11 El pla hiperbòlic

Es considera una superfície S que admet una parametrització global definida al semiplà superior $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ en la qual la primera forma fonamental I té coeficients $E = G = \dfrac{1}{y^2}$ i $F = 0$. Una tal superfície s'anomena *pla hiperbòlic.* Identifiquem S amb $\mathbb{H}$ a través d'aquesta parametrització.

Exercici 11.1. Comproveu que la mesura d'angles de $\mathbb{H}$ coincideix amb la mesura d'angles euclidiana en el punt de coordenades (x, y).

Exercici 11.2. Calculeu l'àrea de la regió $R_1 = \{(x,y)\colon 0 < x < 1, 1 < y < \infty\}$. Comproveu que la regió $R_2 = \{(x,y)\colon 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ té àrea infinita.

Exercici 11.3. Es posible determinar, a partir de les dades anteriors, les línies de curvatura de S? I les línies asimptòtiques?

Exercici 11.4. Determinem les geodèsiques $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

(a) Deduïu, fent servir les equacions d'Euler-Lagrange, que les equacions de les geodèsiques en aquestes coordenades estan donades per

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{2}{y}\,\dot{x}\,\dot{y} &= 0 \\[2ex] \ddot{y} + \dfrac{1}{y}\,\dot{x}^2 - \dfrac{1}{y}\,\dot{y}^2 &= 0 \end{cases}$$

i que per tant els símbols de Christoffel són $-\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$ i la resta zero.

(b) Comproveu que la curvatura de Gauss de $\mathbb{H}$ és constant $K = -1$.

(c) Comproveu que les semirectes verticals $\gamma(t) = (x_0, e^{at})$ són geodèsiques.

(d) Deduïu de les equacions del primer apartat que les geodèsiques compleixen $\dot{x}/y^2 = ct$. Veieu que llavors es té que $\cos\phi/y = ct.$ on ϕ és l'angle format per la geodèsica γ amb les rectes horitzontals $y = ct$ al punt considerat.

(e) Proveu que les semicircumferències (euclidianes) a $\mathbb{H}$ amb centre a la recta $y = 0$ compleixen la relació $\dfrac{1}{y}\cos\phi = ct$. Deduïu d'aquí que les geodèsiques γ de S són de la forma $x = x_0 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, on $\theta = \theta(t)$ compleix l'equació $\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2\cot\theta$.

(f) Per resoldre $\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2\cot\theta$ busquem $\theta = \theta(t)$ de manera que t sigui un múltiple del paràmetre arc s de γ. Comproveu que $s = \int \dfrac{1}{\sin\theta}\,d\theta = \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$ i que per tant $\theta = 2\arctan e^s = 2\arctan e^{at+b}$.

(g) Deduïu, com a conclusió, que les geodèsiques (no verticals) de $\mathbb{H}$ estan donades per

$$x(t) = x_0 + r\,\frac{1 - e^{2(at+b)}}{1 + e^{2(at+b)}}, \qquad y(t) = r\,\frac{2\,e^{at+b}}{1 + e^{2(at+b)}}. \tag{11.3}$$

Exercici 11.5. Proveu que les aplicacions de la forma $\Psi_1(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$, $\Psi_2(x,y) = (kx, ky)$ i $\Psi_3(x,y) = (x + c, y)$ són isometries de $\mathbb{H}^2$, on $k > 0, c \in \mathbb{R}$.

Exercici 11.6. Donat $c \in \mathbb{R}$ considerem $\Psi(x,y) = \frac{1+c^2}{(x-c)^2+y^2}(x - c, y) + (c, 0)$. Proveu que $\Psi(0, e^{-t}) = (x(t), y(t))$ amb $x(t), y(t)$ donades a (11.3) i trobeu x_0, r, a, b.

Exercici 11.7. Donats dos punts $p, q \in \mathbb{H}$, proveu que existeix una geodèsica $\gamma(t)$ de $\mathbb{H}$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Proveu que la longitud de $\gamma([0,1])$ és menor o igual que la longitud de qualsevol corba que uneixi $\gamma(0)$ amb $\gamma(1)$.

Exercici 11.8. Donats $P \in \mathbb{H}$ i $v \in T_P\mathbb{H}$ un vector amb $I(v,v) = 1$, denotem per $\gamma_{P,v}(s)$ la geodèsica parametritzada per l'arc tal que $\gamma_{P,v}(0) = P$ i $\gamma'_{P,v}(0) = v$. Anomenem circumferència hiperbòlica de radi r i centre P al conjunt $S_r(P) = \{\gamma_{P,v}(r) : v \in T_P\mathbb{H}, I(v,v) = 1\}$.

a) Dibuixeu amb `Sage` un parell de circumferències hiperbòliques centrades a $P = (0,1)$.

b) Proveu que les circumferències hiperbòliques al semiplà es veuen com circumferències euclidianes.

Per saber més.

1. *Corbes especials.* La circumferència euclidiana de centre (x_0, a) i radi a és tangent a la recta $\{y = 0\}$ en el punt $(x_0, 0)$ i és ortogonal a totes les geodèsiques que surten aquest punt. Aquest tipus de corbes s'anomenen horocicles i s'obtenen com el límit d'una família de circumferències hiperbòliques que passen per un punt fixat i el centre de les quals tendeix a l'infinit.

   La intersecció amb $\mathbb{H}$ d'una circumferència euclidiana, quan no és una geodèsica, ni una circumferència hiperbòlica, ni un horociclce (i.e. quan talla $y = 0$ en un angle diferent de 0 i $\pi/2$) s'anomena corba equidistant. Tots els punt d'aquesta corba estan a la mateix distància de la geodèsica que talla $y = 0$ en els mateixos punts.

2. *Pseudosfera.* La pseudosfera (sense un meridià) que hem tractat al seminari anterior és isomètrica a un troç de $\mathbb{H}$ donat per $P = \{(x,y) \in \mathbb{H} : |x| < a^2, y > b^2\}$ (per a, b adequats). Un teorema de Hilbert diu que el plà hiperbòlic (complet) no es pot trobar com a superfície de $\mathbb{R}^3$, en canvi un troç d'ell si que es pot trobar, la pseudosfera.

Referències:

- Smogorzhevski, A. *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Lecciones populares de matemáticas, 1978. Ed. MIR, Moscú.

- Ratcliffe, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 1994. Springer Verlag, NY.