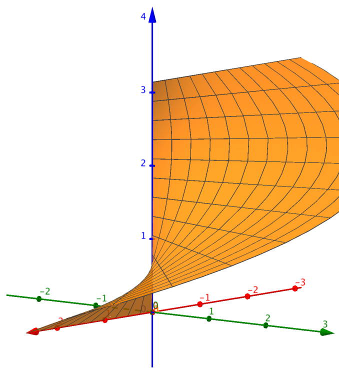
Geometria diferencial
Curs 2017–18

El Teorema de Stokes i les seves variants.

Exercici 1: Considereu dins l'helicoide S de $\mathbb{R}^3$, parametritzat per $\varphi(s,t) = (s\,\cos(t), s\,\sin(t), t)$, la regió R determinada per $0 \le s \le \pi$, $0 \le t \le \pi$ i la forma $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$. Calculeu les integrals necessàries per tal de comprovar el teorema de Stokes amb aquestes dades.

Solució:



Tenint en compte que $d\omega = 0$, el que s'ha de veure és que la suma de les integrals (amb les orientacions adequades) al llarg dels quatre segments que determinen ∂R és 0. Aquestes quatre corbes són:

$$\alpha_1(s) = (s, 0, 0)$$

(corresponent a $t = 0$ i amb $s \in [0, \pi]$)

$$\alpha_2(s) = (\pi\,\cos(t), \pi\,\sin(t), t)$$

(corresponent a $s = \pi$ i amb $t \in [0, \pi]$)

$$\alpha_3(s) = (s, 0, \pi)$$

(corresponent a $t = \pi$ i amb $s \in [-\pi, 0]$ tenint en compte el sentit del recorregut)

$$\alpha_4(t) = (0, 0, t)$$

(corresponent a $s = 0$ i amb $t \in [0, \pi]$, que cal recórrer des de $t = \pi$ fins a $t = 0$).

Les integrals sobre cada un dels trams seran

$$\int_{\alpha_1} \omega = \int_0^{\pi} s\,ds = \frac{\pi^2}{2}$$
$$\int_{\alpha_2} \omega = \int_0^{\pi} (-\pi^2\,\cos(t)\,\sin(t) + \pi^2\,\sin(t)\,\cos(t) + t)\,dt = \frac{\pi^2}{2}$$
$$\int_{\alpha_3} \omega = \int_{-\pi}^{0} s\,ds = -\frac{\pi^2}{2}$$
$$\int_{\alpha_4} \omega = \int_{\pi}^{0} t\,dt = -\frac{\pi^2}{2}$$

Exercici 2: Sigui D una regió del pla limitada per una certa corba (diferenciable) tancada γ. Utilitzeu la fórmula de Green (o, equivalentment, el t. de Stokes) per a provar que l'àrea de D es pot calcular com:

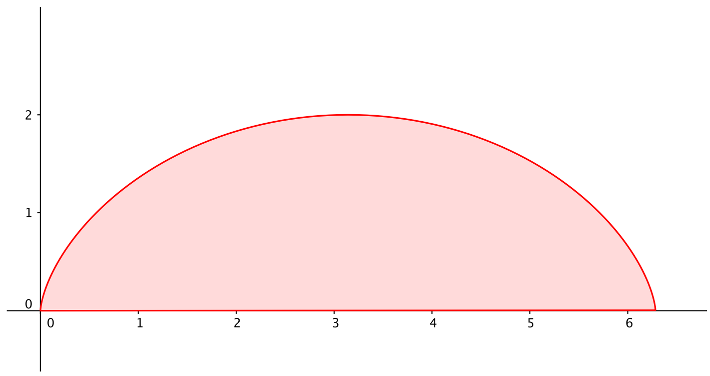
$$\text{Àrea}(D) = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx$$

Apliqueu l'anterior per a calcular l'àrea que queda entre la cicloide $\gamma(s) = (s - \sin(s), 1 - \cos(s))$ i l'eix de les x (per a $s \in [0, 2\pi]$).

Solució:

Com que $d(x\,dy) = -d(y\,dx) = dx \wedge dy$ és l'element de volum del pla, el T. de Stokes aplicat a la regió R corresponent a l'interior de la corba γ dóna directament la fórmula.

$$\int_\gamma x\,dy = \int_R dx \wedge dy \quad \text{(ja que } \partial R = \gamma\text{)}$$



Segons la fórmula anterior serà suficient calcular integrar $x\,dy = (s - \sin(s))\,d(1 - \cos(s)) = (s\,\sin(s) - \sin^2(s))\,ds$ (tenint en compte que, per compatibilitzar amb l'orientació, caldrà integrar començant en $s = 2\pi$ i acabant en $s = 0$) ja que sobre $y = 0$ la forma és nul·la. Caldrà calcular, doncs,

$$\int_{2\pi}^{0} (s\,\sin(s) - \sin^2(s))\,ds = \left[-s\,\cos(s) + \sin(s) - \frac{1}{2}\,s + \frac{1}{4}\,\sin(2\,s)\right]_{2\pi}^{0} = 3\,\pi$$

Exercici 3: Determineu la corba tancada γ del pla per a la qual la integral

$$\int_\gamma y^3\,dx + (3\,x - x^3)\,dy$$

té el valor màxim.

Solució:

Tenint en compte que

$$d(y^3\,dx + (3\,x - x^3)\,dy) = 3\,(1 - x^2 - y^2)\,dx \wedge dy$$

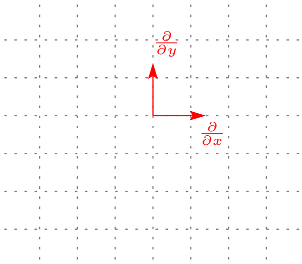
La integral sobre qualsevol corba tancada γ es redueix a la integral sobre el seu interior R donada per

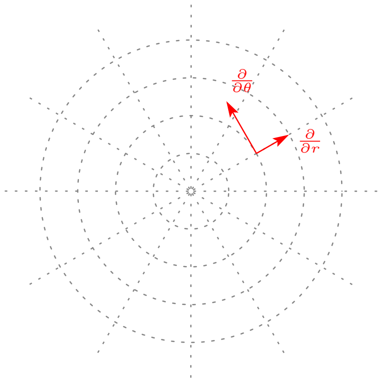
$$\int_R 3\,(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

que és la integral d'una funció del pla que decreix amb la distància a l'origen i és positiva al disc unitat i negativa fora. D'aquesta expressió es dedueix, doncs, que la regió que donarà el valor màxim serà el disc unitat i, per tant, que la corba γ és el cercle unitat.

Exercici 4: Quan es defineix un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ (o, en general, de $\mathbb{R}^n$) sempre es pot interpretar que l'expressió $X = (a_1, a_2, a_3)$ representa en cada punt el *vector tangent* que s'escriu com combinació lineal dels vectors tangents a les corbes coordenades amb components a_i. Si s'estableix $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d(t,\text{ct.},\text{ct.})}{dt}\Big|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{d(\text{ct.},t,\text{ct.})}{dt}\Big|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d(\text{ct.},\text{ct.},t)}{dt}\Big|_{t=0}$ l'anterior observació es resumeix en la igualtat $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z}$. D'aquesta forma, si es fa un *canvi de coordenades* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Phi(x, y, z)$ també es podrà representar X en funció de $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Per exemple, en $\mathbb{R}^2$,





(a) Quina relació hi ha entre els camps tangents corresponents a les coordenades cartesianes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ i els de les coordenades cilíndriques $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ de $\mathbb{R}^3$?

(b) Com es calcularà la divergència d'un camp de $\mathbb{R}^3$ si es coneix la seva expressió en funció de les coordenades cilíndriques?

Solució:

(a) Pensant el vectors tangents com derivades direccionals i aplicant la regla de la cadena es pot deduir que les fórmules de canvi de base seran (les derivades parcials en la direcció de les z són comuns als dos sistemes de coordenades)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial x} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial y}$$

(Recordeu que el canvi de coordenades ve donat per $x = r\,\cos(\theta)$, $y = r\,\sin(\theta)$).

Per tal de condensar els càlculs, es pot pensar que es té, en cada punt, la matriu de canvi de base

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

amb inversa

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -(1/r)\,\sin(\theta) & (1/r)\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial \theta}$$

i, per l'altre costat, un camp F que s'expressa en la base associada a les coordenades cilíndriques com $F = F_1 \frac{\partial}{\partial r} + F_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$ s'escriurà *en coordenades cartesianes* com

$$F = (\cos(\theta)\,F_1 - r\,\sin(\theta)\,F_2)\,\frac{\partial}{\partial x} + (\sin(\theta)\,F_1 + r\,\cos(\theta)\,F_2)\,\frac{\partial}{\partial y} + F_3\,\frac{\partial}{\partial z}$$

La divergència de F es calcularà, doncs, sumant el termes

$$(\cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\,\sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta})(\cos(\theta)\,F_1-r\,\sin(\theta)\,F_2)$$
$$(\sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial\theta})(\sin(\theta)\,F_1+r\,\cos(\theta)\,F_2)$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Un cop fet tots els càlculs i simplificant la suma surt

$$\operatorname{div}(F)=\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,F_1)}{\partial r}+\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=\frac{F_1}{r}+\frac{\partial F_1}{\partial r}+\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Nota: En la literatura trobareu la fórmula escrita com

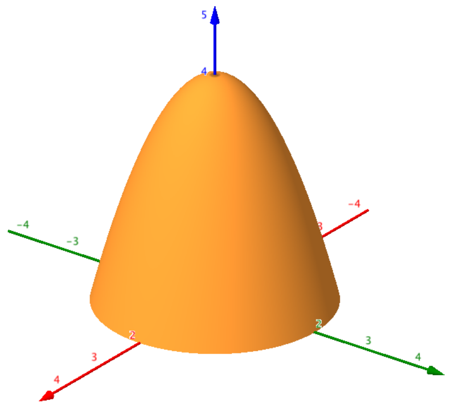
$$\operatorname{div}(F)=\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,F_1)}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

El motiu d'aquesta discrepància és que en aquestes fórmules les components del camp F que s'utilitzen són les relatives a la base *ortonormal* associada a les coordenades cilíndriques que està formada pels vectors $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ de forma que la component F_2 d'aquestes fórmules és igual a r vegades la component F_2 que s'ha utilitzat en els càlculs anteriors.

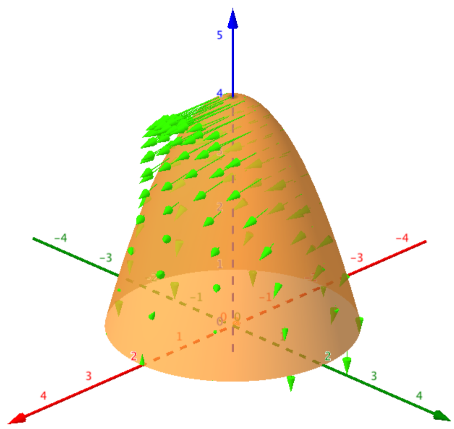
Exercici 5: Calculeu el flux del camp definit per $F(x,y,z)=(z^2,x\,z,x-y^2)$ a través de la superfície S determinada per les condicions $x^2+y^2=4-z$, $z\geq 0$ (amb la orientació que dóna $(0,0,1)$ com a vector normal quan $x=y=0$).

Solució:

Noteu que la superfície és el paraboloide de l'esquema següent



i que el camp (sobre la superfície) es veu com



Si es parametritza S prenent

$$\varphi(x,y)=(x,y,4-x^2-y^2)$$

amb la condició que $x^2+y^2\leq 0$, l'espai tangent es generarà amb

$$\varphi_x=(1,0,-2\,x)$$
$$\varphi_y=(0,1,-2\,y)$$

de forma que el vector normal $\varphi_x\times\varphi_y$ (o, si es vol escriure més directament, el dS) serà

$$dS=(2\,x,2\,y,1)$$

(notem que aquest vector normal és el que dóna l'orientació que es vol, ja que el seu valor quan $x=y=0$ és, justament, $(0,0,1)$). D'aquesta forma el producte escalar $F\cdot dS$ serà

$$F\cdot dS=2\,x\,y\,z+2\,x\,z^2-y^2+x$$

que restringit a S (posant z en funció de x,y) serà

$$F\cdot dS=2\,x^5+4\,x^3\,y^2+2\,x\,y^4-2\,x^3\,y-2\,x\,y^3-16\,x^3-16\,xy^2+8\,x\,y-y^2+33\,x$$

Aleshores el flux de F al llarg de S serà la integral

$$\int_S F\cdot dS=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(2\,x^5+4\,x^3\,y^2+2\,x\,y^4-2\,x^3\,y-2\,x\,y^3-16\,x^3-16\,xy^2+8\,x\,y-y^2+33\,x)\;dydx$$

i una mica de càlcul dona *immediatament*

$$\int_S F\cdot dS=-4\,\pi$$

Naturalment, aquest és el camí més llarg per obtenir el resultat final (tot i que hi ha bastants termes de la integral que donen 0 per les simetries del problema).

La forma d'arribar a un resultat pel camí més curt passa per veure en primer lloc que el camp F té divergència nul·la (això és obvi ja que la primera component no depèn de x, la segona no depèn de y i la tercera no depèn de z). El teorema de la divergència diu, aleshores, que els fluxos al llarg de de S i al llarg de la *tapa de baix* (el disc D corresponent a $x^2+y^2\leq 4$ amb $z=0$) s'han de compensar (quan es prenen les orientacions compatibles entre si) ja que, si M és la regió que queda *dins* el paraboloide, s'ha de complir

$$0=\int_M \operatorname{div}(F)\,dV=\int_{\partial M}F\cdot dS$$

i ∂M està format per les dues components S i D. Els càlculs seran molt més simples sobre la regió plana D que sobre S. A més, els càlculs es poden escurçar una mica més prenent *coordenades polars* en D (que són les que millor s'adapten a regions circulars). El que s'ha de calcular ara és

$$\int_D F\cdot dD$$

però la parametrització del disc serà

$$\psi(\theta,r)=(r\,\cos(\theta),r\,\sin(\theta),0)$$

amb vectors tangents generats per

$$\varphi_\theta=(-r\,\sin(\theta),r\,\cos(\theta),0)$$
$$\varphi_r=(\cos(\theta),\sin(\theta),0)$$

i amb

$$dD=(0,0,-r)$$

(aquesta elecció de l'ordre de les coordenades no és arbitrària, és la compatible amb l'orientació que s'ha triat a S). Com que F restringit a D (recordem que D correspon a $z=0$) serà (respecte les coordenades polars (θ,r))

$$F=\big(0,\;0,\;-r^2\sin^2(\theta)+r\,\cos(\theta)\big)$$

el flux sobre D serà la integral

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(r^3 \sin^2(\theta) - r^2 \cos(\theta)\right) d\theta dr = 4\pi\,.$$

I, per tant,

$$\int_S F \cdot dS = -4\pi$$

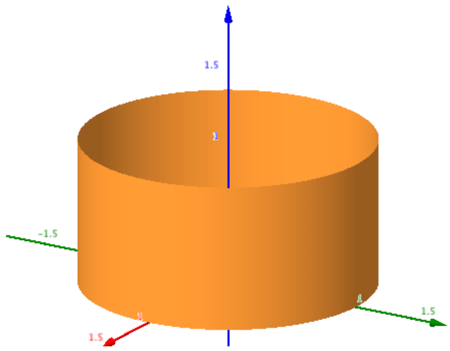
Exercici 6: Considereu el camp determinat per $F(x,y,z) = (x+1, y-1, 1-2z)$ i el cilindre $S = \left\{x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\right\}$ (orientat pel vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0)$). Calculeu el flux de F al llarg de S ($\int_S F \cdot dS$) integrant la divergència sobre un domini adequat (i alguna cosa més).

Solució:

El primer de tot que cal veure és que el camp F té divergència nul·la

$$\operatorname{div}(F) = 1 + 1 - 2 = 0$$

De forma que la circulació al llarg del cilindre ha de compensar la circulació al llarg de les dues *tapes*



Com que l'orientació que s'ha triat del cilindre és la que *mira cap a fora* l'orientació de la tapa inferior ha de ser la corresponent al vector normal $\nu_0 = (0,0,-1)$ i la de la tapa superior al vector normal $\nu_1 = (0,0,1)$. El camp F restringit a la tapa inferior ($z=0$) serà

$$F_0 = (x+1, y-1, 1)$$

mentre que la restricció a la superior serà

$$F_1 = (x+1, y-1, -1)$$

Els fluxos respectius es calcularan, doncs, amb

$$\int_{z=0} (F_0 \cdot \nu_0)\, dxdy = \int_{z=0} (-1)\, dxdy = -\pi$$

i

$$\int_{z=1} (F_1 \cdot \nu_1)\, dxdy = \int_{z=1} (-1)\, dxdy = -\pi$$

(l'àrea dels dos discs).

A partir d'aquí és clar que el flux al llarg del cilindre serà 2π

Exercici 7: (a) Sigui $F = (x,y,z)$ el camp radial de $\mathbb{R}^3$ i D una regió qualsevol (amb frontera S prou regular). Proveu que el volum de D es pot calcular com

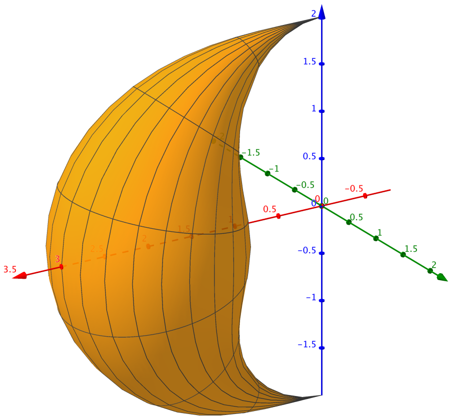
$$\operatorname{Vol}(D) = \frac{1}{3}\int_S F \cdot dS = \frac{1}{3}\int_S (F \cdot \nu)\, dS$$

(un terç del flux del camp radial sobre la superfície).

(b) Utilitzeu l'estratègia de l'apartat anterior per a calcular el volum de la regió limitada per la superfície parametritzada com

$$\varphi(u,v) = (2\cos(u) + \cos^3(u)\,\cos(v), \cos^2(u)\,\sin(v), 2\,\sin(u) + \cos^2(u)\,\sin(u)\,\cos(v))$$

Que correspon a $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, 2\,\pi]$.



Solució:

(a) La divergència del camp radial F és constant, amb valor 3. Per tant, la fórmula és únicament la manifestació del teorema de la divergència en aquest cas:

$$\int_S F \cdot dS = \int_D 3\,dV = 3\ \mathrm{Vol}(D)$$

(b) Per als càlculs d'aquest exercici caldrà tenir una bona calculadora.

Per a la parametrització que s'ha donat, els vectors tangents seran

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \Big(-3\,\cos^2(u)\cos(v)\sin(u) - 2\,\sin(u),\ -2\,\cos(u)\,\sin(u)\,\sin(v),\\ &\qquad\qquad -\big(3\,\cos(u)\,\sin^2(u) - \cos(u)\big)\cos(v) + 2\,\cos(u)\Big)\\ \varphi_v &= \Big(-\cos^3(u)\,\sin(v),\ \cos^2(u)\,\cos(v),\ -\cos^2(u)\,\sin(u)\,\sin(v)\Big)\end{aligned}$$

Això dóna un vector normal

$$\begin{aligned}dS = \Big(&-\cos^5(u)\,\sin^2(v) + 3\,\cos^5(u) + 2\,\cos^3(u)\cos(v) - 2\,\cos^3(u),\\ &\big(\cos^4(u)\,\cos(v) + 2\,\cos^2(u)\big)\sin(v),\\ &-\cos^4(u)\,\sin(u)\sin^2(v) + 3\,\cos^4(u)\,\sin(u) + 2\,\cos^2(u)\,\cos(v)\,\sin(u)\Big)\end{aligned}$$

(ja s'ha triat el signe per tal d'obtenir el vector normal que mira *cap a fora*).

El que s'haurà d'integrar per aplicar la fórmula serà

$$F \cdot dS = -2\,\cos^4(u)\,\sin^2(v) + 4\,\cos^4(u) + \big(\cos^6(u) + 4\,\cos^2(u)\big)\cos(v)$$

i el resultat serà

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol} &= \frac{1}{3}\int_S F \cdot dS\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(-2\,\cos^4(u)\,\sin^2(v) + 4\,\cos^4(u) + \big(\cos^6(u) + 4\,\cos^2(u)\big)\cos(v)\Big)\,dudv\\ &= \frac{3}{4}\pi^2\end{aligned}$$

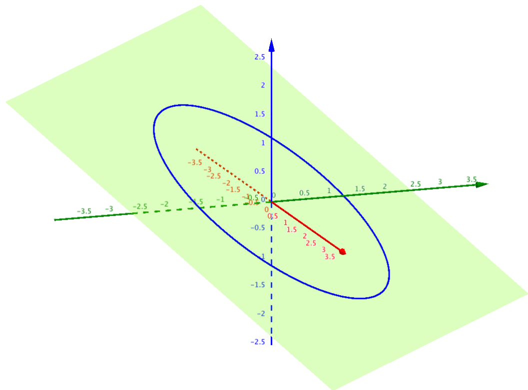
Exercici 8: Calculeu la circulació del camp definit per

$$F(x,y,z) = (3\,x^2\,y^2 + 4\,x^3\,y\,z^3 + 3\,x^2\,y\,z - y, 2\,x^3\,y + x^4\,z^3 + x^3\,z + x, 3\,x^4\,y\,z^2 + x^3\,y + y - x)$$

al llarg de l'el·lipse parametritzada per $c(t) = (2\,\sin(t), 2\,\cos(t), -\sin(t) - \cos(t))$. Feu el càlcul directe i el corresponent a aplicar el T. de Stokes. (Aneu en compte amb les orientacions i recordeu la versió corresponent al rotacional).

Solució:

Si es vol fer el càlcul directament s'ha de calcular la restricció del camp F a la corba c (respecte el paràmetre t) i el vector velocitat de la corba $c'(t)$.



El més fàcil de calcular és

$$c'(t) = (2\,\cos(t), -2\,\sin(t), -\cos(t) + \sin(t))$$

La restricció de F a la corba, en funció del paràmetre t, donarà

$$\begin{aligned} F(t) = \Big(&128\,\cos(t)\sin^6(t) + 128\,\sin^7(t) - 64\,\sin^5(t) \\ &\qquad - 24\,(8\,\cos(t)+1)\sin^4(t) - 8\,(3\,\cos(t)+8)\sin^3(t) + 24\,\sin^2(t) - 2\,\cos(t), \\ &32\,\sin^7(t) - 32\,\cos(t)\sin^6(t) - 48\,\sin^5(t) \\ &\qquad - 8\,(2\,\cos(t)+1)\sin^4(t) + 24\,\cos(t)\sin^3(t) + 2\,\sin(t), \\ &-192\,\sin^7(t) + 192\,\sin^5(t) + 96\,\cos(t)\sin^4(t) + 16\,\cos(t)\sin^3(t) - 2\,\sin(t) + 2\,\cos(t)\Big) \end{aligned}$$

La projecció sobre l'element de longitud (producte escalar) resultarà

$$\begin{aligned} F\cdot c' = &-256\,\sin^8(t) + 512\,\cos(t)\sin^7(t) + 32\,(8\,\cos^2(t)+9)\sin^6(t) - 16\,(12\,\cos(t)-1)\sin^5(t) \\ &- 80\,(6\,\cos^2(t)+\cos(t))\sin^4(t) - 64\,(\cos^2(t)+2\,\cos(t))\sin^3(t) + 6\,(8\,\cos(t)-1)\sin^2(t) \\ &+ 4\,\cos(t)\sin(t) - 6\,\cos^2(t) \end{aligned}$$

I la integral d'aquesta funció serà

$$\int_c F\cdot d\ell = \int_0^{2\,\pi} (F\cdot c'\,)\,dt = -12\,\pi$$

Com es pot veure, aquest és un altre exemple on es necessita una bona calculadora per poder obtenir els resultats sense cometre errades.

D'altra banda, obtenir el valor d'aquesta circulació és immediat utilitzant la fórmula del rotacional

$$\text{Circulació de } F = \int_{\partial S} F\cdot d\ell = \int_S \big(\text{rot}(F)\cdot\nu\big)\,dS$$

ja que, per un costa, no costa massa veure que el rotacional del camp que tenim és constant:

$$\text{rot}(F) = (1,1,2)$$

i, a més, com que la corba c està sobre el pla $x+y+2\,z=0$ (o de forma més convenient $z=-(x+y)/2$), es pot considerar la vora de regió plana S (l'interior de l'el·lipse) amb un vector normal (compatible amb l'orientació de c) constant donat per

$$\nu = (-1/2, -1/2, -1)$$

Amb això resulta que la integral que s'haurà de calcular serà, simplement,

$$\int_S \big(\mathrm{rot}(F)\cdot\nu\big)\,dS = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-3)\,dydx = -12\,\pi$$

(no cal ser massa espavilat per veure que es tracta de multiplicar per -3 l'àrea del cercle de radi 2)

Exercici 9:

(a) Calculeu la circulació del camp vectorial

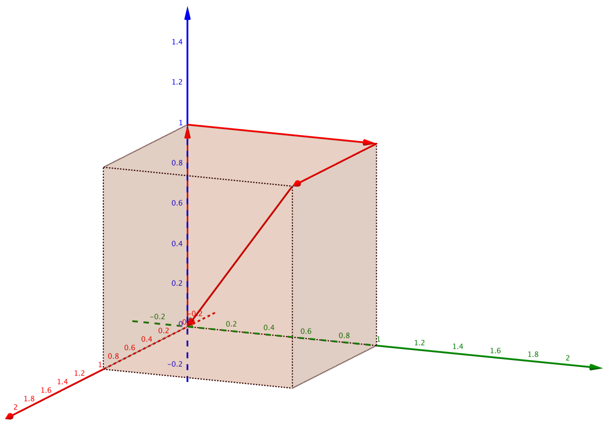
$$F(x,y,z) = (x^3 - 3\,x\,y^2, y^3 - 3\,x^2\,y, z)$$

al llarg de la trajectòria que sortint de l'origen va seguint les arestes del cub, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ i $0\le z\le 1$, anant a $(0,0,1)$, a $(0,1,1)$, i a $(1,1,1)$ i finalment torna a l'origen per la diagonal des de $(1,1,1)$.

(b) Calculeu el rotacional de F. Observeu que és nul i que aquest fet permet determinar una funció f tal que $F=\nabla f=\mathrm{grad}(f)$. Expliciteu-la.

Solució:

(a) L'esquema del recorregut serà



Les dades dels quatre segments que el formen (tenint en compte l'orientació del circuit)

$$\begin{array}{ll} \alpha_1(t) = (0,0,t) & \text{tangent} = (0,0,1) \\ \alpha_2(t) = (0,t,1) & \text{tangent} = (0,1,0) \\ \alpha_3(t) = (t,1,1) & \text{tangent} = (1,0,0) \\ \alpha_1(t) = (1-t,1-t,1-t) & \text{tangent} = (-1,-1,-1) \end{array}$$

De forma que les projeccions del camp F sobre els elements de longitud són

$$\begin{aligned} F\cdot d\ell_1 &= z = t \\ F\cdot d\ell_2 &= y^3 - 3\,x^2\,y = t^3 \\ F\cdot d\ell_3 &= x^3 - 3\,x\,y^2 = t^3 - 3\,t \\ F\cdot d\ell_4 &= -x^3 + 3\,x\,y^2 - y^3 + 3\,x^2\,y - z = -4\,t^3 + 12\,t^2 - 11\,t + 3 \end{aligned}$$

i la circulació serà la suma de les integrals

$$\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}$$
$$\int_0^1 (t^3 - 3\,t)\,dt = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 (-4\,t^3 + 12\,t^2 - 11\,t + 3)\,dt = -1 + 4 - \frac{11}{2} + 3 = \frac{1}{2}$$

que, clarament, dona com a resultat 0.

(b) Aplicant la fórmula del càlcul del rotacional

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^3 - 3\,x\,y^2 & y^3 - 3\,x^2\,y & z \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + (-6\,x\,y + 6\,x\,y) \cdot \mathbf{k} = (0,0,0)$$

Es pot obtenir, doncs, una funció f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 - 3\,x\,y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^3 - 3\,x^2\,y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = z$$

Integrant amb compte s'obtindrà

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\,y^2 + C$$

(on C és una constant qualsevol).