Geometria Diferencial. **23 d'abril de 2014.**

1. Definiu la curvatura $\kappa(s)$ i la torsió $\tau(s)$ d'una corba parametritzada per l'arc i demostreu que

$$\frac{dN(s)}{ds} = -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s)$$

on T, N, B denota el triedre de Frenet. *(2 punts)*

2. Considerem la corba parametritzada $c(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$.

a) Calculeu-ne la curvatura $\kappa(t)$ i la torsió $\tau(t)$. *(1 punt)*

b) Trobeu el triedre de Frenet $T(1), N(1), B(1)$ en el punt $c(1)$. *(1 punt)*

c) Sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una corba parametritzada regular amb curvatura $\kappa(t)$ i torsió $\tau(t)$ definides en tot punt. Donat $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, expresseu la curvatura i la torsió de la corba $\beta(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t), \lambda z(t))$ en funció de $\kappa(t)$ i de $\tau(t)$. *(1 punt)*

3. Sigui M una superfície regular i sigui $\varphi : U \to M$ una parametrització local tal que $M = \varphi(U)$. Suposem que els coeficients de la primera forma fonamental de M respecte $\varphi(u, v)$ són

$$E = e^{2u}, \quad F = 0, \quad G = e^{2v}$$

a) Trobeu les equacions de les geodèsiques respecte aquesta parametrització. Proveu que existeixen funcions $f(t)$ que fan que les corbes $\alpha(t) = \varphi(f(t), v_0)$ i $\beta(t) = \varphi(u_0, f(t))$ siguin geodèsiques. *(1 punt)*

b) Calculeu la curvatura de Gauss de M en $\varphi(u, v)$. *(1 punt)*

c) Trobeu una isometria local $\Phi : M \to P$ on P és el pla $P = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. *(1 punt)*

4. Sigui M una superfície regular orientada amb aplicació de Gauss ν. Sigui $p \in M$ un punt no umbilical amb curvatura mitjana $H(p)$. Considerem una esfera Σ de radi R i centre $p + R\nu(p)$. Sigui $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc i suposem que $\alpha(s) \in M \cap \Sigma$ per tot $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ i que $\alpha(0) = p$. Demostreu que $\alpha'(0)$ pertany a una de les bisectrius de les direccions principals de M en p si i només si $H(p) = 1/R$. *(2 punts)*