l'origen i radi $r$. Sigui $V$ l'obert de $S_r^2$ cobert per la carta local $\Psi(\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$, on $(\varphi,\theta) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$. Demostreu que l'aplicació $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ que porta el punt $\Psi(\varphi,\theta)$ al punt $(r\theta, r\cos\varphi, 0)$ conserva àrees. **[1.5 punts]**

b) Decidiu si $f$ porta totes les corbes de curvatura geodèsica zero de $V$ a corbes de curvatura geodèsica zero del pla. **[0.5 punts]**

c) És cert que una aplicació diferenciable entre superfícies que conserva angles i àrees és una isometria local? Si és cert demostreu-ho i si no, doneu un contraexemple. **[0.5 punts]**

## Problema 3.

Comproveu el teorema de Stokes per a la 2-forma $\omega = z^2 dx \wedge dy$, i el recinte $D$ delimitat per les condicions $0 \leq z \leq 2$, $x > 0, y > 0$, $x^2 + y^2 \leq 9$. **[2.5 punts]**