Nom complet:..NIU:...............

Matemàtiques
Geometria Diferencial — Examen final. Juny de 2020

Justifiqueu les respostes de forma **molt detallada** *explicant a cada pas els resultats que utilitzeu.*

1. *(3 punts)* Sigui $\varphi(u,v)$ una parametrització local d'una superfície M de $\mathbb{R}^3$. Suposem que la primera i la segona forma fonamentals tenen matrius associades (en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$)

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} -\cos^2 v & u\cos v \sin v \\ u\cos v\sin v & -u^2\sin^2 v \end{pmatrix}$$

on $u > 0$.

a) Comproveu que la corba $c(t) = \varphi(t,a)$, on a és una constant fixada, és una geodèsica de M parametritzada per l'arc.

b) Determineu la curvatura k de $c(t)$, com a corba de $\mathbb{R}^3$, en funció de a.

c) Què es pot dir de la torsió $\tau(t)$ de $c(t)$ a partir de les dades anteriors?

Resposta: a) *Un càlcul directe mostra que tots els símbols de Christoffel són nuls excepte*

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2u}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}.$$

L'equació de les geodèsiques és llavors

$$\begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u'' - \dfrac{1}{2}(v')^2 = 0 \\ v'' + \dfrac{1}{u}u'v' = 0 \end{cases}$$

equació que compleix idènticament la corba $c(t) = \varphi(t,a)$ *ja que* $u(t) = t$, $v(t) = a$ *i per tant* $u'' = 0$ *i* $v' = 0$. *A més la geodèsica és unitària. En efecte,* $c'(t) = \varphi_u(t,a)$ *d'on resulta* $\|c'(t)\|^2 = \langle \varphi_u(t,a), \varphi_u(t,a)\rangle = E(c(t)) \equiv 1$.

b) *La relació* $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ *implica que, al ser* $c(t)$ *una geodèsica parametritzada per l'arc, es compleix*

$$k^2 = k_n^2 = \mathrm{II}(c'(t))^2 = \mathrm{II}(\varphi_u(t,a))^2 = e^2 = \cos^4 v$$

d'on resulta

$$k = \cos^2 v(t) = \cos^2 a$$

ja que la curvatura k *és positiva.*

c)) *Notem que, al ser* $c(t)$ *geodèsica, el seu vector normal* N *és perpendicular a la superfície, i per tant* $N = \pm\nu$, *mentre que el vector binormal* B *és tangent a la superfície* M. *Com que les coordenades són ortogonals, de fet tindrem*

$$B = \pm\frac{\varphi_v}{\|\varphi_v\|} \quad \to \quad \varphi_v = \pm\|\varphi_v\| \cdot B.$$

Utilitzant les fórmules de Frenet, podem calcular $\mathrm{II}(T,B)$ *de dues maneres diferents obtenint*

$$\begin{aligned} u\cos v\,\sin v &= \mathrm{II}(\varphi_u,\varphi_v) = \mathrm{II}(T,\varphi_v) = \pm\|\varphi_v\|\cdot \mathrm{II}(T,B) = \pm\|\varphi_v\|\cdot\langle W(T),B\rangle \\ &= \pm\|\varphi_v\|\cdot\langle \nu',B\rangle = \pm\|\varphi_v\|\cdot\langle N',B\rangle = \pm\|\varphi_v\|\cdot\langle -kT-\tau B,B\rangle \\ &= \pm\|\varphi_v\|\cdot\tau = \pm\sqrt{u}\,\tau. \end{aligned}$$

D'aquí resulta que podem determinar la torsió de la corba excepte el seu signe. Més concretament es compleix

$$\tau(t) = \pm\sqrt{u(t)}\,\cos v(t)\,\sin v(t) = \pm\sqrt{t}\,\cos a\,\sin a.$$

2. *(1 punt)* Sigui C el cilindre de $\mathbb{R}^3$ que és imatge de l'aplicació $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ donada per $\varphi(u,v) = (\cos v,\sin v,u)$.

a) Comproveu que, si considerem a $\mathbb{R}^2$ la mètrica euclidiana, φ és una isometria local. Podem dir que φ és una parametrització de C?

b) Sigui $\alpha(s) = (u(s),v(s))$ una corba a $\mathbb{R}^2$ parametritzada per l'arc i sigui $\kappa_\alpha(s)$ la seva curvatura amb signe. Proveu que la curvatura geodèsica de la corba $\beta(s) = \varphi(\alpha(s))$ dins de C coincideix, llevat potser del signe, amb $\kappa_\alpha(s)$. Quan podem assegurar que el signe també és el mateix?

Resposta: a) *Notem que*

$$\varphi_u = (0,0,1) \qquad i \qquad \varphi_u = (-\sin v,\cos v,0)$$

d'on és clar que es compleix

$$\begin{aligned} \langle\varphi_u,\varphi_u\rangle_S &= 1, \qquad \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle_S = 0, \\ \langle\varphi_u,\varphi_v\rangle_S &= 0, \qquad \langle\varphi_v,\varphi_v\rangle_S = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Per bilinealitat deduïm que

$$\left\langle a\,\varphi_u + b\,\varphi_v, c\,\varphi_u + d\,\varphi_v\right\rangle_S = ac+bd = \left\langle a\,\frac{\partial}{\partial u} + b\,\frac{\partial}{\partial v}, c\,\frac{\partial}{\partial u} + d\,\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

és a dir que

$$\left\langle d\varphi(\vec v), d\varphi(\vec w)\right\rangle_S = \langle \vec v,\vec w\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

que és la condició per que φ *sigui isomorfisme local.*

Notem ara que una isometria local és una immersió. Com que C *és una superfície regular ja que, per exemple, pot ser definida globalment per la submersió* $F(x,y,z) = x^2+y^2-1$, *podríem assegurar que* φ *és una parametritzacio si fos injectiva. Aquest no és el cas ja que* $\varphi(u,v) = \varphi(u,v+2k\pi)$ *per* $k\in\mathbb{Z}$. *En canvi seran una parametritzacions de* S *les restriccions de* φ *a dominis en els que sigui injectiva, com per exemple* $\mathbb{R}\times(0,2\pi)$.

b) *La curvatura geodèsica d'una corba en una superfície és una noció intrínseca en el sentit que tant sols depèn de la primera forma fonamental i de l'orientació de la superfície. De manera general, si* $f\colon S\to\tilde S$ *és una isometria local entre superfícies i* $(\Omega,\psi = \psi(u,v))$ *és una parametrització de* S *tal que* $f|_\Omega$ *sigui injectiva, llavors la composició* $f\circ\psi$ *és una* *parametrització de $\tilde{S}$. Per tant els coeficients de les primeres formes fonamentals de S i de $\tilde{S}$, escrits en les coordenades (u, v), coincideixen de manera que els símbols de Christoffel de les dues superfícies són els mateixos en aquestes coordenades. D'aquí resulta que el valor de la curvatura geodèsica, excepte potser el seu signe, ha de ser invariant per isometries.*

Detallem això de manera precisa en el cas que ens ocupa. Al ser aquesta una qüestió local, podem suposar que hem restringit φ a un domini convenient que contingui la corba α i de manera que sigui parametrització local del cilindre C. Resulta de (1) que els símbols de Cristoffel de C en els coordenades (u, v) són tots idènticament nuls, exactament com els de $\mathbb{R}^2$ amb la mètrica euclidiana i coordenades cartesianes. D'aquí resulta que si $X(s) = X^1(s)\varphi_u + X^2(s)\varphi_v$ és un camp vectorial unitari al llarg de $\beta(s)$ llavors

$$\frac{DX}{ds} = \frac{dX_1}{ds}\,\varphi_u + \frac{dX_2}{ds}\,\varphi_v.$$

Si apliquem això al camp unitari $\beta'(s) = u'(s)\,\varphi_u + v'(s)\,\varphi_v$ (notem que al ser φ isometria la corba $\beta(s)$ també està parametritzada per l'arc) obtenim

$$k_g(\beta)^2 = \left[\frac{D\beta'}{ds}\right]^2 = \|u''\,\varphi_u + v''\,\varphi_v\|_C^2 = \|\alpha''\|_{\mathbb{R}^2}^2 = k(\alpha)^2 = \kappa(\alpha)^2.$$

Per tant $\kappa(\alpha) = \pm k_g(\beta)$. El signe coincidirà si hem escollit orientacions a $\mathbb{R}^2$ i C de manera que φ les conserva.

3. *(2 punts)* Sigui $A \in M_{n\times n}$ una matriu **simètrica** i sigui ρ la forma quadràtica de $\mathbb{R}^n$ associada, i.e. si $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ llavors

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) = \langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = (x_1, \ldots, x_n)\,A\,(x_1, \ldots, x_n)^t$$

Sigui B^n la bola unitat de $\mathbb{R}^n$ i posem $S^{n-1} = \partial B^n$.

a) Demostreu que es compleix

$$\frac{1}{\operatorname{vol} S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \rho(x_1, \ldots, x_n)\,dS = \frac{1}{n}\,\operatorname{tr}(A), \tag{2}$$

on dS denota l'element de volum de l'esfera. *(Indicació: apliqueu el teorema de la divergència al camp vectorial definit per $X(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^t$ i recordeu que $\operatorname{vol} S^{n-1} = n \cdot \operatorname{vol} B^n$).*

b) Especifiqueu el resultat anterior al cas que ρ és la segona forma fonamental II_p d'una superfície S de $\mathbb{R}^3$ en un punt $p \in S$. Quina informació geomètrica de la superfície dona llavors la fórmula anterior?

Resposta: a) *Si $X = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ és el camp vectorial definit per la condició*

$$X(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^t = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

llavors les seves components són $X_i = \sum_j a_i^j\,x_j$ i per tant

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \sum_i a_i^i = \operatorname{tr}(A)$$

Observem, d'altra banda que el camp normal unitari de S^{n-1} compatible amb l'orientació de B induïda per l'orientació canònica de $\mathbb{R}^n$, és a dir el camp normal unitari exterior, és $\nu = (x_1, \ldots, x_n)$. Per tant

$$\langle \nu, X \rangle = \sum_{ij} x_i a_i^j x_j = (x_1, \ldots, x_n)\, A\, (x_1, \ldots, x_n)^t = \rho(x_1, \ldots, x_n).$$

Llavors el teorema de la divergència diu que

$$\int_{S^{n-1}} \langle \nu, X \rangle \, dS = \int_{B^n} \operatorname{div} X \, dV$$

d'on resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{vol} S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \rho(x_1, \ldots, x_n) \, dS &= \frac{1}{\operatorname{vol} S^{n-1}} \int_{B^n} \operatorname{div} X \, dV \\ &= \frac{1}{n \operatorname{vol} B^n} \int_{B^n} \operatorname{tr} A \, dV = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A). \end{aligned}$$

b) *Suposem ara que ρ és la segona forma fonamental II_p d'una superfície S en un punt $p \in S$. Llavors $\rho(\vec{v}) = \mathrm{II}_p(\vec{v}) = \langle W_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle$, per $\vec{v} \in T_pS$ i on W_p, és l'endomorfisme de Weingarten de S en p. Fixem una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de T_pS. Aquesta elecció determina una identificació $T_pS \cong \mathbb{R}^2$ i en aquesta base W_p està representada per una matriu simètrica. Per tant estem en la situació anterior amb $A = W_p$.*

Parametritzem la circumferència unitat S^1 de T_pS per la coordenada angular θ, és a dir que els vectors unitaris de T_pS són de la forma $\vec{v} = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$. Llavors $dS = d\theta$. A més $\operatorname{vol} S^1 = 2\pi$. Per tant, si representem per $k_n(\theta)$ la curvatura normal en la direcció $\vec{v} = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$, podem escriure la fórmula (2) en la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{II}_p(\vec{v}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(W_p) = H(p).$$

on $H(p)$ denota la curvatura mitjana de S en el punt $p \in S$.