2 Involutes i Evolutes

Exercici 2.1. (**La involuta** o evolvent.) Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una corba regular de curvatura mai nul-la. S'anomena *involuta* de α a qualsevol corba β que talli ortogonalment a totes les rectes tangents de α.

a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α.

b) Trobeu una parametrització de β quan α no està parametritzada per l'arc.

c) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: podeu utilitzar un cordill.)

d) Trobeu la involuta de la *catenària* $y = \cosh x$ que passa pel punt $(0, 1)$. Comproveu que es tracta de la *tractriu*.

e) Trobeu parametritzacions de les involutes de la circumferència i de la *cicloide*.

Exercici 2.2. (**L'evoluta.**) Diem que una corba regular plana β és l'*evoluta* d'una altra corba regular plana α si i només si α és una involuta de β. Dit d'una altra manera, β és l'envolupant de la família de rectes normals de α. Recordem que s'anomena *envolupant* d'una família de corbes a una corba que és tangent en cada punt a una de les corbes de la família.

a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α, suposant que la curvatura de α no s'anul·la.

b) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Recordeu la definició de centre de curvatura.)

c) Demostreu que la longitud de β entre $\beta(s_0)$ i $\beta(s_1)$ és igual a la diferència dels radis de curvatura de α en els punts $\alpha(s_0)$ i $\alpha(s_1)$, si $k(s)$ és monòtona entre s_0 i s_1.

d) Considerem les normals a α en dos punts propers $s_1 \neq s_2$ i fem tendir s_1 a s_2. Demostreu que la intersecció d'aquestes normals convergeix a un punt de l'evoluta.

e) Trobeu l'evoluta de la *cicloide*.

Exercici 2.3.

a) Donada una corba $\alpha(s)$ parametrizada per l'arc, trobeu una fórmula general per a la curvatura d'una involuta qualsevol de α, en el paràmetre induït per l'arc de α.

b) Comproveu la fórmula anterior en el cas de la *catenària*.

Exercici 2.4. Recordeu que la tractriu és la corba T caracteritzada per la propietat següent. Per tot punt P de T, la recta tangent a T en P talla l'eix d'abscises en un punt a distància 1 de P.

a) Demostreu que la catenària és la única corba tal que la recta tangent té pendent igual al paràmetre arc, mesurat des del punt amb ordenada mínima.

b) Usant les propietats anteriors, demostreu geomètricament que la involuta de la catenària que parteix de $(0, 1)$ és la tractriu.

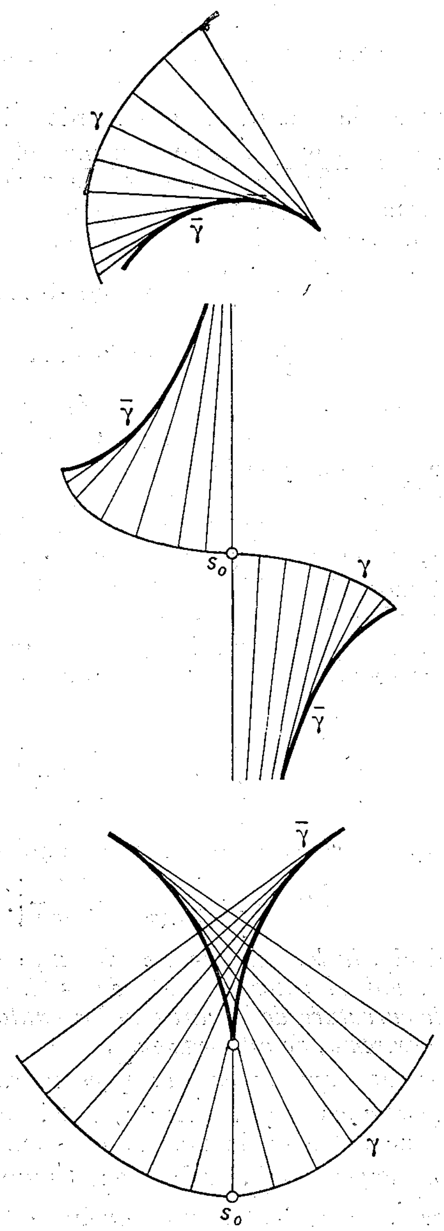
Exercici 2.5. Siguin C i R dues corbes regulars a $\mathbb{R}^2$ amb parametritzacions per l'arc respectives $\alpha(s)$ i $\beta(s)$.

a) Trobeu explícitament una família g_s de moviments rígids de $\mathbb{R}^2$ tals que g_s aplicat a R sigui una corba tangent a C en $\alpha(s)$ i de manera que no hi hagi lliscament entre les corbes en el punt de contacte.

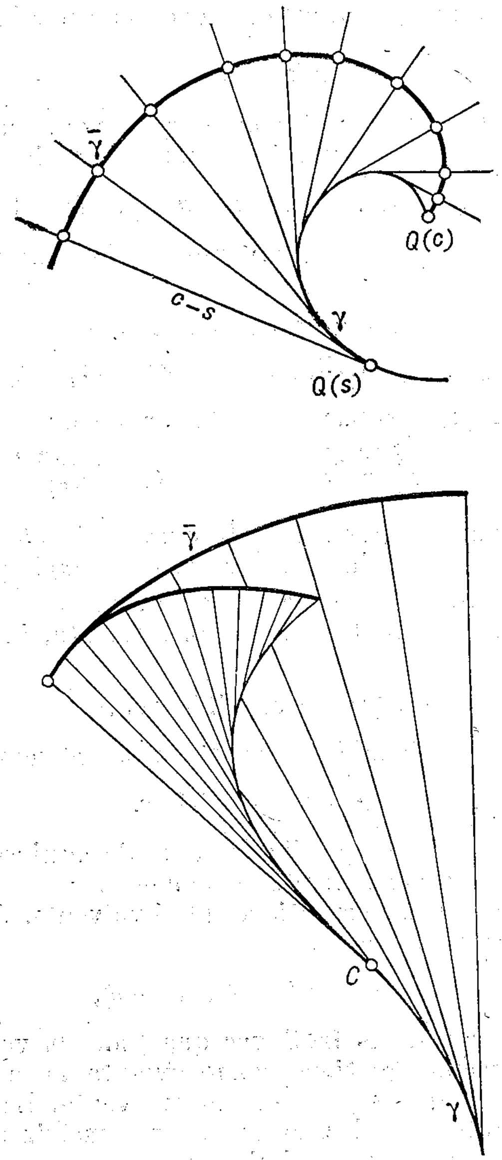
   Comproveu que si R és una recta, llavors $s \mapsto g_s(P)$ és un involuta de C per cada $P \in R$.

b) Per a cada s_0 trobeu els $P \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} g_s(P) = (0, 0).$$



En negreta *evolutes*



En negreta *involutes*