Examen final, segona convocatòria, 8 de juliol de 2010

1.– Es considera la corba parametritzada $\alpha(t) = (v(t)\cos t, v(t)\sin t, kv(t))$ on $k > 0$ i $v(t)$ és una funció positiva de t.

a) Proveu que α està continguda en un con. Quin?

b) Com ha de ser la funció $v(t)$ de manera que α formi angle constant θ amb els generadors del con?

2.– Per cada punt de la corba $t \to (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(t/2))$ es considera el segment de longitud igual a quatre vegades la curvatura i direcció la donada per la normal. Trobeu l'equació del pla osculador de la corba que descriu l'extrem del segment (que no és a la corba original).

Solució: *Si α és la corba de l'enunciat, el problema demana sobre la corba $\gamma = \alpha + 4\kappa\, n_\alpha$ on n_α és el normal unitari d'α. Tenim que $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 2\cos(t/2))$, llavors $|\alpha'| = 2$. Per fer els càlculs més simples reparametritzem per paràmetre arc, llavors podem posar $\alpha(s) = (s/2 - \sin(s/2), 1 - \cos(2/2), 4\sin(s/4))$. Ara $\alpha''(s) = \kappa(s) \cdot n_\alpha(s)$. Llavors*

$$\kappa(s) = \sqrt{1 + \cos^2(s/4)}/4, \qquad n_\alpha(s) = (\sin(s/2), \cos(s/2), \cos(s/4))/4$$

i

$$\gamma(s) = (s/2, 1, 4\sin(s/4) + \cos(s/4)).$$

És una corba plana que 'viu' al pla $y = 1$ que és justament el pla osculador que es demana.

3.– Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització regular d'una superfície orientada amb vector normal unitari

$$N(u, v) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{||\varphi_u \times \varphi_v||}.$$

Considerem la superfície paral·lela parametritzada per

$$\psi(u, v) = \varphi(u, v) + aN(u, v)$$

on a és una constant real.

a) Si K i H són la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de φ, proveu que

$$\psi_u \times \psi_v = (1 - 2Ha + Ka^2)\, \varphi_u \times \varphi_v.$$

b) Proveu que en els punts regulars les curvatures de Gauss i mitjana de ψ són respectivament

$$\frac{K}{1 - 2Ha + Ka^2} \quad \text{i} \quad \frac{H - Ka}{1 - 2Ha + Ka^2}.$$

c) Utilitzeu l'apartat anterior per provar que si φ té curvatura mitjana constant no nul·la aleshores existeix una superfície paral·lela amb curvatura de Gauss constant.

Solució: *Posem $-N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ i $-N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$. Com que el determinant i la traça de l'aplicació de Weingarten $W = -dN$ són la curvatura de Gauss i el doble de la curvatura mitjana tenim que $K = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ i $2H = a_{11} + a_{22}$. Llavors com que $\psi_u = \varphi_u + aN_u$ i $\psi_v = \varphi_v + aN_v$ resulta que*

$$\psi_u \times \psi_v = \varphi_u \times \varphi_v + a(\varphi_u \times N_v + N_u \times \varphi_v) + a^2 N_u \times N_v.$$

A partir de l'expressió de N_u i N_v en termes de φ_u i φ_v deduïm que $\varphi_u \times N_v + N_u \times \varphi_v = -2aH\varphi_u \times \varphi_v$. Anàlogament trobem que $N_u \times N_v = K\varphi_u \times \varphi_v$. D'aquesta igualtats resulta la identitat que es demana a l'apartat a). Observem que per valors de a prou petits l'expressió $1 - 2Ha + Ka^2$ és positiva, aleshores de la igualtat demostrada a l'apartat a) deduïm que el normal unitari $\tilde{N}$ de la superfície donada per ψ és $N(u, v)$.

Siguin $W = (a_{ij})$ i $\tilde{W} = (\tilde{a}_{ij})$ les matrius de les aplicacions de Weingarten de les superfícies φ i ψ en les bases $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ i $\{\psi_u, \psi_v\}$ respectivament. Tenim que $\psi_u = (1 - a\ a_{11})\varphi_u - a\ a_{21}\varphi_v$ i $\psi_v = -a\ a_{12}\varphi_u + (1 - a\ a_{22})\varphi_v$. Llavors la matriu

$$C = \begin{pmatrix} 1 - aa_{11} & -aa_{12} \\ -aa_{21} & 1 - aa_{22} \end{pmatrix}$$

canvia de la base en φ a la base en ψ. Llavors $C \cdot \tilde{W} = W$. Per tant

$$\tilde{K} = \det(C^{-1} \cdot W), \qquad \tilde{H} = \mathrm{tr}(C^{-1} \cdot W).$$

El determinant de C val $1 - 2Ha + Ka^2$ d'on deduïm la primera part de l'apartat b). L'expressió de la curvatura mitjana es calcula també a partir de l'expressió anterior.

Si la curvatura mitjana de φ compleix $H = c \neq 0$ prenent $a = 1/2c$ obtenim una superfície paral·lela amb $K = 0$.

4.– Considereu les superfícies parametritzades per $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \ln v)$ i $\psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ definides en el mateix domini.

a) Calculeu la primera forma fonamental de cada superfície.

b) Comproveu que tenen la mateixa curvatura de Gauss en punts amb els mateixos paràmetres.

c) Creieu que aquestes superfícies són isomètriques? Per què?

Solució: *Primer calculem els vectors tangents de la superfície parametritzada per $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \ln v)$:*

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (-v \sin u, v \cos u, 0) \\ \varphi_v &= (\cos u, \sin v, \frac{1}{v}) \end{aligned}$$

i els coeficients de la primera forma fonamental de φ:

$$E = v^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1 + \frac{1}{v^2},$$

de manera que $EG - F^2 = 1 + v^2 = \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2$. D'altra banda,

$$\varphi_u \times \varphi_v = (\cos u, \sin u, -v),$$

d'on resulta que el vector normal de φ és

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}(\cos u, \sin u, -v).$$

Per calcular la curvatura de Gauss utilitzem la fórmula $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$, on e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle, \\ f &= \langle \varphi_{uv}, N \rangle, \\ g &= \langle \varphi_{vv}, N \rangle. \end{aligned}$$

Com que

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= (-v\cos u, -v\sin u, 0)\\ \varphi_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0)\\ \varphi_{vv} &= (0,0,\frac{-1}{v^2})\end{aligned}$$

obtenim que

$$e = \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}, \qquad f = 0, \qquad g = \frac{1}{v\sqrt{1+v^2}}$$

i per tant $K = \frac{-1}{(1+v^2)^2}$.

Ara repetim el procés per la superfície parametritzada per $\psi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$*:*

$$\begin{aligned}\psi_u &= (-v\sin u, v\cos u, 1)\\ \psi_v &= (\cos u, \sin v, 0)\end{aligned}$$

de manera que els coeficients de la primera forma fonamental de ψ *són*

$$E = 1+v^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$

de manera que $EG - F^2 = 1 + v^2 = \|\psi_u \times \psi_v\|^2$*. D'altra banda,*

$$\psi_u \times \psi_v = (-\sin u, \cos u, -v),$$

d'on resulta que el vector normal de ψ *és*

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(-\sin u, \cos u, -v).$$

Per calcular la curvatura de Gauss de ψ *utilitzem la fórmula anterior. Com que*

$$\begin{aligned}\psi_{uu} &= (-v\cos u, -v\sin u, 0)\\ \psi_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0)\\ \psi_{vv} &= (0,0,0)\end{aligned}$$

obtenim que

$$e = 0, \qquad f = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \qquad g = 0$$

i per tant $K = \frac{-1}{(1+v^2)^2}$.

Per tant, les curvatures de Gauss de φ *i* ψ *coincideixen en punts amb els mateixos paràmetres* (u,v)*. Aquesta és una condició necessària per què les dues superfícies siguin isomètriques per l'aplicació* $\varphi \circ \psi^{-1}$*, però no és suficient. De fet, en aquest cas aquesta aplicació no és una isometria ja que els coeficients de les primeres formes fonamentals no són iguals en punts amb mateixos paràmetres.*

Es pot comprovar que aquestes dues superfícies no són localment isomètriques mitjançant cap altra aplicació $\varphi \circ (f,g) \circ \psi^{-1}$*, on* $(f,g) : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2$ *és un difeomorfisme local de* $\mathbb{R}^2$*. En primer lloc s'hauria de complir que* $(K \circ (f,g))(u,v) = K(u,v)$*, i.e.*

$$\frac{-1}{(1+g(u,v)^2)^2} = \frac{-1}{1+v^2}.$$

Com que $v > 0$, tindríem que $g(u, v) = v$. Si ara imposem la condició de ser isometria:

$$\begin{pmatrix} f_u^2 v^2 & f_u f_v v^2 \\ f_u f_v v^2 & v^2 f_v^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u & 0 \\ f_v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deduim que $f(u, v)$ hauria de satisfer el sistema d'equacions diferencials

$$f_v = 0, \qquad f_u = 1 + \frac{1}{v^2},$$

que no admet cap solució.

5.– Sigui C una corba regular tancada amb vector tangent unitari T. Proveu que si C és la vora d'una superfície S aleshores no existeix cap funció diferenciable f tal que $\mathrm{grad}(f) = T$ en tots els punts de C.

Solució: *Raonem per reducció al absurd: si existís una funció diferenciable f tal que $\mathrm{grad}(f)|C = T$ tindríem que*

$$0 < L(C) = \int_C dL = \int_C T\cdot T \, dL = \int_C \mathrm{grad}(f)\cdot T \, dL = \int_S \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) \, dA = \int_S 0 \, dA = 0$$

pel teorema de Stokes i pel fet que $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$.

6.– Considereu les superfícies de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\right\} \\ S_2 &\equiv \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5x\right\} \end{aligned}$$

a) Calculeu la circulació del camp $\mathbf{F} = y\mathbf{k}$, al llarg de la corba d'intersecció entre les superfícies donades, $C = S_1 \cap S_2$.

b) Considereu la cadena $T(s) = \left(5\sin^2(\pi s), -5\sin(\pi s)\cos(\pi s), 25\sin^2(\pi s)\right)$ amb $s \in [0, 1]$ i les formes diferencials $\alpha = dz, \beta = 5dx, \gamma = y\alpha$ a $\mathbb{R}^3$. Calculeu-ne les imatges recíproques (*pull-back*) $T^*(\gamma - \beta), T^*(\alpha), T^*(d\gamma)$.

c) Calculeu $\int_T \gamma$.

7.– a) Enuncieu el teorema de Green i expliciteu-ho pel camp vectorial $F(x, y) = (0, x)$.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la corba definida en coordenades polars per $r = a + b\cos(n\theta)$ amb $a > b > 0$ i $n \in \mathbb{N}$.

Indicació: Recordeu que $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ i que, si m i n són nombres enters diferents, $\int_0^{2\pi} \cos(n\alpha)\cos(m\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin(n\alpha)\sin(m\alpha)d\alpha = 0$