13 Exercicis complementaris de formes

Exercici 133: Vegeu que det és l'element de volum per l'orientació i producte habituals de $\mathbb{R}^n$. Vegeu a més que $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ és el volum del paral·lelepípede definit pels vectors v_i.

Solució: L'element de volum, és per definició, la n-forma que val 1 sobre una base ortonormal. Això vol dir que ± 1 sobre tota base ortonormal. Com que $\det(e_1, \ldots, e_n)$, on $(e_1, \ldots, e_n)$ és la base canònica, és el determinant de la matriu identitat, hem acabat.

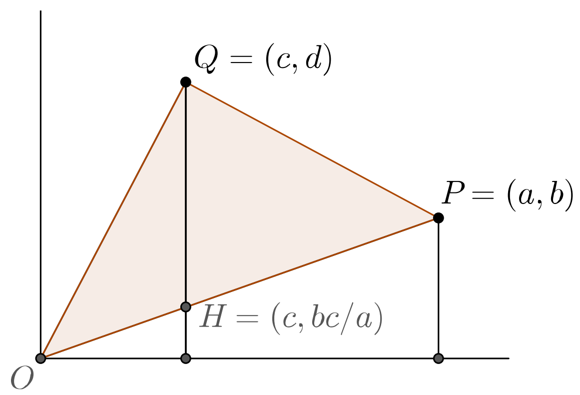
b) Per a $n = 2$ sabem que l'àrea del paral·lelogram format pels vectors u, v, que formen entre ells un angle α, és igual a la longitud de la base per l'altura.

Així doncs

$$\begin{aligned}
\text{Àrea} &= |v| \cdot h = |v||u| \sin\alpha = |v||u|\sqrt{1 - \left(\frac{u \cdot v}{|v||u|}\right)^2} \\
&= \sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2} = \sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2} = \left| \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right| = |\det(u, v)|.
\end{aligned}$$

Una altra manera és mirar el dibuix i adonar-se que la figura ratllada està formada per dos triangles de la mateixa base QH i altures respectives c i $a - c$, de manera que l'àrea del paral·lelogram de costas OP, OQ és igual a

$$\text{Àrea} = 2\frac{1}{2}QH.(c + a - c) = (d - \frac{bc}{a}) \cdot a = ad - bc = \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}).$$



El volum d'un paral·lelepípede n-imensional es pot definir per recurrència com

$$Vol(v_1, \ldots, v_n) = Vol(v_1, \ldots, v_{n-1}) \cdot h$$

on h és l'altura del paral·lelepípede sobre l'hiperplà $H = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$, és a dir, $v_n = u + hN$ on $u \in H$ i N és ortogonal (amb el producte habitual de $\mathbb{R}^n$) a H.

Es pot veure que aquesta definició no depèn de quin dels vectors v_i fa el paper de v_n.

Per inducció,

$$Vol(v_1, \ldots, v_n) = |\det(v_1, \ldots, v_{n-1})| \cdot h$$

on $\det(v_1, \ldots, v_{n-1})$ vol dir el determinant de la matriu $(n - 1) \times (n - 1)$ formada per les components de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ respecte de una base ortonormal (no importa quina) de H.

Ara tenim

$$\begin{aligned} \det(v_1,\ldots,v_n) &= \det(v_1,\ldots,v_{n-1},u+hN) = \det(v_1,\ldots,hN) \\ &= h\det(v_1,\ldots,v_{n-1},N) = h\det(v_1,\ldots,v_{n-1}). \end{aligned}$$

Per tant,

$$Vol(v_1,\ldots,v_n) = |\det(v_1,\ldots,v_n)|.$$

Exercici 134: Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ i h una funció, provar que

$$f^*(h\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n) = (h\circ f)(\det f')\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

on f' denota la matriu jacobiana de f.

Solució: Per definició, i amb la notació del problema anterior, tenim

$$(f^*(h\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n))_P((e_1)_P,\ldots,(e_n)_P) = (h\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)_{f(P)}\Big(df_P((e_1)_P),\ldots,df_P((e_n)_P)\Big)$$

Denotant

$$\begin{aligned} u_i &= (e_i)_{f(P)} \\ u_j^* &= dx^j(f(P)) \quad \text{(base dual de } u_1,\ldots,u_n) \end{aligned}$$

i tenint en compte que la matriu de l'aplicació lineal df_P és la matriu

$$\Big(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(P)\Big)_{ij},$$

el segon terme de la igualtat s'escriu com

$$h(f(P))u_1^*\wedge\cdots\wedge u_n^*(\sum_k\frac{\partial f^k}{\partial x^1}(P)\cdot u_k,\ldots,\sum_k\frac{\partial f^k}{\partial x^n}(P)\cdot u_k) = h(f(P))\det f'(P),$$

que és el mateix valor que obtenim quan calculem

$$\Big((h\circ f)(\det f')dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\Big)_P((e_1)_P,\ldots,(e_n)_P)$$

Per tant

$$f^*(h\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n) = (h\circ f)(\det f')\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

Nota. Com a classe de teoria s'ha vist que donat un espai vectorial V de dimensió n i $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in V^*$, llavors per a qualssevol vectors $u_1,\ldots,u_n$ es compleix

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n(u_1,\ldots,u_n) = \det(\varphi_i(u_j))$$

aquest problema es resolt millor així:

$$f^*(h\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n) = (h\circ f)df^1\wedge\cdots\wedge df^n,$$

amb $f^i = x^i\circ f$. Però, pel comentari anterior, és clar que

$$df^1\wedge\cdots\wedge df^n = (\det df)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

(només cal aplicar aquests dos termes als n vectors $(e_1,\ldots,e_n)$ de la base canònica). I recordar que $df^i(e_j) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$.

Exercici 135: Si $\omega = x\,dy - dz$, $\eta = 2z^2\,dx$, $\mu = dx - yz\,dy$, calculeu $x\,\omega + \eta$, $z\,\eta - z\,\mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

Solució: a) $x\omega + \eta = x(x\,dy - dz) + 2z^2\,dx = 2z^2\,dx + x^2\,dy - x\,dz$.

b) $z\eta - z\mu = z(2z^2\,dx) - z(dx - yz\,dy) = (2z^3 - z)dx + yz^2\,dy$.

c) $\omega \wedge \eta = (x\,dy - dz) \wedge 2z^2\,dx = 2xz^2\,dy \wedge dz - 2z^2\,dz \wedge dx$.

d) $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta = (2x\,dy - 2\,dz - y\,dx + y^2z\,dy) \wedge 2z^2\,dx = (4xz^2 + 2y^2z^3)dy \wedge dx - 4z^2\,dz \wedge dx$.

e) $\omega \wedge \eta \wedge \mu = (x\,dy - dz) \wedge 2z^2\,dx \wedge (dx - yz\,dy) = (x\,dy - dz) \wedge -2yz^3\,dx \wedge dy = 2yz^3\,dz \wedge dx \wedge dy = 2yz^3\,dx \wedge dy \wedge dz$.

Exercici 136: Donat un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$, considereu les formes diferencials

$$\omega_X = X_1\,dy \wedge dz - X_2\,dx \wedge dz + X_3 dx \wedge dy$$

$$\eta_X = X_1\,dx + X_2\,dy + X_3\,dz$$

Calculeu $d\omega_X$ i $d\eta_X$. Observeu que si Y, Z són camps de $\mathbb{R}^3$ llavors $\omega_X(Y,Z) = \det(X,Y,Z)$ i $\eta_X(Y) = \langle X, Y\rangle$.

Solució: a)

$$d\omega_X = \frac{\partial X_1}{dx} dy \wedge dz - \frac{\partial X_2}{dy} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial X_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \text{div } X\ dx \wedge dy \wedge dz.$$

b)

$$d\eta_X = \frac{\partial X_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial X_1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial X_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial X_2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial X_3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial X_3}{\partial y} dy \wedge dz$$

Agrupant termes

$$d\eta_X = (\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}) dx \wedge dy + (\frac{\partial X_3}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z}) dx \wedge dz + (\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}) dy \wedge dz.$$

És a dir,

$$d\eta_X = i_{Rot X} dx \wedge dy \wedge dz$$

(contracció de l'element de volum amb el rotacional del camp.)

Exercici 137: Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

1. $\omega = xdy + ydx$
2. $\omega = x^2ydy - xy^2dx$
3. $\omega = f(x)dx + g(y)dy$
4. $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$
5. $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$
6. $\omega = f(x)dy$

7. $\omega = \cos(xy^2)dx \wedge dz$
8. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$
9. $\omega = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$, amb $f, g, h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.
10. $\omega = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_n \; x \in \mathbb{R}^n$.

Nota: $\widehat{dx_j}$ vol dir que dx_j no hi apareix.

Exercici 138: Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial ω per l'aplicació T en els següents casos:

1. $T : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, s^3)$, $\omega = dx + dz$
2. $T : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $T(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta, 0)$, $\omega = xy\,dx - z\,dy$
3. $T : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = (s, t, st)$, $\omega = dx \wedge dz$
4. $T : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = (s\,\cos t, s\,\sin t, t)$, $\omega = xy^2\,dx \wedge dy - 2yz\,dx \wedge dz + 4\,dy \wedge dz$
5. $T : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(s,t,u) = (st^2, tu, s, s+u)$, $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$

Solució: En tots els casos la única cosa que hem de fer és substituir x, y, z, i les seves diferencials, pels valors donats per T.

1) $T^*\omega = T^*(dx + dz) = d(x \circ T) + d(z \circ T) = ds + ds^3 = (1 + 3s^2)ds$.

3) $T^*\omega = T^*(dx \wedge dz) = d(x \circ T) \wedge d(z \circ T) = ds \wedge d(st) = ds \wedge (tds + sdt) = s\,ds \wedge dt$.

5) $T^*\omega = T^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4) = d(x_1 \circ T) \wedge d(x_2 \circ T) \wedge d(x_4 \circ T) = d(st^2) \wedge d(tu) \wedge d(s+u) = (t^2\,ds + 2ts\,dt) \wedge (t\,du + u\,dt) \wedge (ds + du) = (t^3\,ds \wedge du + t^2 u\,ds \wedge dt + 2t^2 s\,dt \wedge du)(ds + du) = (2st^2 + t^2 u) ds \wedge dt \wedge du$.

Exercici 139: Sigui T una parametrització de l'esfera unitat. Calculeu la imatge recíproca per T de les formes dx, dy, dz, $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$.

Solució: Posem $T(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi)$.

$$\begin{aligned} T^*(dx) &= d(x \circ T) = d(\cos\varphi\cos\theta) = -\sin\varphi\cos\theta\,d\varphi - \cos\varphi\sin\theta\,d\theta \\ T^*(dy) &= d(y \circ T) = d(\cos\varphi\sin\theta) = -\sin\varphi\sin\theta\,d\varphi - \cos\varphi\cos\theta\,d\theta \\ T^*(dz) &= \cos\varphi\,d\varphi \\ T^*(dx \wedge dy) &= T^*(dx) \wedge T^*(dy) = \sin\varphi\cos\varphi\,d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Observem que $T^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ ja que és una 3-forma sobre l'esfera 2-dimensional.

Exercici 140: Sigui α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = xdx + ydy + zdz$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$.

Solució: $f^*(\alpha) = (x \circ f)\,d(x \circ f) + (y \circ f)\,d(y \circ f) + (z \circ f)\,d(z \circ f) = \cos u(-\sin u\,du) + \sin u(\cos u\,du) + v\,dv = v\,dv$.

Exercici 141: Considereu a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ la 1-forma

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}dy$$

1. Demostreu que ω és tancada.

2. Proveu que ω no és exacta.

3. Trobeu un obert $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ on ω sigui exacta.

Solució: 1) Observem que si $\omega = Adx + Bdy$ llavors $d\omega = (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x})dx \wedge dy$. De manera que ω és tancada si i només si $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$. En el nostre cas només hem de veure aquesta igualtat amb $A = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$ i $B = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$.

2) Passem a polars centrades a $(1,0)$. És a dir, posem $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Llavors

$$\omega(r,\theta) = \frac{-r\sin\theta}{r^2}(dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta) + \frac{r\cos\theta}{r^2}(dr\sin\theta + r\cos\theta d\theta) = d\theta.$$

Per la pròpia definició de coordenades polars tenim $0 < \theta < 2\pi$. És a dir, θ és una funció a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0); a \geq 1\}$, però no pas a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.

Si existís una funció f a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ tal que $df = \omega$, llavors seria $df = d\theta$, en el domini de definició de θ ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0); a \geq 1\}$). En particular, $f = \theta + c$, amb c constant en aquest domini. Però per a tot $\epsilon > 0$ tindríem $f(1,\epsilon) - f(1,-\epsilon) = \theta(1,\epsilon) - \theta(1,-\epsilon)$. Per ser f continua, el primer terme tendeix a zero quan ϵ tendeix a zero, i el segon tendeix a π.

Si es coneix el teorema de Stokes es pot raonar així. Sigui S^1 el cercle de centre $(1,0)$ i radi 1. Sobre S^1 tenim $\omega = -y\,dx + (x-1)\,dy$. És fàcil veure que aquesta 1-forma val 1 sobre el vector tangent a $S^1 = \partial D$, unitari en cada punt (el vector unitari tangent al cercle en direcció counterclockwise és $(-y, x-1)$, i.e. $-y\frac{\partial}{\partial x} + (x-1)\frac{\partial}{\partial t}$). És doncs el seu element de volum.

Si $\omega = df$ en aquest disc, tindríem

$$2\pi = \int_S \omega = \int_{\partial S} f = 0,$$

ja que S^1 no té vora.

3) Qualsevol obert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,0); a \geq 1\}$, ja que aquí θ és una funció (i $\omega = d\theta$).

14 Varietats amb vora. Integració de formes.

Exercici 142: Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable tal que $df \neq 0$ sobre $f^{-1}(0)$. Demostreu que $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ és una n-subvarietat amb vora de $\mathbb{R}^n$. (Com és ∂M?)

Feu un dibuix de la regió de $\mathbb{R}^2$ donada pels punts (x, y) tals que $x^3 - y^3 - 3\,x\,y \leq 0$ per tal de comprovar que la condició sobre df és necessària.

Solució: Notem en primer lloc que ∂M estarà formada pel punts x tals que $f(x) = 0$. Suposem ara que p és un d'aquest punts ($f(p) = 0$) i, sense perdre generalitat, que $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$ (no es pot saber, a priori, quin dels coeficients de df és diferent de 0 en p però sempre n'hi ha algun i, canviant d'ordre les coordenades es pot pensar que és l'últim). Aleshores l'aplicació $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donada per $\Psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_n))$ serà un difeomorfisme (en algun entorn de p) i la seva inversa $\Phi = \Psi^{-1}$ parametritzarà M, que es veurà com la imatge del semiespai $y_n \leq 0$ (i, en particular, parametritzarà ∂M com una subvarietat de dimensió $n - 1$ considerant $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \mapsto \Phi(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$).

Més precisament, com

$$\Psi\Phi(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n) = (*, \ldots, *, f(\Phi(y_1, \ldots, y_n)))$$

on els asteriscs representen les $n - 1$ primeres coordenades de $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$, tenim

$$y_n = f(\Phi(y_1, \ldots, y_n)). \tag{52}$$

Com $\Psi(p) = (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$ l'obert on Φ és difeomorfisme té punts amb última coordenada positiva i negativa.

Llavors $\Phi(y_1, \ldots, y_n) \in M$ si i només si $y_n \leq 0$ (per (52)). Així ϕ és una carta de la varietat amb vora M.

Primer exemple. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. El conjunt $f^{-1}(0)$ és el cercle de radi 1, centrat a l'origen. $df = (2x, 2y)$ és diferent de zero a $f^{-1}(0)$ (només s'anul·la al $(0, 0)$ que no pertany a $f^{-1}(0)$). Per tant el disc tancat és una varietat amb vora.

Segon exemple. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3\,x\,y$. En aquest cas $df = (3x^2 - 3y, -3y^2 - 3x)$ que s'anul·la en els punts $(0, 0)$ i $(-1, 1)$. El punt $(0, 0) \in f^{-1}(0)$ i, per tant, no estem en les hipòtesis anteriors. De fet, en aquest punt el conjunt $f(x, y) \leq 0$ no és localment com el semiplà tancat.