2 Corbes a l'espai: Triedre de Frenet

Exercici 13: Considerem una corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i un vector fix $v \in \mathbb{R}^3$. Demostreu que si $\alpha'(s)$ és ortogonal a v per a cada $s \in I$ llavors la corba és plana.

Solució: Considerem la funció $f(s) = \langle(\alpha(s) - \alpha(s_0)), v\rangle$. Clarament $f(s_0) = 0$ i $f'(s) = 0$ per tot s. Això implica $f(s) = 0$ per tot s, i hem acabat (la corba està inclosa en el pla que passa per $\alpha(s_0)$ amb vector normal v).

Exercici 14: Determineu (si es pot) una parametrització per l'arc de les corbes definides per

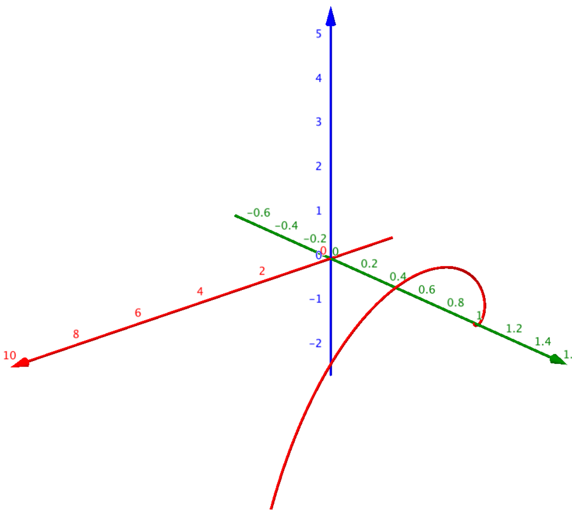
(a) $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t \sin(t), 1, \mathrm{e}^t \cos(t))$,

(b) $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$,

(c) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

Solució:

(a) $\boldsymbol{\alpha(t) = (\mathrm{e}^t \sin(t), 1, \mathrm{e}^t \cos(t))}$



El vector tangent és

$$\alpha'(t) = \left(\cos(t)\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \sin(t)\,,\ 0,\ \cos(t)\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \sin(t)\right),$$

i la seva norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t.$$

Per tant, la longitud $s(t)$ de la corba entre els valors del paràmetre 0 i t serà

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{e}^x\,dx = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^t - 1\right),$$

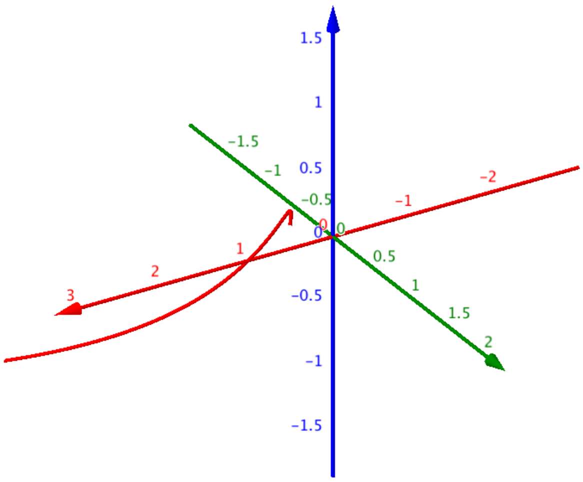
de forma que el paràmetre t serà, en funció de la longitud s,

$$t = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 1\right),$$

i la corba es pot reparametritzar per l'arc com

$$\alpha(s) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)\,\sin(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)), 1, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)\,\cos(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right))\right).$$

(b) $\boldsymbol{\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)}$



El vector tangent és

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1)\,,$$

i la seva norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(\cosh(t))^2 + (\sinh(t))^2 + 1} = \sqrt{2}\,\cosh(t).$$

Per tant, la longitud $s(t)$ de la corba entre els valors del paràmetre 0 i t serà

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\,\cosh(x)\,dx = \sqrt{2}\,\sinh(t),$$

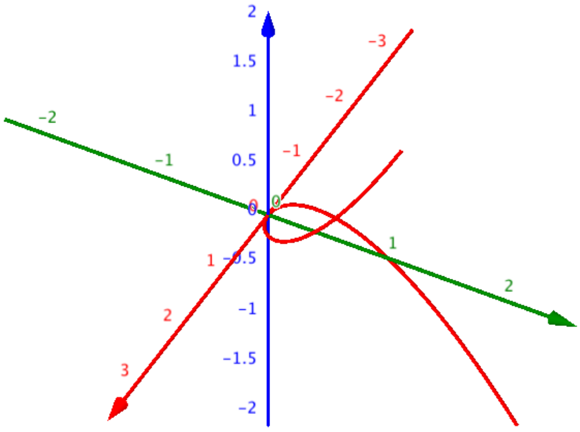
de forma que el paràmetre t serà, en funció de la longitud s,

$$t(s) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right),$$

i la corba es pot reparametrització per l'arc com

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}\,, \frac{\sqrt{2}}{2}\,s, \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s\right)\right)$$

(c) $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2, t^3)}$



El vector tangent és

$$\alpha'(t) = (1, 2\,t, 3\,t^2),$$

i la seva norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}.$$

Per tant, la longitud $s(t)$ de la corba entre els valors del paràmetre 0 i t serà

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4\,x^2 + 9\,x^4}\, dx,$$

integral que no es pot expressar en termes de funcions elementals. Això significa que en aquest cas no hi ha manera d'expressar explícitament el paràmetre inicial t en funció del paràmetre arc.

Exercici 15: Sigui $\gamma(t)$ la parametrització d'una corba regular (no necessàriament per l'arc). Demostreu les fórmules següents per a la curvatura i la torsió $\tau(t)$ d'aquesta corba

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}, \\ \tau(t) &= -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2}. \end{aligned}$$

Solució: Sigui $s = s(t)$ el paràmetre arc de $\gamma(t)$. Quan derivem $\gamma(t)$ respecte t i escrivim el resultat en funció de s tenim [7]

$$\frac{d\gamma(t)}{dt}_{|t=t(s)} = \frac{d\gamma(t(s))}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}_{|t=t(s)} = \frac{ds}{dt}_{t=t(s)} \cdot T(s) \tag{3}$$

[7] Utilitzant el teorema de la funció inversa la regla de la cadena

$$\frac{df(t(s))}{ds} = \frac{df(t)}{dt}_{|t=t(s)} \cdot \frac{dt}{ds}$$

es pot escriure com

$$\frac{df(t)}{dt}_{t=t(s)} = \frac{df(t(s))}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}_{t=t(s)}.$$

on $T(s)$ és el vector unitari tangent a la corba en el punt de coordenada $s = s(t)$.

Per alleugerir la notació escriurem, com és habitual, simplement

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}T.$$

Deduïm en particular que

$$|\gamma'| = \frac{ds}{dt}.$$

Per trobar la curvatura es fa la segona derivada respecte t (i s'aplica la fórmula de Frenet de la derivada del vector tangent):

$$\gamma'' = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\,N = \frac{d^2s}{dt^2}T + |\gamma'|^2\,k\,N. \tag{4}$$

Fent producte vectorial amb γ' (que és múltiple de T) s'obté l'expressió per a la curvatura ja que

$$\gamma' \wedge \gamma'' = (|\gamma'|\;T) \wedge \left(\frac{d^2s}{dt^2}T + |\gamma'|^2\,k\,N\right) = |\gamma'|^3\,k\,B, \tag{5}$$

d'on queda clar que

$$|\gamma' \wedge \gamma''| = |\gamma'|^3\,k,$$

i en conseqüència

$$k = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

Quan es fa la tercera derivada respecte t (i no es va fent cas dels termes en T o N que no importaran per a més endavant) obtenim

$$\gamma''' = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N + |\gamma'|^2\,k\,\frac{ds}{dt}\frac{dN}{ds} = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N + |\gamma'|^3\,k\,(-k\,T - \tau B)\,.$$

Finalment ens podem quedar amb

$$\gamma''' = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N - |\gamma'|^3\,k\,\tau\,B.$$

Fent el producte escalar amb $\gamma' \wedge \gamma''$

$$\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle = -\,|\gamma' \wedge \gamma''|\;|\gamma'|^3\,k\,\tau.$$

Però com que $|\gamma' \wedge \gamma''| = |\gamma'|^3\,k$ es pot dir que

$$\tau = -\frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{|\gamma' \wedge \gamma''|^2} = -\frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \wedge \gamma''|^2},$$

que és el que es volia veure.

Exercici 16: Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de les corbes següents:

1. $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

2. $\alpha(t) = (t, \dfrac{1-t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t})$. Proveu a més que la corba és plana i determineu el pla que la conté.

3. $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\, t)$.

4. $\alpha(t) = (2\,t, \log(t), t^2)$.

5. $\alpha(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$. En aquest cas proveu que $k(t) = \pm\tau(t)$.

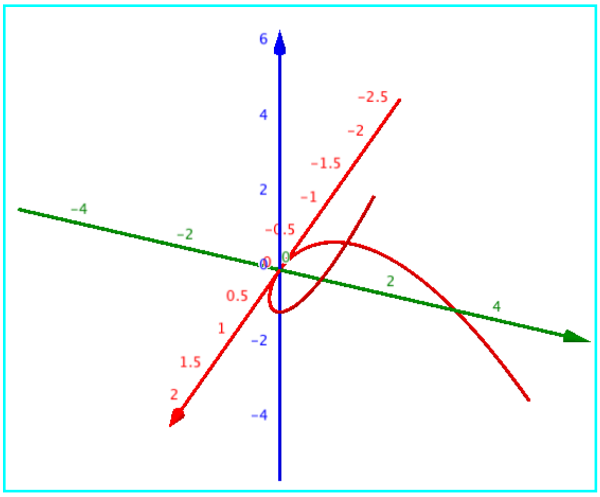
Solució: Com que aquestes corbes no estan parametritzades per l'arc utilitzarem les fórmules (3), (4) i (5) del problema anterior. A partir d'elles obtenim directament

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{|\alpha'(t)|}\,\alpha'(t),\\
B(t) &= \frac{1}{|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)|}\,(\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3\;k(t)}\,(\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)),\\
N(t) &= B(t)\wedge T(t) = -T(t)\wedge B(t).
\end{aligned}$$

Aquestes fórmules són molt útils ja que ens donen directament el triedre de Frenet per a corbes que no estan parametritzades per l'arc.

Això vol dir que tot el que s'haurà de fer en cada apartat serà calcular α', α'', $\alpha'\wedge\alpha''$, α''', el determinant de les tres derivades i les normes corresponents a les fórmules. Observem doncs que a la pràctica es calcula abans el vector binormal $B(t)$ que la normal principal $N(t)$.

1. $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2, t^3)}$.



Si es van calculant els elements necessaris per aplicar les fórmules:

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (1, 2\,t, 3\,t^2),\\
\alpha''(t) &= (0, 2, 6\,t),\\
\alpha'''(t) &= (0, 0, 6),\\
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (6\,t^2, -6\,t, 2),\\
|\alpha'(t)| &= \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}\,,\\
|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| &= \sqrt{36\,t^4 + 36\,t^2 + 4}\,,\\
\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle &= 12.
\end{aligned}
$$

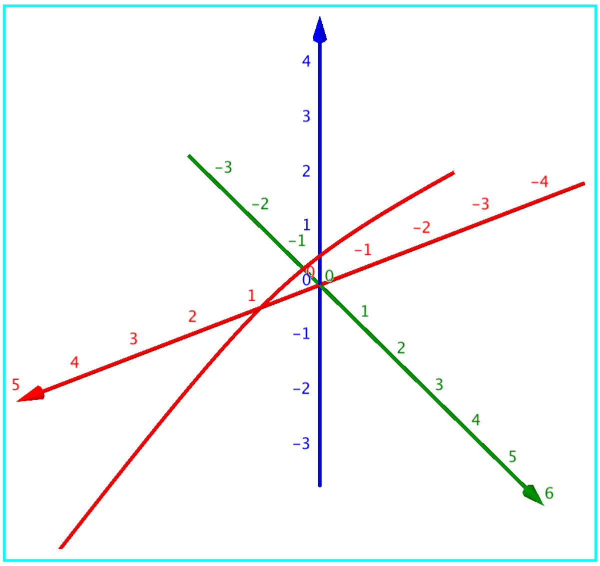
De forma que la curvatura i la torsió seran:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\sqrt{36\,t^4 + 36\,t^2 + 4}}{(9\,t^4 + 4\,t^2 + 1)^{3/2}},\\
\tau(t) &= -\frac{3}{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}.
\end{aligned}
$$

I el triedre de Frenet serà

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}\,(1, 2\,t, 3\,t^2),\\
B(t) &= \frac{1}{\sqrt{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}}\,(3\,t^4, -3\,t, 1),\\
N(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}\,\sqrt{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}}\,(-9\,t^3 - 2\,t, -9\,t^4 + 1, 6\,t^3 + 3\,t).
\end{aligned}
$$

2. $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t})}$.



Amb una mica de vista es pot comprovar que la corba queda sobre el pla $x - y + z = 1$. (Per tant, el seu binormal hauria de ser múltiple de $(1, -1, 1)$).

Si es fan els càlculs per determinar curvatura, torsió i triedre de Frenet:

$$\alpha'(t) = \left(1,\, -\frac{1}{t^2},\, -\frac{1}{t^2} - 1\right),$$
$$\alpha''(t) = \left(0,\, \frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right),$$
$$\alpha'''(t) = \left(0,\, -\frac{6}{t^4},\, -\frac{6}{t^4}\right),$$
$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \left(\frac{2}{t^3},\, -\frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right),$$
$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4} + 2} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{t^2},$$
$$|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \frac{2\sqrt{3}}{t^3},$$
$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle = 0.$$

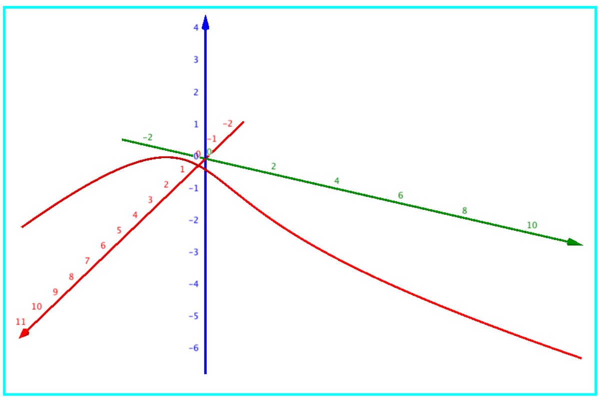
De forma que la curvatura i la torsió seran:

$$k(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t^3}{(t^4+t^2+1)^{3/2}},$$
$$\tau(t) = 0.$$

I el triedre de Frenet serà

$$T(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}\left(1,\, -\frac{1}{t^2},\, -\frac{1}{t^2} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}(t^2, -1, -1-t^2),$$
$$B(t) = \frac{t^3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2}{t^3},\, -\frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),$$
$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{6}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}(t^2+2, 2\,t^2+1, t^2-1).$$

3. $\boldsymbol{\alpha(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\,t)}$.



$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(\mathrm{e}^{t},\, -\mathrm{e}^{-t},\, \sqrt{2}\,\right),\\
\alpha''(t) &= \left(\mathrm{e}^{t},\, \mathrm{e}^{-t},\, 0\right),\\
\alpha'''(t) &= \left(\mathrm{e}^{t},\, -\mathrm{e}^{-t},\, 0\right),\\
\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) &= \left(-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{t}, 2\right),\\
|\alpha'(t)| &= \sqrt{\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t}+2} = (\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}),\\
|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)| &= \sqrt{2\,\mathrm{e}^{2\,t}+2\,\mathrm{e}^{-2\,t}+4} = \sqrt{2}\,\sqrt{\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t}+2} = \sqrt{2}\,(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}),\\
\langle \alpha'(t)\wedge\alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle &= -2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

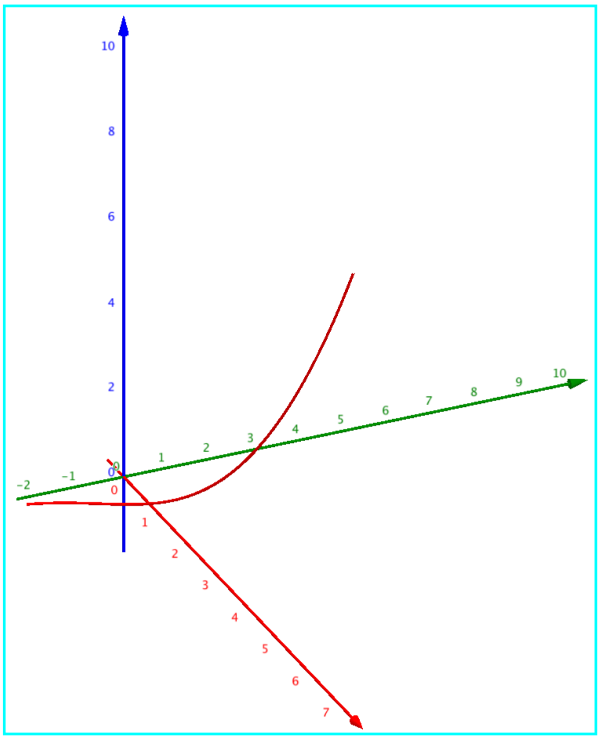
De forma que la curvatura i la torsió seran:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2\,t}}{\mathrm{e}^{4\,t}+2\,\mathrm{e}^{2\,t}+1} = \frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t})^2},\\
\tau(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t}+2} = \frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t})^2}.
\end{aligned}
$$

I el triedre de Frenet

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{e^{t}+e^{-t}}\,\left(\mathrm{e}^{t},\, -\mathrm{e}^{-t},\, \sqrt{2}\,\right),\\
B(t) &= \frac{1}{e^{t}+e^{-t}}\,\left(-\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{t}, \sqrt{2}\,\right),\\
N(t) &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\,t}}\,\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2\,t}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{2\,t}, 1-\mathrm{e}^{2\,t}\right).
\end{aligned}
$$

4. $\boldsymbol{\alpha(t) = (2\,t, \log(t), t^2)}$.



$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(2,\, \frac{1}{t},\, 2\,t\right), \\
\alpha''(t) &= \left(0,\, -\frac{1}{t^2},\, 2\right), \\
\alpha'''(t) &= \left(0,\, \frac{2}{t^3},\, 0\right), \\
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \left(\frac{4}{t},\, -4,\, -\frac{2}{t^2}\right), \\
|\alpha'(t)| &= \sqrt{4\,t^2 + \frac{1}{t^2} + 4} = \frac{2\,t^2+1}{t}, \\
|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| &= \sqrt{\frac{16}{t^2} + \frac{4}{t^4} + 16} = \frac{2\,(2\,t^2+1)}{t^2}, \\
\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle &= -\frac{8}{t^3}.
\end{aligned}
$$

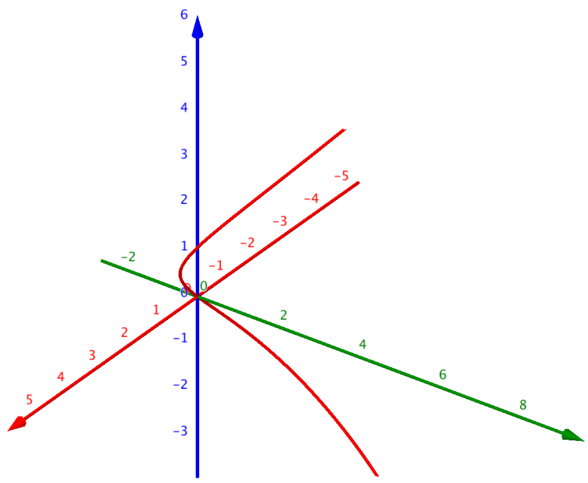
De forma que la curvatura i la torsió seran:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{2\,t}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1} = \frac{2\,t}{(2\,t^2+1)^2}, \\
\tau(t) &= \frac{2\,t}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1} = \frac{2\,t}{(2\,t^2+1)^2},
\end{aligned}
$$

I el triedre de Frenet

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1},\, \frac{1}{2\,t^2+1},\, \frac{2\,t^2}{2\,t^2+1}\right), \\
B(t) &= \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1},\, -\frac{2\,t^2}{2\,t^2+1},\, -\frac{1}{2\,t^2+1}\right), \\
N(t) &= \left(-\frac{2\,t^2-1}{2\,t^2+1},\, -\frac{2\,t}{2\,t^2+1},\, \frac{2\,t}{2\,t^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

5. $\boldsymbol{\alpha(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)}$.



$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(-3\,t^2+3,\ 6\,t,\ 3\,t^2+3\right) = 3\,(1-t^2, 2\,t, t^2+1),\\
\alpha''(t) &= (-6\,t,\ 6,\ 6\,t) = 6\,(-t, 1, t),\\
\alpha'''(t) &= (-6,\ 0,\ 6) = 6\,(-1, 0, 1),\\
\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) &= \left(18\,t^2-18,\ -36\,t,\ 18\,t^2+18\right) = 18\,(t^2-1, -2\,t, t^2+1),\\
|\alpha'(t)| &= \sqrt{18\,t^4+36\,t^2+18} = 3\sqrt{2}\,\left(t^2+1\right),\\
|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)| &= \sqrt{648\,t^4+1296\,t^2+648} = 18\sqrt{2}\,\left(t^2+1\right),\\
\langle\alpha'(t)\wedge\alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle &= 216
\end{aligned}
$$

De forma que la curvatura i la torsió seran:

$$
\begin{aligned}
k(t) &= \frac{1}{3\,(t^2+1)^2},\\
\tau(t) &= -\frac{1}{3\,(t^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

I el triedre de Frenet

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t^2+1}, \sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
B(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t^2+1}, -\sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\\
N(t) &= \left(-\frac{2\,t}{t^2+1}, -\frac{t^2-1}{t^2+1}, 0\right).
\end{aligned}
$$

Exercici 17: Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura idènticament nul·la. Demostreu que $\alpha(I)$ està continguda en una línia recta.

Solució: Com és regular es pot reparametritzar per l'arc. Diguem s a aquest paràmetre. Com $\alpha''(s) = k(s)N(s)$, tenim $\alpha''(s) = 0$, que implica, integrant dos cops cada component, $\alpha(s) = (a_1 + sa_2, b_1 + sb_2, c_1 + sc_2) = (a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2)$, que és una recta.

Exercici 18: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que α és plana si i només si tots els plans osculadors són paral·lels a un pla fix.

Proveu també que α és plana si i només si la torsió de α és idènticament zero.

Solució: Recordem primer que per poder parlar de pla osculador necessitem la condició de curvatura no nul·la.

Si la corba és plana, el pla que la conté és el pla osculador i hem acabat.

Recíprocament, suposem que tots els plans osculadors són paral·lels, és a dir, que el vector binormal $B(s)$ és constant $B(0)$ (suposem que s és el paràmetre arc) i definim $f(s) = \langle\alpha(s) - \alpha(0), B(0)\rangle$. Tenim que $f(0) = 0$ i que, $f'(s) = \langle\alpha'(s), B(0)\rangle = \langle T(s), B(s)\rangle = 0$. De manera que $f \equiv 0$ i α està continguda en el pla osculador de α pel punt $\alpha(0)$.

La tercera equació de Frenet ens diu que $B(t)$ és constant si i només si $\tau(s) = 0$.

D'altra banda, la hipòtesi sobre la curvatura (vegeu on l'hem usada) és necessària ja que existeixen exemples de corbes regulars que són localment planes sense estar contingudes en un únic pla, per exemple, dues corbes planes unides per un segment recte (observem que sobre aquest segment la curvatura és zero i que, en realitat, podria ser un únic punt). Vegeu l'exercici següent.

Exercici 19: Considerem l'aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, \mathrm{e}^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (t, \mathrm{e}^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Comproveu que aquesta corba té torsió nul·la però no està continguda en un pla.

Solució: És fàcil veure que

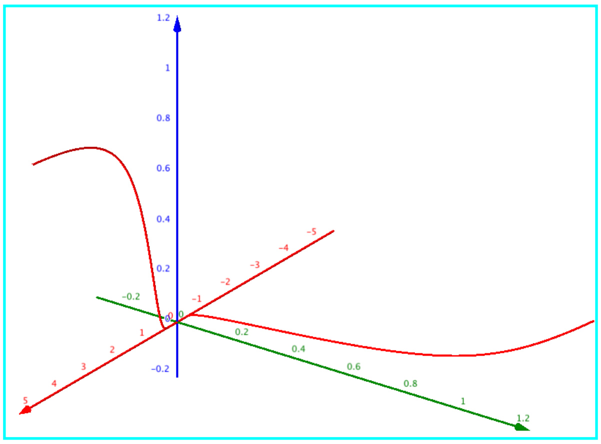
$$\lim_{t \mapsto 0^+} \alpha'(t) = \lim_{t \mapsto 0^-} \alpha'(t) = (1,0,0).$$

Per tant, la corba és regular. De fet és $\mathcal{C}^\infty$ ja que la funció e^{-1/t^2} té la propietat de que ella i totes les seves derivades s'anullen en $t = 0$. Així

$$\lim_{t \mapsto 0^+} \alpha^{(k)}(t) = \lim_{t \mapsto 0^-} \alpha^{(k)}(t) = (0,0,0), \quad k > 1$$

Per un altre costat, en tot el recorregut corresponent a $t > 0$ la corba està continguda en el pla xz , mentre que en el recorregut de $t < 0$ està dins el pla xy i, per tant, en tots els punts del recorregut amb $t \neq 0$, $\tau(t) = 0$. Però com la corba és diferenciable la seva torsió també ho és i per tant $\tau(0) = 0$. Així $\alpha(t)$ té torsió nul·la a tot arreu i no es plana. I no és contradicció amb el problema anterior perquè la curvatura de $\alpha(t)$ en $t = 0$ és 0.

Totes aquestes característiques es poden observar sense problemes al gràfic següent sense cap càlcul addicional



Exercici 20: Demostreu que una corba regular $\alpha(t)$ té imatge continguda en una recta si i només si $\alpha''(t)$ és proporcional a $\alpha'(t)$.

Solució: Suposem primerament que $\alpha(t)$ està continguda en una recta. Això vol dir que podem escriure

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + f(t)\,\vec{v}$$

on $f(t)$ és una certa funció i $\vec{v}$ és el vector director de la recta. Llavors $\alpha'(t) = f'(t)\,\vec{v}$, la qual cosa implica en particular $f'(t) \neq 0$ per a tot t, ja que estem suposant que $\alpha(t)$ és regular. Tornant a derivar

$$\alpha''(t) = f''(t)\,\vec{v} = f''(t)\frac{\alpha'(t)}{f'(t)} = \frac{f''(t)}{f'(t)}\alpha'(t),$$

és a dir, la derivada segona és proporcional a la derivada primera, com volíem veure.

Recíprocament, si $\alpha''(t) = \lambda(t)\,\alpha'(t)$, per a una certa funció $\lambda(t)$, tenim $\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) = 0$ i per tant (utilitzant la fórmula de la curvatura $k(t)$ respecte una paràmetre arbitrari), $k(t) = 0$. I ja hem vist a l'exercici 17 que les corbes amb curvatura nul·la estan sobre una recta.

Exercici 21 (Corbes de Bertrand): Siguin $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ dues corbes diferents tals que per a cada $t \in (a, b)$ la recta normal principal a $\alpha(t)$ en el punt de coordenada t coincideix amb la recta normal principal a $\beta(t)$ en el punt de coordenada la mateixa t. Suposem que la curvatura $k_\alpha(t)$ i la torsió $\tau_\alpha(t)$ de $\alpha(t)$ són no nul·les en tot punt.

1. Proveu que existeix una constant $r \neq 0$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + rN_\alpha(t)$, $\forall t \in (a, b)$, on $N_\alpha(t)$ és el vector normal principal a la corba $\alpha(t)$. En particular la distància entre $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant.

2. Proveu que l'angle entre els vectors tangents a $\alpha(t)$ i $\beta(t)$, en els punts corresponents al mateix paràmetre t, és constant.

3. Proveu que hi ha una relació lineal entre la curvatura i la torsió de $\alpha(t)$ (és a dir, que existeixen constant A, B tals que $A\,k_\alpha(t) + B\,\tau_\alpha(t) = 1$, on A, B són constants).

Solució: Suposem que t és el paràmetre arc de α. Això implicarà, en general, que t *no és el paràmetre arc de* β.

1. Per hipòtesi tenim $N_\alpha(t) = \pm N_\beta(t)$, on $N_\beta(t)$ és el vector normal principal de $\beta(t)$, i per tant,

   $\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\cdot N_\alpha(t)$. Cal veure doncs que $\lambda(t)$ és constant. Derivant

   $$\begin{aligned} \beta'(t) &= \alpha'(t) + \lambda'(t)\,N_\alpha(t) + \lambda(t)\,N_\alpha'(t) \\ &= (1 - k_\alpha(t)\,\lambda(t))\,T_\alpha(t) + \lambda'(t)\,N_\alpha(t) - \lambda(t)\,\tau_\alpha(t)\,B_\alpha(t). \end{aligned}$$

   on $k_\alpha(t)$ i $\tau_\alpha(t)$ són la curvatura i la torsió de $\alpha(t)$, i $T_\alpha(t), N_\alpha(t), B_\alpha(t)$ és la referència de Frenet de $\alpha(t)$.

   Multiplicant per $N_\alpha(t)$ obtenim $0 = \lambda'(t)$ que implica $\lambda(t) = A \in \mathbb{R}$.

2. Derivant el producte $\langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle$ respecte de t i denotant $s = s(t)$ el paràmetre arc de β tenim,

   $$\begin{aligned} \langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle' &= \langle T_\alpha(t)', T_\beta(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), T_\beta(t)'\rangle \\ &= \langle k_\alpha(t)\,N_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), k_\beta(t)\,\frac{ds}{dt}\,N_\beta(t)\rangle = 0, \end{aligned}$$

   ja que $N_\alpha(t) = \pm N_\beta(t)$. Hem usat la regla de la cadena i que

   $$T_\beta(t) = \frac{d\tilde{\beta}(s)}{ds}_{|s=t}$$

on $\tilde{\beta}(s) = \beta(t(s))$ és la reparametrització per l'arc de $\beta(t)$.

Així doncs $\langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle$ és constant. Com són unitaris això vol dir que l'angle que formen és constant.

3. Com que $T_\beta(t) = \dfrac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$, usant el calcul de l'apartat 1, tenim

$$c = \langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle = \langle T_\alpha(t), \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}\rangle = \frac{1 - A\,k_\alpha(t)}{\sqrt{(1 - A\,k_\alpha(t))^2 + A^2\,\tau_\alpha(t)^2}}$$

Aleshores $(1 - A\,k_\alpha(t))^2\,(1 - c^2) = c^2\,A^2\,\tau_\alpha(t)^2$ amb c, A constants. Com $\tau \neq 0$, $(1 - c^2)$ tampoc pot ser 0 ja que

$$(1 - c^2) = \frac{A^2\,\tau_\alpha(t)^2}{(1 - A\,k(t))^2 + A^2\,\tau_\alpha(t)^2}.$$

De manera que tenim

$$\frac{1 - A\,k_\alpha(t)}{\tau_\alpha(t)} = \frac{c\,A}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Com que $B = c\,A/\sqrt{1 - c^2}$ és constant, tenim $1 - A\,k_\alpha(t) = B\,\tau_\alpha(s)$ com volíem.

Observem que si $c = 0$ (tangents ortogonals), $B = 0$ i la torsió no apareix. També és clar que les úniques corbes de Bertrand planes són cercles concèntrics.

Exercici 22: Demostreu que si $\gamma(s)$ és una corba de curvatura constant llavors la corba formada pels centres de curvatura també és de curvatura constant i la corba dels seus centres de curvatura és la corba inicial. En particular són corbes de Bertrand.

Solució: La corba dels centres de curvatura de $\gamma(s)$, s paràmetre arc, és $\sigma(s) = \gamma(s) + \rho N(s)$, amb ρ el radi de curvatura constant. Observem que

$$\sigma'(s) = \gamma'(s) + \rho(-kT(s) - \tau(s)B(s)) = -\rho\tau(s)B(s)$$

i

$$\sigma''(s) = \rho\tau'(s)B(s) - \rho\tau(s)^2 N(s)$$

Així

$$k_\sigma = \frac{|\sigma'(s) \wedge \sigma''(s)|}{|\sigma'(s)|^3} = k_\gamma$$

La binormal de σ és

$$B_\sigma = \frac{\sigma'(s) \wedge \sigma''(s)}{|\sigma'(s) \wedge \sigma''(s)|} = -T.$$

I així

$$N_\sigma = B_\sigma \wedge T_\sigma = -N.$$

Així, aquestes dues corbes són corbes de Bertrand.

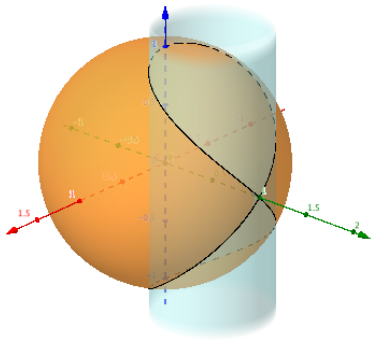
Finalment si calculem la corba dels centres de curvatura de σ obtenim

$$\sigma(s) + \rho N_\sigma(s) = \gamma(s) + \rho N(s) - \rho N(s) = \gamma(s)$$

és a dir, és la corba inicial.

3 Corbes esfèriques i hèlixs

Exercici 23: (Volta de Viviani) Sigui C la corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=1$ amb el cilindre $x^2+y^2-y=0$. Calculeu la curvatura i la torsió de C.[8]



Solució: Observem, completant quadrats, que l'equació del cilindre donat es pot escriure com $x^2+(y-1/2)^2=1/4$, i és doncs un cilindre vertical de radi $1/2$ amb l'eix donat per $x=0,\ y=1/2$. Per tant, prenent coordenades polars en el pla xy centrades al punt $(0,1/2,0)$ el cilindre té equació

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\sin(t) \\ y &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t) \\ z &= z \end{aligned}$$

Substituint aquest valors a l'equació de l'esfera i aïllant z s'obté

$$z=\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}=\pm\sin(t/2).$$

[8] Un clic sobre l'esquema us permetrà accedir (https://www.geogebra.org/m/hqVuj92y) a una construcció dinàmica de la situació per tal de poder observar la corba des del punt de vista que vulgueu.

Ara ja és un càlcul simple:

$$\gamma'(t) = \left(\frac{\cos(t)}{2}, -\frac{\sin(t)}{2}, \frac{\cos(t/2)}{2}\right)$$
$$|\gamma'(t)| = \frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2(t/2)}$$
$$\gamma''(t) = \left(-\frac{\sin(t)}{2}, -\frac{\cos(t)}{2}, -\frac{\sin(t/2)}{4}\right)$$
$$\gamma'(t)\wedge\gamma''(t) = \left(\frac{\sin(t)\sin(t/2)}{8}+\frac{\cos(t)\cos(t/2)}{4}, \frac{\cos(t)\sin(t/2)}{8}-\frac{\sin(t)\cos(t/2)}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$
$$|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)| = \frac{1}{8}\sqrt{8-3\sin^2(t/2)}$$
$$k(t) = \frac{\sqrt{8-3\sin^2(t/2)}}{(1+\cos^2(t/2))^{3/2}}$$
$$\gamma'''(t) = \left(-\frac{\cos(t)}{2}, \frac{\sin(t)}{2}, -\frac{\cos(t/2)}{8}\right)$$
$$\det(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)) = -\frac{3\cos(t/2)}{32}$$
$$\tau(t) = \frac{-6\cos(t/2)}{8-3\sin^2(t/2)}$$

Exercici 24: [9] Es diu que una corba és esfèrica si el seu recorregut està sobre una esfera.

1. Demostreu que una corba $\alpha(s)$ és esfèrica si, i només si, existeix un punt fix c_0 (el centre de l'esfera que la conté) tal que el vector $\alpha(s)-c_0$ és perpendicular a $\alpha'(s)$ per a tot s.

2. Comproveu que si $\alpha(s)$ és esfèrica llavors $k(s)>0$ per a tot s.

3. Comproveu que el centre c_0 de l'esfera que conté una certa corba $\alpha(s)$ (parametritzada per l'arc) es pot obtenir com
$$c_0 = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) + \frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}B(s)$$
per a qualsevol s on $\tau(s)\neq 0$,[10] i per tant, el radi d'aquesta esfera és
$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}\right)^2}$$

4. Tenint en compte els càlculs de l'apartat anterior, demostreu el recíproc. És a dir, si $\alpha(s)$ és una corba parametritzada per l'arc amb $k(s)\neq 0$ i $\tau(s)\neq 0$ tal que
$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}\right)^2 = c$$

[9] Fet a Seminaris.

[10] Si $\tau(s)=0$ per tot s la corba és plana (un paral·lel o meridià) i no es pot determinar el radi de l'esfera que la conté. Un paral·lel pot ser comú a esferes de diferent radi. Fora dels intervals on $\tau(s)=0$ aquestes fórmules són certes encara que $\tau(s)=0$ en un punt (a la demostració es veurà que si $\tau(s_0)=0$ també $k'(s_0)=0$) ja que per ser $\alpha(s)$ diferenciable ho és la component de $\alpha(s)-c$ respecte $B(s)$, la qual és una funció que val $\frac{k'(s)}{(k(s))^2\tau(s)}$ fora dels zeros de $\tau(s)$ i $\lim_{s\to s_0}\frac{k'(s)}{(k(s))^2\tau(s)}$ quan $\tau(s_0)=0$.

amb c constant, llavors $\alpha(s)$ està sobre una esfera de radi $\sqrt{c}$.

Solució:

1. Suposem primerament que $\alpha(s)$, que suposem parametritzada per l'arc per comoditat, està sobre una esfera de centre c_0 i radi R. Per tant $\langle \alpha(s) - c_0, \alpha(s) - c_0 \rangle = R^2$. Derivant tenim

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = 0 \tag{6}$$

i això és dir que el *vector radi* $\alpha(s) - c_0$ i la corba són perpendiculars per a cada s.

Recíprocament, suposem que existeix un punt c_0 tal que

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = 0$$

Pel que acabem de veure la funció $h(s) = \langle \alpha(s) - c_0, \alpha(s) - c_0 \rangle$ té derivada zero i per tant és constant c. Per tan la corba està sobre l'esfera de centre c_0 i radi $\sqrt{c}$.

2. Tornant a derivar la igualtat (6) obtenim

$$0 = \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + 1$$

Observem que en particular aquesta igualtat implica $\alpha''(s) \neq 0$, que vol dir, geomètricament, que una corba, pel fet d'estar sobre l'esfera, ja té curvatura estrictament positiva.

3. Com $\alpha''(s) = k(s)\, N(s)$ tenim

$$\langle N(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{1}{k(s)}$$

Derivant un cop més

$$\langle N'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle N(s), T(s) \rangle = \frac{k'(s)}{(k(s))^2},$$

i com $\langle N(s), T(s) \rangle = 0$ i $N'(s) = -k(s)\, T(s) - \tau(s)\, B(s)$, aquest igualtat es redueix a

$$-\tau(s)\, \langle B(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = \frac{k'(s)}{(k(s))^2}$$

que ja ens diu que $\tau(s) = 0$ implica $k'(s) = 0$.[11]

Com hem fet la hipòtesi $\tau(s) \neq 0$ podem escriure

$$\langle B(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}$$

Tenint en compte que $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ és una base ortonormal de l'espai per a cada s, els resultats anteriors es poden resumir en la igualtat

$$\alpha(s) - c_0 = -\frac{1}{k(s)}\, N(s) - \frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\, B(s)$$

que és el que es volia comprovar.

[11] En particular si $\tau(s) = 0$ per tot s, la curvatura és constant, i tenim un cercle (les corbes planes de l'esfera són cercles).

4. Per tal de simplificar les expressions, denotem $\rho = 1/k$ i $\Theta = 1/\tau$. Notem que, amb aquesta notació, el vector radi $\alpha(s) - c_0$ d'una corba esfèrica parametritzada per l'arc s'escriu com

$$\alpha(s) - c_0 = -\rho(s)\, N(s) + \rho'(s)\, \Theta(s)\, B(s)\,.$$

Llavors, donada una corba $\alpha(s)$ per a la qual $\rho^2(s) + (\rho'\,\Theta)(s)^2$ sigui constant, i guiats per l'anterior expressió considerem

$$c(s) = \alpha(s) + \rho(s)\, N(s) - \rho'(s)\, \Theta(s)\, B(s)\,.$$

Ara només cal provar que $c(s)$ és constant. Derivant aquesta l'expressió s'obté (totes les funcions valorades en s)

$$\begin{aligned} c' &= T + \rho'\, N + \rho\,(-k\,T - \tau\, B) - (\rho'\,\Theta)'\, B - \tau\,\rho'\,\Theta\, N \\ &= -(\rho\,\tau + (\rho'\,\Theta)')\, B \\ &= -(\rho\,\Theta^{-1} + (\rho'\,\Theta)')\, B \end{aligned}$$

on hem usat $\rho\, k = \Theta\,\tau = 1$. Per un altre costat, la condició $\rho^2 + (\rho'\,\Theta)^2 =$ ct. derivada dóna

$$\rho\,\rho' + \rho'\,\Theta\,(\rho'\,\Theta)' = 0$$

d'on, dividint per $\rho'\,\Theta$,

$$\rho\,\Theta^{-1} + (\rho'\,\Theta)' = 0$$

i per tant $c' = 0$ i $c(s)$ és constant, com volíem.

Exercici 25: Es designa per *hèlix* una corba tal que les seves tangents formen un angle constant amb una direcció fixada (que és diu que és l'eix de l'hèlix).[12]

1. Proveu que una corba és una hèlix si, i només si, les seves normals principals són paral·leles a un pla fixat (de fet, el pla perpendicular a l'eix).
2. Demostreu que si la torsió no s'anul·la, llavors $\alpha(s)$ és una hèlix si i només si $\dfrac{k(s)}{\tau(s)} =$ ct.
3. Quin invariant permet distingir una hèlix dextrògira d'una hèlix levògira?
4. Proveu que tota hèlix $\gamma(s)$ es pot escriure com $\gamma(s) = \beta(s) + s\,\vec{v}$ on $\beta(s)$ és una corba plana continguda en un pla perpendicular a l'eix de $\gamma(s)$ i $\vec{v}$ un vector fix. Relacioneu les curvatures de $\beta(s)$ i $\gamma(s)$.
5. Comproveu que la corba $\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$ és una hèlix (s'anomena *hèlix circular*). Determineu l'eix i la corba plana associada.
6. Vegeu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors d'una hèlix circular és una altra hèlix circular coaxial i del mateix pas.

[12] Amb aquesta definició tota corba plana és una hèlix ja que les seves tangents formen un angle de $\pi/2$ amb el vector director del pla. Per això assumirem que les hèlixs son corbes no planes.

7. Localitzeu, entre les corbes que han sortit en exercicis anteriors, altres hèlix i mireu d'obtenir el seu eix i la corba plana associada.

Solució:

1. Sigui $\alpha(s)$ una corba parametritzada per l'arc (la definició d'hèlix no depèn de la parametrització). Sigui $\vec{v}$ un vector unitari arbitrari i fix. Aleshores es compleix

$$\langle T(s), \vec{v} \rangle' = k(s) \langle N(s), \vec{v} \rangle .$$

De forma que:

- Si $\alpha(s)$ és una hèlix i $\vec{v}$ el vector director unitari del seu eix, el valor de $\langle T(s), \vec{v} \rangle$ és constant i la seva derivada nul·la. Per tant, $\langle N(s), \vec{v} \rangle = 0$ (cal que $k \neq 0$ si es vol parlar de vector normal) i $N(s)$ és, per a tot s, paral·lel al pla perpendicular a l'eix.
- Recíprocament, si $N(s)$ és paral·lel per a tot s a un pla fix i $\vec{v}$ és el vector unitari perpendicular a aquest pla, la mateixa fórmula dirà que l'angle entre el vector tangent i la direcció determinada per aquest vector és constant. I això és dir que $\alpha(s)$ és una hèlix amb eix determinat per $\vec{v}$.

2. Suposem primerament que α és una hèlix parametritzada per l'arc i designem per $\vec{v}$ el vector director del seu eix. La condició $\langle N(s), \vec{v} \rangle = 0$ implica que $\vec{v}$ s'ha d'escriure com

$$\vec{v} = a(s)\, T(s) + b(s)\, B(s).$$

Derivant aquesta igualtat

$$\vec{0} = \Big(a(s)\, k(s) + b(s)\, \tau(s) \Big)\, N(s) + a'(s) T(s) + b'(s) B(s).$$

Per tant a i b són constants i

$$\frac{k(s)}{\tau(s)} = -\frac{b}{a}$$

que és una constant.

(Noteu que, si θ és l'angle entre la tangent a la corba i l'eix, el valor de b/a és $\tan(\theta)$).

Recíprocament, suposem que $k(s)/\tau(s)$ és constant i prenem $\theta = \arctan(-k(s)/\tau(s))$. Definim el vector

$$\vec{v}(s) = (\cos\theta\,)T(s) + (\sin\theta\,)B(s)$$

que forma un angle constant amb $T(s)$ al llarg de tota la corba. Derivant,

$$\vec{v}(s)' = (k \cos\theta + \tau \sin\theta)\, N = \vec{0}$$

(ja que $\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\dfrac{k}{\tau}$) i per tant el vector $\vec{v}$ és constant i hem acabat.

3. La torsió.

4. Notem en primer lloc que si $\langle \vec{v}, T(s)\rangle = 0$, és a dir, quan estem en el cas particular d'hèlix en que l'angle entre $T(s)$ i una direcció donada no és només constant sinó que és igual a $\pi/2$, la corba serà plana i continguda en un pla perpendicular a $\vec{v}$. En efecte, derivant la funció $h(s) = \langle \vec{v}, \gamma(s) - \gamma(s_0)\rangle$, que compleix $h(s_0) = 0$ tenim

$$h'(s) = \langle \vec{v}, \gamma(s) - \gamma(s_0)\rangle' = \langle \vec{v}, T(s)\rangle = 0,$$

igualtat que ens diu que $h(s)$ és constant, i pet tant $h(s) = 0$ per tot s, de manera que $\gamma(s) - \gamma(s_0$ és perpendicular a v, i per tant $\gamma(s)$ està continguda en el pla ortogonal a v que passa per $\gamma(s_0)$. Ja hem comentat en el peu de pàgina anterior que excloem les corbes planes de la definició d'hèlix.

Suposem doncs que $\langle \vec{v}, T(s)\rangle = c \neq 0$ i *projectem* $\gamma(s)$, que suposem parametritzada per l'arc, sobre el pla perpendicular a l'eix que passa per un punt qualsevol ($\gamma(s_0)$) del seu recorregut de forma que s'obtingui una corba $\beta(s)$ sobre aquest pla i de la forma

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\,\vec{v}\,,$$

on $\lambda(s)$ és una funció tal que $\lambda(s_0) = 0$. Com que $\beta'(s)$ serà perpendicular al vector $\vec{v}$ (unitari) s'obtindrà

$$0 = \langle \vec{v}, \beta'(s)\rangle = \langle \vec{v}, T(s)\rangle + \lambda'(s) = c + \lambda'(s)$$

de forma que $\lambda'(s) = -c$ i, tenint en compte que en $\lambda(s_0) = 0$, $\lambda(s) = -c\,(s - s_0)$. Per tant,

$$\gamma(s) = \beta(s) + c(s - s_0)\vec{v} = \beta(s) + (s - s_0)\vec{w}$$

amb $\vec{w} = c\vec{v}$.

Si 0 pertany a l'interval de definició del paràmetre arc s i tenim la precaució de tallar pel pla que passa per $\gamma(0)$ (càlculs anteriors amb $s_0 = 0$)

$$\gamma(s) = \beta(s) + s\vec{w}$$

com ens demanava l'enunciat del problema. Suposarem que aquesta és la situació.

Per calcular la curvatura de $\beta(s)$ podem procedir de dues maneres.

Primer de tot observem que si escrivim la condició d'hèlix com $\langle \vec{v}, T(s)\rangle = c = \cos\alpha$, llavors $\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle = \cos^2\alpha$ i $\langle \gamma'(s), \vec{w}\rangle = c\langle T(s), \vec{v}\rangle = \cos^2\alpha$. Així, denotant per u el paràmetre arc de $\beta(s)$ tenim

$$(\frac{du}{ds})^2 = \langle \beta'(s), \beta'(s)\rangle = \langle \gamma'(s) - \vec{w}, \gamma'(s) - \vec{w}\rangle = \sin^2\alpha.$$

Així

$$T_\beta(u) = \frac{d\beta(s(u))}{du} = \frac{d\beta(s)}{ds}_{|s=s(u)} \cdot \frac{ds}{du} = \frac{1}{\sin\alpha}(\gamma'(s(u)) - \cos(\alpha)\,\vec{v}),$$

i per tant

$$\begin{aligned} k_\beta(s(u))N_\beta(s(u)) &= \frac{dT_\beta(u)}{du} = \frac{1}{\sin(\alpha)}\frac{d}{du}(\gamma'(s(u)) - \cos(\alpha)\vec{v}) = \frac{1}{\sin\alpha}(\frac{d}{du}\gamma'(s(u)) \\ &= \frac{1}{\sin\alpha}(\frac{d\gamma'(s)}{ds}_{s=s(u)} \cdot \frac{ds}{du}) = \frac{1}{\sin^2\alpha}k_\gamma(s(u))N(s(u)) \end{aligned}$$

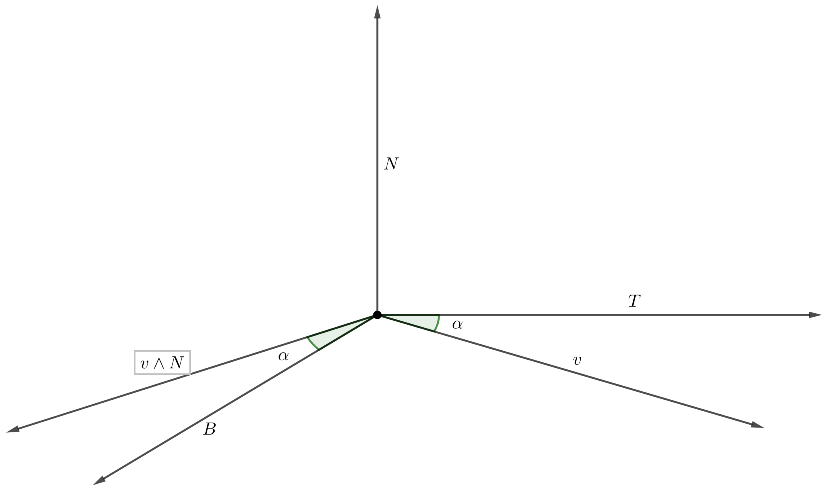
i com aquesta igualtat és certa per a tot u és certa per a tot valor del paràmetre s de manera que

$$k_\beta(s) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} k_\gamma(s).$$

També es pot procedir directament

$$k_\beta(s) = \frac{||(\gamma'(s) - \cos(\alpha)\, v) \wedge \gamma''(s)||}{\sin^3(\alpha)} = \frac{k_\gamma(s)}{\sin^3(\alpha)} ||B_\gamma(s) - \cos(\alpha)\, \vec{v} \wedge N_\gamma(s)|| = \frac{k_\gamma(s)}{\sin^2(\alpha)}$$

ja que, tal com es veu a la figura (recordem que $\langle \vec{v}, N(s)\rangle = 0$), $\langle B, \vec{v} \wedge N\rangle = \cos(\alpha)$.



5. Per relacionar aquest apartat amb l'apartat anterior reparametritzem per l'arc. Dient $c^2 = a^2 + b^2$, tenim que $\|\gamma'(t)\| = c$, de manera que $ds/dt = c$, on s és el paràmetre arc de $\gamma(t)$. Així

$$\gamma(t(s)) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c}).$$

En particular

$$\langle (0, 0, 1), \frac{d\gamma(t(s))}{ds} \rangle = \frac{b}{c}.$$

Per tant, a la vista del paràgraf anterior,

$$\beta(s) = \gamma(s) - s \cdot \frac{b}{c} \cdot (0, 0, 1) = (a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, 0).$$

Desfent el canvi de paràmetre $s = ct$ tenim

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), 0) + t(0, 0, b)$$

de manera que, encara que t no és paràmetre arc, hem pogut escriure la corba com a l'apartat anterior. Això és degut a que el canvi de paràmetre ha estat lineal. En general no és cert. Pensem per exemple amb la hèlix $\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2), t^2)$ (el vector tangent forma angle constant amb $(0, 0, 1)$). No podem escriure $\gamma(t) = \beta(t) + tw$ amb $\beta(t)$ plana (sobre un pla de vector director $(0, 0, 1)$).

6. Calculem en primer lloc la curvatura de $\gamma(t) = (a\, \cos(t), a\, \sin(t), b\, t)$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-a\, \sin(t), a\, \cos(t), b)\\ \gamma''(t) &= (-a\, \cos(t), -a\, \sin(t), 0)\\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= (a\, b\, \sin(t), -a\, b\, \cos(t), a^2)\\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{a^2+b^2}\\ k(t) &= \frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Podem calcular la normal principal pel mètode habitual però com k i $\|\gamma'(t)\|$ són constants tenim $T(t) = \frac{1}{c}\gamma'(t)$, d'on

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}N$$

i per tant $N = \frac{1}{a}\gamma''(t)$.

Per tant la corba dels centres de curvatura és

$$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{a^2+b^2}{a}(-\cos(t), -\sin(t), 0) = (-\frac{b^2}{a}\cos(t), -\frac{b^2}{a}\sin(t), b\, t)$$

que és una hèlix sobre el cilindre $x^2+y^2 = b^4/a^2$, del mateix pas de rosca $2\,\pi\, b$ que l'hèlix inicial.

7. Estudiem els exemples 3, 4 i 5 de l'exercici 16.

   I) $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\, t)$ que té curvatura i torsió iguals

   $$k(t) = \tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t})^2},$$

   ($k(t)/\tau(t) = 1$ i per tant hèlix).

   II) $\alpha(t) = (2\,t, \log(t), t^2)$ que té curvatura i torsió iguals

   $$k(t) = \tau(t) = \frac{2\,t}{(2\,t+1)^2},$$

   ($k(t)/\tau(t) = 1$ i per tant hèlix).

   III) $\alpha(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$ que té curvatura i torsió iguals però canviades de signe

   $$k(t) = -\tau(t) = \frac{1}{3\,(t^2+1)^2},$$

   ($k/\tau = -1$ i per tant hèlix).

A l'apartat (2) d'aquest mateix exercici hem vist que el vector director de l'eix d'una hèlix es pot escriure com $\vec{v} = a\, T(t) + b\, B(t)$, on a i b són constants tals que $k(t)/\tau(t) = -b/a$. Observem que $\vec{v}$ es pot escriure com

$$\vec{v} = a(T(t) + \frac{b}{a}B(t)) = a(T(t) - \frac{k(t)}{\tau(t)}B(t)).$$

Per tant, la direcció de l'eix de cada una d'aquestes corbes vindrà donada respectivament per:

I) $\vec{v} = T(t) - B(t) = (1, -1, 0)$ ja que

$$T(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}} \left(\mathrm{e}^t,\ -\mathrm{e}^{-t},\ \sqrt{2} \right)$$
$$B(t) = \frac{1}{e^t + e^{-t}} \left(-\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t, \sqrt{2} \right)$$

II) $\vec{v} = T(t) - B(t) = (0, 1, 1)$ ja que

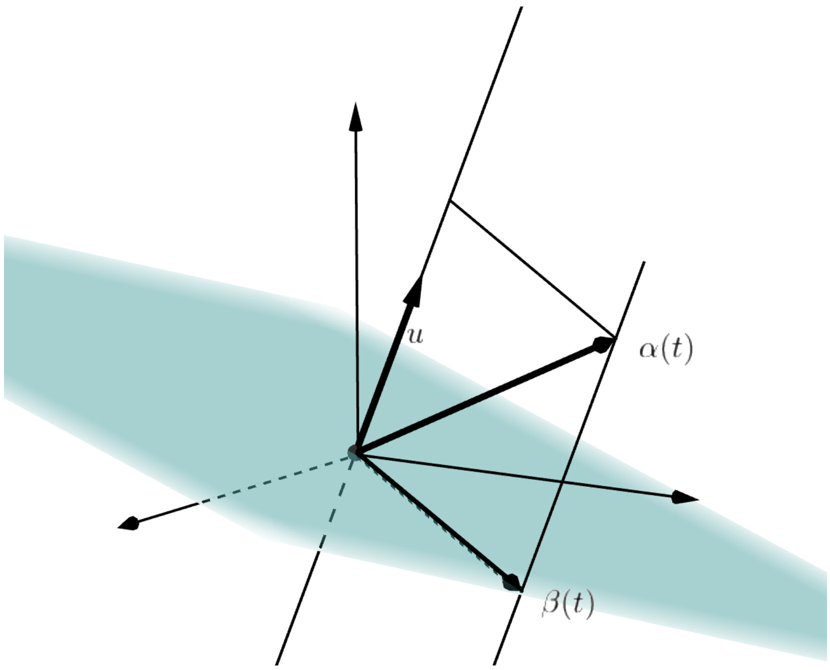
$$T(t) = \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1}, \frac{1}{2\,t^2+1}, \frac{2\,t^2}{2\,t^2+1} \right)$$
$$B(t) = \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1}, -\frac{2\,t^2}{2\,t^2+1}, -\frac{1}{2\,t^2+1} \right)$$

III) $\vec{v} = T(t) + B(t) = (0, 0, 2/\sqrt{2})$ ja que

$$T(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t^2+1}, \sqrt{2}\, \frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$
$$B(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t^2+1}, -\sqrt{2}\, \frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Per tal de determinar la corba associada només caldrà projectar sobre el/un pla perpendicular a l'eix. Tenint en compte que *la component vertical* del punt de la corba respecte aquest pla de projecció s'obtindrà fent el producte escalar d'aquest punt amb el vector unitari que determina l'eix, tenim la fórmula general

$$\beta(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t), \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \rangle \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$



que ens dóna $\beta(t)$ quan projectem sobre un pla que passa per l'origen. En cada cas tindrem doncs:

I) $\langle \alpha(t), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\rangle = \dfrac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}$. De forma que la projecció sobre el pla $x - y = 0$ (perpendicular a l'eix per l'origen) serà

$$\boxed{\beta(t) = \alpha(t) - \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = (\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sqrt{2}\, t) = (\cosh(t), \cosh(t), \sqrt{2}\, t)}$$

II) $\langle \alpha(t), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\log(t) + t^2)$. I la projecció sobre $y + z = 0$ serà

$$\boxed{\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\log(t) + t^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = (2\,t, \frac{1}{2}\,(\log(t) - t^2), \frac{1}{2}\,(-\log(t) + t^2))}$$

III) $\langle \alpha(t), (0,0,1)\rangle = t^3 + 3\,t$. Amb la projecció sobre el pla $z = 0$

$$\boxed{\beta(t) = \alpha(t) - (t^3 + 3\,t)\,(0,0,1) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 0)}.$$

Exercici 26: Considerem l'hèlix circular donada per $\alpha(s) = (a\,\cos(s/c), a\,\sin(s/c), b\,s/c)$, amb $s \in \mathbb{R}$ i $c^2 = a^2 + b^2$.

1. Demostreu que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc.
2. Determineu la curvatura i la torsió de $\alpha(s)$.
3. Determineu el pla osculador.
4. Demostreu que les rectes que tenen direcció $N(s)$ i passen per $\alpha(s)$ tallen l'eix Oz amb angle constant igual a $\pi/2$.

Solució:

1. Com que
$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin(s/c), \frac{a}{c}\cos(s/c), \frac{b}{c}\right)$$
tenim
$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} = 1\,.$$
Per tant $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc.

2. D'altra banda
$$k(s)\,N(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos(s/c), -\frac{a}{c^2}\sin(s/c), 0\right)$$
Per tant, $k(s) = \dfrac{|a|}{c^2}$ i $N(s) = -\operatorname{sgn}(a)\,(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)$.

   El vector binormal serà $B(s) = T(s) \times N(s) = \operatorname{sgn}(a)\left(\frac{b}{c}\sin(s/c), -\frac{b}{c}\cos(s/c), \frac{a}{c}\right)$, d'on
$$\tau(s)\,N(s) = B'(s) = \operatorname{sgn}(a)\,\frac{b}{c^2}\,(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)\,,$$
i $\tau(s) = -\dfrac{b}{c^2}$.

3. El pla osculador en el punt $\alpha(s)$ és el que passa per $\alpha(s)$ i el seu espai director està generat per $T(s)$ i $N(s)$ o, equivalentment, és perpendicular a $B(s)$. Per tant té per equació

$$b\,\sin(s/c)\,(x - a\cos(s/c)) - b\,\cos(s/c)\,(y - a\,\sin(s/c)) + a\,(z - b\,(s/c)) = 0\,.$$

4. El cosinus de l'angle $\theta(s)$ que forma el vector $N(s)$ amb $(0,0,1)$ és $\langle N(s),(0,0,1)\rangle \equiv 0$, per la qual cosa $\theta(s) \equiv \pi/2$. A més, aquesta recta, que ve donada pels punts $(x,y,z) = (a\,\cos(s/c), a\,\sin(s/c), b\,s/c) + \lambda\,(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)$ (per a escriure la recta el signe del vector director és irrellevant), passa pel punt $(0,0,b\,s/c)$ de l'eix Oz $(\lambda = -a)$.

Exercici 27: Sigui $\alpha(s)$ una corba que té curvatura constant $k = 3$, torsió constant $\tau = 4$ i quan $s = 0$ passa per $(0,0,0)$ amb triedre de Frenet $T(0) = (1,0,0)$, $N(0) = (0,1,0)$, $B(0) = (0,0,1)$. Determineu la parametrització per l'arc de α.

Solució: Sabem que per recuperar la corba a partir de la curvatura i la torsió hem de resoldre el sistema de 9 equacions i 9 incògnites següent

$$\begin{aligned}
{x_1}' &= 3x_4\\
{x_2}' &= 3x_5\\
{x_3}' &= 3x_6\\
{x_4}' &= -3x_1 - 4x_7\\
{x_5}' &= -3x_2 - 4x_8\\
{x_6}' &= -3x_3 - 4x_9\\
{x_7}' &= 4x_4\\
{x_8}' &= 4x_5\\
{x_9}' &= 4x_6
\end{aligned}$$

amb $x_i = x_i(s)$, etc. Aquest sistema prové d'escriure

$$T(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)),\ \ N(s) = (x_4(s), x_5(s), x_6(s)),\ \ B(s) = (x_7(s), x_8(s), x_9(s))\,.$$

Així

$${x_4}'' = -9\,x_4 - 16\,x_4 = -25\,x_4$$

d'on $x_4(s) = A_4\cos(5\,s) + B_4\sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_4(0) = 0$, és a dir, $x_4(s) = B_4\sin(5\,s)$. Però com ${x_4}'(0) = -3\,x_1(0) - 4\,x_7(0) = -3$, ha de ser $B_4 = -3/5$. Per tant

$$x_1(s) = 3\int x_4(s)\,ds = \frac{9}{25}\cos(5\,s) + C\,,$$

que ajustant la constant ens dóna $x_1(s) = \dfrac{9}{25}\cos(5\,s) + \dfrac{16}{25}$; finalment la coordenada $x(s)$ de la corba buscada és

$$x(s) = \int x_1(s)\,ds = \frac{9}{125}\sin(5\,s) + \frac{16\,s}{25}\,.$$

Anàlogament

$${x_5}'' = -9\,x_5 - 16\,x_5 = -25\,x_5$$

d'on $x_5(s) = A_5 \cos(5\,s) + B_5 \sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_5(0) = 1$, és a dir, $x_5(s) = \cos(5\,s) + B_5 \sin(5\,s)$. Però com $x_5{}'(0) = -3\,x_2(0) - 4\,x_8(s) = 0$, ha de ser $B_5 = 0$. Per tant

$$x_2(s) = 3 \int x_5(s)\,ds = \frac{3}{5}\sin(5\,s)\,,$$

i finalment la coordenada $y(s)$ de la corba buscada és

$$y(s) = \int x_2(s)\,ds = -\frac{3}{25}\cos(5\,s) + \frac{3}{25}\,.$$

Per acabar,

$$x_6{}''(s) = -9\,x_6 - 16\,x_6 = -25\,x_6$$

d'on $x_6(s) = A_6 \cos(5\,s) + B_6 \sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_6(0) = 0$, és a dir, $x_6(s) = B_6 \sin(5\,s)$. Però com $x_6{}'(0) = -3\,x_3(0) - 4\,x_9(0) = -4$, ha de ser $B_6 = -4/5$. Per tant

$$x_3(s) = 3 \int x_6(s)\,ds = \frac{12}{25}\cos(5\,s) - \frac{12}{25}\,,$$

i finalment la coordenada $z(s)$ de la corba buscada és

$$z(s) = \int x_3(s)\,ds = \frac{12}{125}\sin(5\,s) - \frac{12\,s}{25}\,.$$

Resumint, la corba buscada és

$$\boxed{\gamma(s) = \frac{1}{125}(9\,\sin(5\,s) + 80\,s, -15\,\cos(5\,s) + 15, 12\,\sin(5\,s) - 60\,s)\,.}$$

Segon mètode, només vàlid si intueixes que pot ser una hèlix. (Suposició força raonable ja que estem parlant d'una corba amb curvatura i torsió constants).

Sabem que l'hèlix

$$\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$$

té curvatura i torsió

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Per tant, prenent $a = 3/25$, $b = -4/25$ tenim una hèlix amb curvatura $k = 3$ i $\tau = 4$ com volíem, però el problema és que en $t = 0$ la referència de Frenet d'aquesta corba és

$$\begin{aligned} T(0) &= (0, 3/5, -4/5) \\ N(0) &= (-1, 0, 0) \\ B(0) &= (0, 4/5, 3/5) \end{aligned}$$

i no pas la demanada (volem que sigui la base canònica). Tampoc passa per l'origen quan $t = 0$ ja que $\gamma(0) = (3/25, 0, 0)$ però això es pot arreglar fàcilment fent una translació i considerant la corba $(a\,\cos(t) - 3/25, a\,\sin(t), b\,t)$.

Considerem el moviment rígid donat per la matriu M tal que

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta igualtat ens dóna directament (calculant la inversa, que és igual a la transposada, ja que estem manipulant matrius ortogonals)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Apliquem ara M a la hèlix i trobem la corba demanada

$$\gamma(t) = M \begin{pmatrix} \frac{3}{25}\cos(t) - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25}\sin(t) \\ -\frac{4}{25}t \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} 9\sin(t) + 16\,t \\ -15\cos(t) + 15 \\ 12\sin(t) - 12\,t \end{pmatrix}$$

Que, un cop reparametritzada per l'arc, és a dir posant $t = 5\,s$, ens dóna exactament la corba que ha aparegut abans.

Exercici 28: [13]Trobeu les hèlixs esfèriques.

Solució: Per estar sobre una esfera de radi a,

$$\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4\tau^2} = a^2,$$

amb $k = k(s), \tau = \tau(s)$ (exercici 24). O, en funció del radi de curvatura $\rho = 1/k$,

$$\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2} = a^2.$$

Per ser hèlix $1/\tau = \rho\tan(\alpha)$ per a una certa constant α. Substituint tenim

$$\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\tan(\alpha) = ds.$$

Integrant obtenim

$$-\sqrt{a^2-\rho^2}\tan(\alpha) = s + C.$$

Si prenem $s = 0$ en el punt on $\rho = a$ obtenim les equacions intrínseques de les hèlixs esfèriques

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{1}{k^2} &= s^2\cot^2(\alpha) \\ s^2 + \frac{1}{\tau^2} &= a^2\tan^2(\alpha) \end{aligned}$$

Exercici 29: Considerem la corba parametritzada $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Trobeu-ne la curvatura i la torsió. Demostreu que $\alpha(t)$ és una hèlix.

[13]Fet a Seminaris.

2. Trobeu el paràmetre arc de $\alpha(t)$.

Solució:

1. Fent els càlculs, tenim:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 1) \\
\alpha''(t) &= (\cosh(t), \sinh(t), 0) \\
\alpha'''(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 0) \\
||\alpha'(t)|| &= \sqrt{\cosh(2t) + 1} = \sqrt{2}\cosh(t) \\
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (-\sinh(t), \cosh(t), -1) \\
||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|| &= \sqrt{2}\cosh(t) \\
k(t) &= \frac{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{1}{2\cosh^2(t)} \\
\tau(t) &= -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||^2} = \frac{-1}{2\cosh^2(t)}
\end{aligned}$$

Observem que $k(t)/\tau(t) = -1$, i per tant la corba és una hèlix.

També es pot comprovar directament utilitzant la definició d'hèlix. En efecte, si prenem la direcció $\vec{v} = (0, 1, 0)$, l'angle entre $\alpha'(s)$ i $\vec{v}$ és constant i igual a $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

2. Calculem el paràmetre arc de α,

$$s(t) = \int_0^t ||\alpha'(x)||dx = \int_0^t \sqrt{2}\cosh(x)dx = \sqrt{2}\sinh(t)$$

i per tant $t = \operatorname{argsinh}(s/\sqrt{2})$.