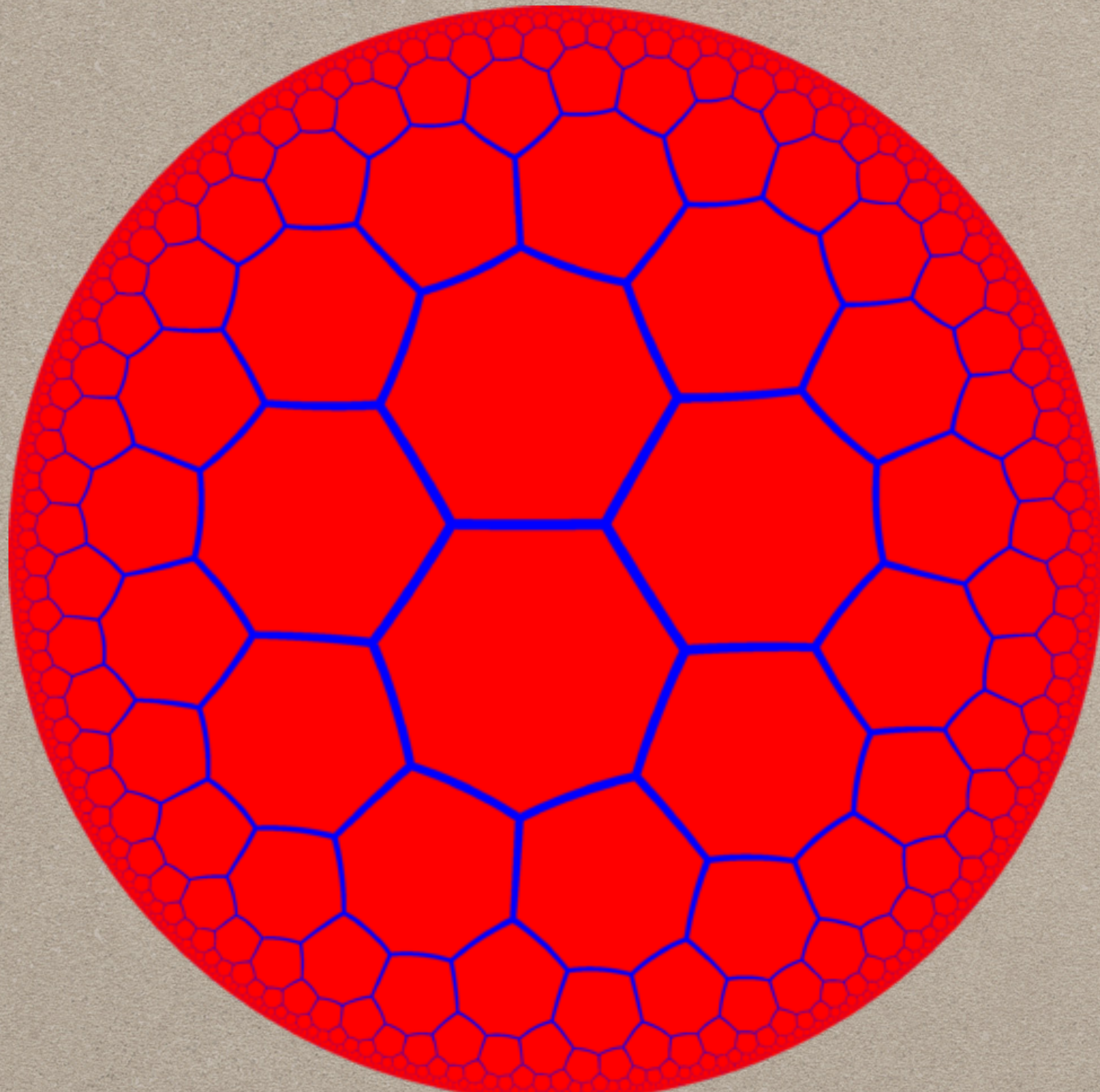
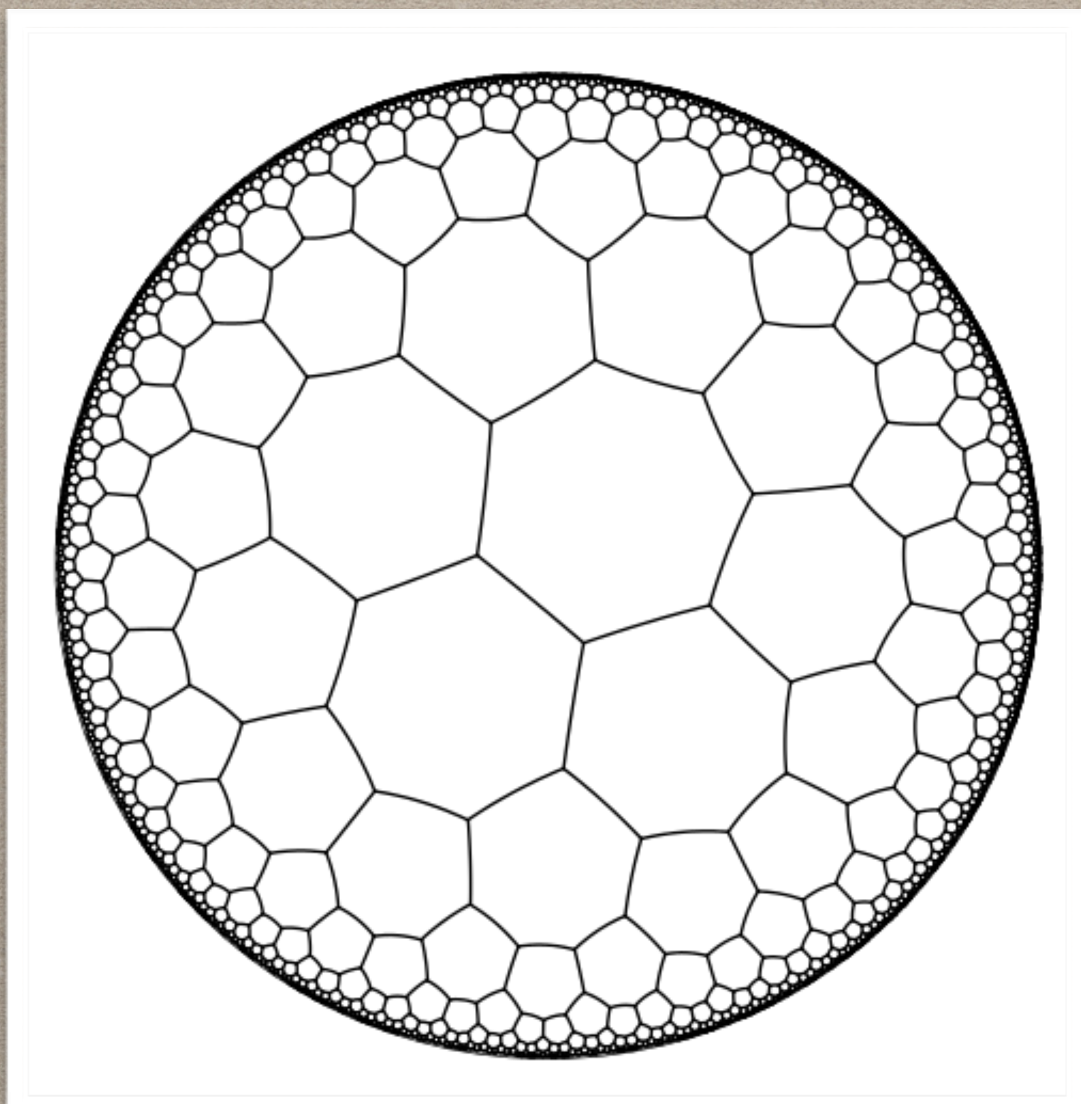


Parlem de Geometria Hiperbòlica

EDUARDO GALLEGO
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

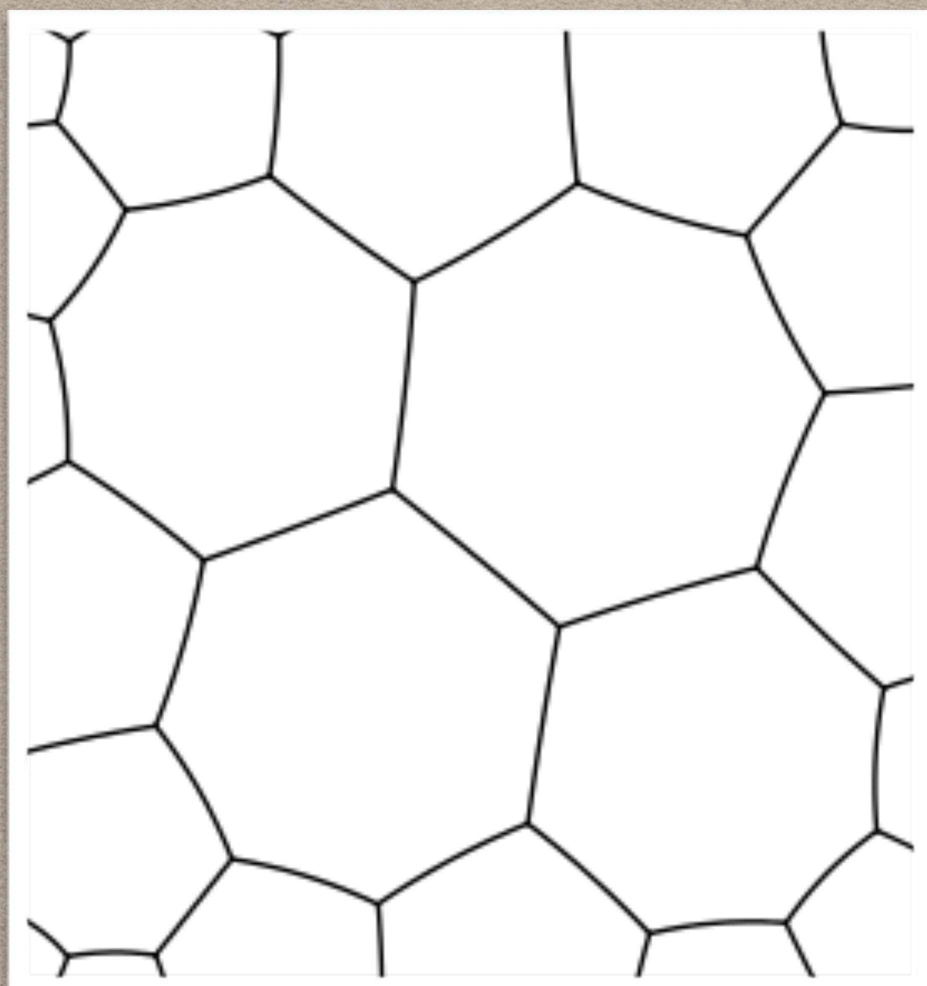
AULA 141 - CENTRE CÍVIC GUINARDÓ
15 MARÇ 2018

SOBRE LA PORTADA



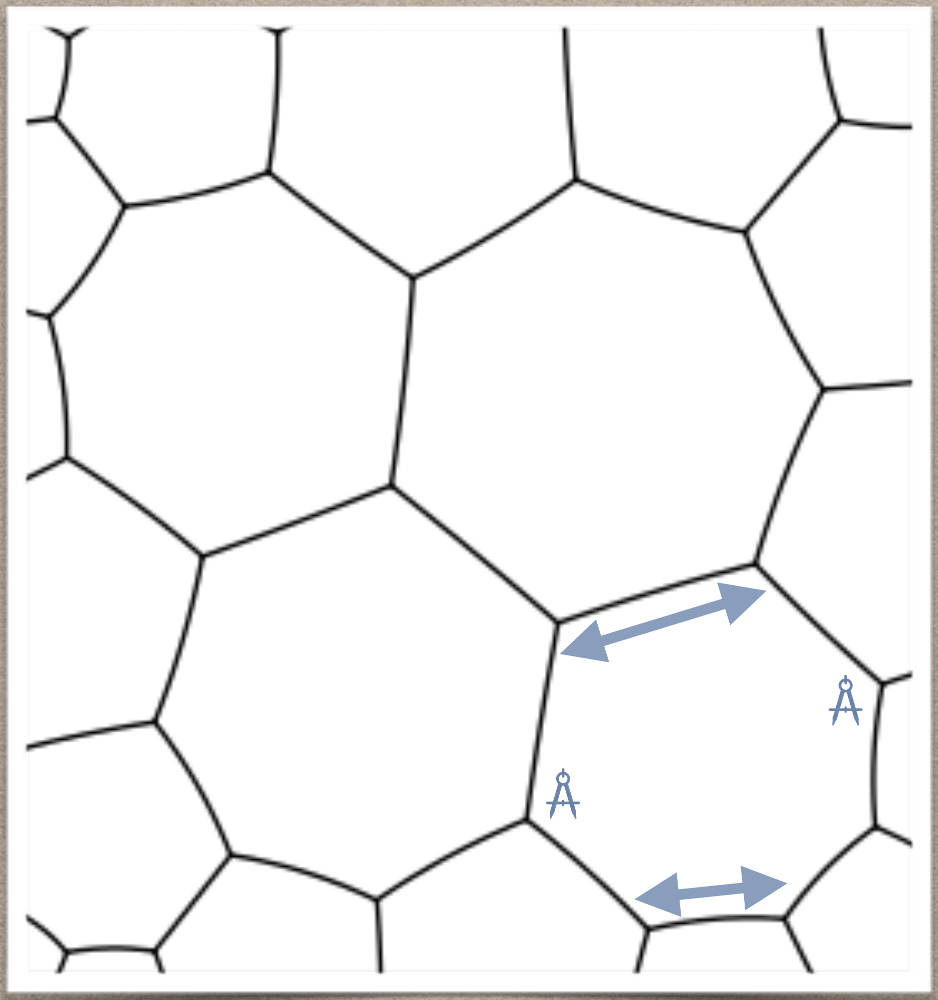
- Pavimentació
- Rajoles poligonals
- Poligons **regulars** de set costats
- Tots els polígons són **iguals**

SOBRE LA PORTADA



- Pavimentació
- Rajoles poligonals
- Poligons **regulars** de set costats
- Tots els polígons són **iguals**

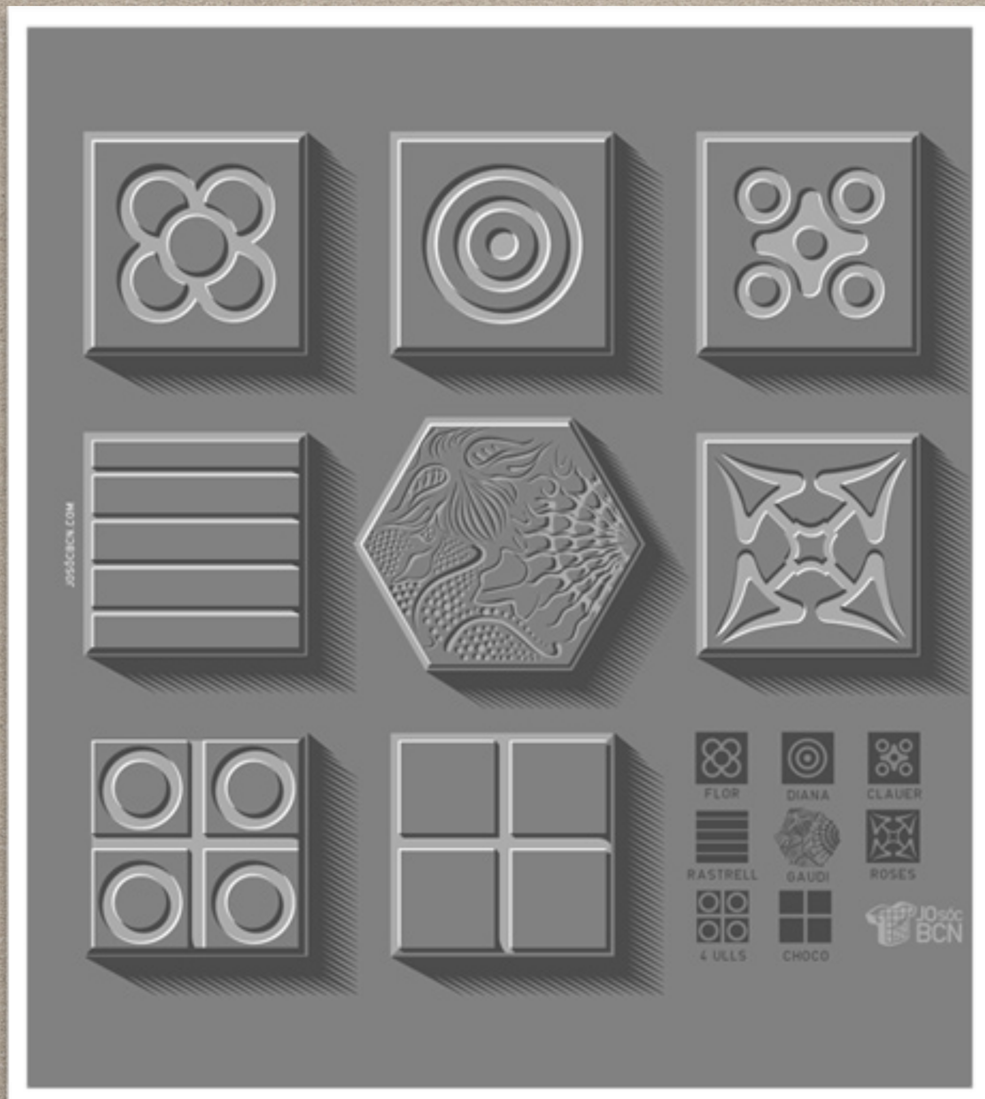
SOBRE LA PORTADA



- Costat iguals (!?)
- Angles iguals (Val!)

BOIG?!

EL PLA

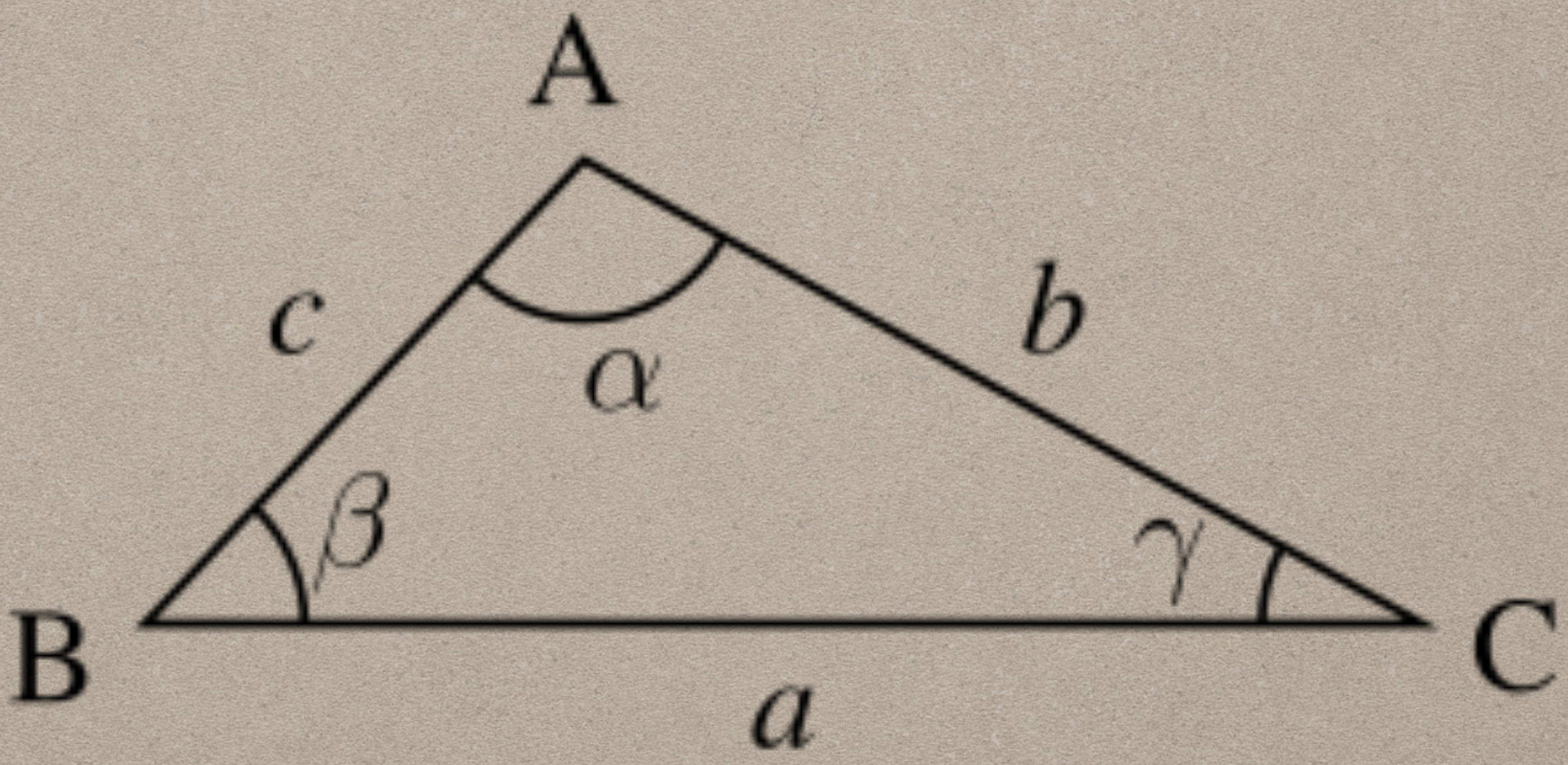


Rajoles de Barcelona

Rajola Gaudí

Panots

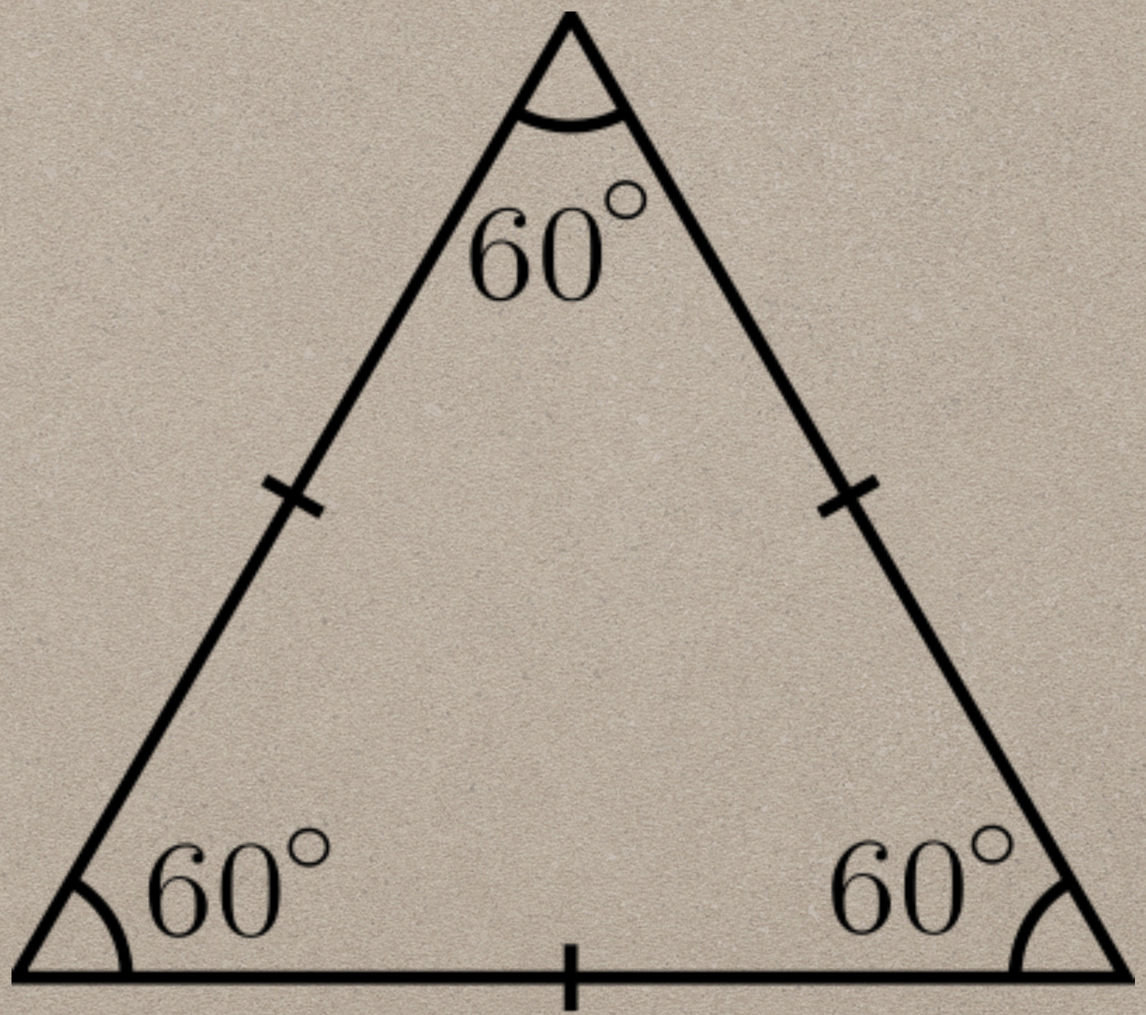
EL PLA



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

(Dos angles rectes, 180°)

EL PLA



Triángle equilàter: 60° cada costat

EL PLA

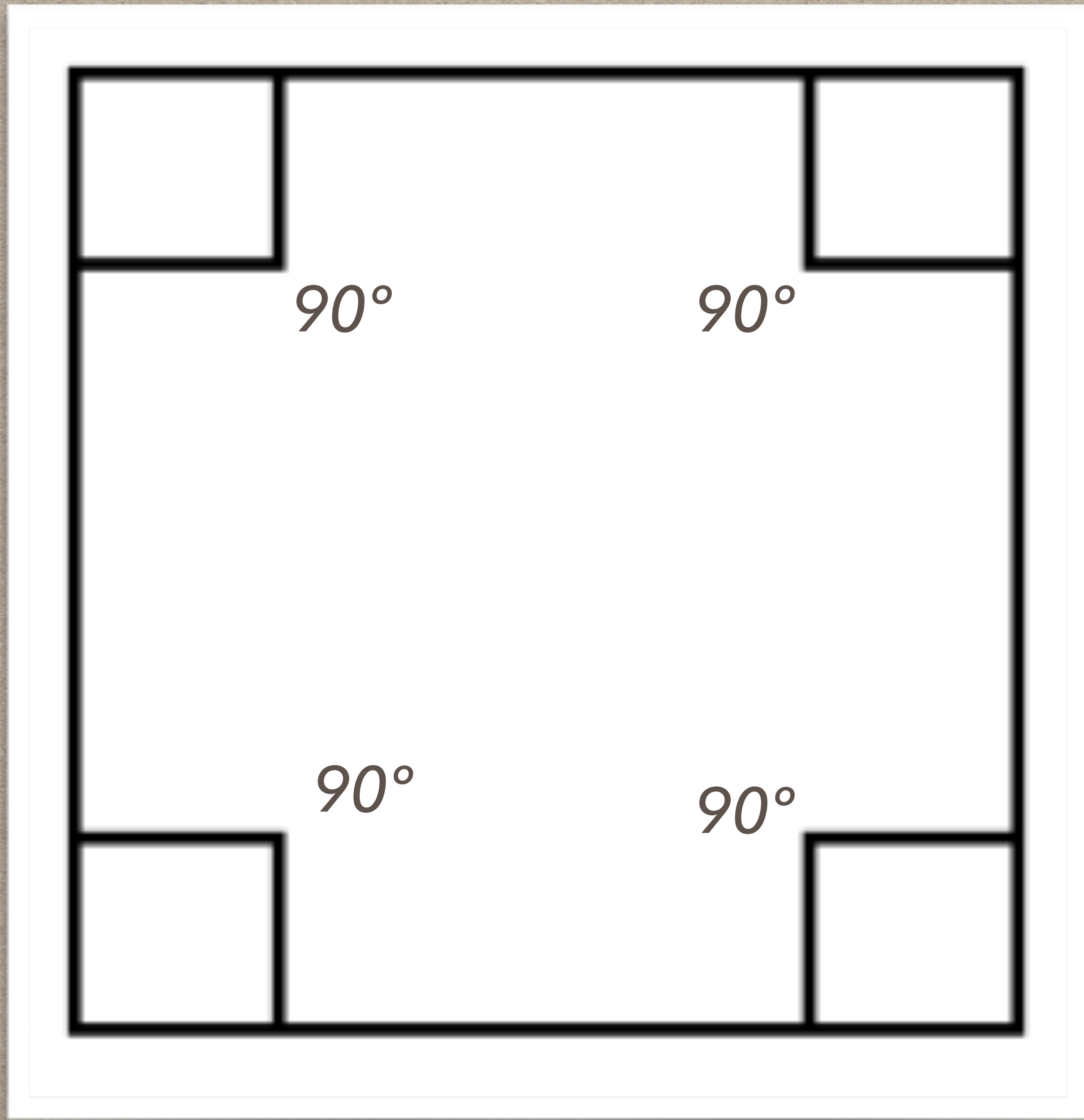
- *Pavimentació per triangles equilàters*
- *A cada vèrtex tenim 6 triangles*
- *6 x 60º= 360º*

Quadrat,

pentàgon,

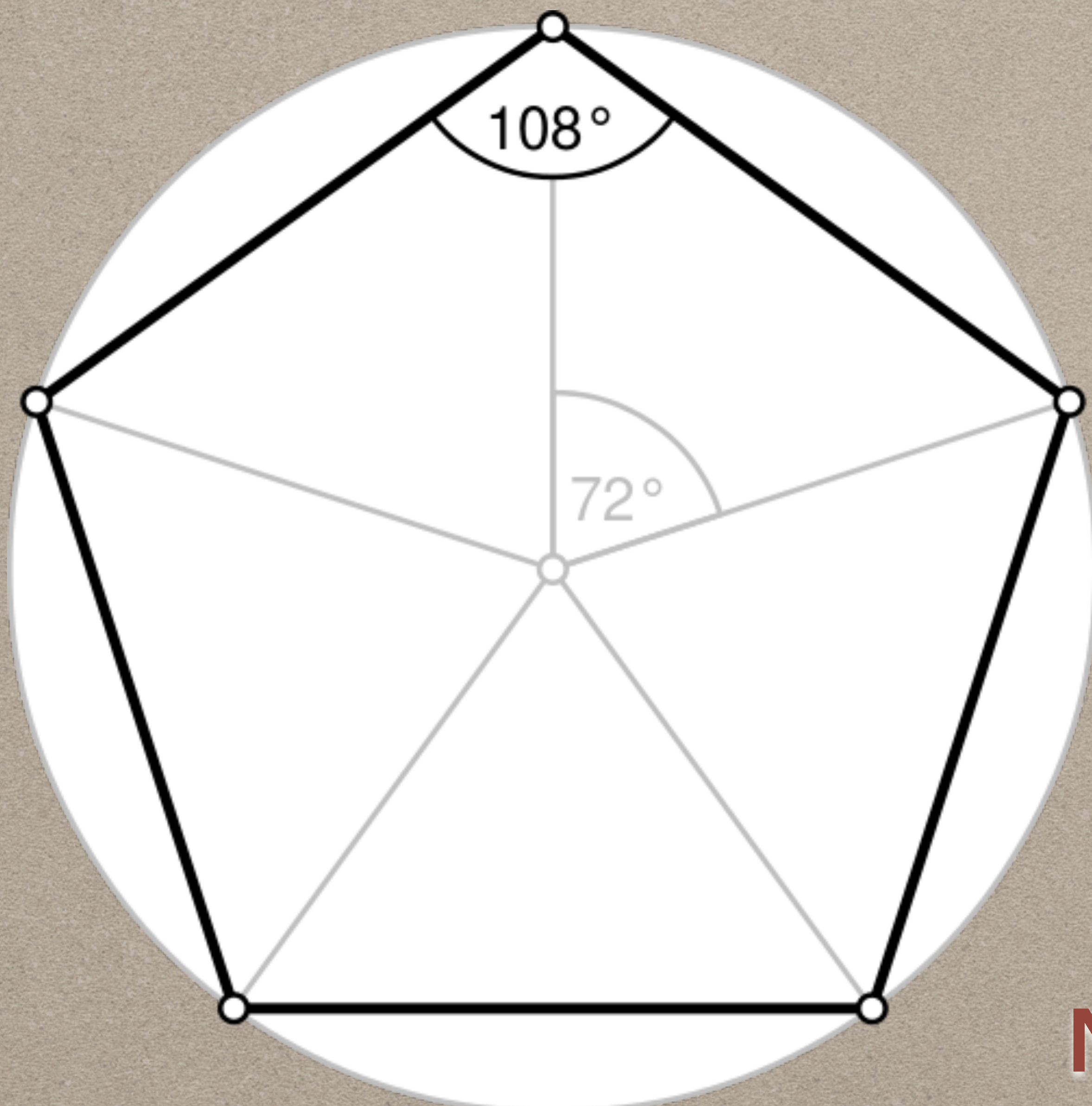
hexàgon, ...?

EL PLA



- *Pavimentació per quadrats*
- *A cada vèrtex tenim 4 quadrats*
- *4 x 90°= 360°*

EL PLA

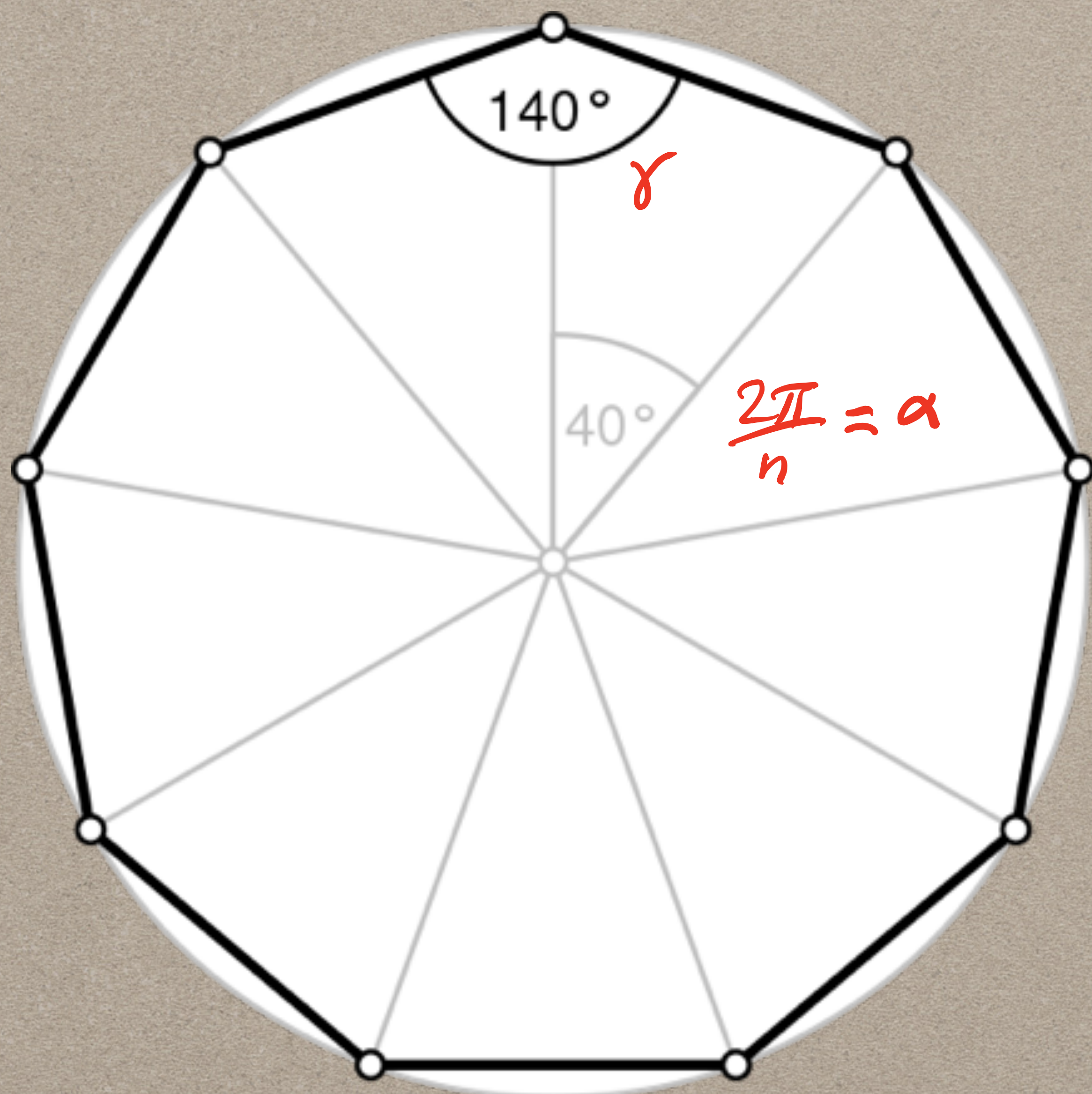


- *Pavimentació per pentàgons?*
- *A cada vèrtex tenim k pentàgons*
- *k x 108°= 360°?*

Hauriem de tenir k=3,4074… pentàgons!!!

NO RAJOLES PENTAGONALS

EL PLA



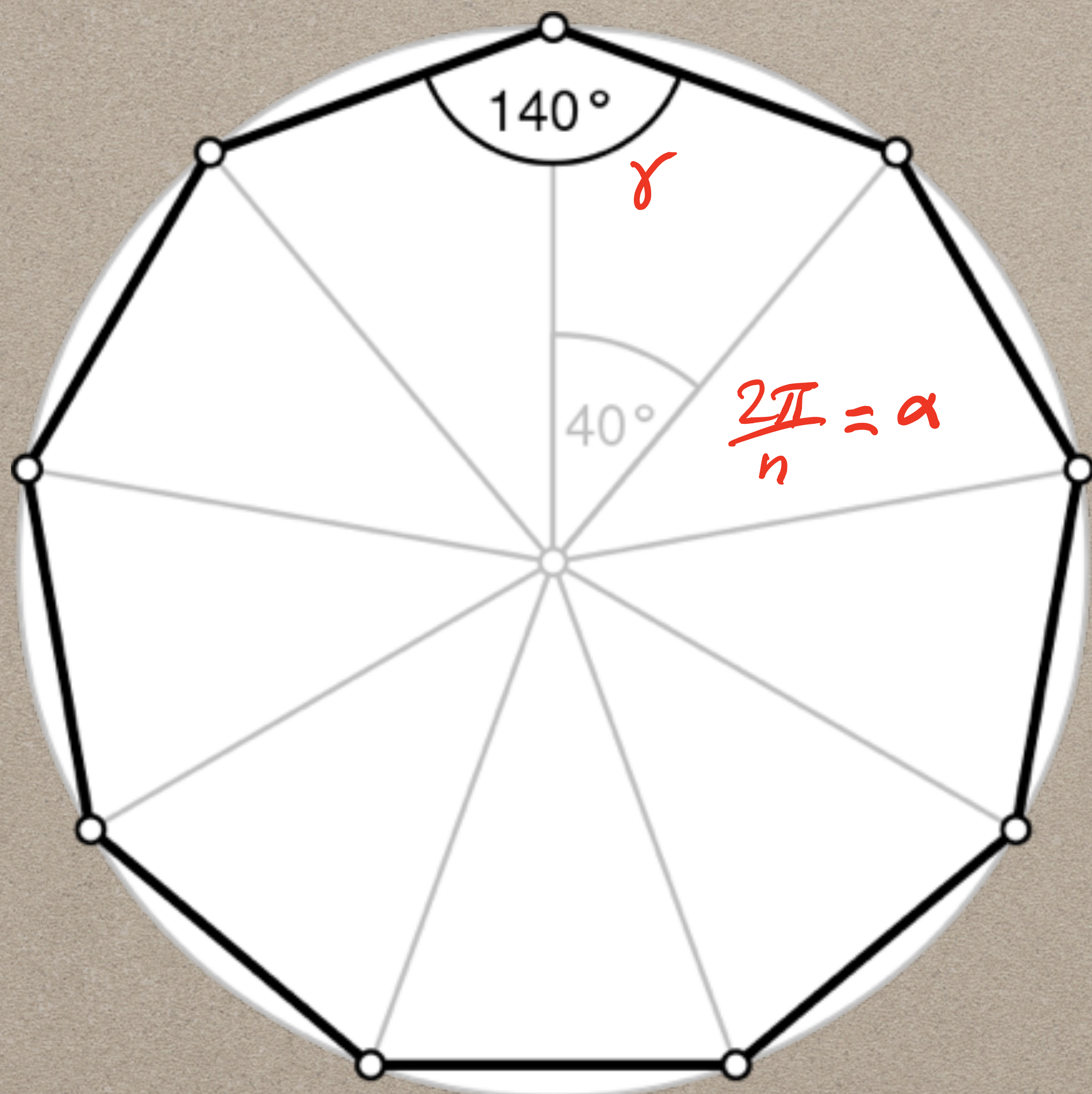
Nonàgon (9 costats)

- ***n**, nombre de costats del polígon regular*
- ***k**, nombre de polígons regulars coincidint en un vèrtex*
- ***α**, angle del triangles isòsceles que el composen (40°)*
- ***γ**, angle interior entre els costats (140°)*

$$n \cdot \alpha = 2\pi = 360^{\circ}$$

$$\gamma = \pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{n-2}{n}\pi$$

EL PLA



Nonàgon (9 costats)

- ***n**, nombre de costats del polígon regular*
- ***k**, nombre de polígons regulars coincidint en un vèrtex*

$$k \cdot \gamma = k\frac{n-2}{n}\pi = 2\pi$$

$$k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

$$(n-2)\cdot(k-2) = 4$$

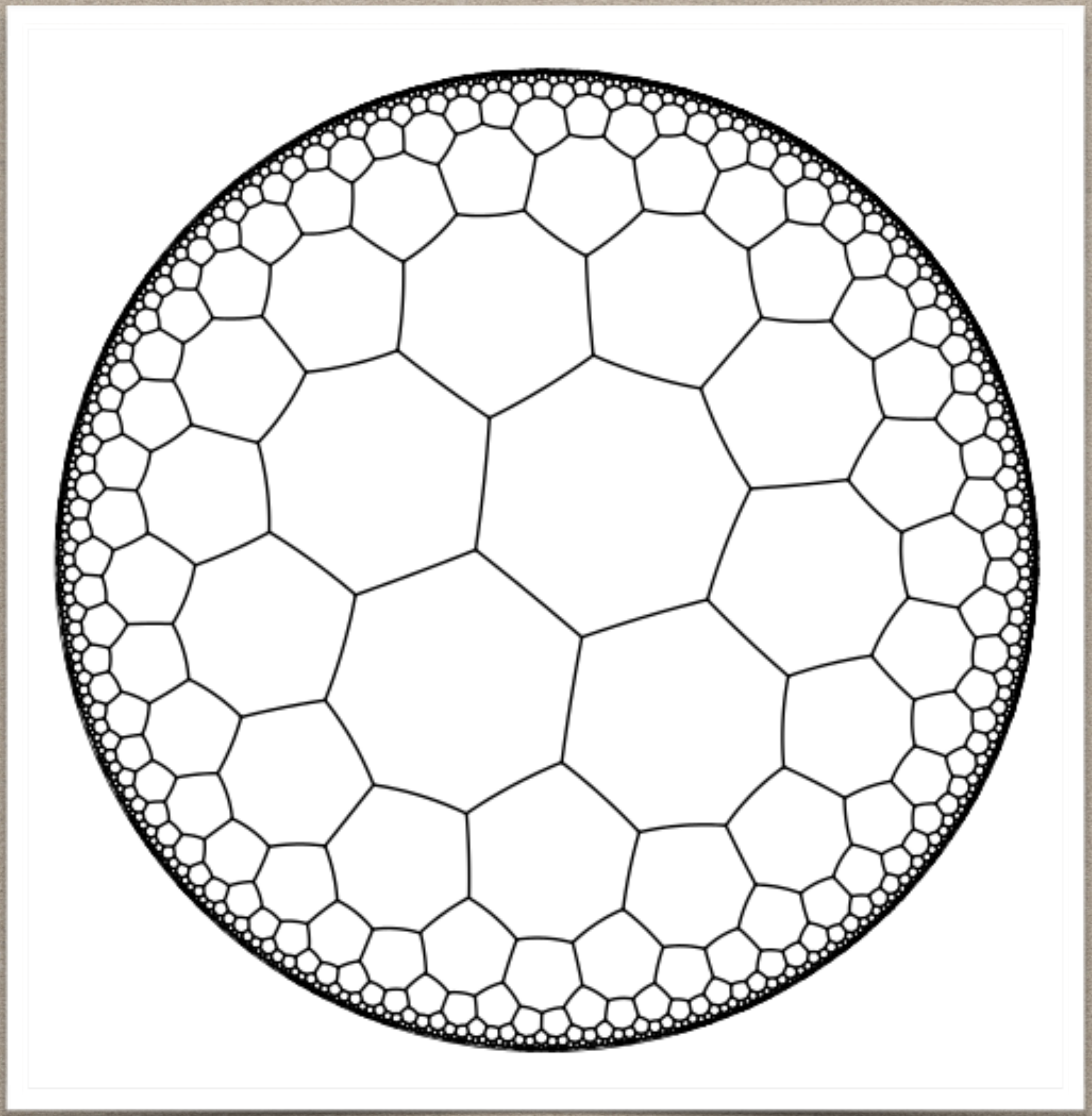
Solucions (enteres) per:

$$n = 3, 4, 6$$

EL PLA

Només pavimentacions amb ***Triangles, Quadrats i Hexàgons***

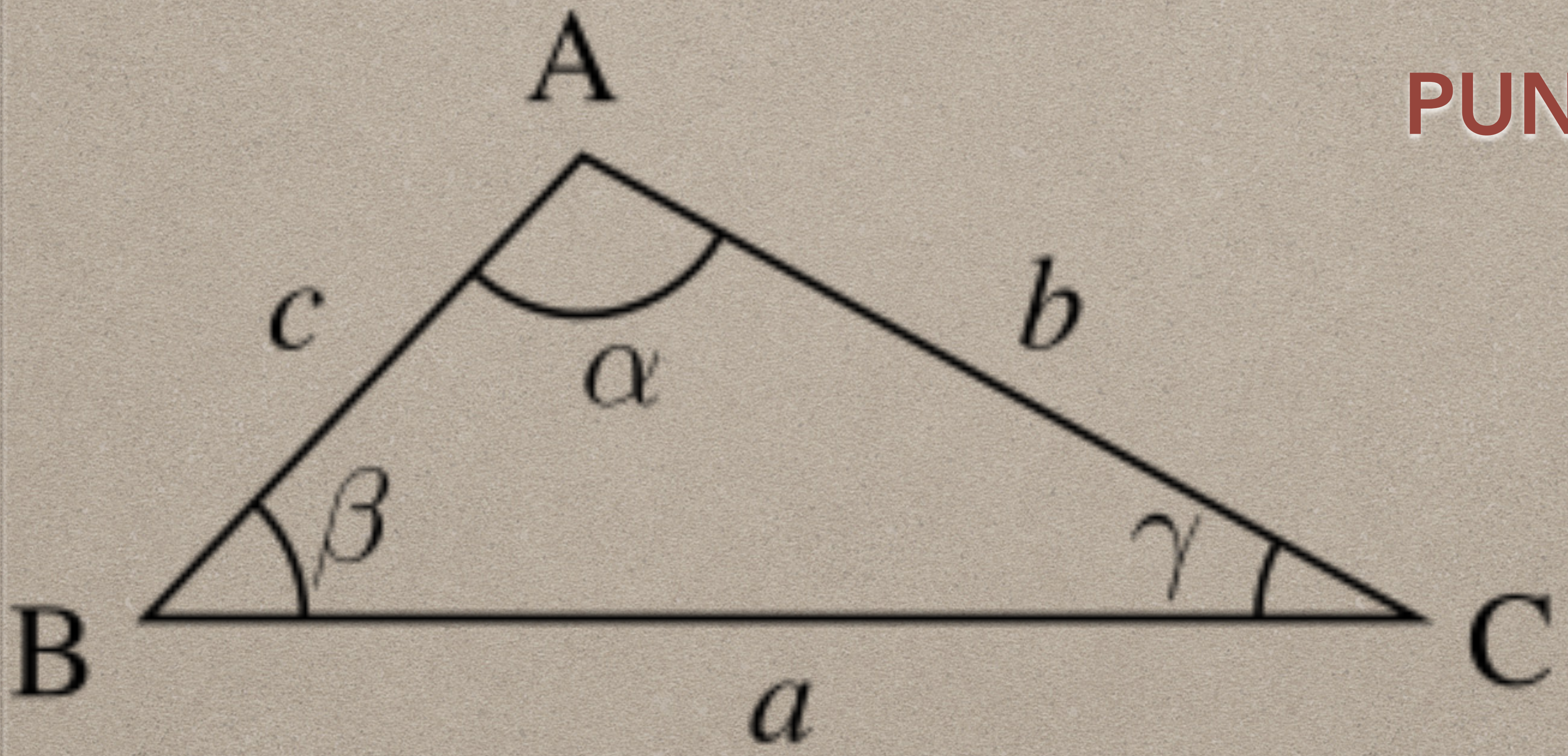
EL PLA



- Pavimentació
- Rajoles poligonals
- Poligons **regulars** de set costats
- Tots els polígons són **iguals**

QUÈ SIGNIFICA AIXÒ?

EL PLA

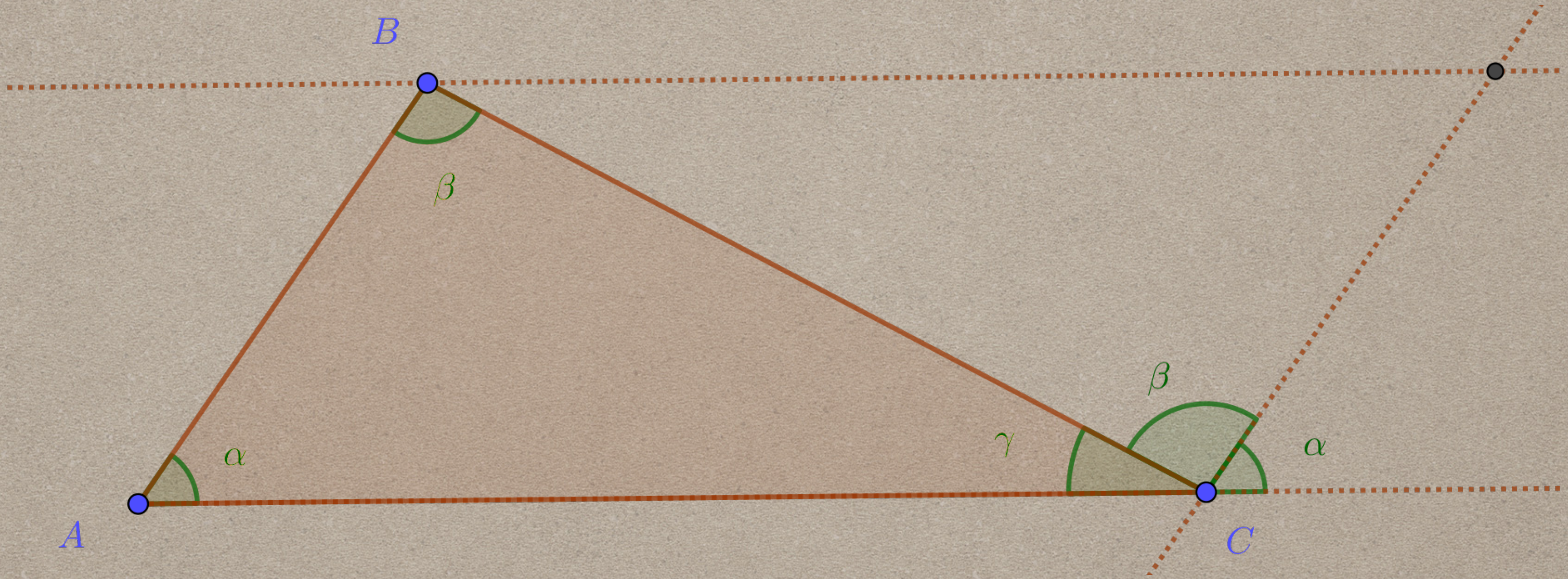


PUNT CLAU!!!

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

(Dos angles rectes, 180°)

EL PLA



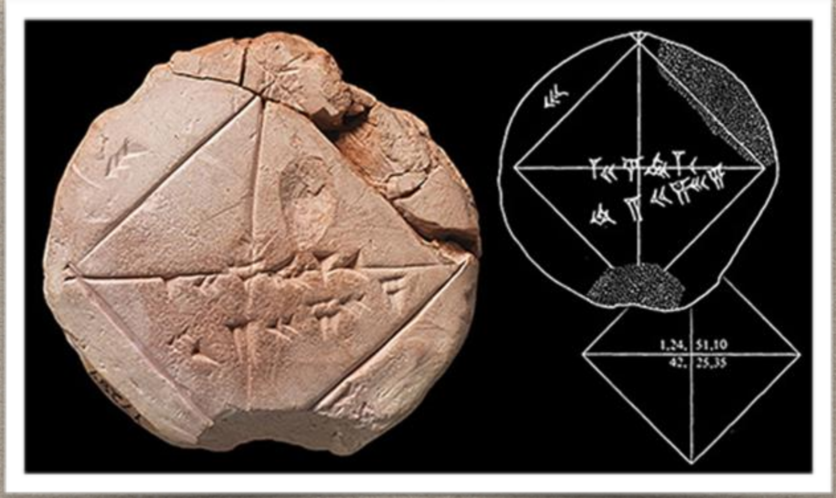
- *Fem la paral·lela **r** a **AB** pel punt **C***
- *Fem la paral·lela **s** a **AC** pel punt **B***
- *Igualtat entre angles*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

QUE ÉS LA GEOMETRIA?

Inicialment:

- *Relacions espacials*
- *Forma dels cossos*
- *Mesures àrees, volums, …*



Babilonia (3800aC)

Necessitats pràctiques. Regles, poc rigor

Més endevant:

- *Objectes més enllà del món visual.*
  Per exemple 'distància' entre funcions

Egipte (2000aC)

QUE ÉS LA GEOMETRIA?

Escola d'Atenes
Rafael
(1509 - 1511)
Palau Apostòlic, Vaticà

*También es van presentar durant aquest periode **proves lògiques** relativament **rigoroses** de teoremes geomètrics.*

- *Durant el període comprès entre el segle VII aC i el segle I dC la geometria es desenvolupa principalment a l'antiga **Grècia**.*
- *Resultat: acumulació de coneixements sobre les **relacions mètriques** que governen triangles, determinacions d'**àrees** i **volums**, **proporcions** i similituds de figures, seccions **còniques** i problemes de construcció.*

QUE ÉS LA GEOMETRIA?

… – 6: Pitàgores – … – 9: Hipàtia – … – 14: Plató – 15: Aristòtil – … – 18: Euclides (o Arquímedes) – … – 20: Ptolemeu – …

(èpoques diferents)

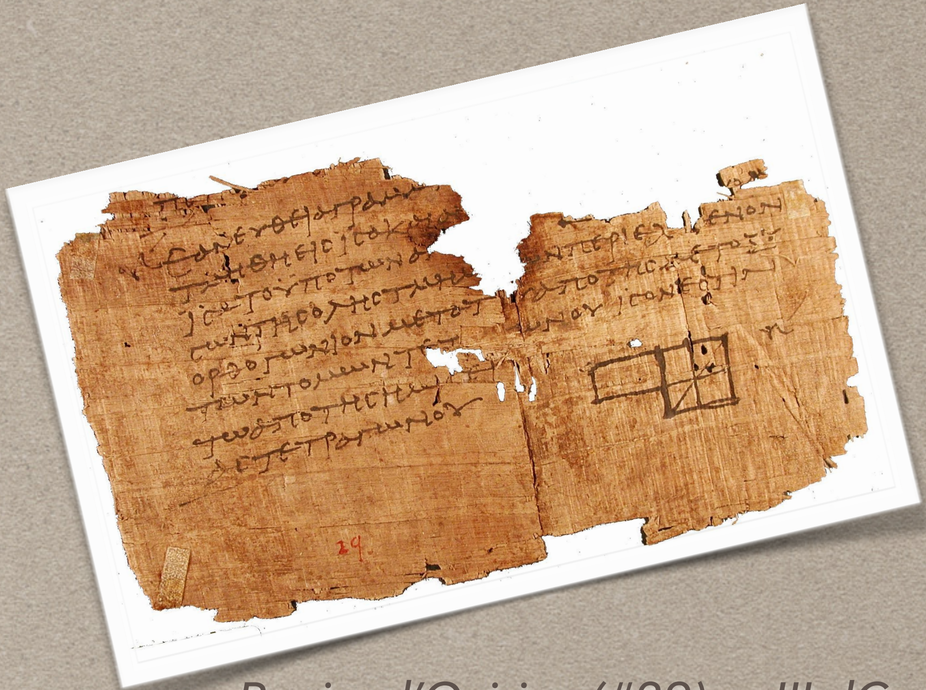
Pitàgores

Euclides?

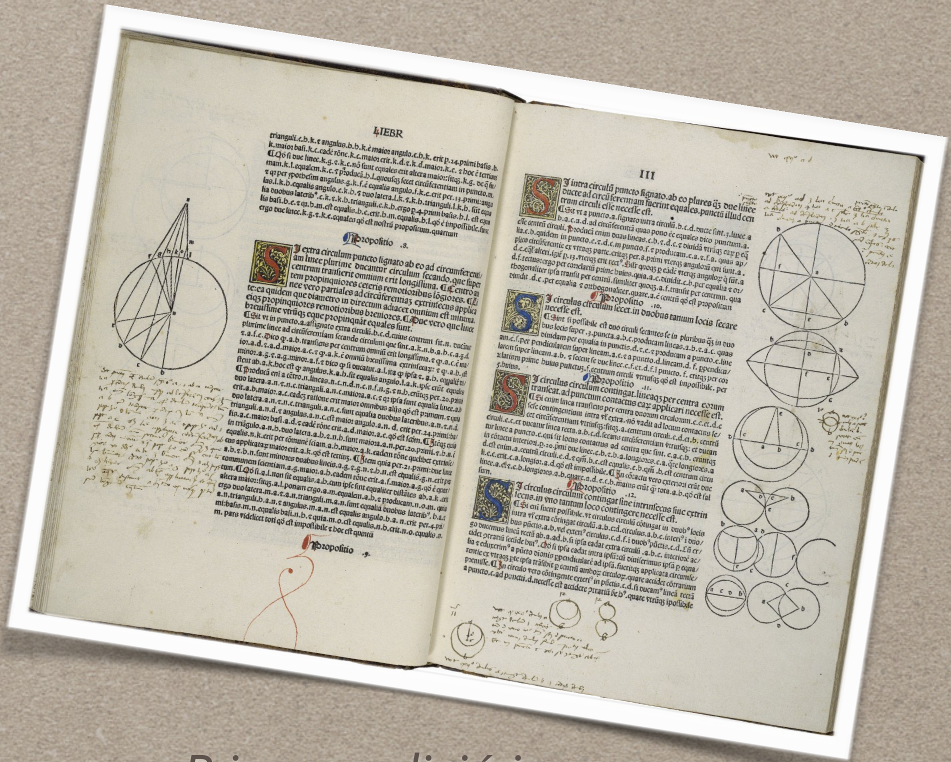
ELS ELEMENTS

Elements d'Euclides *(~300 aC):*

- *compendi de fets coneguts en geometria i la seva **sistematització** (uns 300 aC),*
- *formulació de les suposicions fonamentals (**postulats**) de la geometria,*
- ***Deducció** de diverses propietats de les figures planes i de l'espai per raonament lògic.*



Papirs d'Oxirinc (#29), s. III dC



Primera edició impressa, Erhard Ratdolt 1482

Primers fonaments del mètode axiomàtic

ELS ELEMENTS

- *Definicions (23)*
- *Postulats (5)*
- *Axiomes (nocions comunes) (5)*

→ *Teoremes*
i
demostracions

Definicions:

- ***Punt***
- ***Recta***
- ***Angle***
- ***Circumferència***
- ***Triangle***
- *…*

ELS ELEMENTS

- *Definicions (23)*
- *Postulats (5)*
- *Axiomes (nocions comunes) (5)*

→ *Teoremes*
i
demostracions

Definicions:

- ***Punt***
- ***Recta***
- ***Angle***
- ***Circumferència***
- ***Triangle***
- *…*

Axiomàtica moderna*:*
punts i rectes són conjunts d'objectes amb relacions: pertànyer a, estar entre, ser congruent

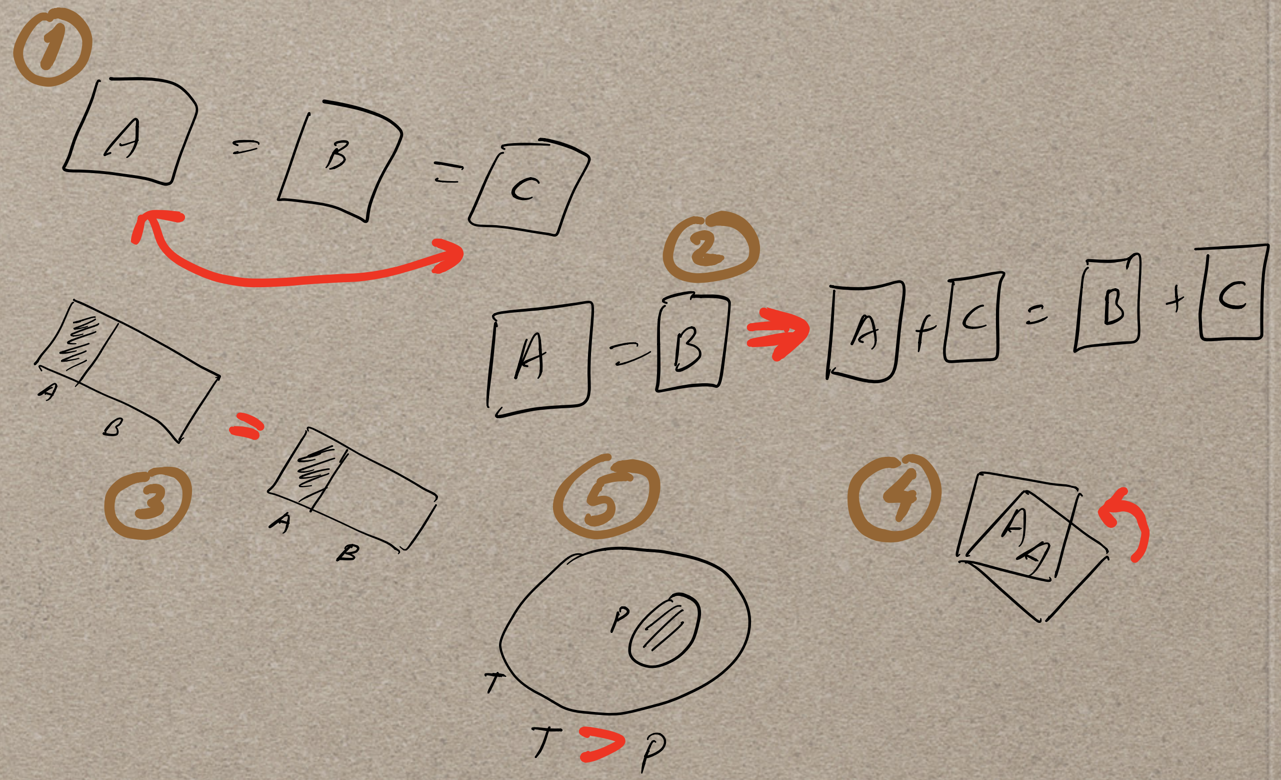
Punt*: allò que no té parts,*
Recta*: una longitud sense amplada.*
Angle*: la inclinació entre si de dues rectes que es tallen i no es troben en línia recta.*

ELS ELEMENTS

- *Definicions (23)*
- *Postulats (5)*
- *Axiomes (nocions comunes) (5)*

Teoremes
i
demostracions

1) *Coses iguals a una mateixa cosa, són iguals entre si.*
2) *Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals seran iguals.*
3) *Si de coses iguals se'n resten coses iguals, les diferències seran iguals.*
4) *Coses iguals que **coincideixin** (superposar) a una tercera són iguals entre si (**moviment**).*
5) *El tot és major que les parts.*

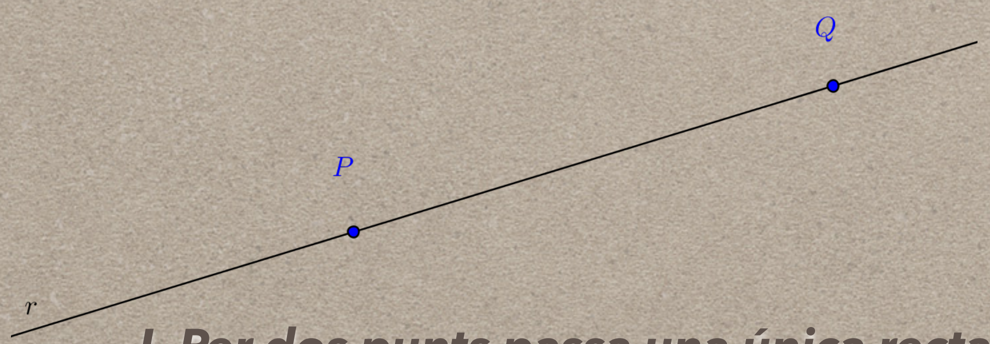


Axiomes (nocions comunes)

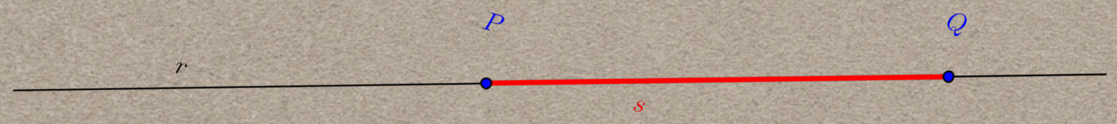
ELS ELEMENTS

- *Definicions (23)*
- *Postulats (5)*
- *Axiomes (nocions comunes) (5)*

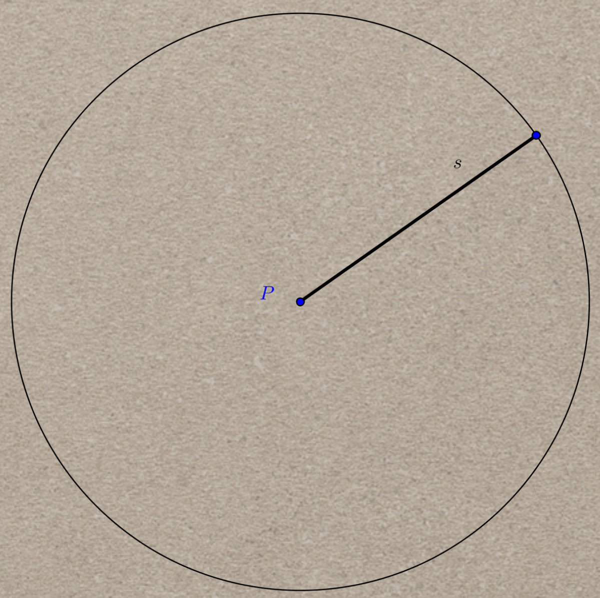
Teoremes
i
demostracions



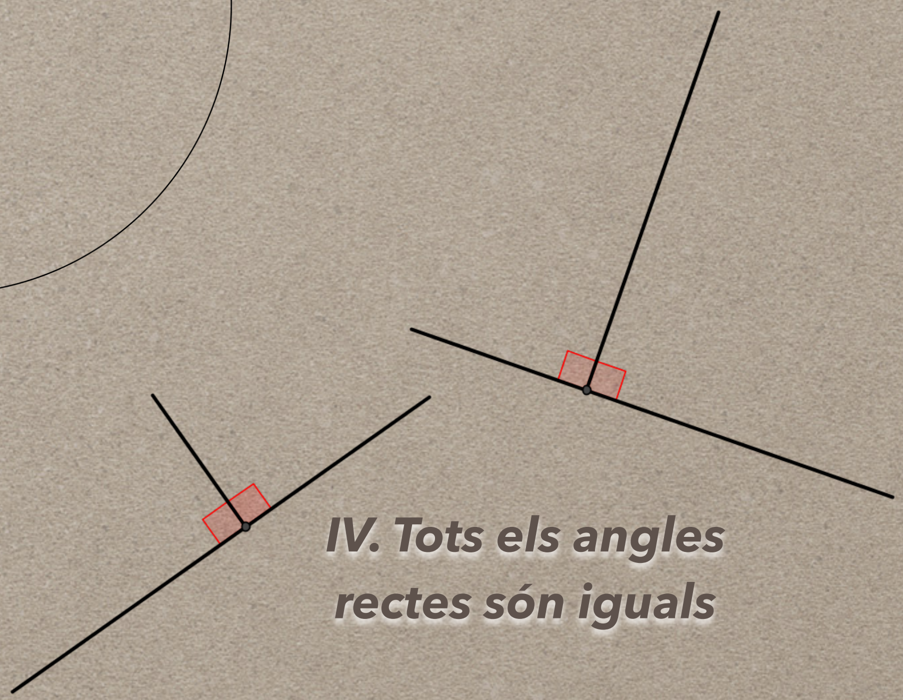
I. Per dos punts passa una única recta



II. Un segment pot ser allargat indefinidament mitjançant una recta



III. Existeix circumferència amb centre i radi donats

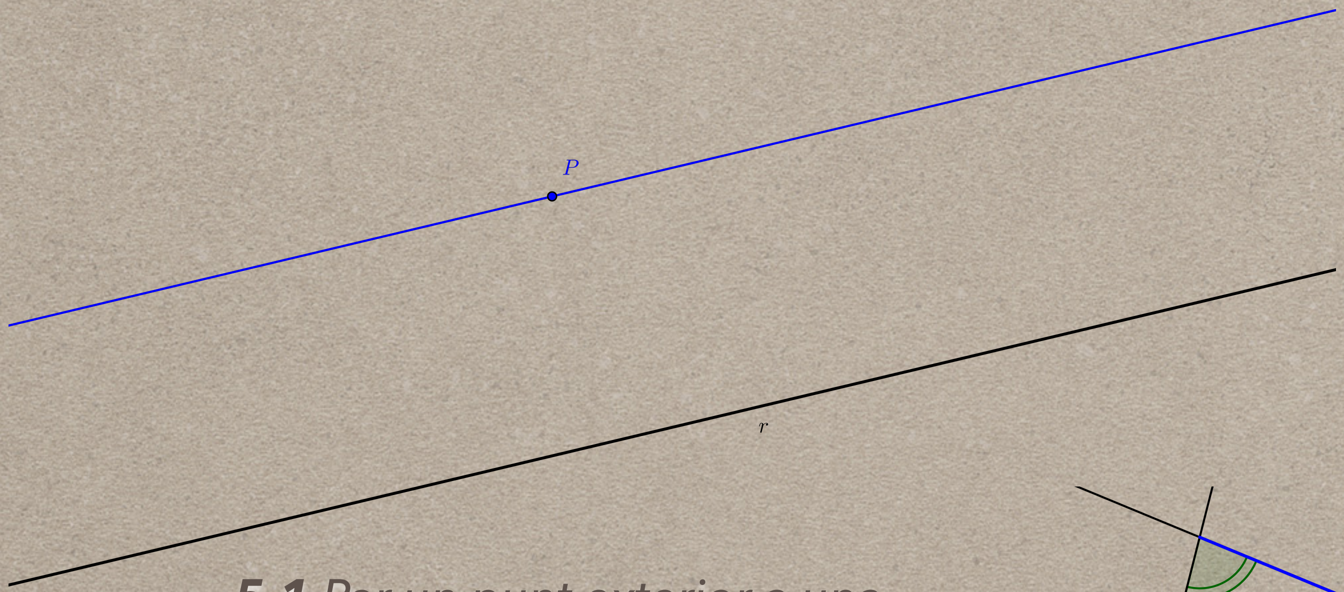


IV. Tots els angles rectes són iguals

Postulats

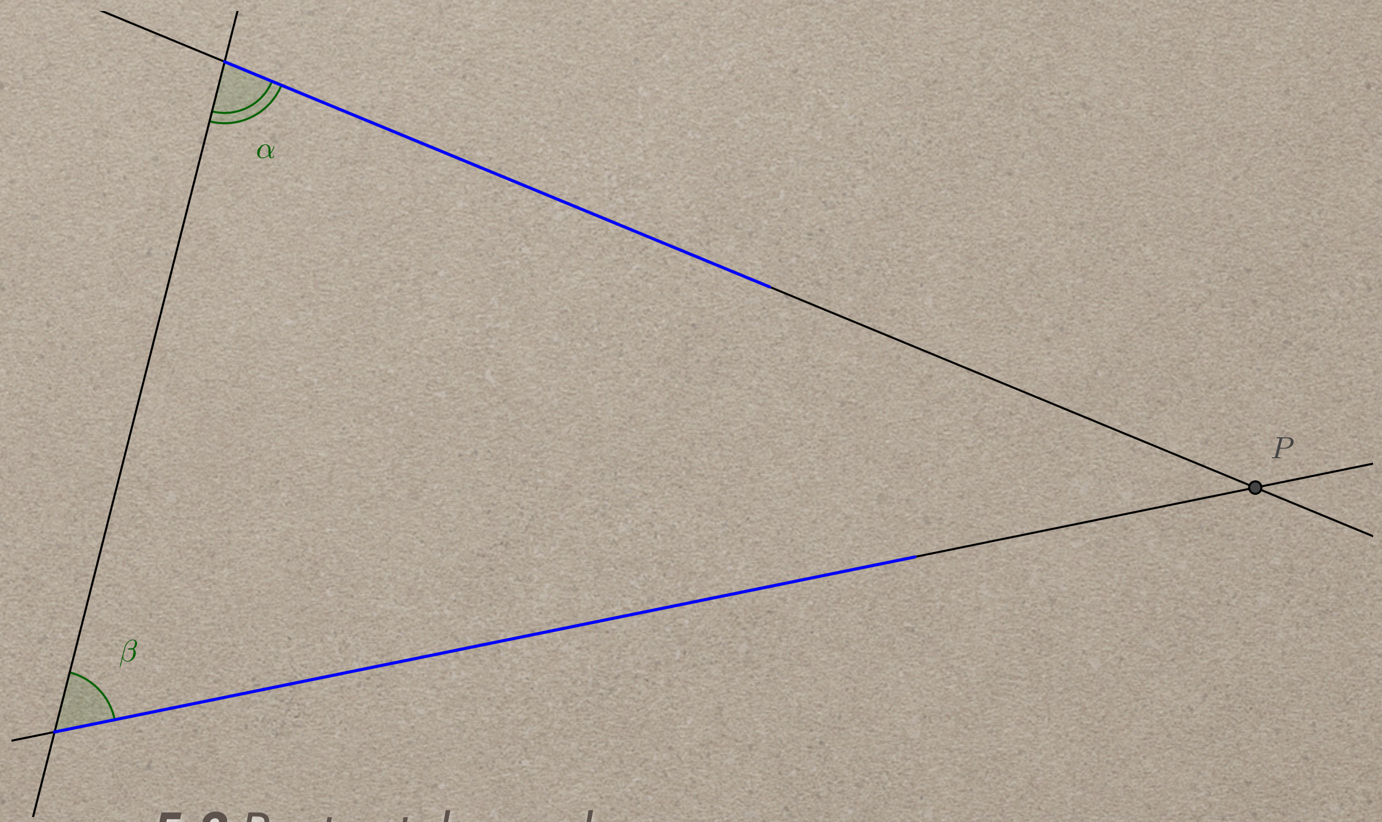
ELS ELEMENTS

V. Postulat de les paral·leles



5.1 *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*

Equivalents



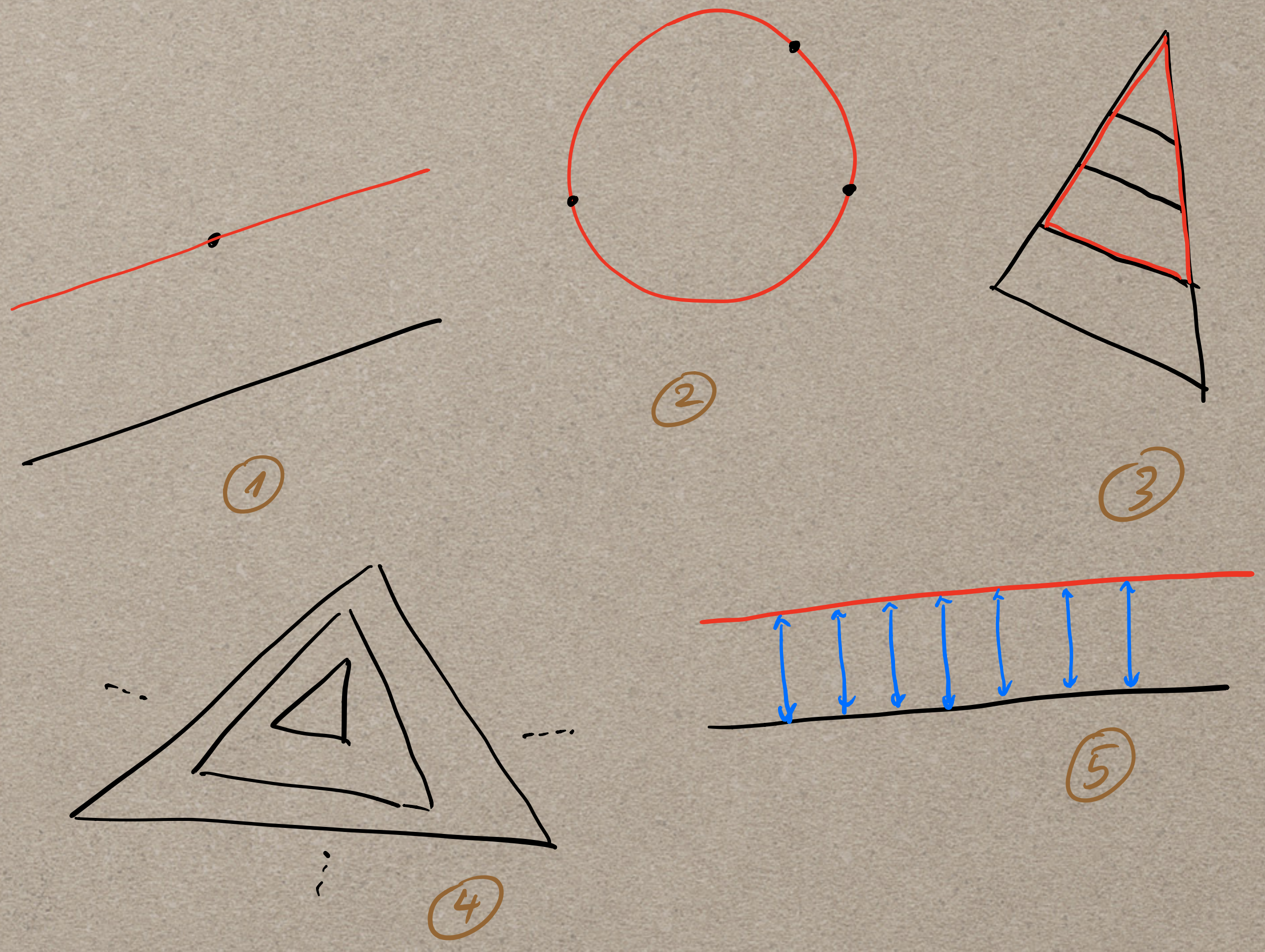
5.2 *Rectes tals que la suma dels angles interiors amb un altre recta sumen menys de dos rectes es tallen*

$$\alpha + \beta < \pi$$

ELS ELEMENTS

Enunciants equivalents del postulat V

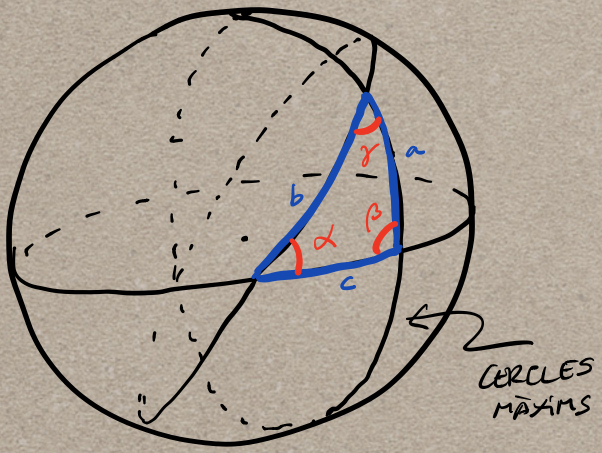
1. *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*
2. *Tres punts no alineats determinen una circumferència*
3. *Existeixen triangles semblants*
4. *Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem*
5. *Les equidistants són rectes*
6. *Els angles d'un triangle sumen dos rectes*



Geometria Absoluta: geometria sense el Vè postulat

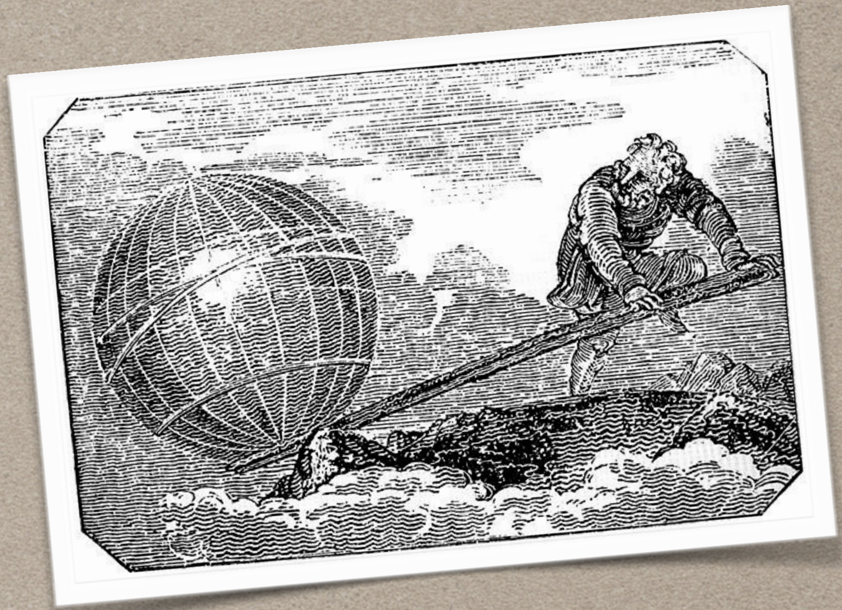
GEOMETRIES NO EUCLIDIANES

- ***Geometria esfèrica.***
  Arquímedes (287 – 212 aC)



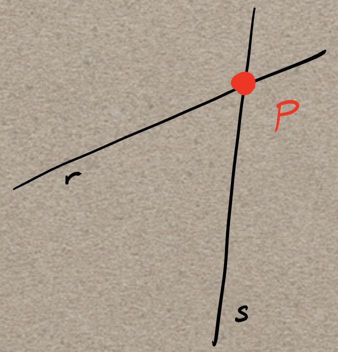
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

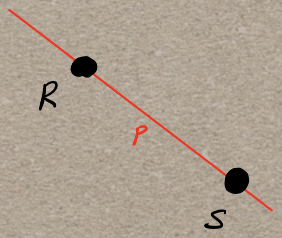
$$\text{Area} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$



- ***Geometria projectiva.***
  Albrecht Dürer (1471 – 1528)
  - *Punts diferents defineixen una única recta*
  - *Rectes diferents defineixen un únic punt*

DUALITAT





GEOMETRIES NO EUCLIDIANES

- *G. Saccheri (1667-1733).*
  Intents de provar el Vè postulat

Quadrilàter de Saccheri

(Omar Khayyan /s. XI-XII ja va treballar)

Tres hipòtesis

1. *C i D rectes (~Vè postulat)*
2. *C,D > $\pi/2$ (Hipòtesi angle **obtús**)*
3. *C,D < $\pi/2$ (Hipòtesi angle **agut**)*

2: dona lloc a contradiccions
1: equivalent a la geometria euclidiana
*3: **Consistent***

Saccheri rebutja l'hostil hipòtesi de l'angle agut perquè obté resultats que repugnen la natura de la línia recta.

GEOMETRIES NO EUCLIDIANES

J.H. Lambert *(1728 – 1777)*
*veu possible una geometria sense el cinquè postulat: M'inclino a pensar que la hipòtesi de l'angle agut és certa en alguna **esfera de radi imaginari***

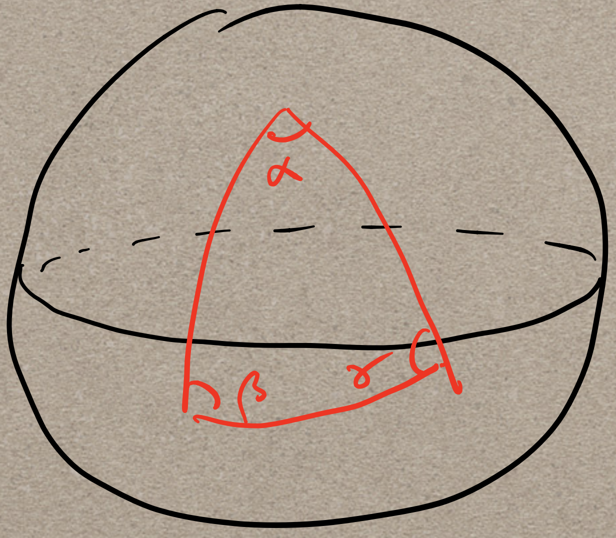
$$\text{Area} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Analogia

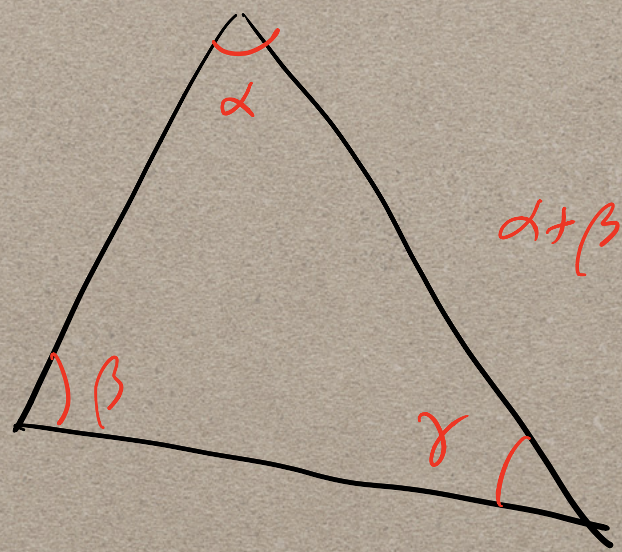
$$(R \leftrightarrow R \cdot i)$$

Analogia

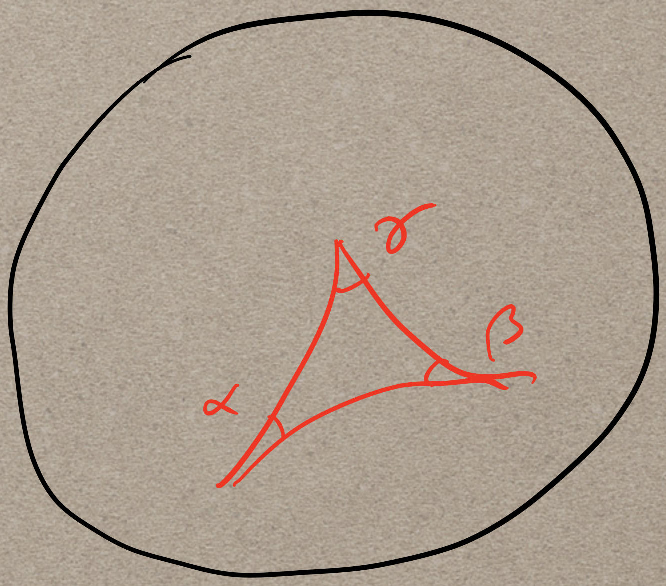
$$\text{Area} = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$



$\alpha + \beta + \gamma > \pi$



$\alpha + \beta + \gamma = \pi$



$\alpha + \beta + \gamma < \pi$

GAUSS
(1777- 1855)

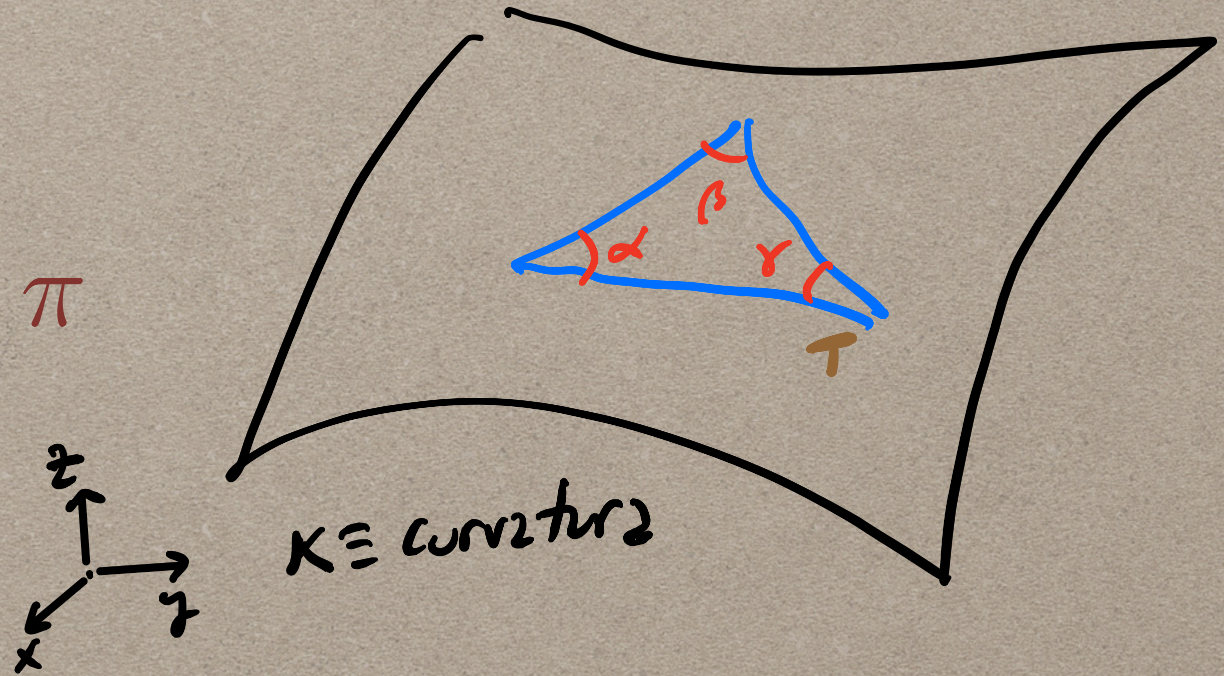
'Princep de les Matemàtiques'

- **1796**: construeix amb regle i compàs el polígon de 17 costats

- Treballs en geometria, teoria de nombres, probabilitat, electromagnetisme...

- **Teorema egregi:** la curvatura és un invariant intrínsec de les superfícies (un habitant interior la podria calcular)

$$\int_T K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$



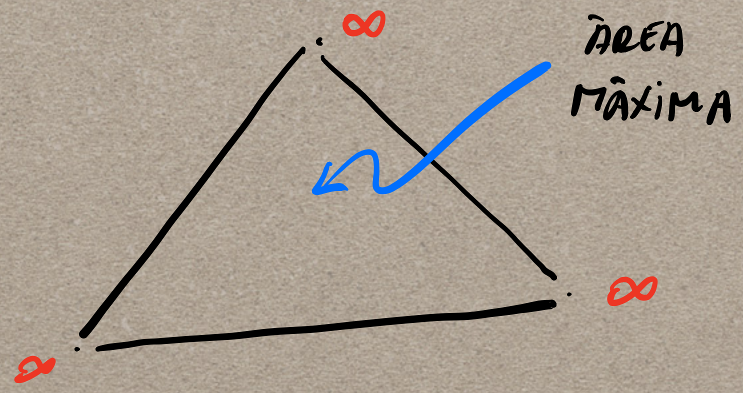
GAUSS
(1777- 1855)

Carta a Gerling 1819

El **defecte** de la suma dels angles en el triangle pla respecte de π és, per exemple, no únicament més gran quan l’àrea es fa més gran, sinó que és exactament proporcional a ella, de manera que l’àrea té una cota que no es pot mai assolir, i aquesta cota és igual a l’àrea entre tres línies rectes asimptòtiques.

Carta a Gerling 1832

Et comento que he llegit aquests dies un petit treball d’un hongarès, sobre **geometries no euclidianes**, que conté totes les meves idees i resultats, desenvolupats molt elegantment.



Carta a Gerling 1832

L’autor és un **jove oficial austríac**, fill d’un amic de la meva joventut, que vaig conèixer el 1798, amb qui havia parlat del tema, però aleshores les meves idees no havien arribat a la maduresa i formació d’ara. **Tinc aquest jove geòmetra com un dels genis més grans.**

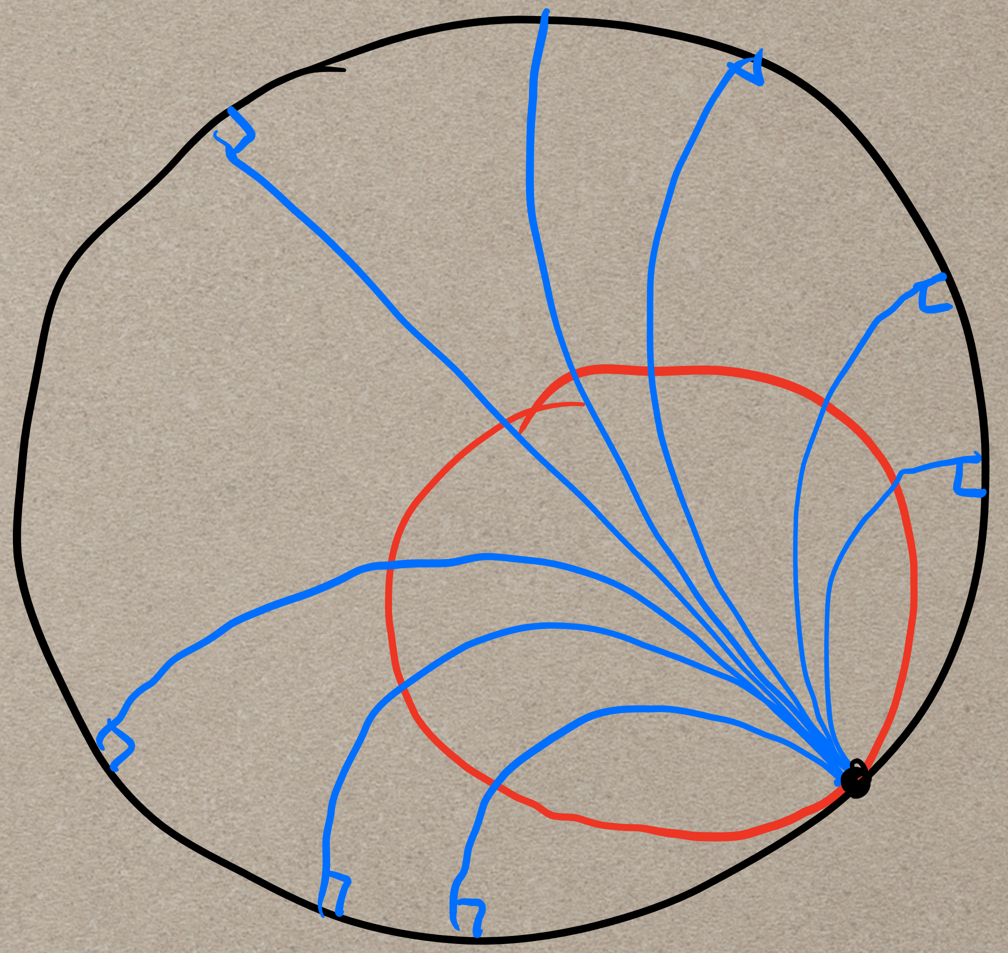
BOLYAI
(1802- 1860)

Carta del pare (1820)

Per l'amor de Deu! **Deixa les paral.leles** tranquil.les, abjura d'elles com d'una xerrada indecent, et prendran (com a mi) el teu temps, la **salut**, la **tranquil·litat** i la **felicitat** de la teva vida.

Carta al pare (1823)

He descobert coses tan superbes que jo mateix estic atònit, i significaria una vergonya eterna deixar-ho perdre per sempre; si vostè, apreciat pare, les veu, les reconeixerà; ara no puc dir més:



- Horocicle
- Rectes (paral·leles)
- Absolut (infinit).

Del no-res he creat un món nou i diferent!

LOBATXEVSKI

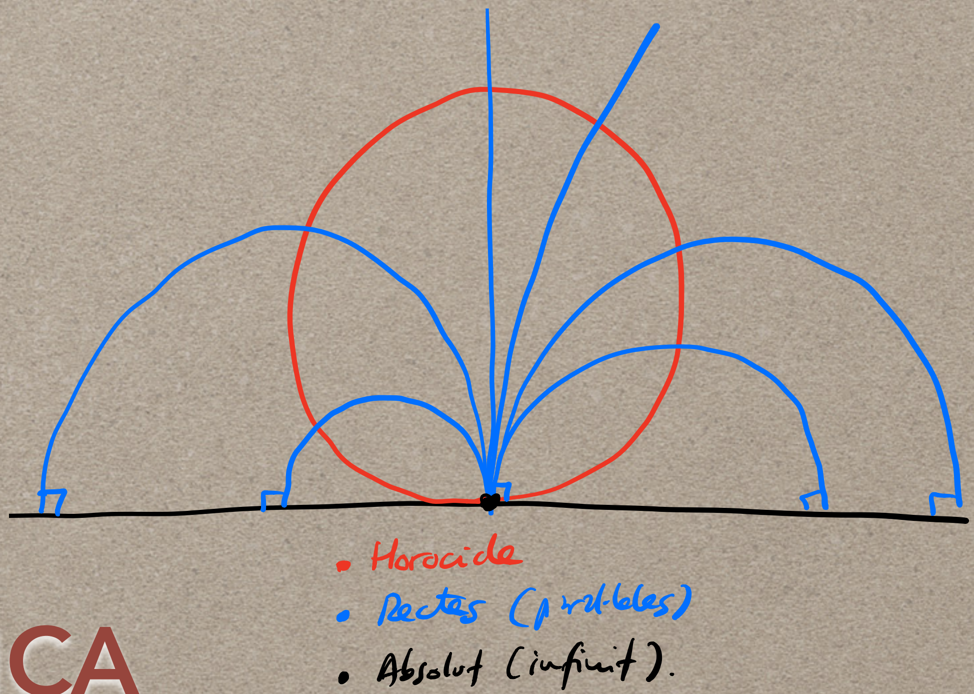
(1792- 1856)

El 23 de febrer de 1826 presenta a la Universitat de Kazan:

"Sobre els fonaments de la Geometria"

Judicis negatius a Rússia i a tota la comunitat matemàtica.

*Lobatxevski i Bolyai van mostrar que **la negació del Vè postulat era consistent***



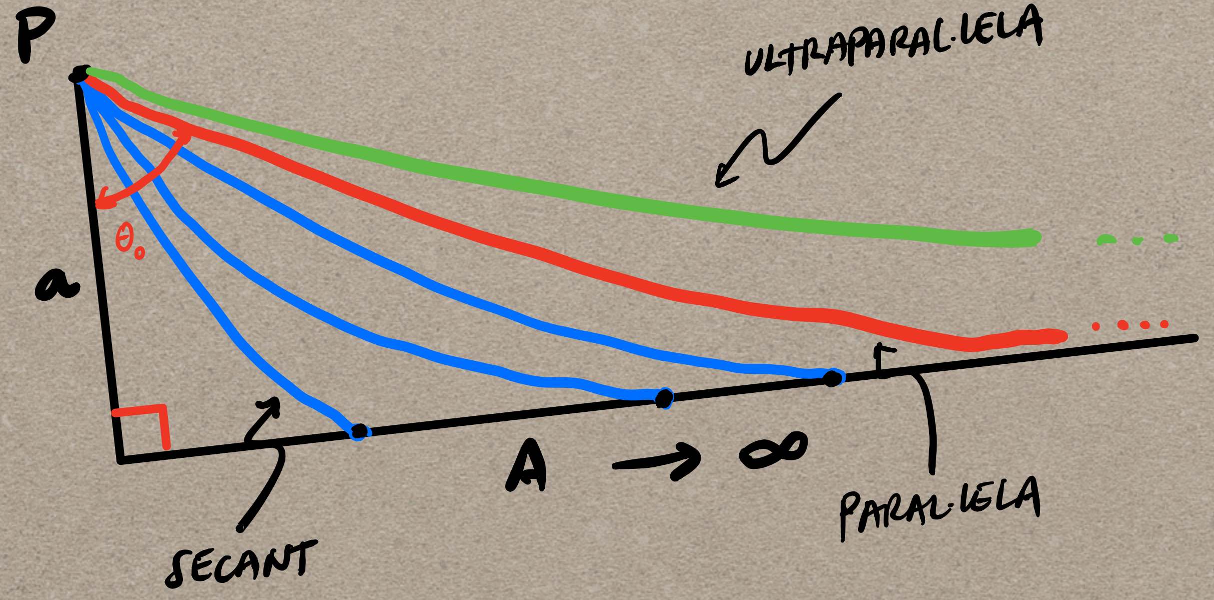
NEIX LA GEOMETRIA HIPERBÒLICA

LOBATXEVSKI

(1792- 1856)

*Va provar el mateix any 1829 que a la geometria hiperbòlica hi ha una **unitat** de **mesura natural** (no com el metro que és artificial)*

$$\Pi(a) = 2\arctan\left(e^{-a}\right)$$



Angle de paral·lelisme:

$$a = -\log \tan \frac{\theta_0}{2}$$

(per una unitat triada adequadament)

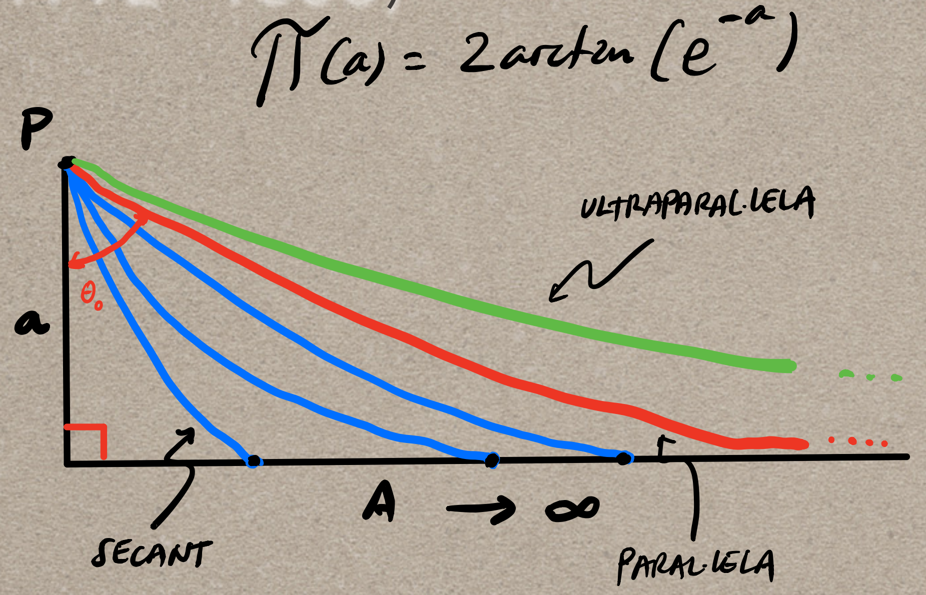
(per 'a' petit)

$$a \approx \frac{\pi}{2} - \theta_0$$

La unitat es pot triar de manera que la curvatura de l'espai sigui -1

LOBATXEVSKI

(1792- 1856)



A 1830 Lobatxevski volia determinar si la seva **geometria imaginària** podia ser **model** del mon real.

- *Si l'univers es no euclidià el sistema solar és molt petit*
- *Si **a** és el radi de l'òrbita de la terra al voltant del sol*

$$\pi - 2\theta \approx 6 \times 10^{-6} \text{ radians}$$

(el mètode de parl·laxi encara no refinat, Bessel a 1838)

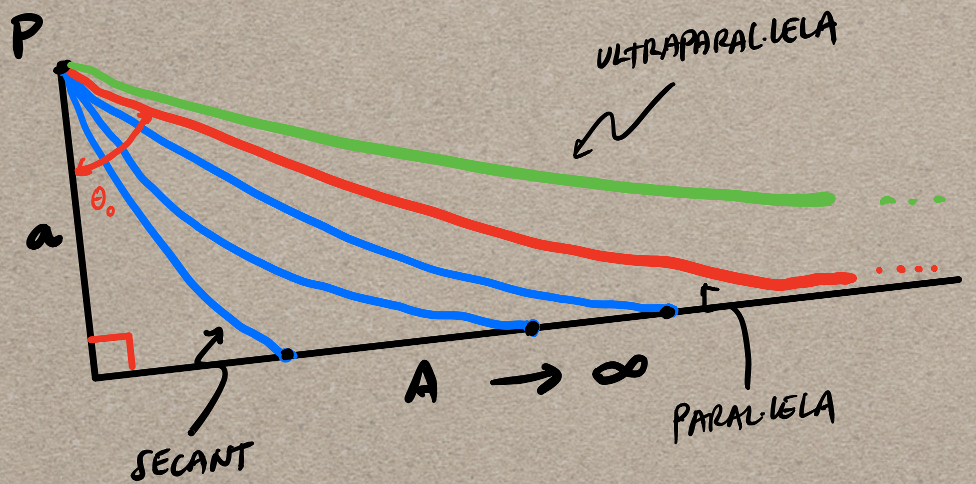
*(Lobatxevski arribà més lluny que Bolyai, aquest últim va ser **desanimat per Gauss**)*

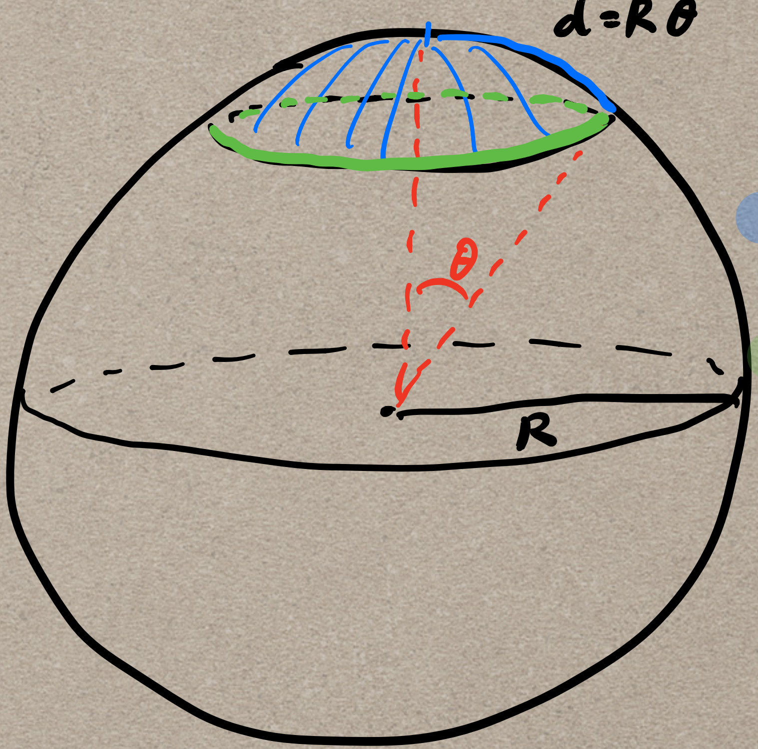
Molts càlculs d'àrees i volums, fórmules molt valuoses

LOBATXEVSKI

(1792- 1856)

$$\Pi(a) = 2\arctan\left(e^{-a}\right)$$





$$A = \frac{2\pi}{K}\left(1-\cos(\sqrt{K}\,d)\right)$$

$$L = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}\,d)$$

$$K = \frac{1}{R^2}$$

Per l'analogia

$(R \leftrightarrow R \cdot i)$

$$K = -\frac{1}{R^2} = -k^2$$

$$A = \frac{2\pi}{k^2}(\cosh(k\,d) - 1)$$

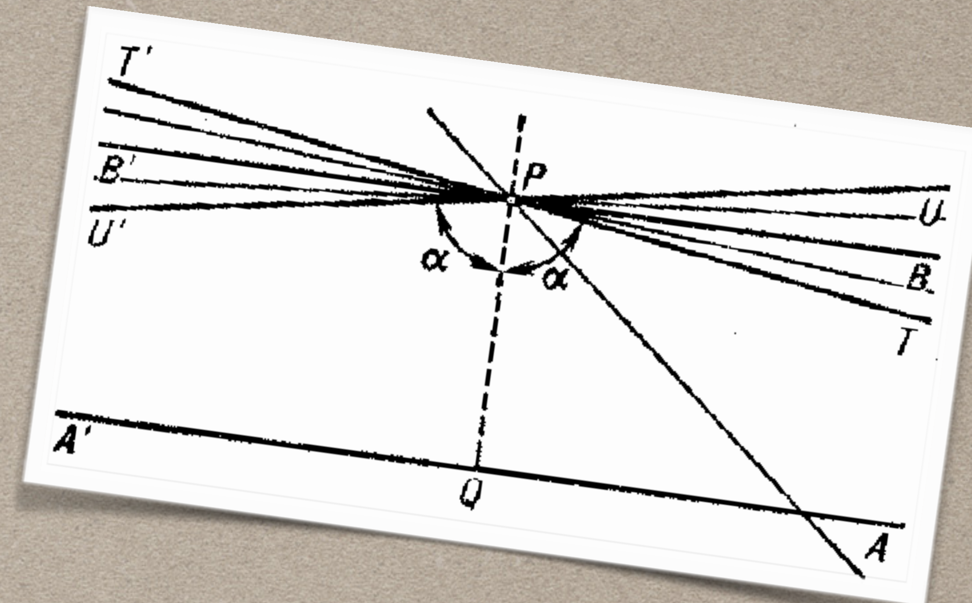
$$L = \frac{2\pi}{k}\sinh(k\,d)$$

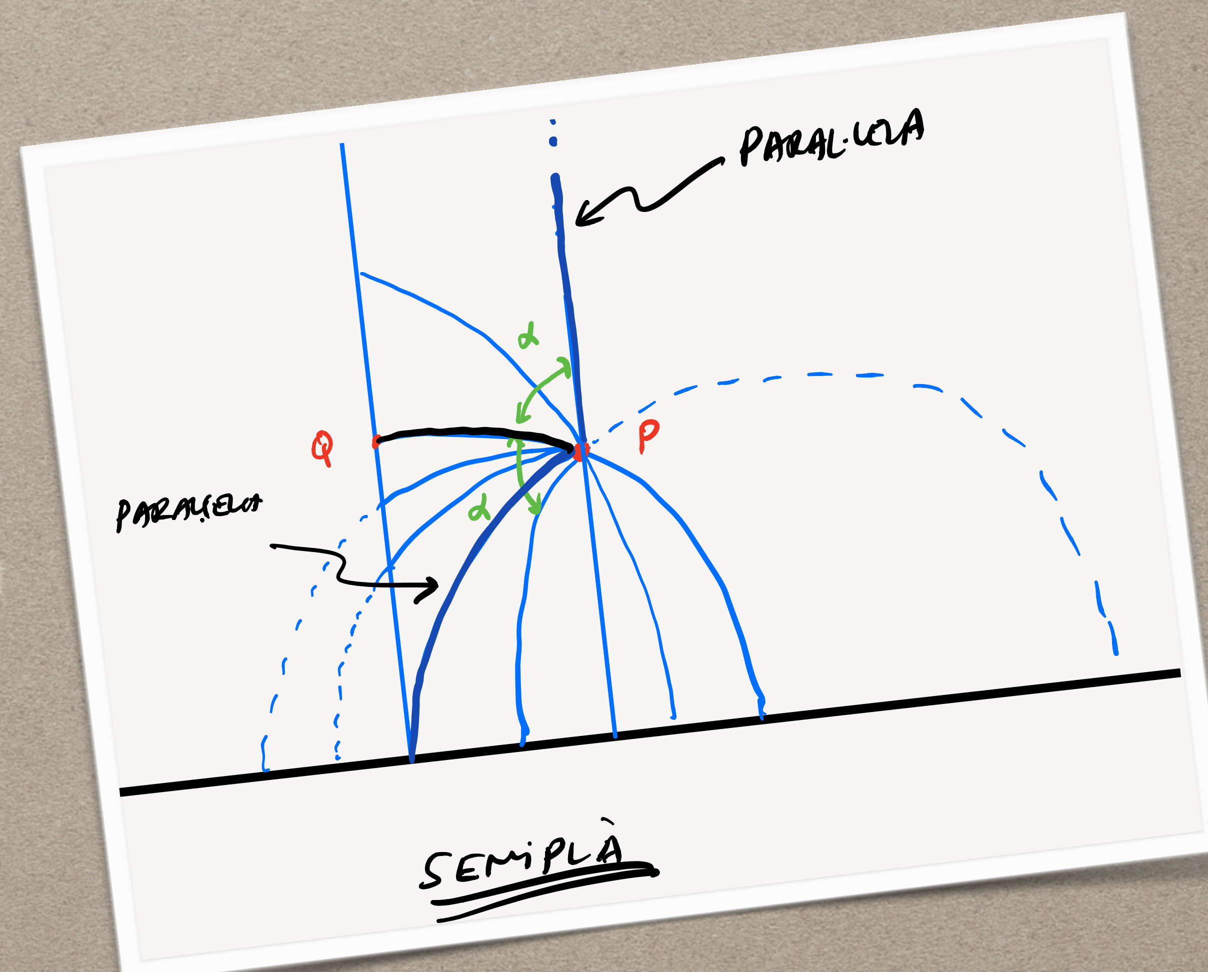
$$k^2 = \frac{L^2 - 4\pi A}{A^2}$$

A partir del cercle podem trobar la curvatura de l'espai

MODELS

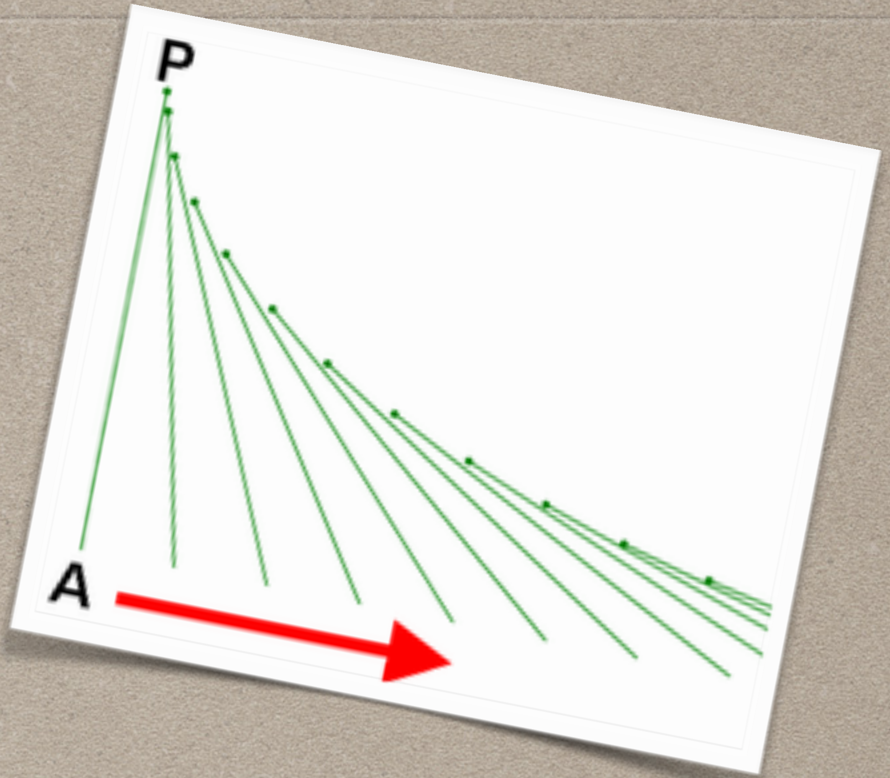
- Després de Bolyai i Lobatxevski 40 anys en el '**llimb**'
- Manca de models. Bolyai i Lobatxevski treball '**sintètic**' a partir dels axiomes.
- Calia lligar la nova geometria amb els principals treballs de l'època en **Geometria Diferencial** (*Gauss i Riemann*)

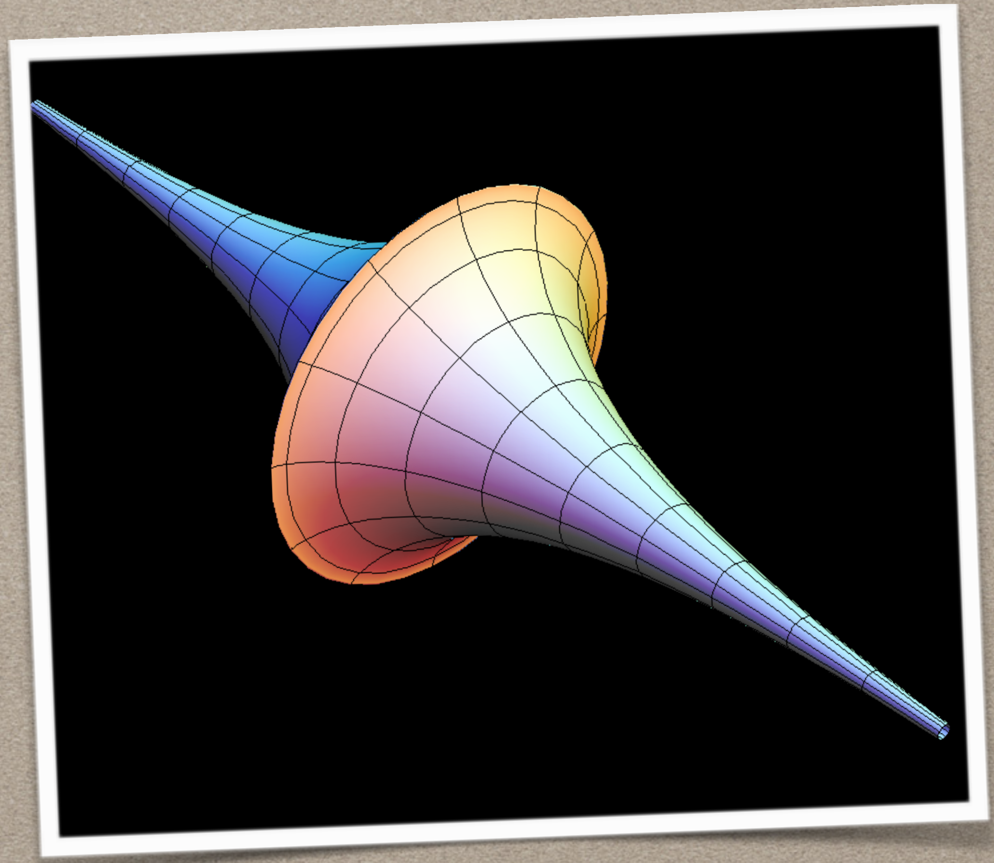




MODELS

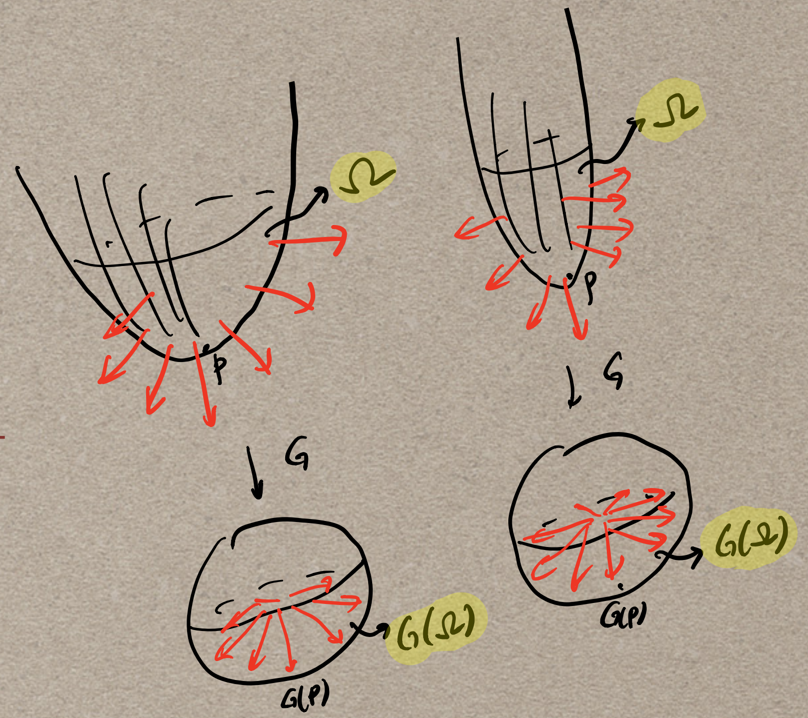
- **Beltrami** (1868) va considerar els treballs de Gauss i Riemann.
- Beltrami va veure la geometria hiperbòlica com la del espais de **curvatura constant negativa**.
- **Pseudoesfera (Minding)**, esfera imaginària de curvatura $-1/R^2$.
- La pseudoesfera és només una **part del pla hiperbòlic**.
- En els seus assaigs Beltrami va donar **models** (superfícies abstractes)
- Va veure que es **complien** els postulats 1-4.



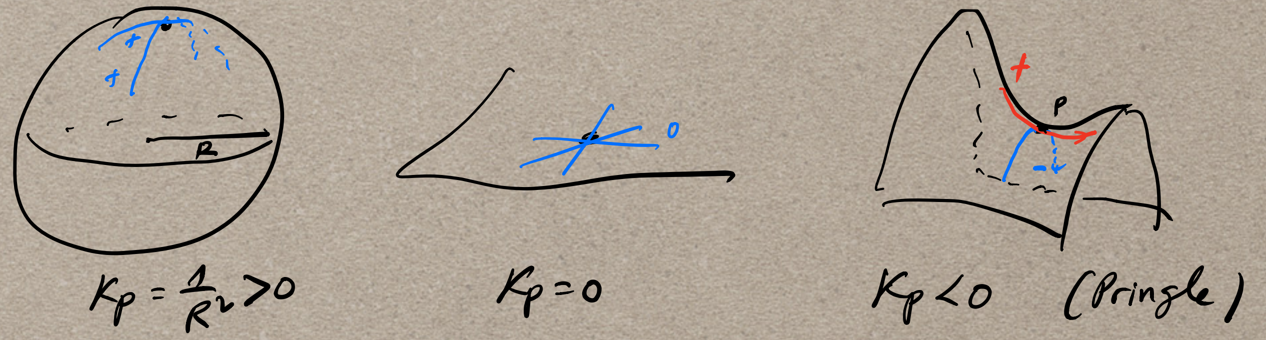


MODELS

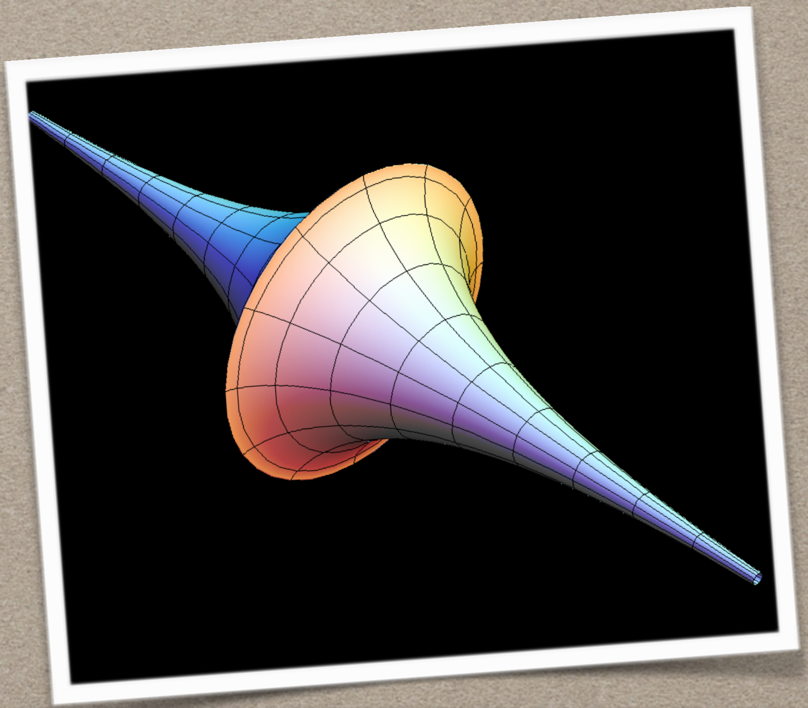
- **Curvatura** de Gauss $$K_p = \lim \frac{A(G(\Omega))}{A(\Omega)}$$



- **Esfera** de radi R: curvatura constant $1/R^2$
- **Sella**: curvatura negativa



- **Pseudosfera**: curvatura constant negativa
- Pseudosfera: no **completa**

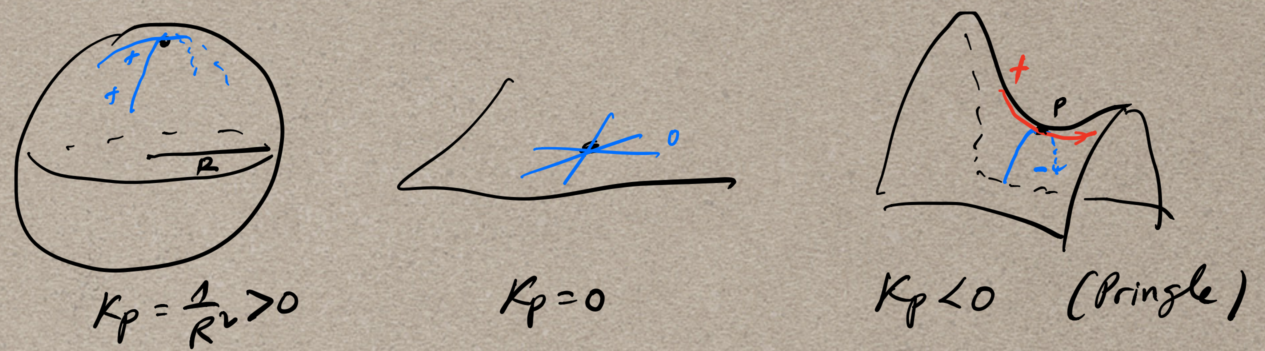


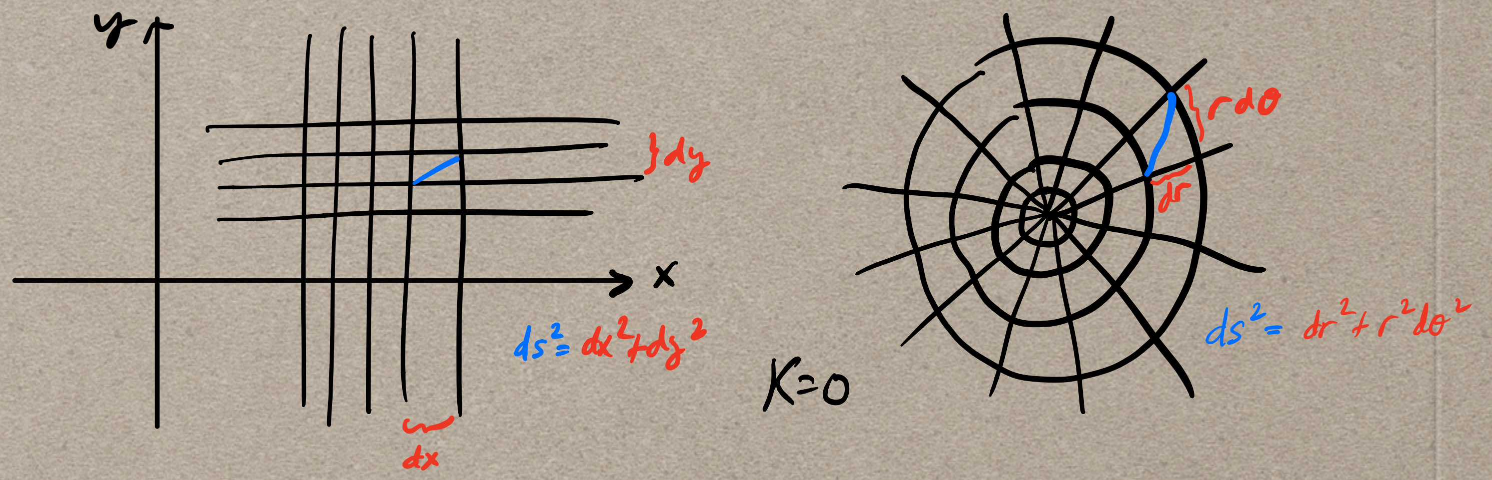
- **Element de longitud**

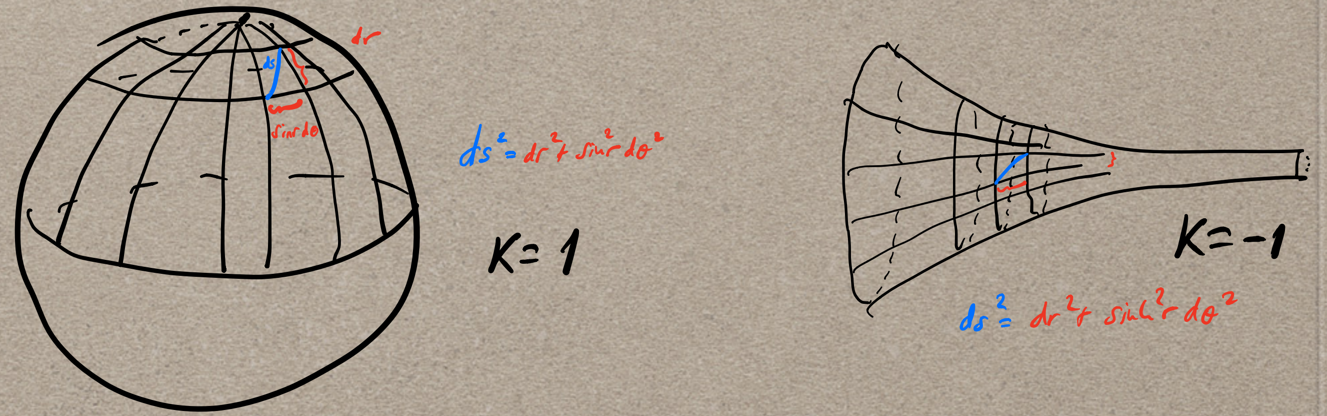
$$ds^2 = a\,du^2 + 2c\,du\,dv + b\,dv^2$$

MODELS

- **Teorema egregi:** la curvatura és un invariant **intrínsec** de les superfícies (un habitant interior la prodria calcular sense mirar fora)







$$K = 0: \quad ds^2 = dr^2 + r^2\ d\theta^2$$

$$K = +1: \quad ds^2 = dr^2 + \sin^2(r)\ d\theta^2$$

$$K = -1: \quad ds^2 = dr^2 + \sinh^2(r)\ d\theta^2$$

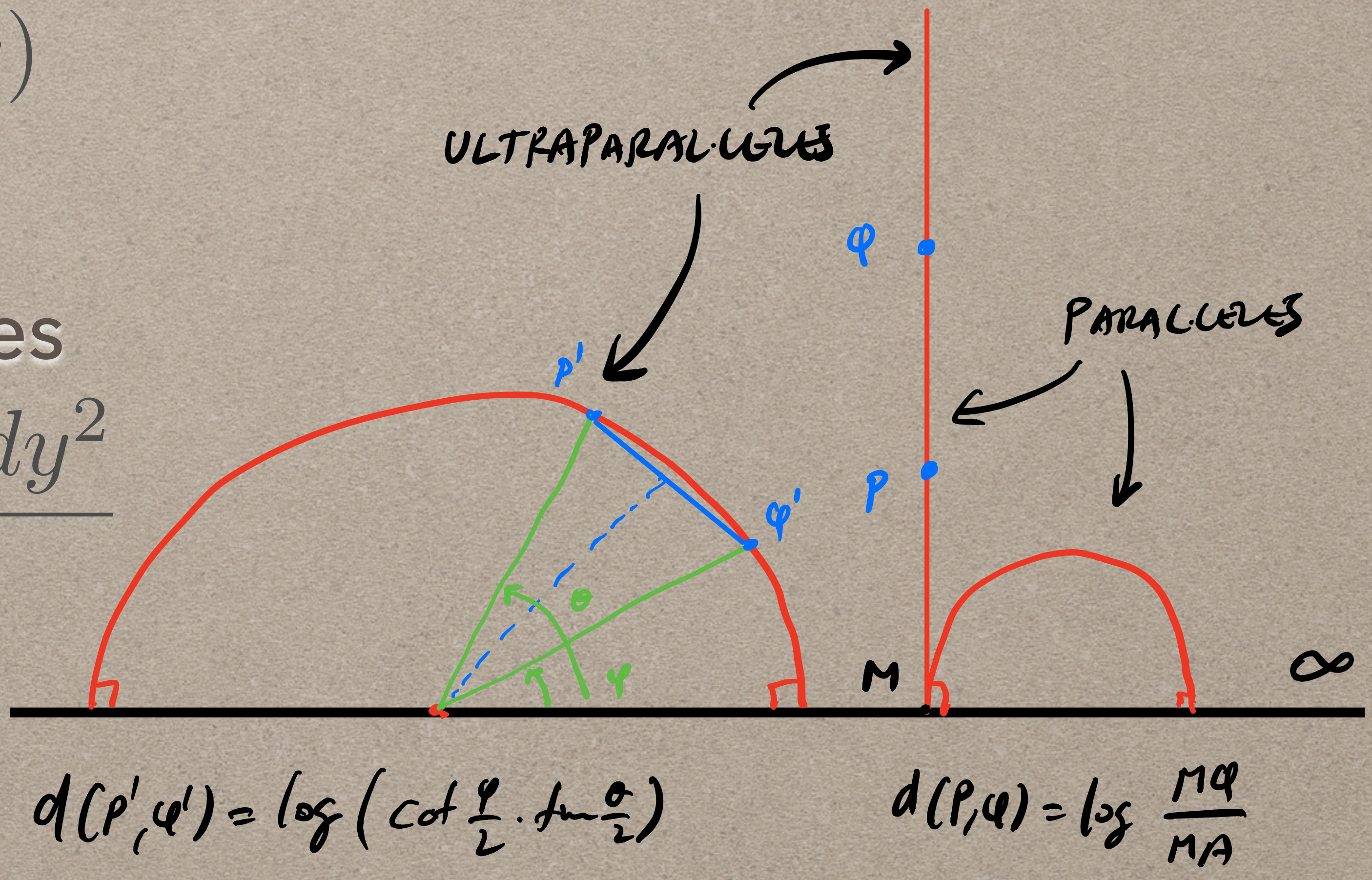
***Element de longitud**.*

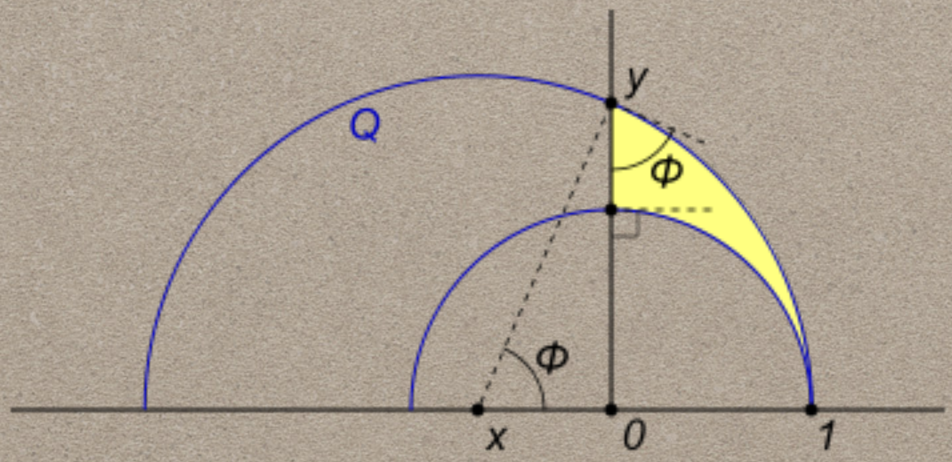
Regle per mesurar: longitud i angles.

Determina la curvatura de l'espai

EL SEMIPLA

- **Punts**: $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$
- **Rectes**: $x = x_0, C(x_0, r)$
- **Moviments**: inversions rerspecte circumferències
- **Mètrica**: $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$



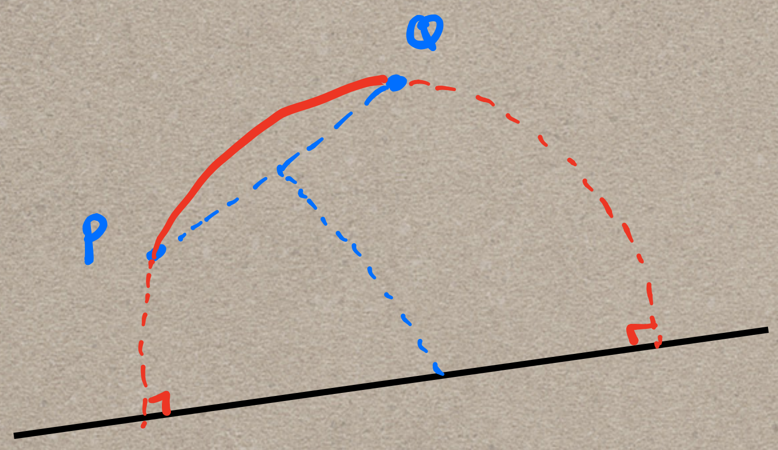


Angle de paral·lelisme

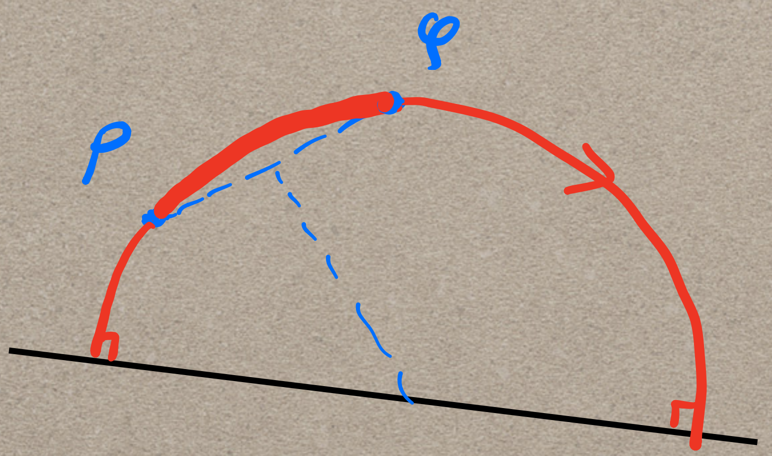
$2\arctan(e^{-a})$

EL SEMIPLA

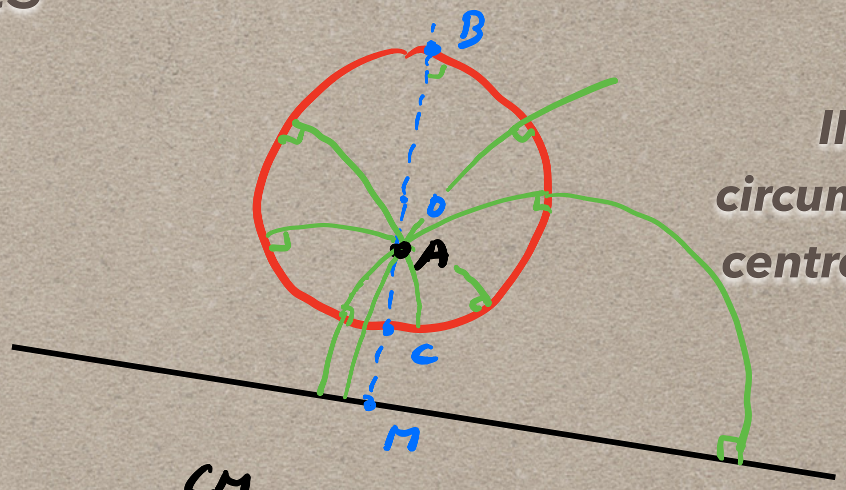
Es compleixen els postulats



I. Per dos punts passa una única recta

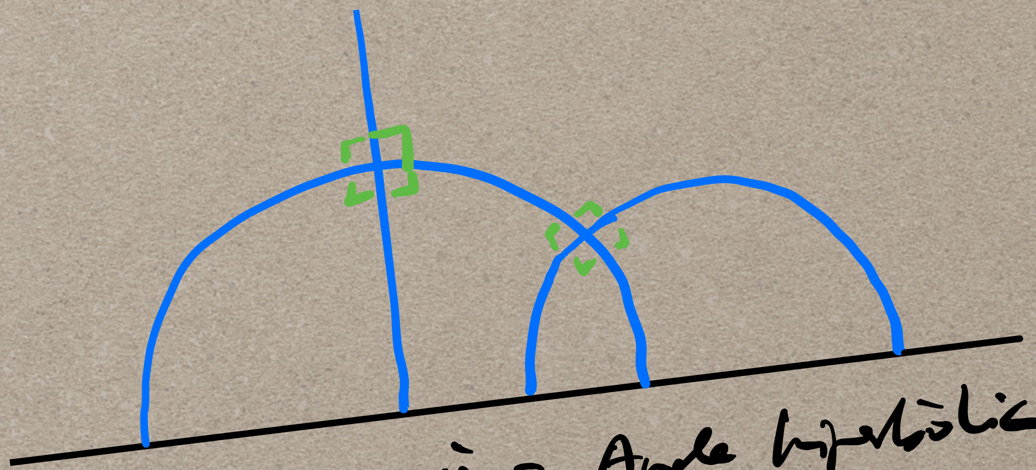


II. Un segment pot ser allargat indefinidament mitjançant una recta



$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM} \text{ (eucl.)}$$

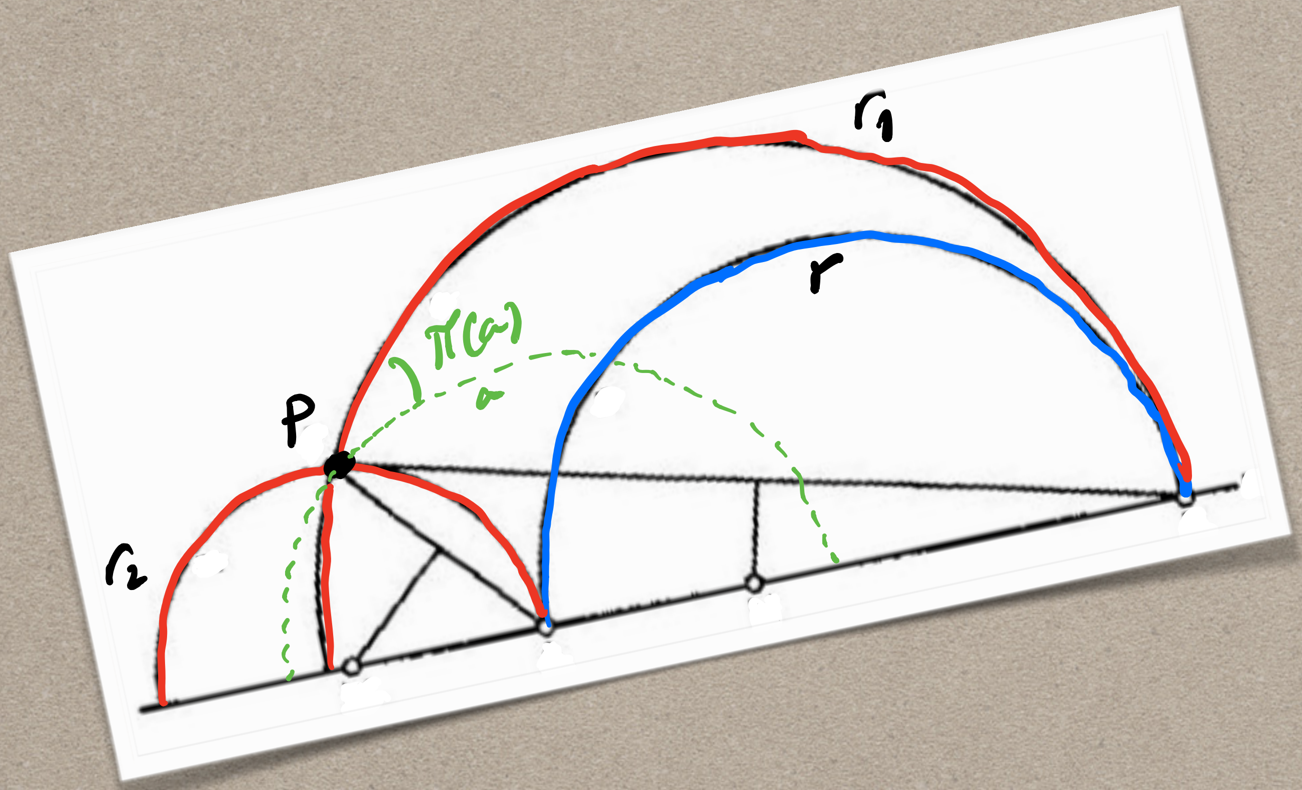
III. Existeix circumferència amb centre i radi donats

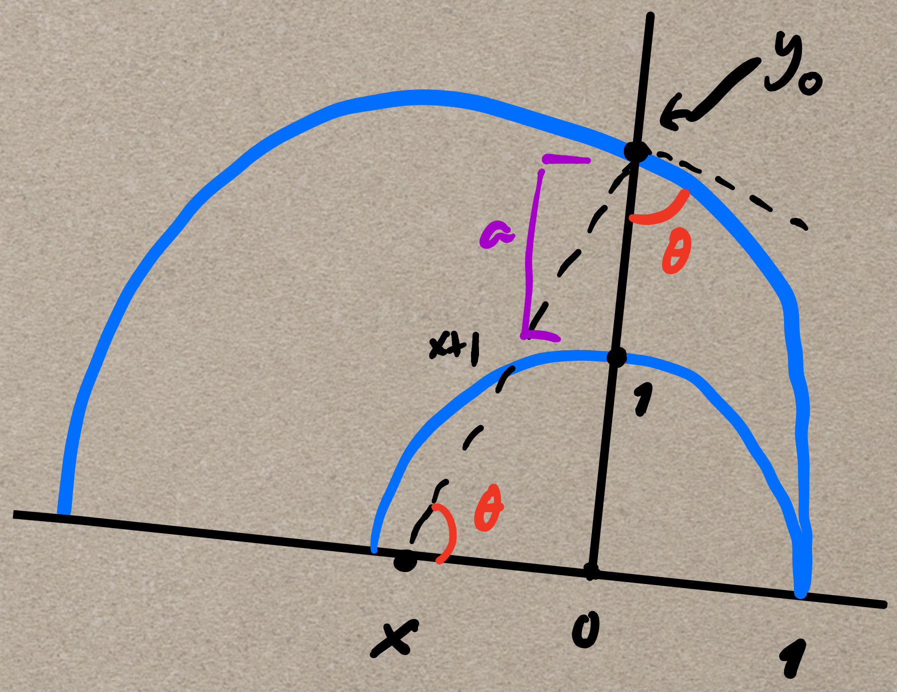


Angle euclidià = Angle hiperbòlic

IV. Tots els angles rectes són iguals

EL SEMIPLA





Càlcul de l'angle de paral·lelisme

$$\left.\begin{array}{l} a = \ln(y_0) \\ \tan\theta = \dfrac{y_0}{x} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 2\arctan\left(e^{-a}\right)}$$

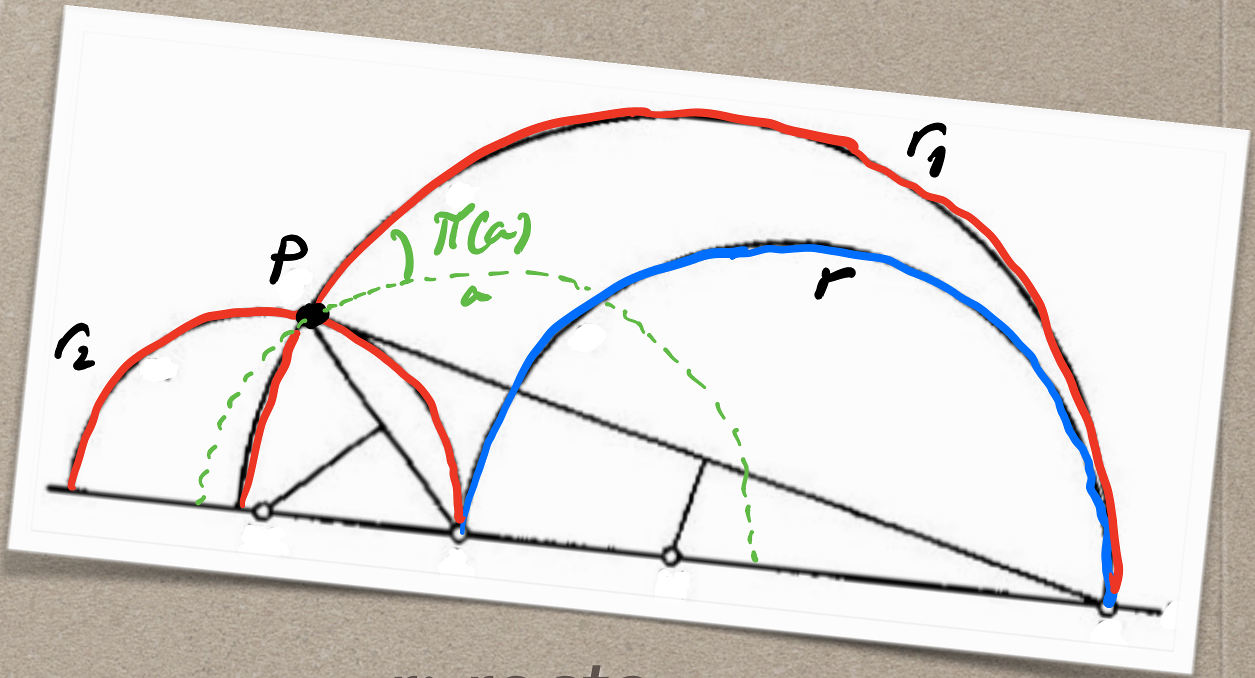
$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad a = d(1, y_0) = \int_1^{y_0} ds = \int_1^{y_0} \frac{dy}{y} = \ln(y_0)$$

EL SEMIPLA

Enunciats equivalents del postulat V

No es compleixen a la Geometria Hiperbòlica

1. ***Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela***
2. *Tres punts no alineats determinen una circumferència*
3. *Existeixen triangles semblants*
4. *Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem*
5. *Les equidistants són rectes*
6. *Els angles d'un triangle sumen tres rectes*



r: recta

P: punt exterior

r_1, r_2: parel·leles

$(K = -1/R^2)$

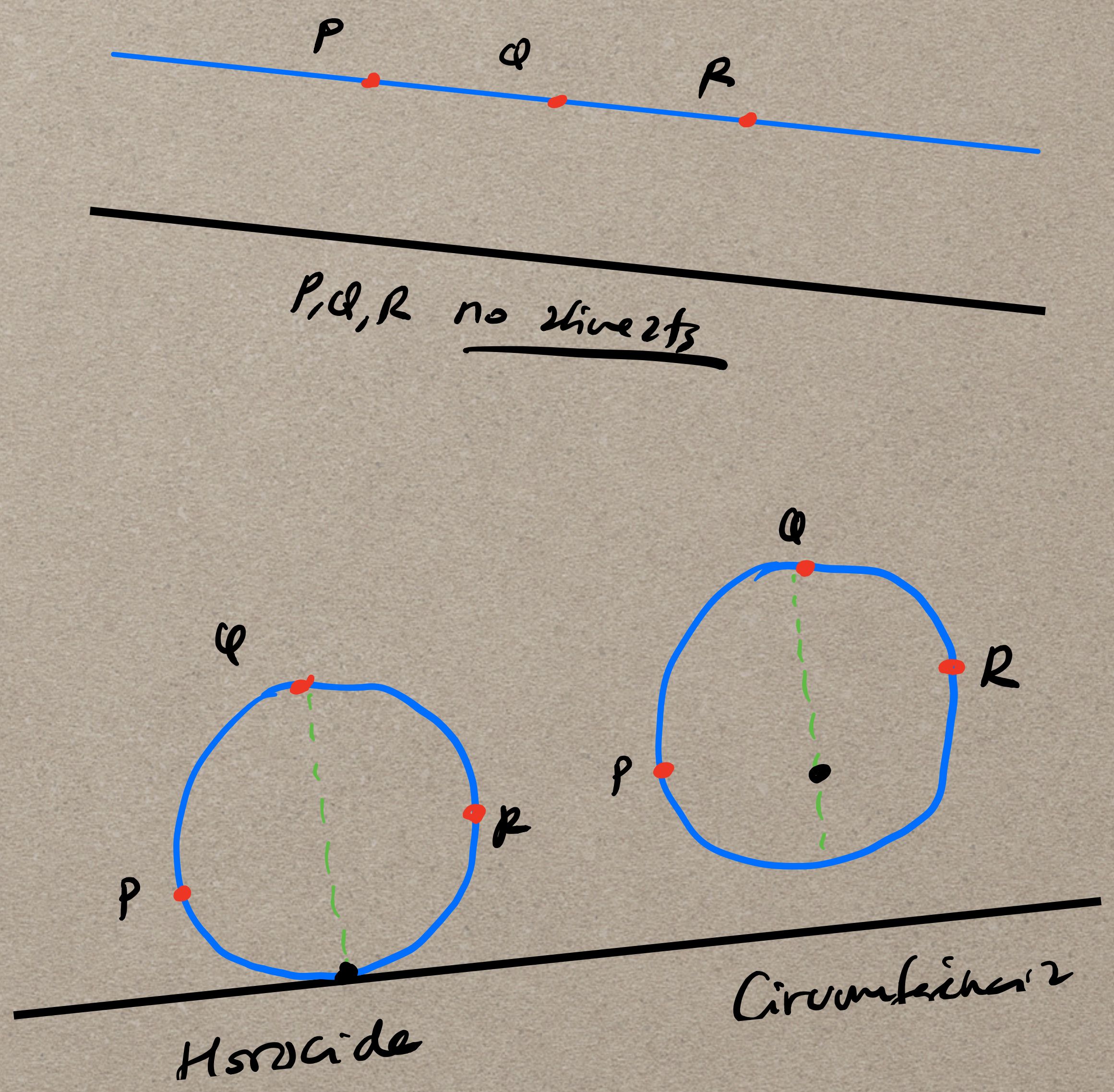
$$\Pi(a) = 2\arctan(e^{-a/R})$$

EL SEMIPLA

Enunciants equivalents del postulat V

No es compleixen a la Geometria Hiperbòlica

1. *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*
2. ***Tres punts no alineats determinen una circumferència***
3. *Existeixen triangles semblants*
4. *Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem*
5. *Les equidistants són rectes*
6. *Els angles d'un triangle sumen tres rectes*

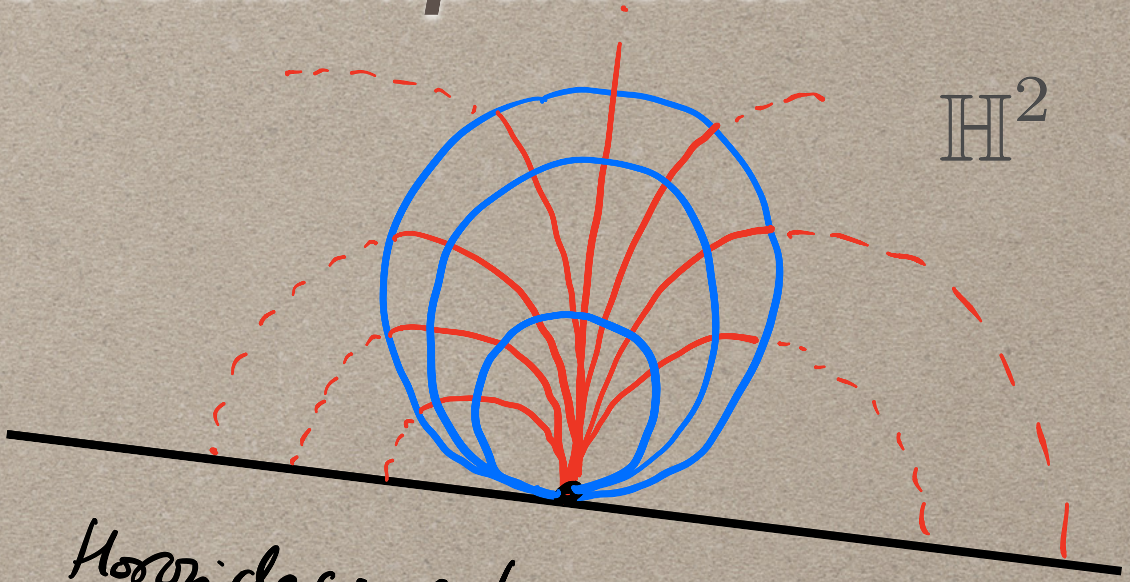


EL SEMIPLA

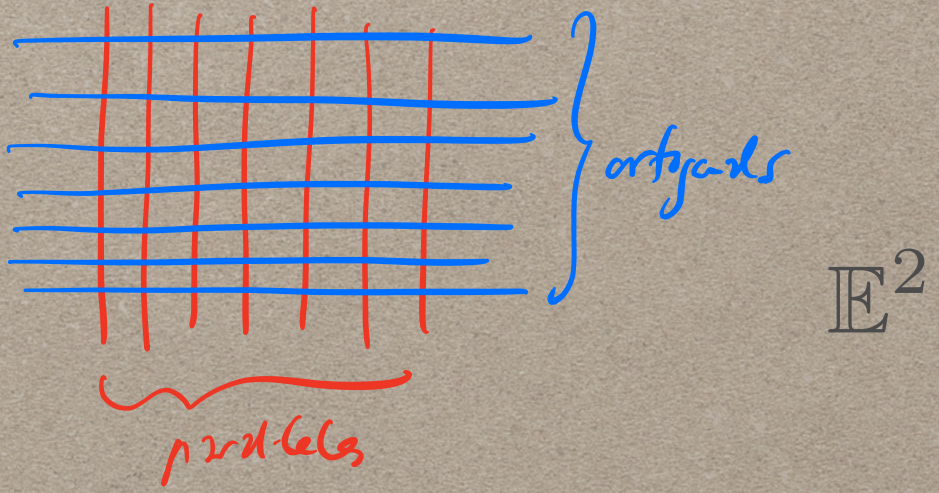
Enunciants equivalents del postulat V

No es compleixen a la Geometria Hiperbòlica

1. *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*
2. ***Tres punts no alineats determinen una circumferència***
3. *Existeixen triangles semblants*
4. *Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem*
5. *Les equidistants són rectes*
6. *Els angles d'un triangle sumen tres rectes*



Horocicles: ortogonals a una família de paral·leles

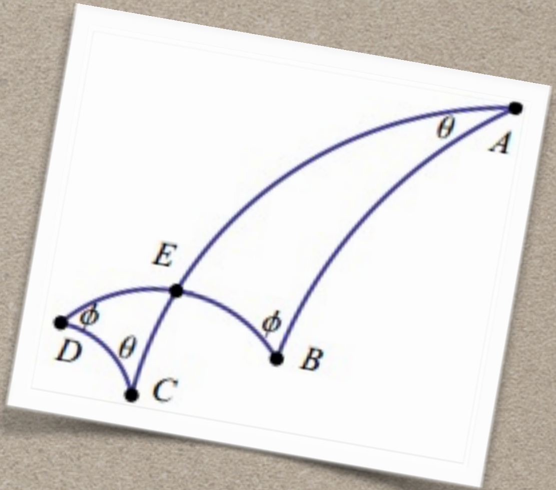


EL SEMIPLA

Enunciants equivalents del postulat V

No es compleixen a la Geometria Hiperbòlica

1. *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*
2. *Tres punts no alineats determinen una circumferència*
3. ***Existeixen triangles semblants***
4. ***Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem***
5. *Les equidistants són rectes*
6. *Els angles d'un triangle sumen tres rectes*

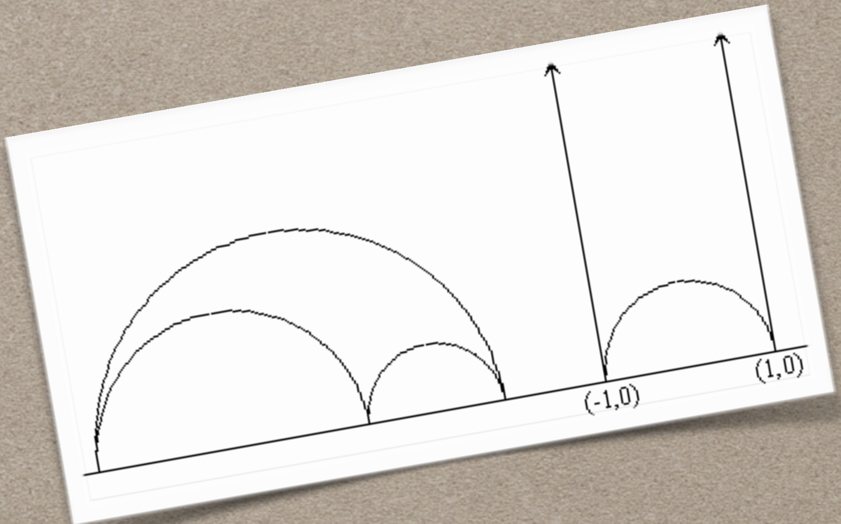


*Dos triangles amb angles corresponents iguals són congruents (**tots els triangles similars són congruents**).*

*Triangles **ideals***

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$A = \pi$$

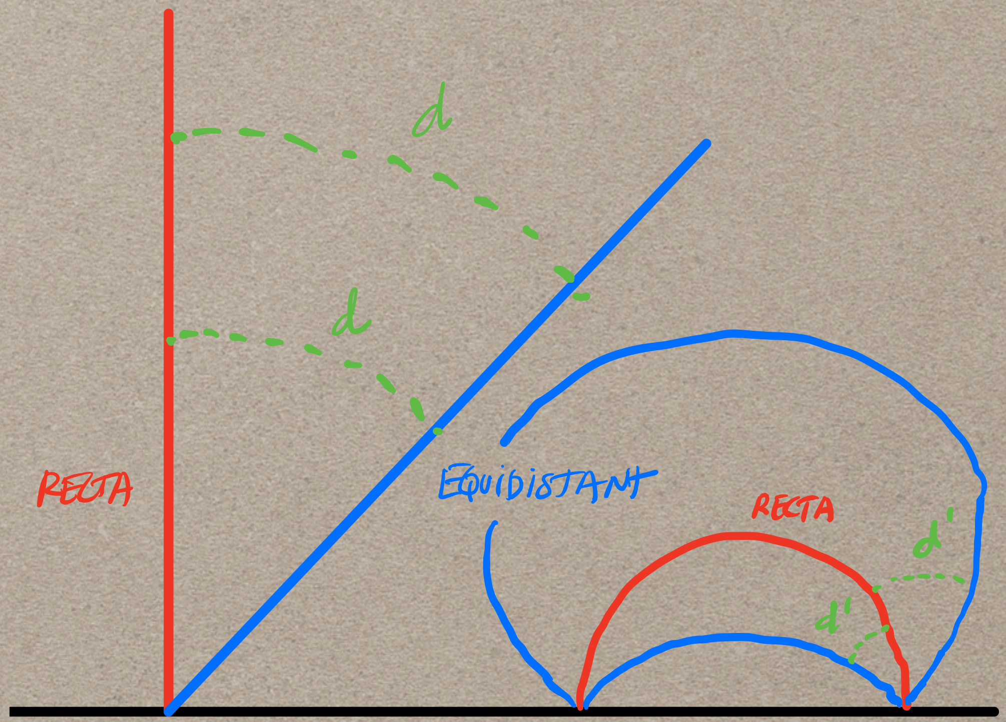


EL SEMIPLA

Enunciants equivalents del postulat V

No es compleixen a la Geometria Hiperbòlica

1. *Per un punt exterior a una recta passa una única paral·lela*
2. *Tres punts no alineats determinen una circumferència*
3. *Existeixen triangles semblants*
4. *Hi ha triangles d'àrea tan gran com vulguem*
5. ***Les equidistants són rectes***
6. ***Els angles d'un triangle sumen tres rectes***



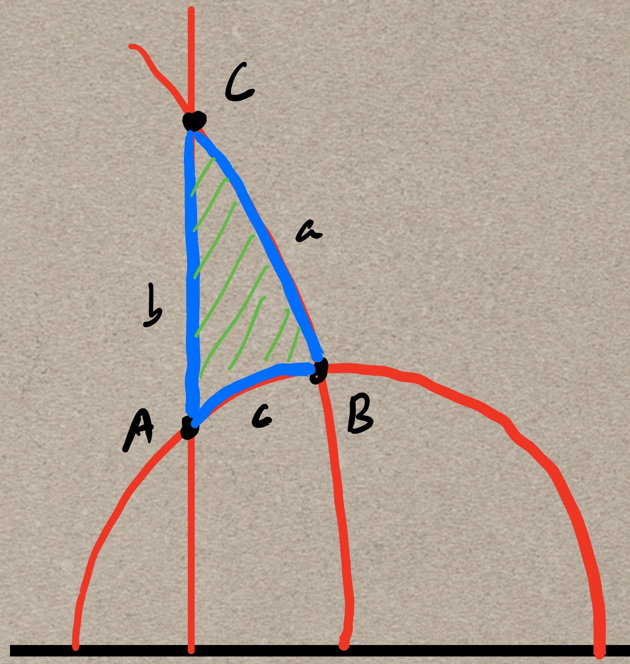
$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

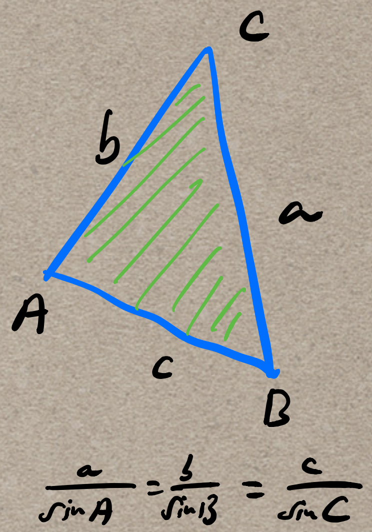
i $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

EL SEMIPLA

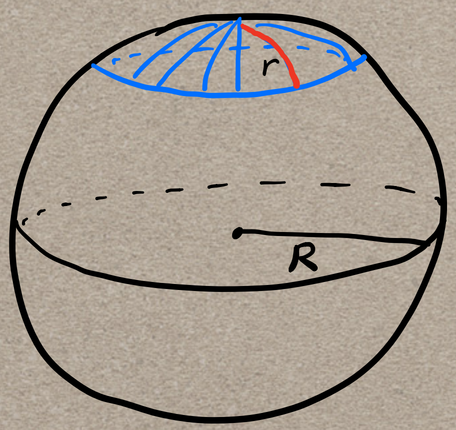
Trigonometria hiperbòlica

- Teorema dels ***sinus***
- Teorema de ***Pitàgores***
- ***Longitud*** *circumferència*
- ***Àrea*** *disc*

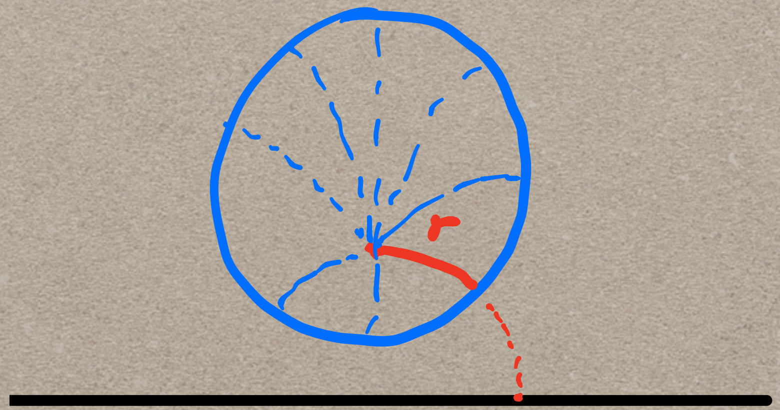




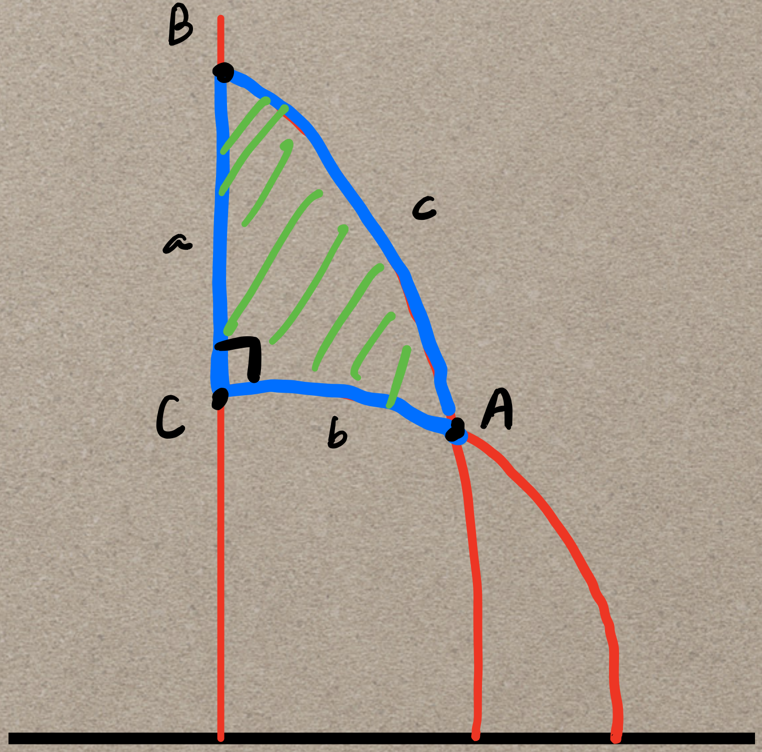
$$\frac{\sinh(a)}{\sin(A)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(B)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(C)}$$



$$L = 2\pi \sin(r)$$
$$A = 2\pi(1 - \cos(r))$$
$$(R = 1)$$



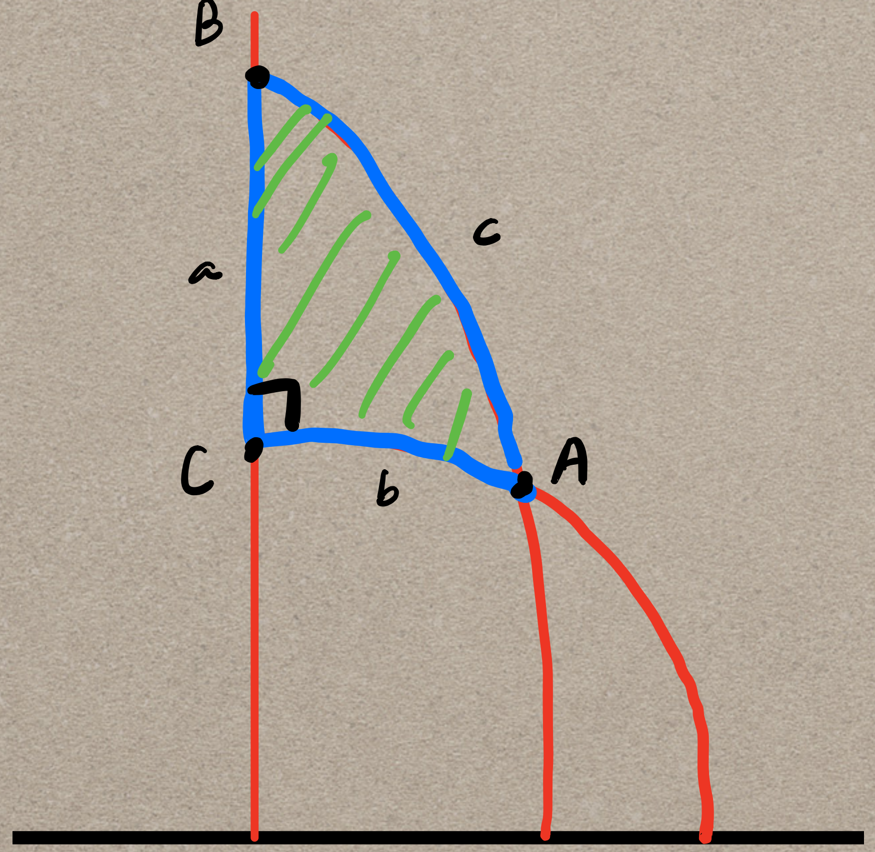
$$L = 2\pi \sinh(r)$$
$$A = 2\pi(\cosh(r) - 1)$$



$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b)$$

EL SEMIPLA

Trigonometria hiperbòlica



$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cos(ix) \qquad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \frac{1}{i}\sin(ix)$$

Aproximació polinòmica:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$2\cosh x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots =$$

$$= 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots\right)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cosh a \approx 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \dots$$

$$\cosh b \cdot \cosh c \approx \left(1 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \dots\right)\left(1 + \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{4} + \dots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4} + \dots\right)$$

$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c \Rightarrow$ (PER a, b, c petits)

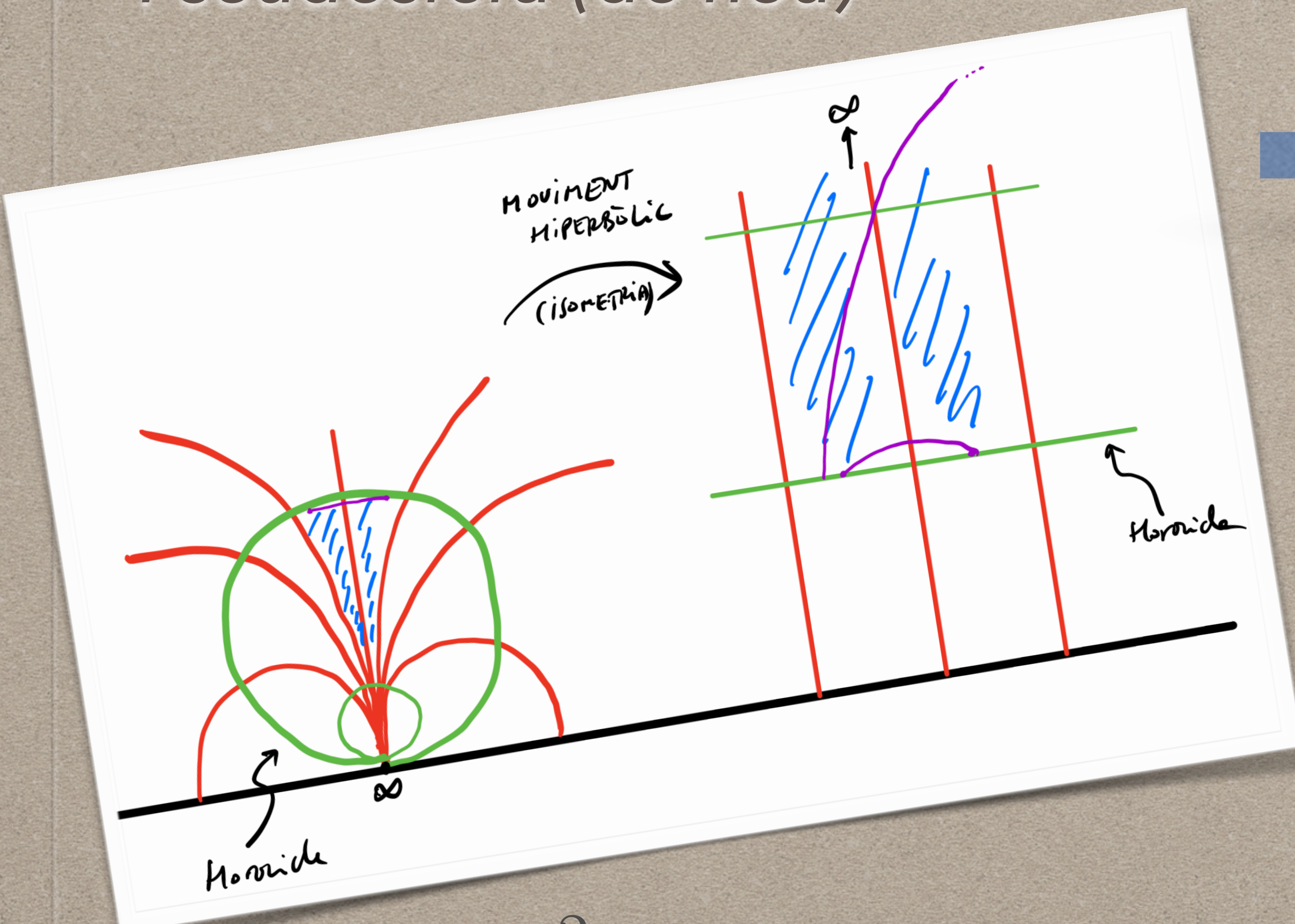
Geometria localment euclidiana

$$\boxed{a^2 \approx b^2 + c^2}$$

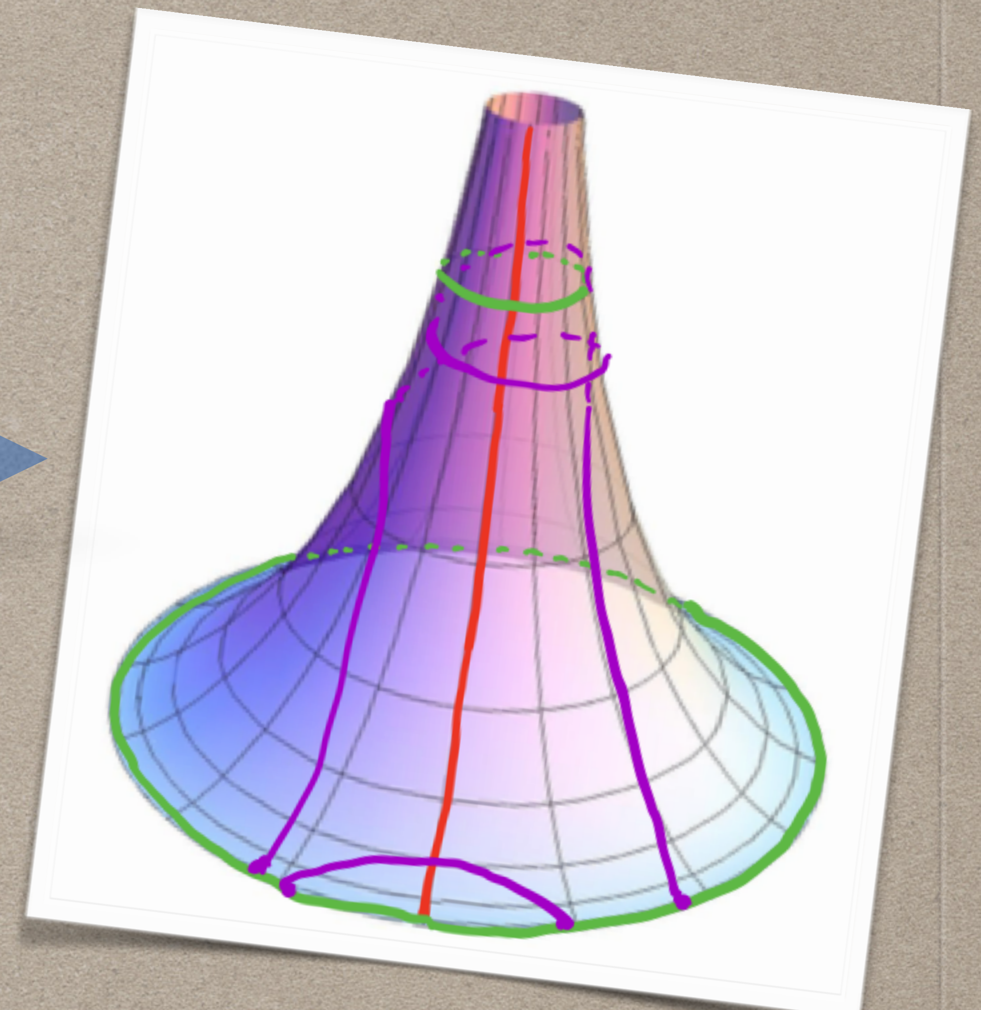
PITÀGORES

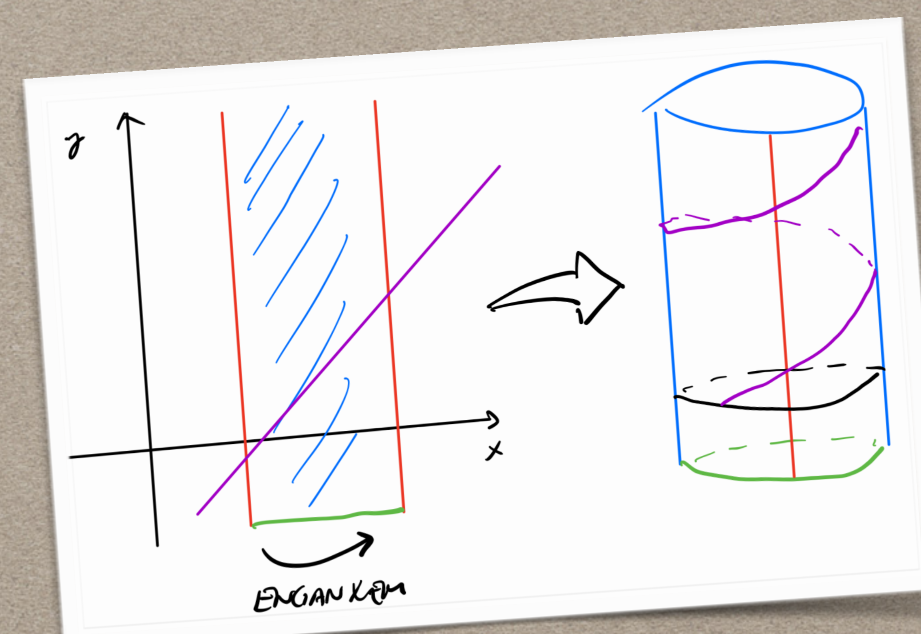
EL SEMIPLA

Pseudosfera (de nou)



$\mathbb{H}^2$



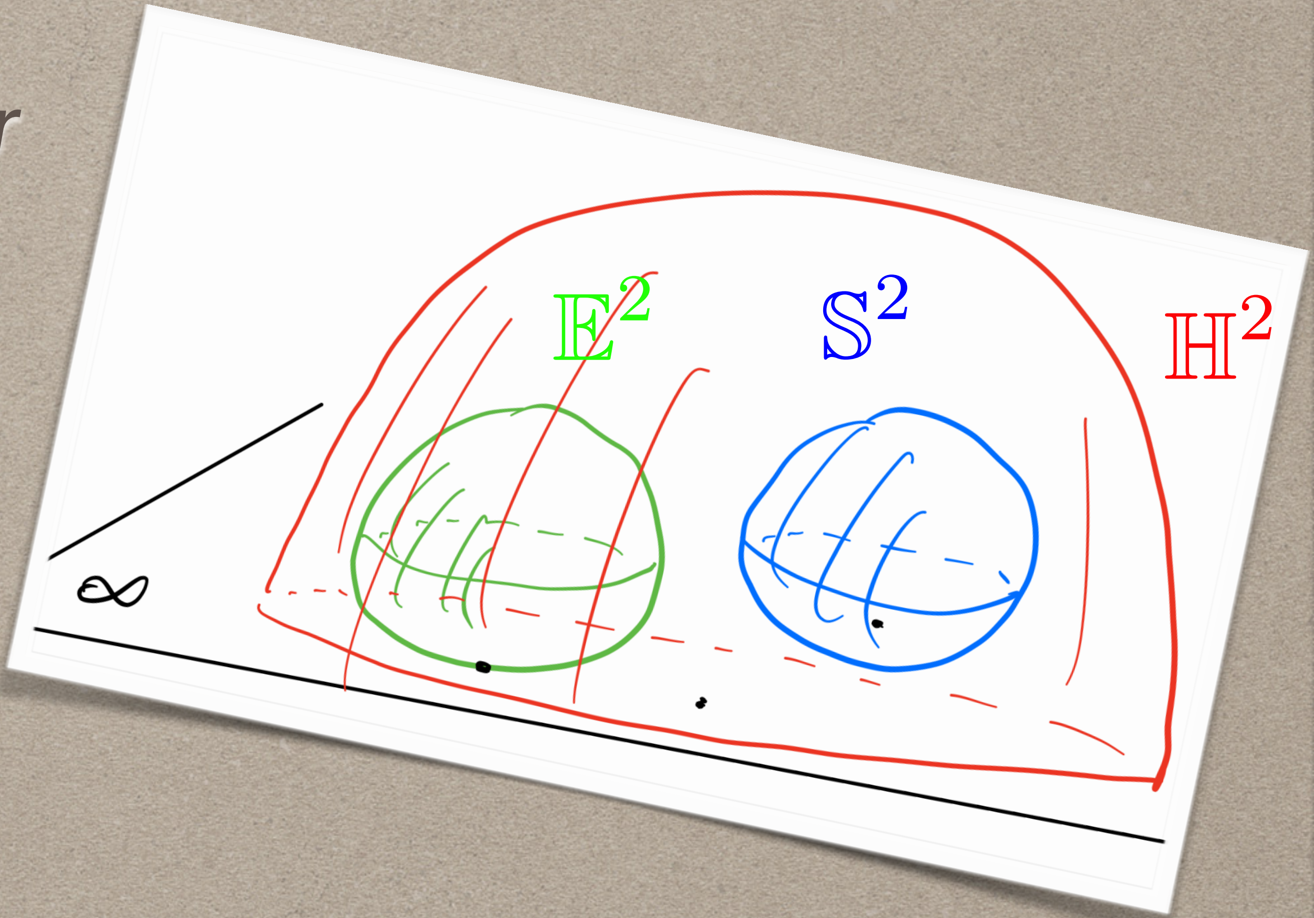


$\mathbb{E}^2$

EL SEMIPLA

Sorpresa!

1. *Espai euclidià: es pot trobar un pla el·líptic (esfera) però no un pla hiperbòlic complet (si la pseudosfera) (**Teorema de Hilbert**)*
2. *Espai hiperbòlic: es pot trobar pla el·líptic (esfera), pla euclidià (horoesfera) i pla hiperbòlic (pla)*



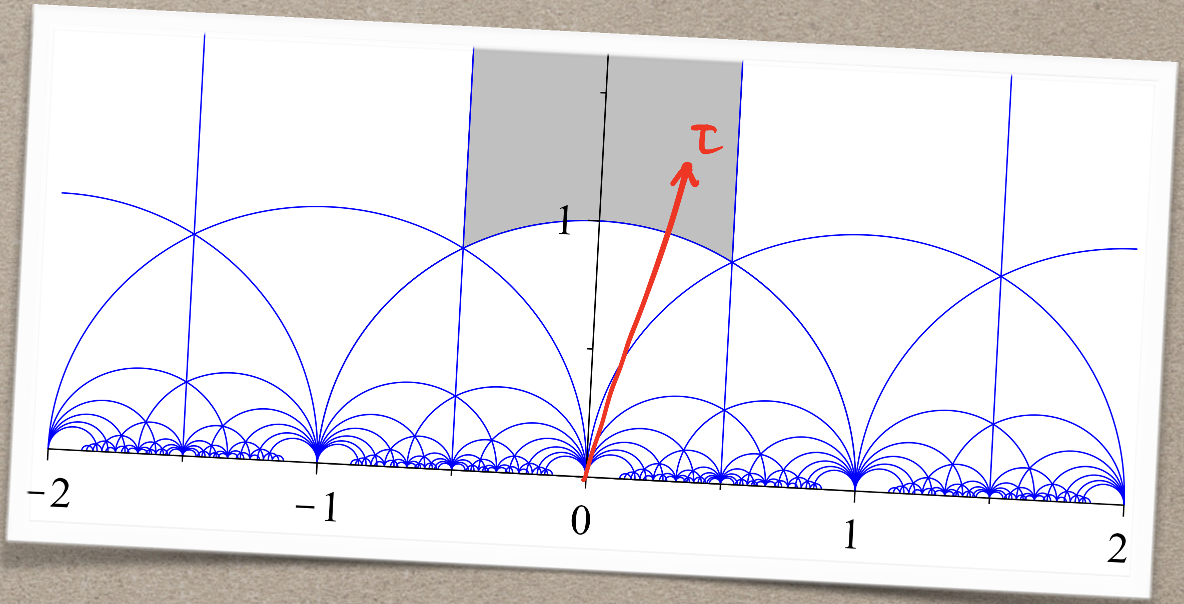
Al plà hiperbòlic es pot quadrar el cercle!

POINCARÉ

*L'estudi de les **funcions automorfes** donà lloc a la recerca de subgrups discrets del grup d'isometries del semiplà*

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$$

$$ad - bc = 1$$



Funcions automorfes 'lattice' τ

POINCARÉ

*Model de la **calor** i la **refracció**: disc de Poincaré*

- *Element de longitud:*

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

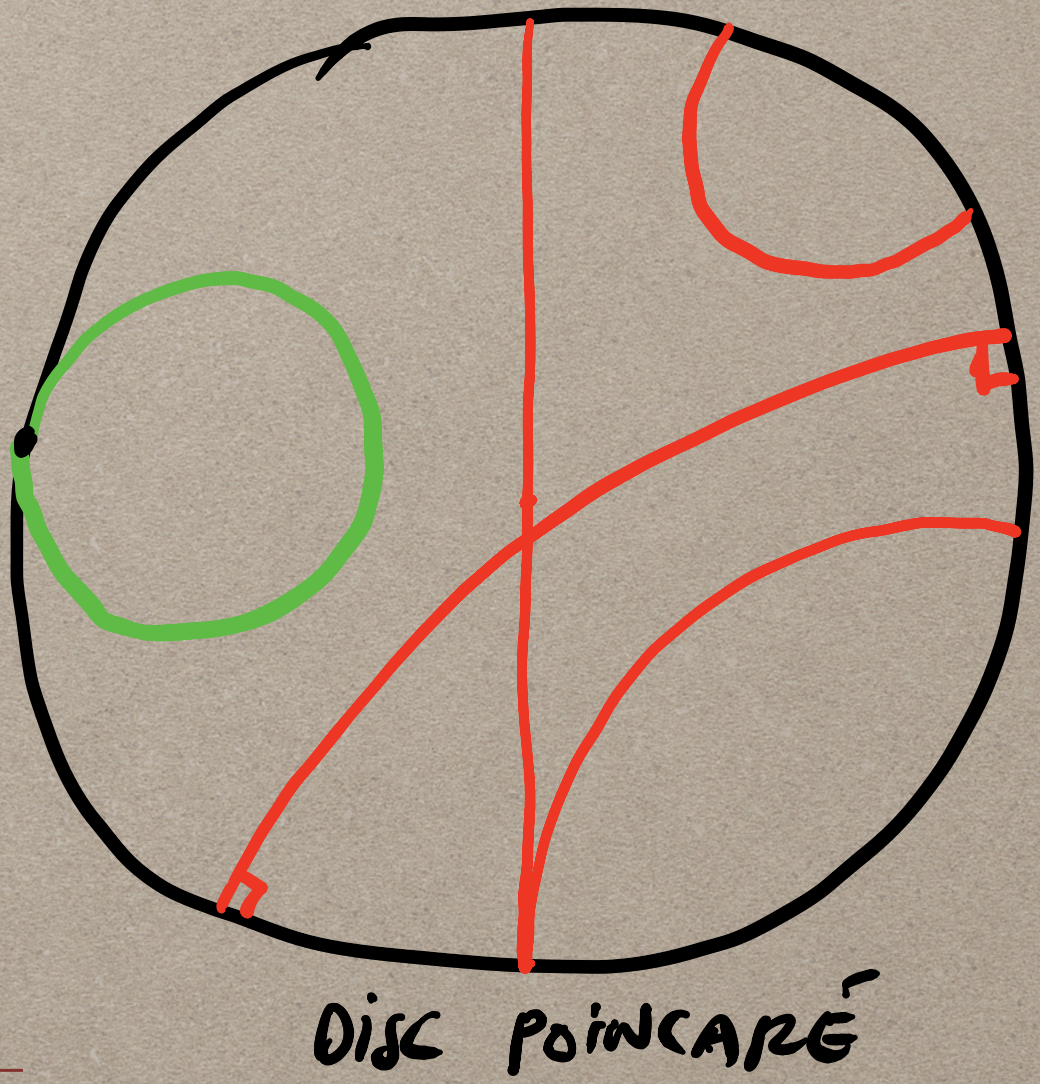
- *Moviments (isometries):*

$$z \to e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}, \ |\alpha| < 1$$

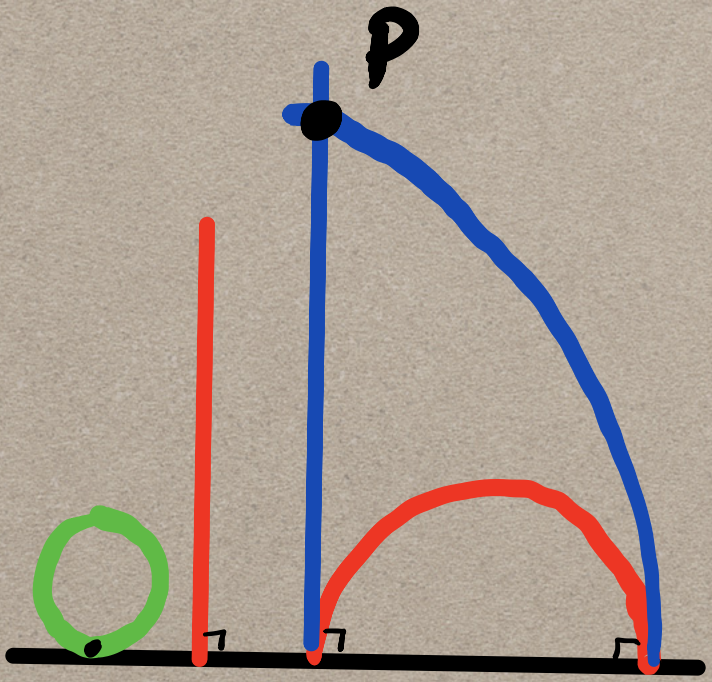
Temperatura proporcional a: $R^2 - r^2$

Índex de refracció proporcional a : $\dfrac{1}{R^2 - r^2}$

- *Punts: punts del disc*
- *Rectes: semicercles ortogonals a la frontera*

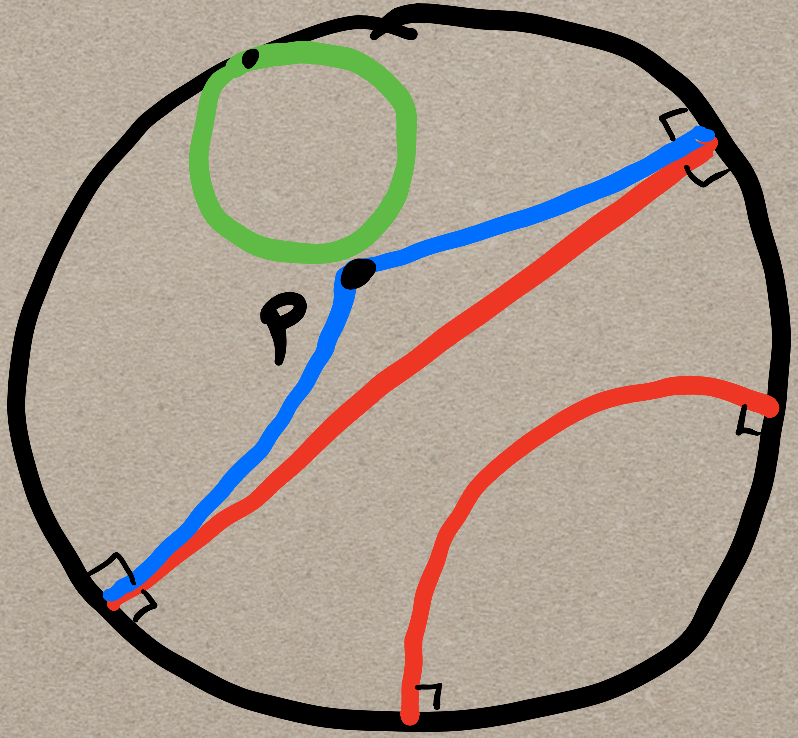


ALTRES MODELS



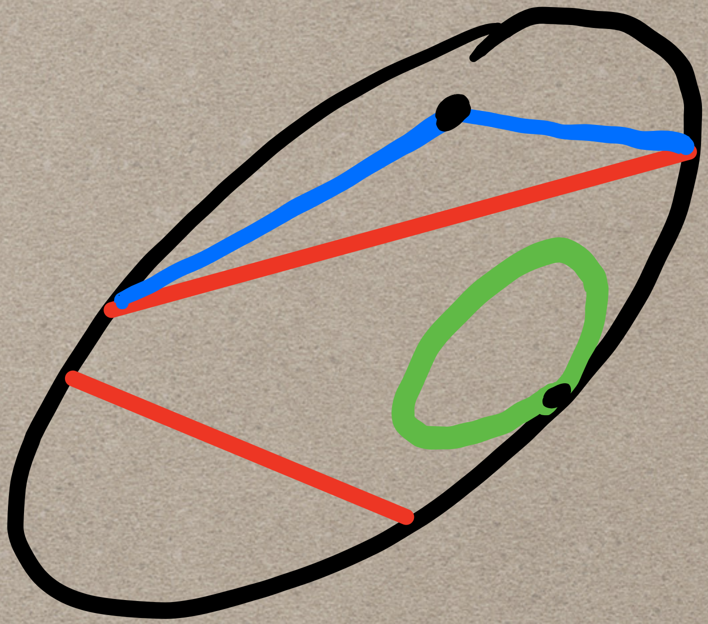
CONFORME

SEMIPLA



CONFORME

DISC POINCARÉ

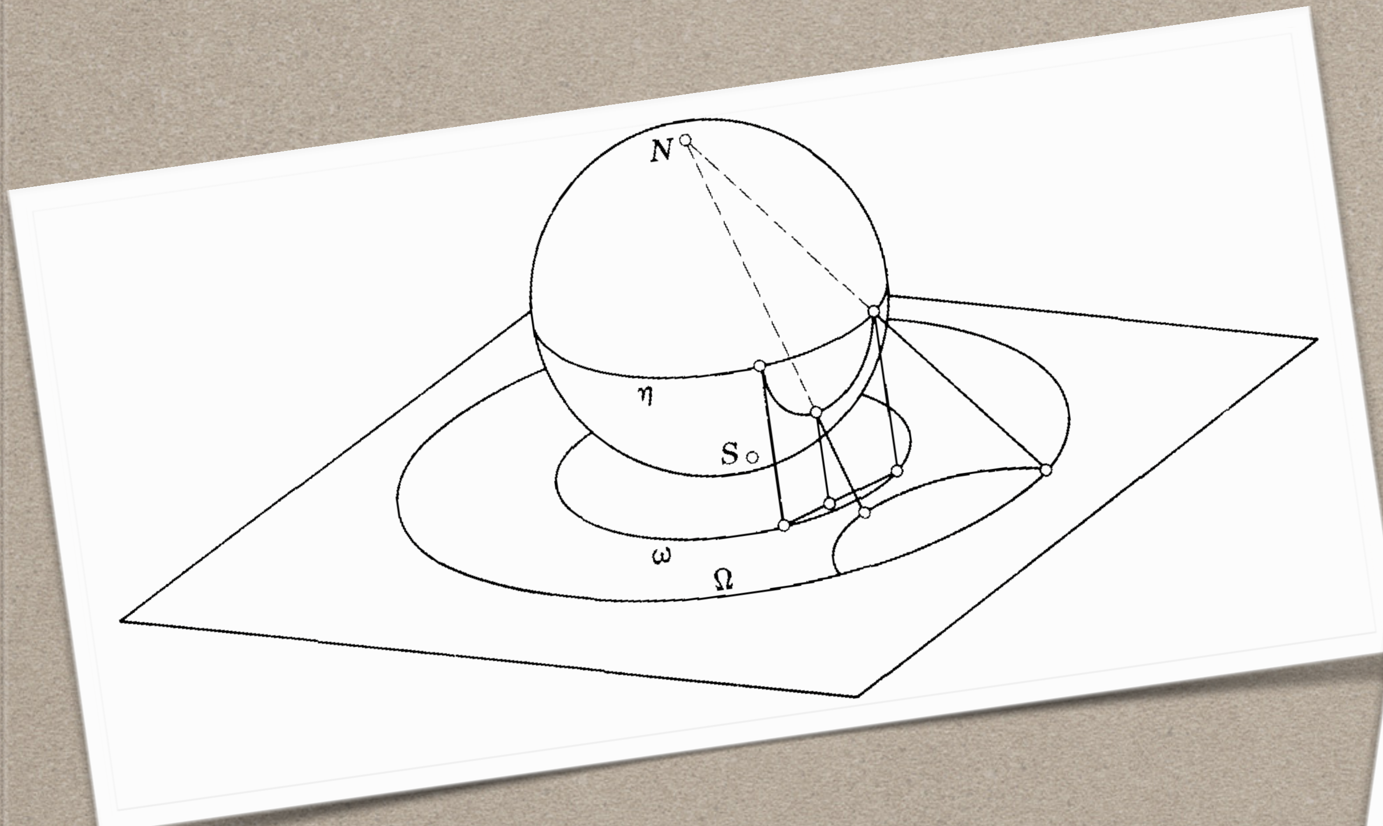


NO CONFORME

PROJECTIU

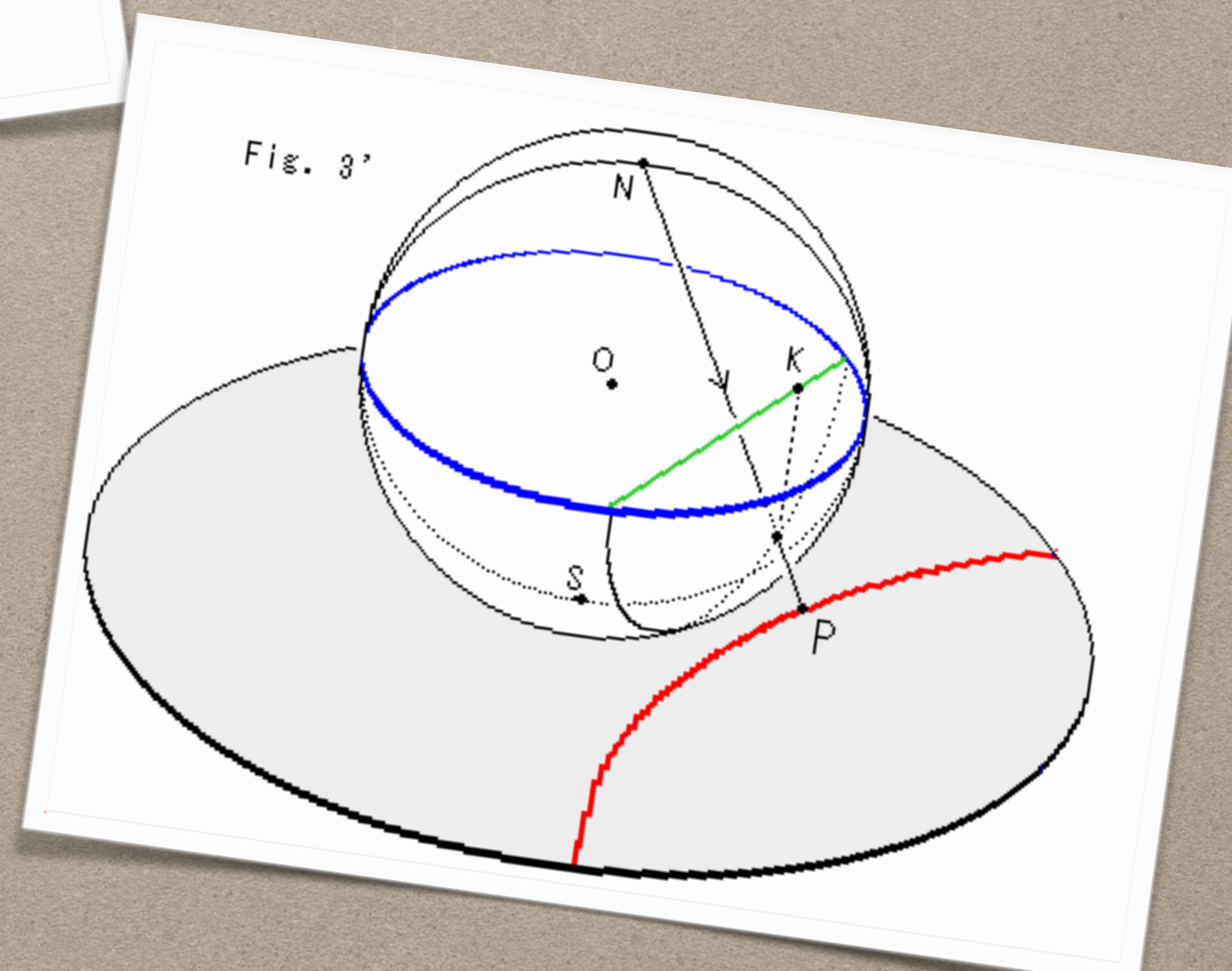
*També en dimensió **n***

ALTRES MODELS



Model Projectiu
(Beltrami - Klein)

Disc Poincaré



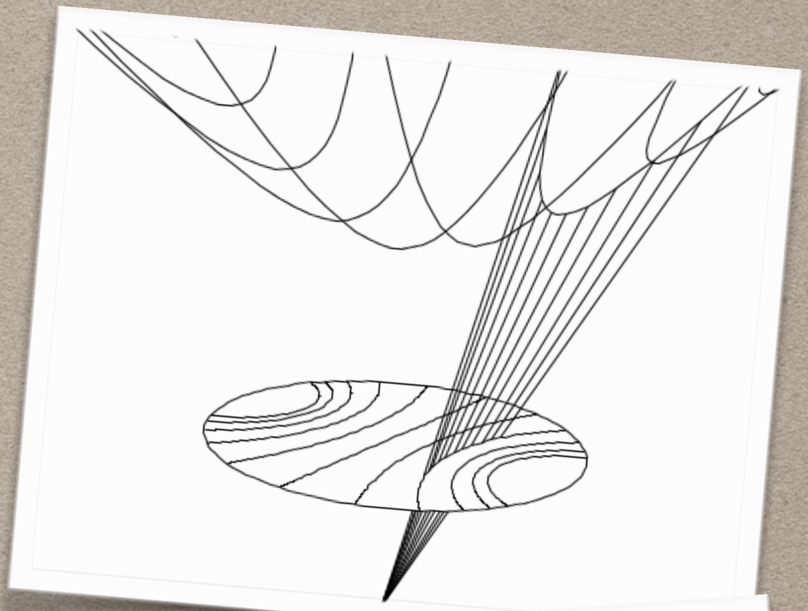
ALTRES MODELS

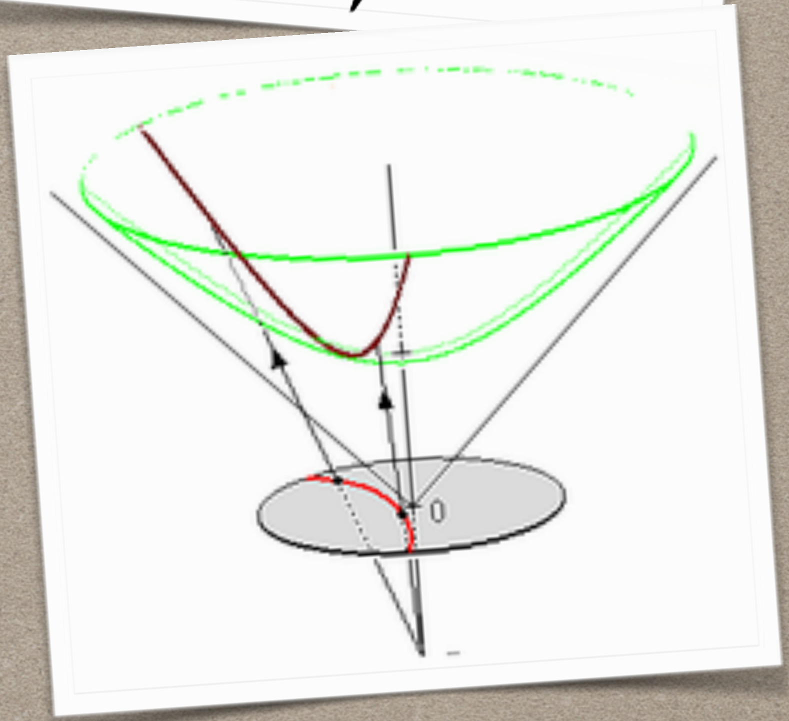
Hiperboloide

$$\langle (x,y,t),(x',y',t')\rangle_{\mathcal{M}} = xx' + yy' - tt'$$

$$\mathcal{H} = \{(x,y,t) : x^2 + y^2 - t^2 = -1\} \cong \mathbb{H}^2$$

- ***M_3***, *espai ordinari amb producte de Minkowski*
- ***H***, *hiperboloide*
- *Amb l'element de logitud induït:* ***pla hiperbòlic***
- ***Geodèsiques****: tall de plans per l'origen*
- ***Moviments****: isometries de M_3, que preserven hiperboloide*
- ***1881****: Poincaré, estudi de* ***formes quadràtiques****, aritmètica (****abans*** *que relativitat)*
- ***1905****: Einstein, Fonaments de la relativitat especial*
- ***1906****: Poincaré el fa servir per estudiar la dinàmica de l'electró*
- ***1907****: Minkowski proposa el seu model de la relativitat especial*
- ***H^3***, *com espai de velocitats relativistes*



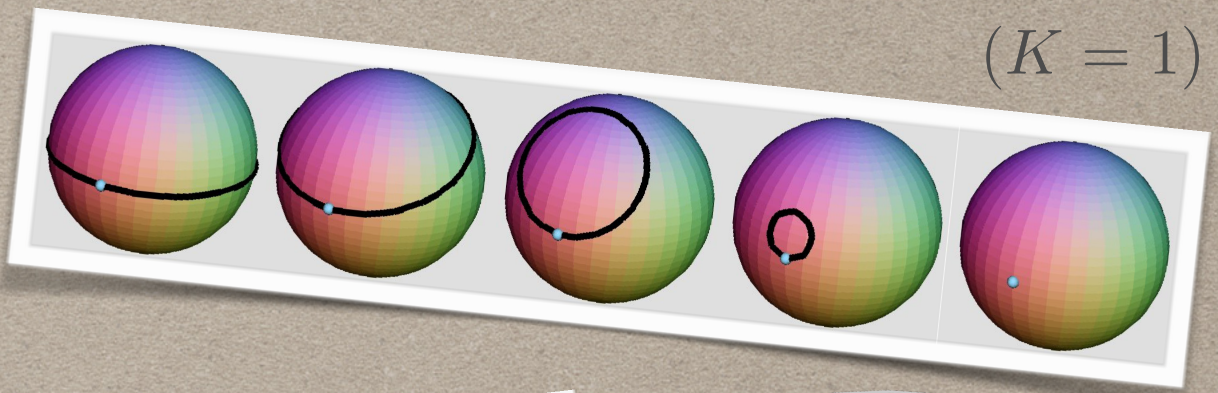


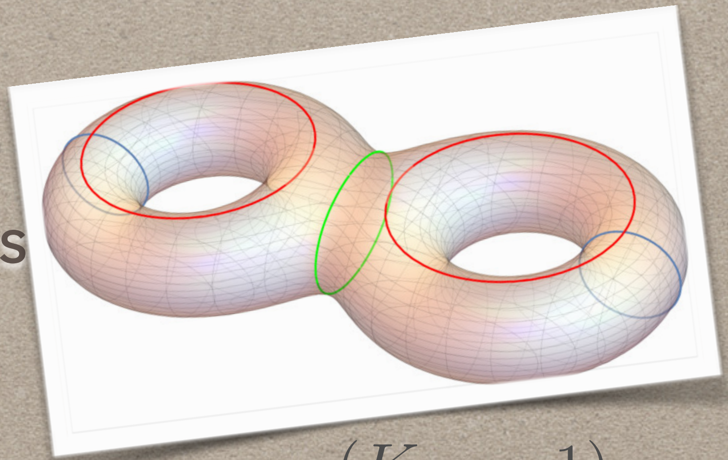
RELACIONS

- **Poincaré:** grup modular, funcions automorfes, grups Fuchsians i Kleinians
- **Clifford-Klein:** espais de curvatura constant. Varietats hiperbòliques
- **Mostow-Prasad:** volum i grup fonamental caracteritzen varietats hiperbòliques
- **Thurston:** Geometrització
- **Perelmann:** conjectura de Poincaré

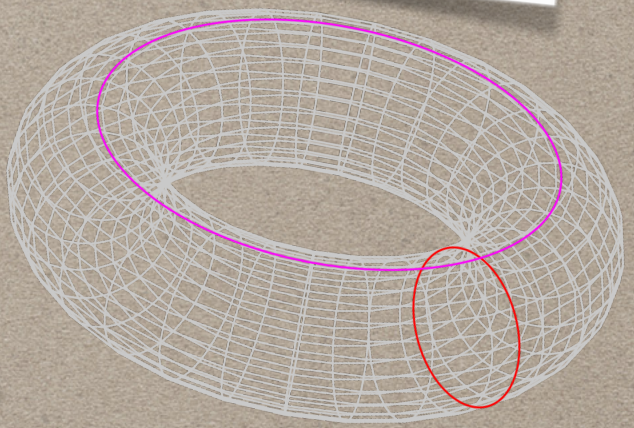
$$M = \mathbb{H}^3/h(\Gamma),\ h(\Gamma) \subset I(\mathbb{H}^3)$$

$(K = 1)$





$(K = -1)$



$(K = 0)$

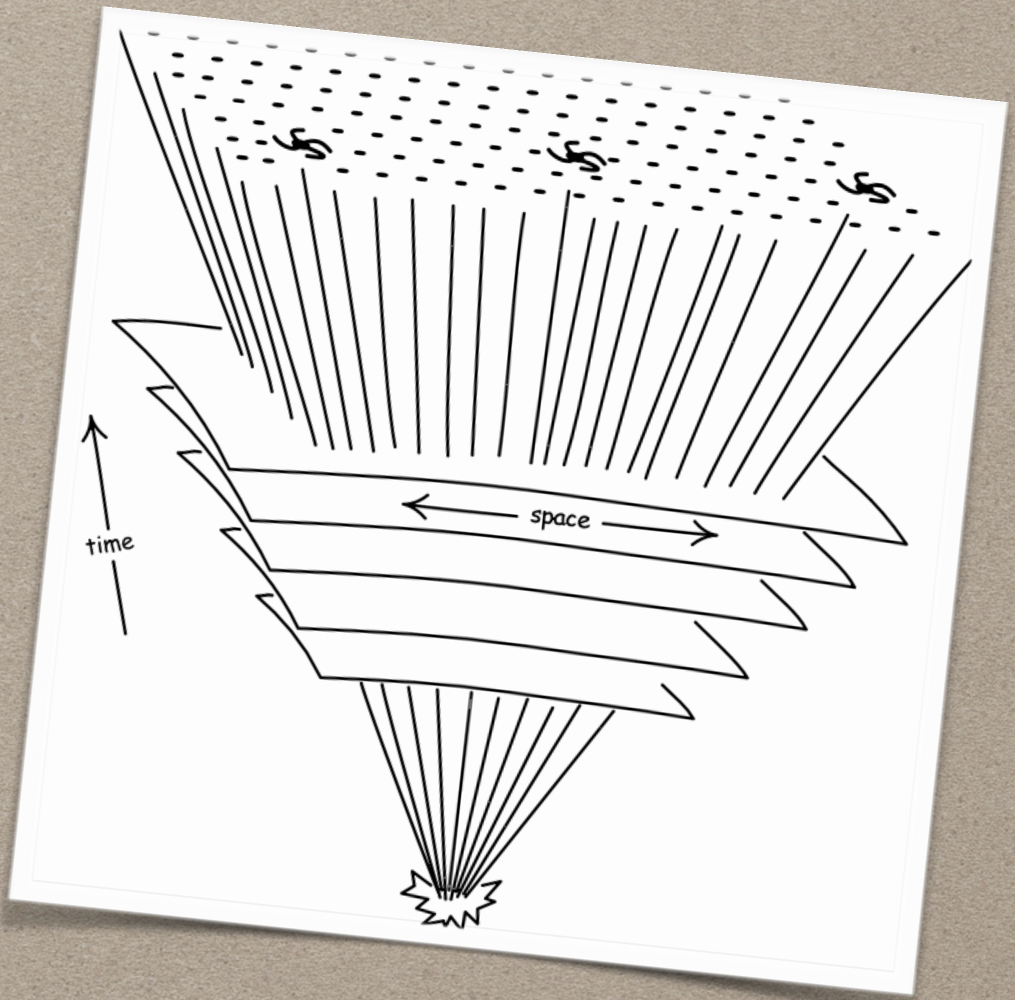
*Considerant una **varietat topològica compacta** M de **tres dimensions** sense vora, és possible que el **grup fonamental** de M sigui trivial encara que M no sigui homeomorfa a una esfera de dimensió 3?*

RELACIONS

Cosmologia**: model de **Friedmann-Robertson-Walker

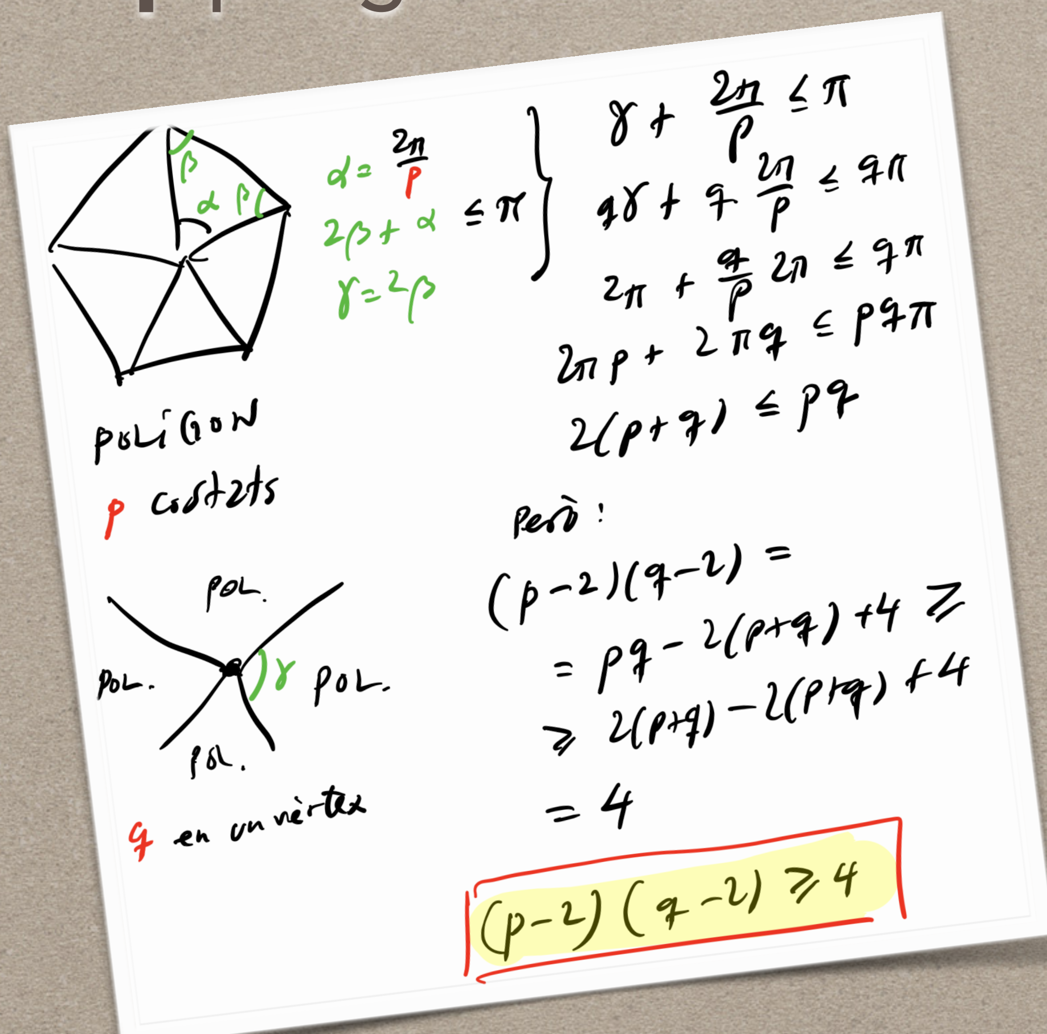
$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\Sigma^2$$

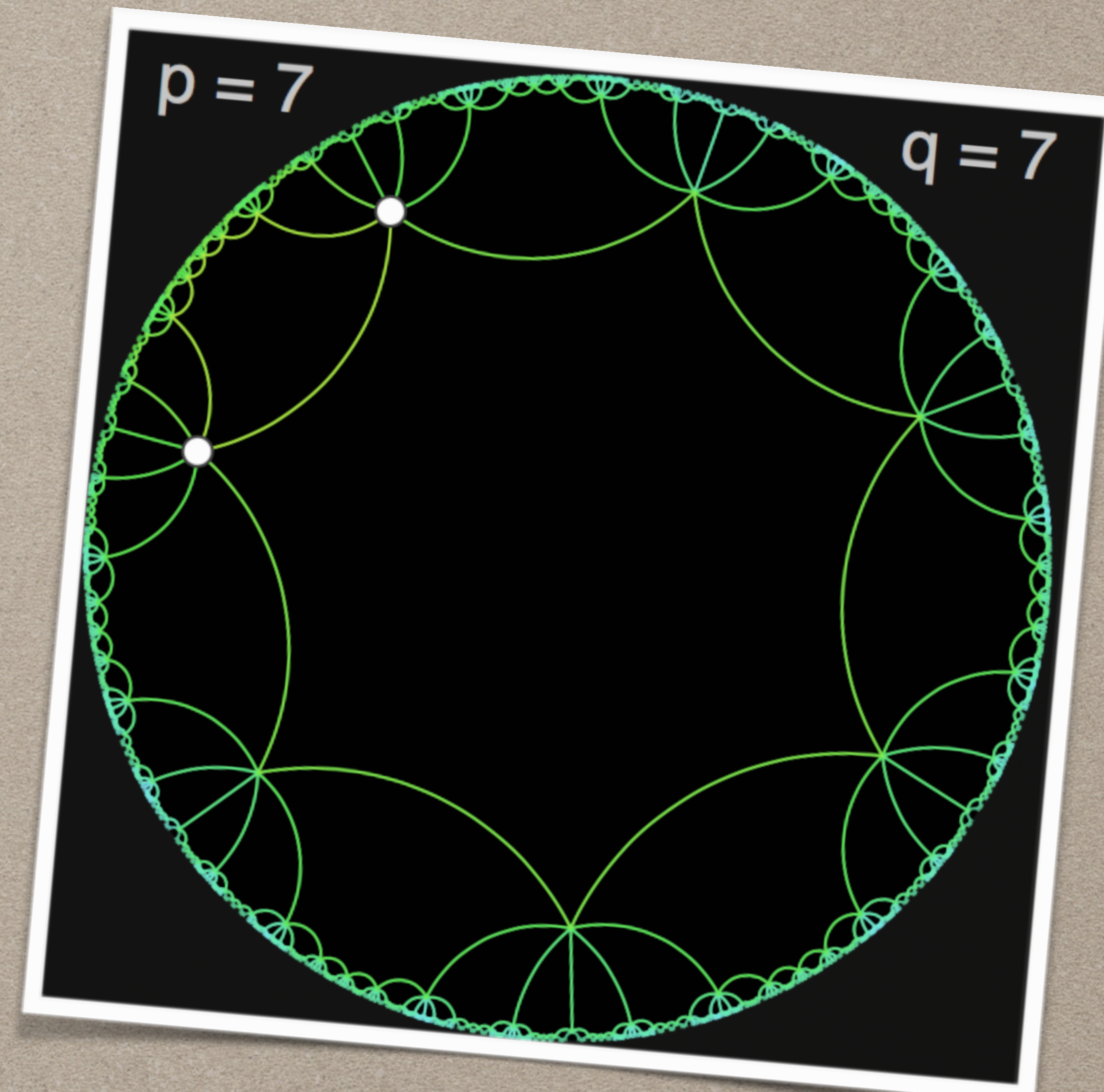
$$\Sigma \Rightarrow \mathbb{S}^3 \quad \mathbb{E}^3 \quad \mathbb{H}^3$$



PAVIMENTACIONS (DE NOU)

- **p**: costats
- **q**: polígons en un vèrtex



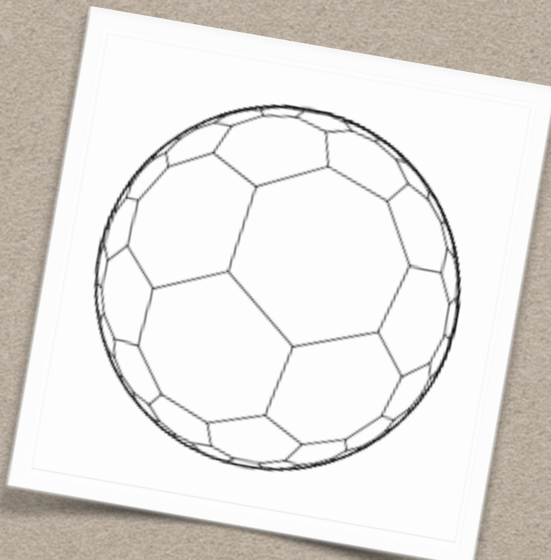
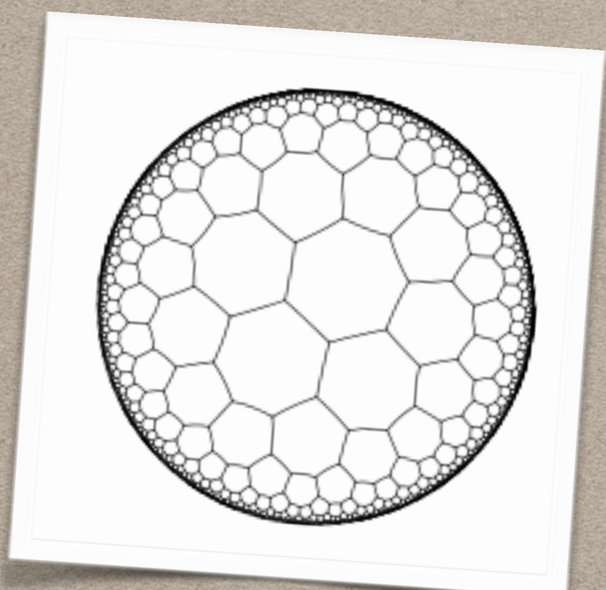
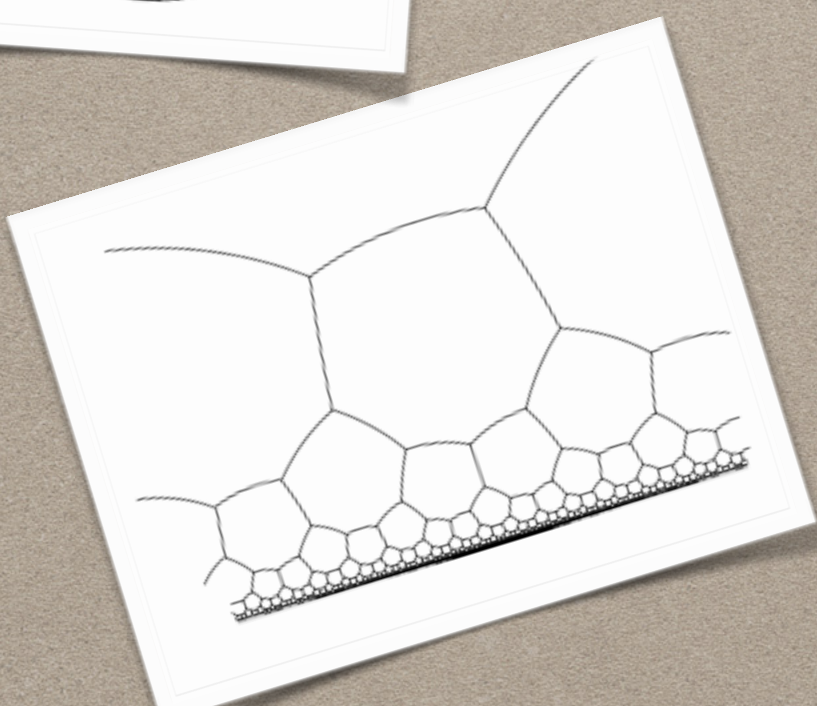
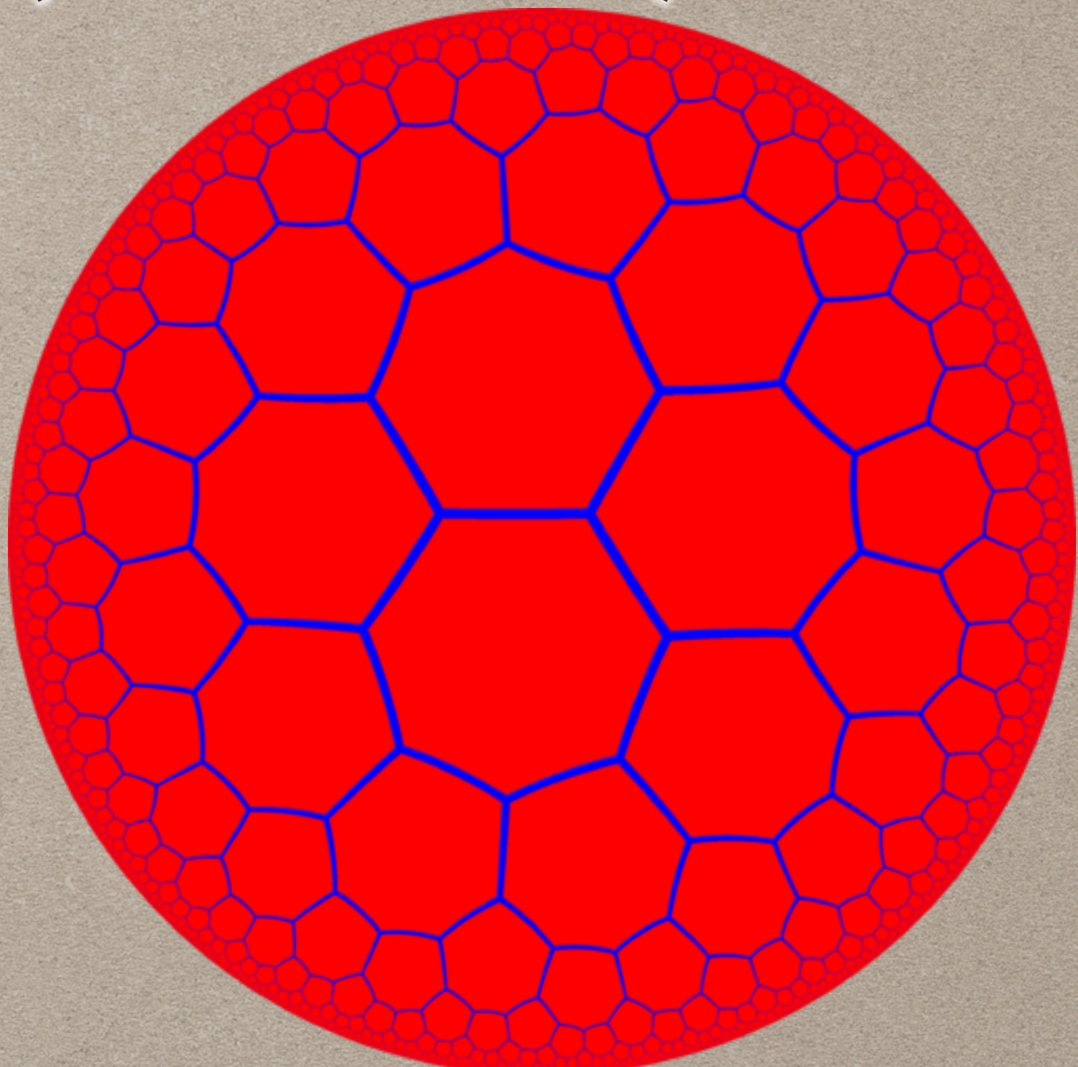


Hiperbòlic: $(p-2)\cdot(q-2) > 4$

Euclidià: $(p-2)\cdot(q-2) = 4$

PAVIMENTACIONS (DE NOU)

- **p**: 7
- **q**: 3

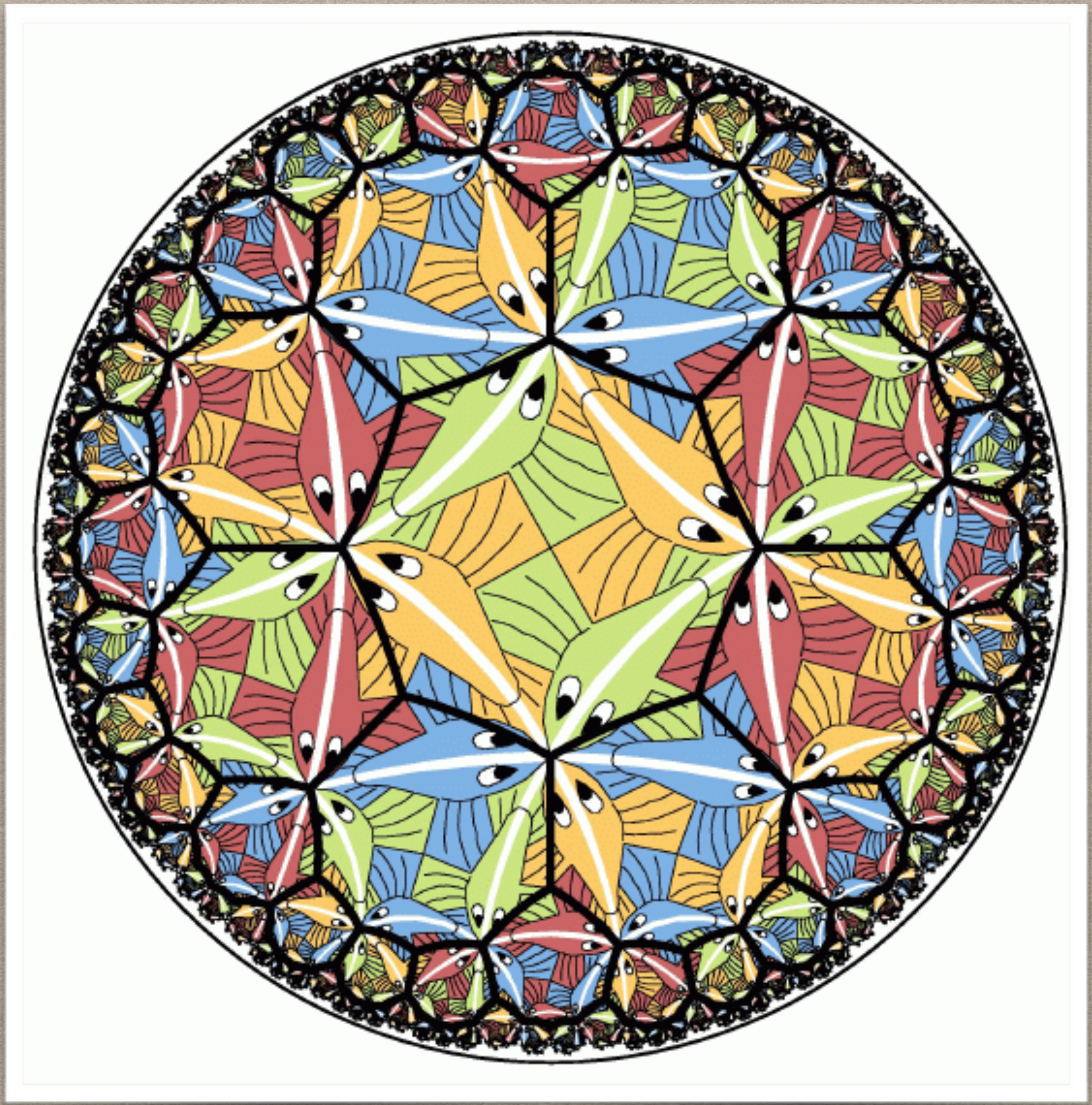





Hiperbòlic: $(p-2)\cdot(q-2) > 4$

PAVIMENTACIONS (DE NOU)

- **p**: 8
- **q**: 3

*Una interpretació per ordinador del patró **Circle Limit III** d'**Escher**, que mostra la tessel·lació {8,3} subjacent.*

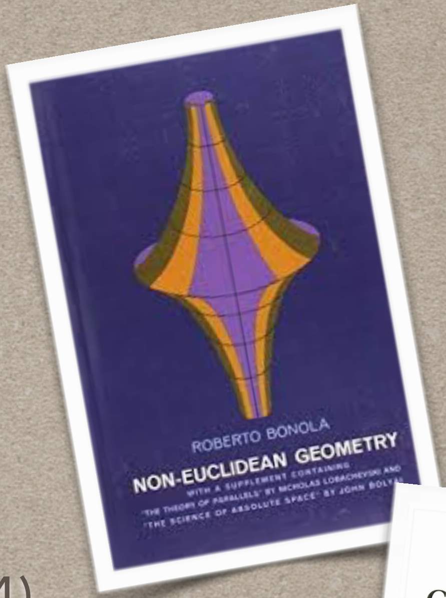


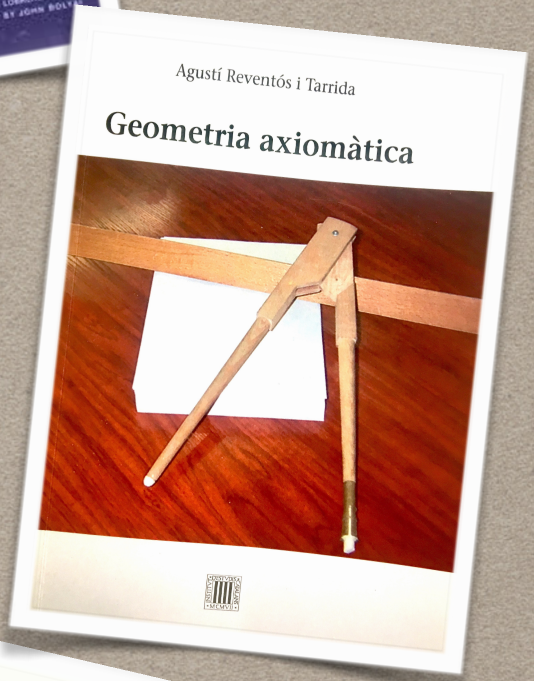
http://www.mathaware.org/mam/03/essay1.html

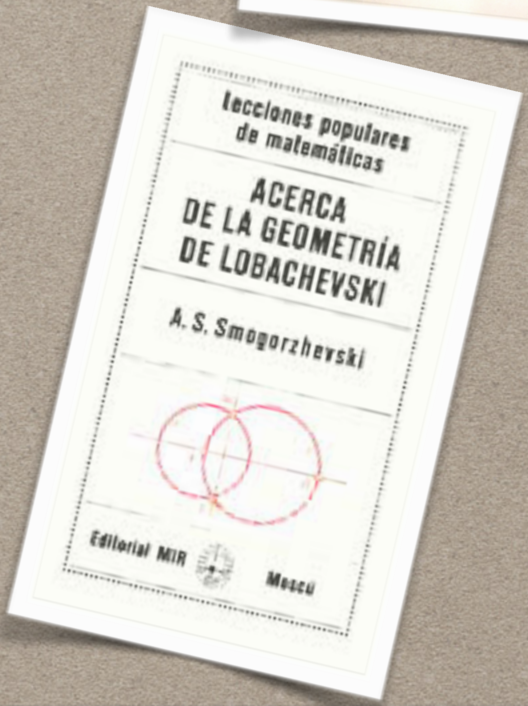
Hiperbòlic: $(p-2)\cdot(q-2)>4$

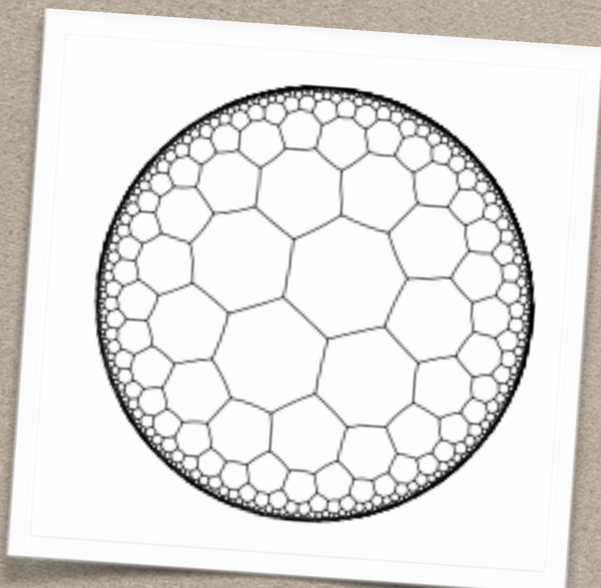
PER SABER MÉS...

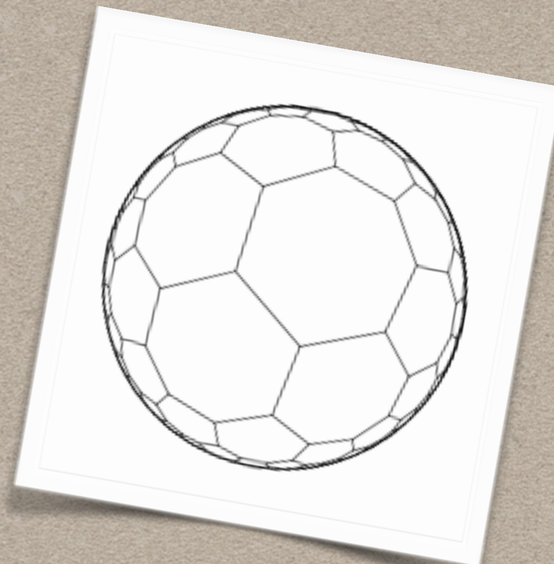
- **Bonola,** R. (2010). *Non-Euclidean Geometry*. Dover (1874-1911)
- **Gallego**, E. (2002). *Comportament asimptòtic de convexes al pla hiperbòlic.* Homenatge a L.A. Santaló. (UdG, Colecció Diversitas: 34)
- **Girbau**, J. (2004). *Trigonometria esfèrica i hiperbòlica*.
- **Milnor**, J. W. (1982). *Hyperbolic geometry: the first 150 years*. AMS. Bulletin. New Series, 6(1), 9–24.
- **Reventós**, A. (2000). *Geometria axiomàtica*. Publicacions de la SCM.
- **Reventós**, A. (2004). *Un nou món creat del no-res, un món on es pot quadrar el cercle!* Butlletí de La Societat Catalana de Matemàtiques, 19, 47–83.
- **Smogorzhevski**, A. (1978). *Acerca de la geometría de Lobachevski*. Ed MIR (Moscú).

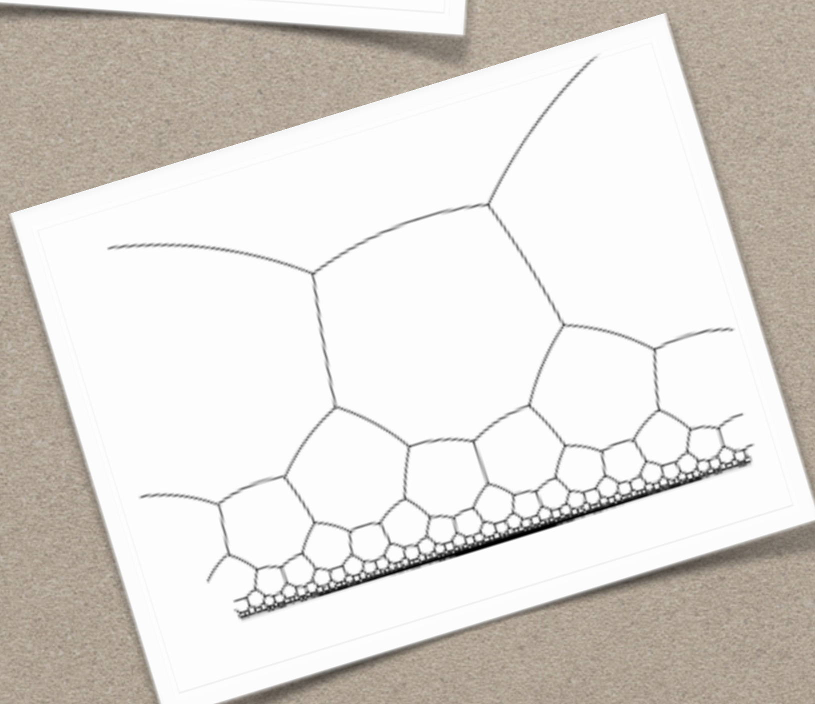


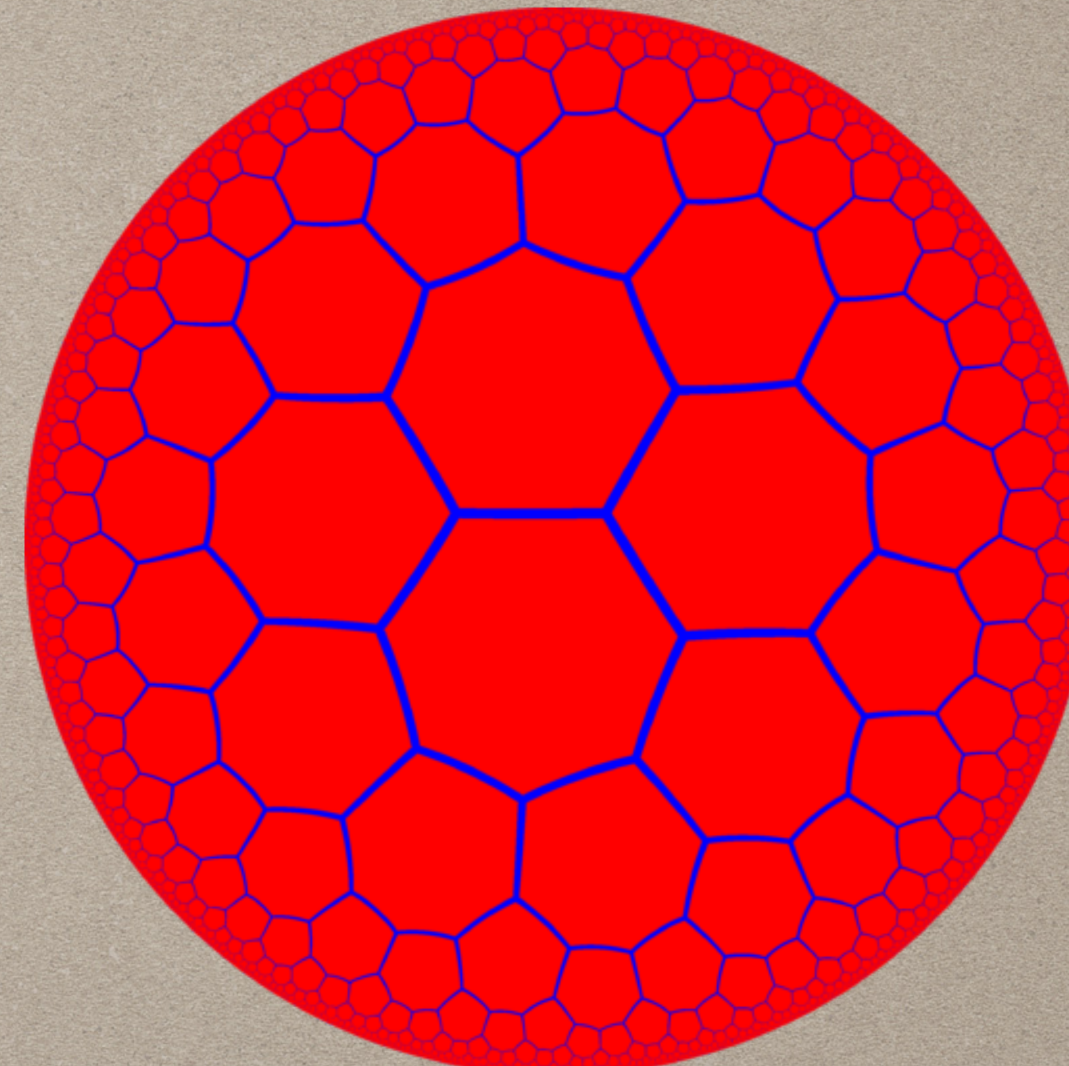












GRÀCIES!