Primer Lliurament

Geometria Diferencial
(3r curs, Grau en Matemàtiques)
Universitat Autònoma de Barcelona

César José de Almenara i Marc Graells

26 de març de 2020

Problema 4

Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$. Volem demostrar que S^2 no és localment isomètrica a un pla.

a) Sigui $D_r = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq r\}$ el disc pla de radi r i sigui $\overline{D_r} = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq \cos(r)\}$ el casquet format pels punts de colatitiud $\leq r$. Proveu que D_r (respectivament $\overline{D_r}$) està format pels punts de $\mathbb{R}^2$ (resp. S^2) que es poden unir a l'origen $(0, 0)$ (resp. al pol nord $(0, 0, 1)$) amb un arc de corba continguda a $\mathbb{R}^2$ (resp. S^2) de longitud menor o igual que r.

b) Calculeu l'àrea de D_r i de $\overline{D_r}$.

c) Demostreu que no hi ha cap isometria entre un obert de $\mathbb{R}^2$ i un obert de S^2.

Solució a)

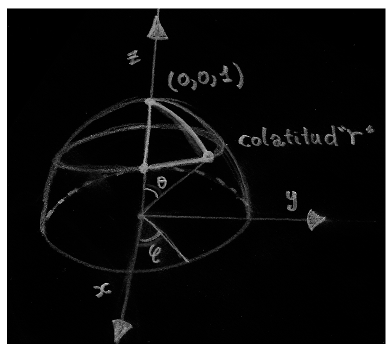
- Observem que D_r és un espai obert de $\mathbb{R}^2$. Volem veure que $\exists\, \alpha : [0, 1] \longrightarrow D_r$, tal que:

$$\begin{cases} \alpha(0) = (0,0) \\ \alpha(1) = p \end{cases} \quad \text{i} \quad L_0^1(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt \leq r$$

  Veiem que, com $p \in Dr$, aleshores $\|p\| \leq r$ i tenim $\alpha(t) = pt$ on $\|\alpha'(t)\| = \|p\| \leq r$. Per tant $L(\alpha) \leq r$.

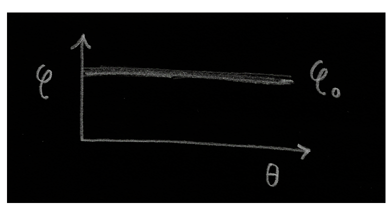
- Ara per $\overline{D_r}$. Només cal resseguir un arc. Considerem la següent parametrització,

$$f(\theta, \varphi) = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\theta), \cos(\theta))$$



[**Figura 1:** Diagrama orientatiu.]

Per recorre un arc fixem φ_0:



[**Figura 2:** Pla de paràmetres.]

Per definició $\forall (x_0, y_0, z_0) \in \overline{D_r}$, $\exists\, \theta_0, \varphi_0$ tals que $f(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$ amb $z_0 \leq \cos(r)$.

Fixem φ_0 i fem $\alpha(t) = f(\theta(t), \varphi_0)$ on $\theta(t) = \theta_0 t$

amb $t \in [0,1]$. Aleshores tenim que:

$$\alpha'(t) = \begin{aligned}&(\cos(\theta_0 t)\theta_0\cos(\varphi),\\ &\cos(\theta_0 t)\theta_0 \sin(\varphi),\\ &-\sin(\theta_0 t)\theta_0)\end{aligned}$$

En conseqüència, $\|\alpha\| =$

$$\theta_0 \cdot \sqrt{\cos^2(\theta_0 t)\cdot(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))+\sin^2(\theta_0 t)}$$

$$= \theta_0 \cdot \sqrt{\cos^2(\theta_0 t)\cdot 1 + \sin^2(\theta_0 t)} = \theta_0$$

I com que cosinus en l'interval 0 a π és una funció injectiva decreixent, més resultat anterior, tenim que $z_0 = \cos(\theta_0) \leq \cos(r)$, aleshores necessàriament $\theta_0 \leq r$, com volíem veure. (Ja que estem suposant *«disquet»* petit i per tant $\theta_0 \in (0,\pi)$).

Solució b)

Analíticament, l'àrea d'una superfície D ve donada per *«la sumació dels paral·lelograms diferencials sobre l'espai tangent en cada punt»*:

$$A(D) = \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, dudv$$

On hem parametritzat D localment per $(\Omega, \varphi(u,v))$, i $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ representa l'àrea del paral·lelogram donat per la diferencial de les corbes respecte els eixos sobre l'espai tangent en cada punt.

- **Àrea de $\overline{D_r}$:** Recuperant la notació que l'apartat anterior, tenim que:

$$A(\overline{D_r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \|f_\theta \wedge f_\varphi\| d\theta d\varphi$$

A més per la **identitat de polarització** tenim que $\|f_\theta \wedge f_\varphi\| = \sqrt{det\,(I_f)}$.
On la primera forma,

$$I_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta)\end{pmatrix}$$

ja que:

$$\|f_\theta\| = \cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)$$

$$\|f_\varphi\| = \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)$$

i:

$$\langle f_\theta, f_\varphi\rangle = -2\cos(\theta)\cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

En conseqüència tenim que $\sqrt{det\,(I_f)}$ és el mateix que $\sqrt{\sin^2(\theta)}$, és a dir, $\sin(\theta)$. Per tant:

$$A(\overline{D_r}) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\theta_0} \sin(\theta) d\theta\right) d\varphi$$

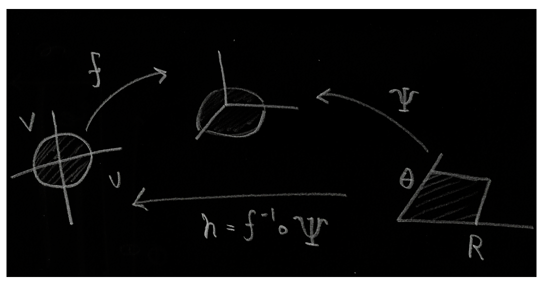
$$= 2\pi \cdot |\cos(\theta)|_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} = 2\pi(1-\cos(\theta_0))$$

unitats quadrades.

- **Àrea de D_r:** De manera anàloga:

$$A(D_r) = \iint_{D_r} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, dudv$$

Per facilitar els càlculs reparametrizem (utilitzant **Teorema del Canvi de Variable**) Geomètricament ho podem veure:



[**Figura 3:** Diagrama de canvi de parametrització.]

On

$$\begin{cases} f(u,v) = (u,v,0) \\ \Psi(R,\theta) = f(h(R,\theta)) \\ \Psi(R,\theta) = (R\cos(\theta), R\sin(\theta), 0)\end{cases}$$

i $h(R,\theta) = (u(R,\theta), v(R,\theta))$ on:

$$\begin{cases} u(R,\theta) = R\cos(\theta), \\ v(R,\theta) = R\sin(\theta)\end{cases}$$

Per tant:

$$J_h = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -R\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & R\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |det(J_h)| = R$$

Així tenim que:

$$A(D_r) = \iint_{D_r} \sqrt{det(I_f)}\, dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^r |det(J_h)| \cdot \sqrt{det(I_\Psi)} dR\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^r R \cdot \sqrt{\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^r R dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} = \pi r^2$$

com ja sabíem.

Solució c)

Podem restringirnos als oberts anteriors *spdg* [1] fent una transalació en $\mathbb{R}^2$ i rotació en S^2, considerem els oberts $D_r \subset \mathbb{R}^2$ i $\overline{D_r} \subset S^2$. També els podem suposar *«petits»*, perquè volem estudiar una propietat local, concretament, ser isometrics localment.

- Suposem que $\exists f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ isometria local en l'obert $Dr \subset U$, aleshores f és localment un difeomorfisme i per tant es té que:

  1. Com a aplicació oberta $f(Dr) \in \mathcal{T}_{S^2}$ sense pèrdua de generalitat considerem $f(D_r) = \overline{D}_{\theta_0}$ (per a cada $\theta_0 \in (0, \pi/4)$ *spdg*).
  2. Com que la funció és continua[2] $f(\partial D_r) = \partial f(D_r) = \partial \overline{D}_{\theta_0}$
  3. Com que hem suposat isometria s'ha de complir que

  $$\pi r^2 = A(D_r) = A(f(D_r)) = A(\overline{D}_{\theta_0})$$

  $$= 2\pi(1 - \cos(\theta_0))$$

- Per apartat **a)** deduïm que $\forall q \in D_r$ tenim que $\|\alpha_0^q\| = r$ on α_0^q corba *radial* del punt $(0, 0)$ al punt p. Per tant $\partial D_r = \gamma$ és una **corba tancada** amb longitud $L(\gamma) = 2\pi r$. I com abans ja hem vist que:

  $$\begin{cases} f(\partial D_r) = f(\gamma) = \partial \overline{D}_{\theta_0}, \\ 2\pi r = L(\gamma) = L(f(\gamma)) = 2\pi \sin(\theta_0) \end{cases}$$

  $$\Rightarrow r = \sin(\theta_0)$$

- Veiem ara la contradicció de tot plegat. Pels dos punts anterior tenim que:

  $$\begin{cases} r^2 = 2 \cdot (1 - \cos(\theta_0)) \\ r = \sin(\theta_0) \end{cases}$$

  Substituint tenim que:

  $$\sin^2(\theta_0) = 2 \cdot (1 - \cos(\theta_0)),$$

  $$\sin^2(\theta_0) = 2 \cdot \left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

  $$\sin^2(\theta_0) = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \Rightarrow \sin(\theta_0) = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

  spdg $\theta_0 \in (0, \pi/4)$ per ser *petit i rotat* l'obert D_r.

  Si suposem que existeix com $g(x) = \sin(x) - 2\sin(x/2)$ s'anul·la en θ_0 pel **Teorema de Rolle** $g'(x) = \cos(x) - \cos(x/2)$ es té que $\exists c \in (0, \theta_0)$ on $g'(c) = \cos(c) - cos(c/2) = 0$

  Aleshores,

  $$cos(c) = cos(c/2) \iff c = c/2$$

  ja que[3] $0 \leq \langle 0, \theta_0 \rangle \leq \pi/4$ que només és cert per $c = 0$ ¡¡!! (Contradicció amb que $\theta_0 \neq 0$). Per tant no existeix aquesta isometria.

Q.E.D.

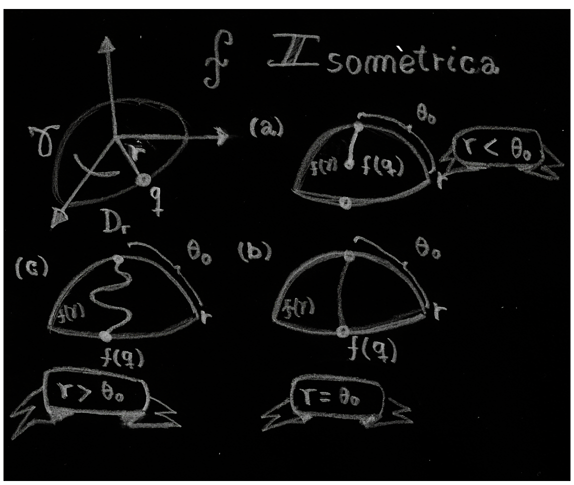
[1] Sense pèrdua de generalitat.
[2] On el símbol ∂ fa referencia a la frontera del conjunt.
[3] $\langle 0, \theta_0 \rangle$ s'ha de llegir com *un valor entre 0 i* θ_0.

Annex *(Annex 1)*

***U**na altra demostració de l'apartat **c)** més intuïtiva i no tan formal, fruit de l'obssesió per l'apartat en qüestió, és la que segueix:*

Com[4] que tenim que f es isometria ha de mantenir la distàncies i les longituds de les corbes. Podem pensar que si agafem la corba radial, és a dir, la que va del origen a un punt concret al pla, i la enviem mitjançant aquesta isometria f sobre la cúpula de S^2 amb la qual estem treballant (que a priori suposem que té la mateixa àrea que el nostre disc D_r del pla) tenim que aquesta *corba imatge* té la mateixa longitud del radi del disc.

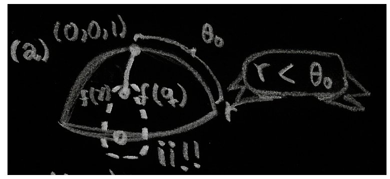
Aleshores com la cúpula té un arc de longitud θ_0, es poden donar tres casos:



[**Figura 4:** Diagrama que il·lustra els casos possibles **(a)**,**(b)** i **(c)**.]

- **Cas (a):** $(r < \theta_0)$Llavors la corba considerada no arribarà a la fronterer fet que contradiuría el fet de que una isometria ha d'enviar punts de la frontera a punts de *l'altre* frontera. Per tant podem descartar que succeeixi el cas **(a)**.

[4] Recordem que suposem D_r petita.



[**Figura 5:** Detall de la contradicció del cas **(a)**.]

- **Cas (b):** De nou en aquest cas també tenim contradicció. Pel **Teorema de Rolle** Com f isometria

$$A(D_r) = r^2\pi = 2\pi(1-\cos(\theta_0))$$

$$\iff r^2 = 2(1-\cos(\theta_0)) = 4\sin^2(\theta_0/2)$$

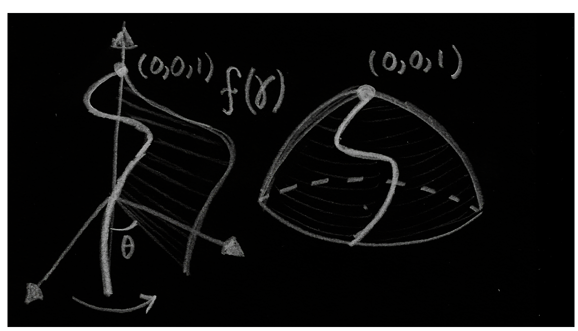
$$\iff \frac{\theta_0}{2} = \frac{r}{2} = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Obtenint finalment:

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{\theta_0}{2}$$

Per $\theta_0 \neq 0$, considerem $g(x) = \sin(x/2) - x/2$ amb $0 \leq x < \pi/4$. Aleshores pel **T.Rolle** sabem que existeix $0 \leq c < \pi/4$ tal que $g'(c) = 0$, i com que $g'(x) = \cos(x/2) - 1/2$, tenim que aquest c sols pot ser zero i per tant l'interval és un únic valor, zero. Fet que implicaria de nou $\theta_0 = 0$.¡¡!! Per tant, aquest cas tampoc és *viable*, i el podem descartar.

- **Cas (c):** Podem parametritzar $\overline{D}_{\theta_0}$ per $\varphi(t,\theta) = f(\gamma(t))e^{i\theta}$, llevat d'una corba i el punt màxim del *pol* o *casquet* Nord considerat.



[**Figura 6:** Diagrama que il·lustra la regió d'àrea nul·la no parametritzada.]

No queden parametritzats alguns punts però aquests tenen una *mesura d'àrea nul·la* i no són necessaris per la següent línia argumentativa.

Com hem suposat f isometria: Així φ és una parametrització ben definida, com:

$$\begin{aligned}\varphi_t &= (df(\gamma)\gamma'(t)\cos(\theta), df(\gamma)\gamma'(t)\sin(\theta), df(\gamma)\gamma'(t)) \\ &= df(\gamma)\gamma'(t)(\cos(\theta),\sin(\theta),1)\end{aligned}$$

i:

$$\begin{aligned}\varphi_\theta &= (-f(\gamma)\sin(\theta), f(\gamma)\cos(\theta), 0) \\ &= f(\gamma)(\sin(\theta),\cos(\theta),0)\end{aligned}$$

Tenim doncs que:

$$\begin{aligned}\|\varphi_t\|^2 &= \|df(\gamma)\gamma'(t)\|^2 \cdot \|(\cos(\theta),\sin(\theta),1)\|^2 \\ &= \|\gamma'(t)\|^2, \\ \|\varphi_\theta\|^2 &= \|f(\gamma)\|^2 \|(\sin(\theta),\cos(\theta),0)\|^2 \\ &= \|\gamma(t)\|^2, \\ \langle\varphi_t \wedge \varphi_\theta\rangle &= df(\gamma)\gamma'(t)(-sin(\theta)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ara per la **identitat de polarització** tenim que:

$$\begin{aligned}\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\|^2 &= \|\varphi_t\|^2 \cdot \|\varphi_\theta\|^2 - \langle\varphi_t \wedge \varphi_\theta\rangle^2 = \\ &= \|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma(t)\|^2\end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}2\pi(1-\cos(\theta_0)) = A(\overline{D}_{\theta_0}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\cdot\|\gamma(t)\| dt d\theta \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

Recordem que la corba radial existeix sempre i a més tenim que $\|\gamma(t)\| = \|(q_1,q_2)\| \cdot t$, on hem de tenir en compte $\gamma'(t) = (q_1,q_2)$i $\|\gamma'\| = r$.

$$\|\gamma(t)\| = \sqrt{t^2 \cdot (q_1^2+q_2^2)} = t \cdot r$$

ja que entenem que $\|q\| = dist((0,0),q)$

$$\Rightarrow \int_0^1 trdr = \left|\frac{t^2}{2}r\right|_0^1 = \frac{r}{2},\ r > \theta_0$$

Reaprofitant els primers dos punts de la demostració del **apartat c)** (sense fer servir el tercer però, i per no fer més extens el raonament actual) havíem vist que $r = \sin\theta_0$. Però hem suposat $r > \theta_0$ i com $\theta_0 \in (0,\pi/4)$ i la funció és creixent estrictament en aquest interval, per tant tenim $\sin(r) > sin(\theta_0) = r$!!! Ja que sabem que per $(0,\infty)$ $\sin(x) < x$.

En conclusió, veiem que les corbes d'una circumferència plana no entren en oberts petits de S^2, han de *«plegar-se»*.