Activitat evaluable corbes (Geometria diferencial) 05/03/2020 ~22:00h

Exercici 2: Troba la longitud de la corba $\gamma(t) = (\cos^3(3t), 3, \sin^3(3t))$ per a $t \in (0,\pi)$. Si dónes una aproximació, fes-ho amb un mínim de 6 xifres decimals correctes.

ACME1

$$\int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt = *^1$$

$$\gamma'(t) = (3\cdot\cos^2(3t)\cdot(-\sin(3t))\cdot 3, 0, 3\sin^2(3t)\cdot(\cos(3t))\cdot 3) =$$

$$= 9(-\cos^2(3t)\cdot\sin(3t), 0, \sin^2(3t)\cdot\cos(3t))$$

$$\|\gamma'(t)\| = 9\cdot\sqrt{\cos^4(3t)\sin^2(3t) + \sin^4(3t)\cos^2(3t)}$$

$$= 9\sqrt{\cos^2(3t)(\cos^2(3t)\sin^2(3t) + \sin^4(3t))}$$

$$= |9\cos(3t)|\sqrt{\sin^2(3t)(\cos^2(3t) + \sin^2(3t))}$$

$$= |9\cos(3t)\cdot\sin(3t)|\cdot\sqrt{\cos^2(3t) + \sin^2(3t)}$$

$$= |9\cos(3t)\cdot\sin(3t)|$$

WolframAlpha

$$*^1 \int_0^\pi |9\cos(3t)\cdot\sin(3t)| dt = 9\int_0^\pi |\cos(3t)\sin(3t)| dt = 9\cdot 1 =$$

$\sin(3t) = u$

$3\cos(3t)\,dt = du$

$\boxed{9}$

Exercici 3: Calcula la torsió de la corba $c(t) = (5t, 10\log(t), 5t^2+1)$ en el punt de paràmetre $t=1$. Dóna el resultat exacte, o bé una aproximació amb 6 xifres decimals.

$$c(t) = (5t, 10\log(t), 5t^2+1)$$
$$c'(t) = (5, 10\cdot 1/t, 10t)$$
$$c''(t) = (0, -10\cdot 1/t^2, 10)$$
$$c'''(t) = (0, 20\cdot 1/t^3, 0)$$

Apliquem proposició 1.7.5 ja que tenim corba regular en $t=1$ ja que $c'(1) \neq 0$ i si veiem que $c' \wedge c'' \neq 0$ ja podem calcular la torsió τ

$$\tau = \frac{-\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{\|c' \wedge c''\|^2}$$

$$c' \wedge c'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 10/t & 10t \\ 0 & -10/t^2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 10/t & 10t \\ -10/t^2 & 10 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ -10/t^2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= (100t^{-1} + 100t^{-1})\vec{i} - 50\vec{j} - \frac{50}{t^2}\vec{k} =$$

$$= (200t^{-1}, -50, -50t^{-2})$$

$$\|c' \wedge c''\|^2 = (200)^2\cdot t^{-2} + 50^2 + 50^2\cdot t^{-4}$$

$$\|c' \wedge c''\|^2_{t=1} = (200)^2 + 2\cdot 50^2 =$$

$$= 4\cdot 10000 + 2\cdot 25\cdot 100$$
$$= 40000 + 5000$$
$$= 45000$$

$$-\langle c' \wedge c'', c''' \rangle \overset{1.4.4}{=} - \begin{vmatrix} 5 & 10t^{-1} & 10t \\ 0 & -10t^{-2} & 10 \\ 0 & 20t^{-3} & 0 \end{vmatrix} = -100 \begin{vmatrix} 5 & t^{-1} & t \\ 0 & -t^{-2} & 1 \\ 0 & 2t^{-3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -100 \cdot 5 \begin{vmatrix} -t^{-2} & 1 \\ 2t^{-3} & 0 \end{vmatrix} = +100 \cdot 5 \cdot 2 \cdot t^{-3} \xrightarrow{t=1} 1000$$

$$\frac{1000}{45000} = \boxed{\frac{1}{45}} = 0.0\hat{2}$$

1/45

Exercici 4 Calcula el vector binormal de la corba parametritzada $c(t) = (10t^2 + 4t + 1, 2t, 5t^2 - 1)$ en el punt $t = 0$.

Els resultats han de ser les coordenades del vector ~~tangent~~ claus i separades per comes. Poden expressar-se de manera exacta, o bé amb 6 xifres decimals.

Per exemple, {1/Sqrt[2], -1/Sqrt[2], 0} i {0.707107, ~~40~~ -0.707107, 0} serien dues respostes sintàcticament correctes.

$c'(t) = (20t + 4, 2, 10t)$

$c''(t) = (20, 0, 10)$

$$c' \wedge c'' = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 20t+4 & 2 & 10t \\ 20 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 10t \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 20t+4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 200t\vec{\jmath} - 40\vec{k} + 20\vec{\imath} - (200t + 40)\vec{\jmath} = (20, -40, -40) =$$

$$= 20(1, -2, -2)$$

$$\|c' \wedge c''\| = 20\sqrt{1 + 4 + 4} = 20 \cdot 3 = 60$$

Per prop 1.7.5 tenim

$$B = \frac{c' \wedge c''}{\|c' \wedge c''\|} = \frac{20}{60}(1, -2, -2) = \frac{1}{3}(1, -2, -2) = \boxed{\begin{matrix} B_{t=0} \\ \| \\ (1/3, -2/3, -2/3) \end{matrix}}$$

{1/3, -2/3, -2/3}

Donar el vector

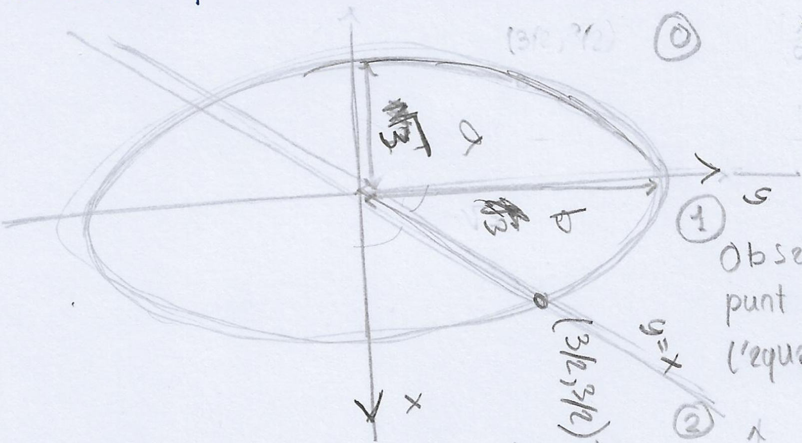
ACME1

Activitat evaluable corbes (Geometria diferencial) 03/03/2020 ~23:00h

Exercici 1: Doneu la parametrització de l'el·lipse d'equació $x^2 + \frac{y^2}{3} = 3$ recorreguda en sentit antihorari (↺) a partir del punt $(3/2, 3/2)$.

Utilitzeu $t \in [0, 2\pi]$ com a paràmetre de l'el·lipse. Entreu les dues funcions coordenada de la parametrització separades per una coma. A més, les funcions sin(x) i cos(x) les heu d'entrar de la forma Sin[x] i Cos[x], si cal entrar el número π s'ha de fer posant Pi. i si cal entrar alguna arrel quadrada utilitzeu Sqrt[x].

Exem: Sqrt[2] Cos[Pi+t] + 3 , Sqrt[5] Sin[Pi+t]+5.

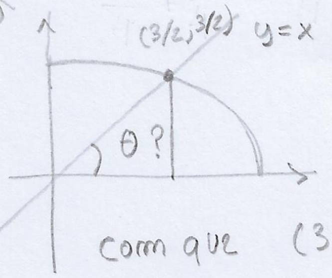


(0) $x^2 + \frac{y^2}{3} = 3$; $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

$a = \sqrt{3}$; $b = 3$

(1) Observem que $(3/2, 3/2)$ és punt de l'el·lipse ja que compleix l'equació $\frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

(2)



Com que $(3/2, 3/2)$ i $(0,0)$ pertanyen a la recta $x=y$ l'angle amb l'eix OX positiu forma un angle de $\theta = \pi/4$. (Recordem que el·lipse centrada a l'origen.

(3) Si ho pensem en coordenades polars volem θ comenci en $\pi/4$ i faci una volta sencera (augmentant). La pregunta ara és com variarà el paràmetre r de les coordenades polars.

(4)

$\gamma(t) = (\sqrt{3} \cdot \cos(\pi/4 + t), 3 \cdot \sin(\pi/4 + t))$

Sqrt[3]*Cos[Pi/4+t], 3*Sin[Pi/4+t]

No

$3\cos(u) =$

Sqrt[3]*Cos[Pi/6+t], 3*Sin[Pi/6+t]

$\sqrt{3}\cos(u) = 3/2 \longrightarrow \cos(u) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow \pi/6$

$3\sin(u) = 3/2 \longrightarrow \sin(u) = 1/2$

Alerto! No és la solució final!

Activitat evaluable Superfícies II (Geometria Diferencial) 08/05/2020 ~ 18:00h

Exercici 1: Considerem la superfície $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=4x^2-3y^2\}$ orientada amb els normals que tenen tercera component positiva. Considerem la corba parametritzada per $\alpha(t)=(2t,3t,-11t^2)$ que té imatge dins de M.
Calculeu la curvatura geodèsica de $\alpha(t)$ respecte M en el punt ~~α(t) respecte~~ $t=1$. Doneu el resultat de forma exacta, o bé amb sis xifres decimals.

Calculem

$c'(t)=(2,3,-22t) \rightarrow \|c'(t)\|=\sqrt{4+9+484t^2}$

$c''(t)=(0,0,-22) \rightarrow$

$$\nu=\frac{\varphi_u\wedge\varphi_v}{\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|}=\frac{(-8u,6v,1)}{\sqrt{64u^2+36v^2+1}}$$

$\varphi(u,v)=(u,v,4u-3v^2)$

$\varphi_u(u,v)=(1,0,8u)$

$\varphi_v(u,v)=(0,1,-6v)$

$k_g=0.00691957335351 7$

0.006919

(Pàgina 204, exercici 8.6.1) on k_g és curvatura geodèsica

... I si no està parametritzada per l'arc:

$$k_n=\langle\gamma'',\nu\rangle/\|\gamma'\|^2$$
$$k_g=\langle\gamma'',\nu\wedge\gamma'\rangle/\|\gamma'\|^3$$

on γ corba i ν normal a superfície

(264/2050174 7)* Sqrt[581]* Sqrt[497]

(Tots els càlculs fets amb Sage 8.1)

Exercici 2 i 3:

Suposem una superfície per $\varphi(u,v)$ i tal que la primera forma fonamental ve donada per

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2u^2 & 1 \\ 1 & 1+5v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Pregunta 1:

Trobeu els símbols de Christoffel d'aquesta superfície en el punt $\varphi(1,5)$. Donada el resultat de manera exacta o amb sis xifres decimals. Escriu els símbols separats per comes en l'ordre: $\Gamma^1_{1,1}$, $\Gamma^1_{1,2}$, $\Gamma^1_{2,2}$, $\Gamma^2_{1,1}$, $\Gamma^2_{1,2}$, $\Gamma^2_{2,2}$.

Cesar $\begin{pmatrix} 1+4u^2 & 1 \\ 1 & 1+4v^2 \end{pmatrix}$

Pregunta 2:

Considerem la corba $c(t) = \varphi(1, 1/t)$. Sigui $c'' = A\varphi_u + B\varphi_v + CV$ on V és un vector normal a ~~la superfície~~ φ_u, φ_v. Trobeu A, B, en el punt on $c(t) = \varphi(1,5)$. Dona els valors de A i B separats per una coma, de manera ~~que~~ exacta o amb sis xifres decimals, i en l'ordre següent: A i B.

② Tenim que $(\varphi_u, \varphi_v, V)$ és una base de $\mathbb{R}^3$. (Prop 5.1.1)

Per tant:
$$\begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eV \\ \varphi_{uv} = \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + fV \\ \varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gV \end{cases}$$

Així per (proposició 5.1.3) tenim:

a) $\begin{cases} \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = F_u - 1/2\, E_v \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \frac{1}{2}G_u \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \frac{1}{2}G_v \end{cases}$

Com que E, F, G són conegudes només queda resoldre els tres sistemes lineals a), b), c) de

ACME3

Activitat evaluable Superfícies II (Geometria Diferencial) 08/05/2020 22:00 h~

Resultats amb Sage 8.1 de resoldre el sistema lineal d'equacions en el ordre:

$\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{11}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{22}$

$\frac{252}{377}, 0, \frac{-25}{377}, \frac{-2}{377}, 0, \frac{75}{377}$ ✓

- Segona pregunta Exercici 2: - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$c(t) = \varphi(1, 1/t) = (\varphi(\varphi^1(1,1/t), \varphi^2(1,1/t)))$

$c'(t) = \frac{d}{dt} c(t) \overset{*^1}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},$

Observem que $u=1$ i $v = 1/t$ per tant $c'(t)$ queda com:

$c'(t) = \varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot (-1/t^2) = \varphi_v(-1/t^2)$

$c''(t) \overset{*^2}{=} \varphi_v'(-1/t^2) + \varphi_v \cdot (2/t^3) = \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial u}\cdot \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,0} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)\cdot (-1/t^2) + \varphi_v \cdot (2/t^3) = \varphi_{vv}(1/t^4) + \varphi_v(2/t^3)$

i tenim que (per enunciat): $c''(t) = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu$.

Com sabem que $\varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\nu$,

tenim que:

$$c''(t) = (\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + g\nu)\cdot\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^3}\varphi_v =$$

$$= \left(\frac{\Gamma^1_{22}}{t^4}\right)\cdot\varphi_u + \left(\frac{2}{t^3} + \frac{\Gamma^2_{22}}{t^4}\right)\varphi_v + C\nu$$

Per tant, i fent servir càlculs anteriors tenim que:

$A = \Gamma^1_{22}\cdot\left(\frac{1}{1/5}\right)^4 = -15625/377$ ✓

$B = \frac{2}{(1/5)^3} + \frac{\Gamma^2_{22}}{(1/5)^4} = 141125/377$ ✓

$t = 1/5$ ja que hem imposat $c(t) = \varphi(1,5) = \varphi(1, 1/t)$.

$*^1$: regla de la cadena.

$*^2$: $-t^{-2} \to -2\cdot(-t)^{-3}$.

Activitat avaluable Integració i formes diferencials IV (Geometria Diferencial) 07/06/2020 20:12h

ACME24

Exercici 1: Considerem la forma diferencial $\omega = xz\,dx + z\,dy + x\,dz$ de $\mathbb{R}^3$ i l'aplicació $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per $F(x,y,z) = (e^z, e^z, e^y)$. Calcula $(F^* d\omega)_p(v_1, v_2)$ on $p = (1,-1,0)$ i $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$. Dona el resultat de manera exacta, o bé amb sis xifres decimals.

Apliquem definició 6.3.8:

Definició 6.3.8: Donada una funció $h \in C^\infty(U)$, es defineix la seva diferencial com la 1-forma diferencial dh definida per

$$dh = \sum \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial h}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x^n} dx^n$$

(1)

$$d\omega = d(xz\,dx) + d(z\,dy) + d(x\,dz) =$$

$$z\,\underbrace{dx \wedge dx}_{*^1 \to 0} + x\,dz \wedge dx + dz \wedge dy + dx \wedge dz =$$

$$= (1-x)\,dx \wedge dz + dz \wedge dy.$$

$*^1$: Tal com és veu a l'entrega, $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$.

Apliquem definició 6.3.11:

Definició 6.3.11: Sigui $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable. Sigui $k \geq 1$. Es defineix el **pull-back** per f com l'aplicació lineal

$$f^*: \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$$

definida per $(f^*\omega)(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_{f(p)}(df_p(X_1), \dots, df_p(X_k))$.

Si $h \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ es defineix el pull-back $f^*h \in \Omega^0(U)$ com

$$f^*h = h \circ f$$

(2)

$$F^* d\omega = d\omega(F) \overset{?}{=} (1-e^z)\,d(e^z) \wedge d(e^y) + d(e^y) \wedge d(e^z)$$

$$= (1 - e^z - 1)\,d(e^z) \wedge d(e^y) = -e^z\,d(e^z) \wedge d(e^y)$$

$$= (-e^z \cdot e^{z+y})\,dz \wedge dy = -e^{2z+y}\,dz \wedge dy$$

③ Apliquem amb $p=(1,-1,0)$
$v_1=(1,1,0)$
$v_2=(0,1,0)$

$$(F^*d\omega)_p(v_1,v_2) = -e^{2z+y}\Big|_{(1,-1,0)} dz\wedge dy((1,1,0),(0,1,0))$$

$$= -1/e \; dz\wedge dy((1,1,0),(0,1,0)) \overset{*}{=} -1/e\,[dz(v_1)\cdot dy(v_2)$$

$$- dz(v_2)\cdot dy(v_1)] \overset{*2}{=} -1/e\,(0\cdot 1 - 0\cdot 1) = -1/e\cdot 0 =$$

$$0$$

*2: Algorisme Cèsar que surt als vídeos 15 i 16

Exercici 2: Calculeu el flux del camp $X(x,y,z)=(x,y,y)$ a través de l'hemisferi superior $(z\geq 0)$ de l'el·lipsoide d'equació

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$$

amb orientació determinada pels normals que tenen tercera component positiva sobre aquesta part de l'el·lipsoide. Si dones una aproximació, fes-ho amb un mínim de 6 xifres decimals.

Parametritzem l'elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ com $\varphi(u,v)=(a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\cdot\sin(v), c\cos(u))$

Fem φ_u i φ_v i el vector normal a la superfície serà

$N=\varphi_u\wedge\varphi_v$. En aquest cas no cal unitari però si tercera component positiva per enunciat.

Normal $=(3\cos(v)\sin(u)^2, 4\sin^2(u)\cdot\sin(v), 12\cos(u)\cos^2(v)\sin(u)+12\cos(u)\sin(u)\sin^2(v))$.

Fem el producte escalar de

$\langle X(N),N\rangle = 36\cos(u)\sin^2(u)\cdot\sin(v)+12\sin(u^3)$.

Ara només queda fer

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\langle X(N),N\rangle\,du\,dv = 16\pi$$