# 12 Formes diferencials

**Exercici 12.1**. Recordeu les següents propietats elementals del producte exterior i la diferencial exterior:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta),$$
$$d(d\alpha) = 0,$$

on $p$ és el grau de $\alpha$ i $q$ és el grau de $\beta$.

a) Comproveu que si $\omega$ és una $2n+1$-forma diferencial, aleshores $\omega \wedge \omega = 0$. Doneu un exemple de 2-forma diferencial $\omega$ tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

b) Proveu que si $\alpha$ i $\beta$ són formes tancades aleshores $\alpha \wedge \beta$ també ho és.

c) Proveu que si $\alpha$ és tancada i $\beta$ exacta llavors $\alpha \wedge \beta$ és exacta (recordeu que $\omega$ és *tancada* si $d\omega = 0$ i *exacta* si existeix $\eta$ tal que $d\eta = \omega$).

d) Si $f$ és una funció tal que $df = 0$, què podem dir de $f$?

**Exercici 12.2**. Si $\omega = x\,dy - dz$, $\eta = 2z^2\,dx$, $\mu = dx - yz\,dy$,

a) Calculeu $x\,\omega + \eta$, $z\,\eta - z\,\mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

b) Donats els camps $X = z^2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = y\frac{\partial}{\partial x} + e^x \frac{\partial}{\partial z}$ calculeu $\omega(X)$ i $\omega \wedge \mu(X, X - Y)$.

**Exercici 12.3**. Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial $\omega$ per l'aplicació $T$ en els següents casos:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, e^s)$, $\omega = dx + xdz$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = (t, s, st)$, $\omega = zdx \wedge dz$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(s,t,u) = (st, tu, us, s+t+u)$, $\omega = x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

**Exercici 12.4**. Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

a) $\omega = xdy + ydx$.

b) $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$.

c) $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$.

d) $\omega = f(x)dy$.

e) $\omega = \cos(xy^2)dx \wedge dz$.

f) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

**Exercici 12.5**. A $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ considerem $\omega$ tal que $\omega(X,Y) = \langle X, iY \rangle$ per $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

a) Proveu que $\omega$ és una 2-forma diferencial.

b) Donar l'expressió de $\omega$ en coordenades cartesianes.

c) Provar que $\omega$ és tancada.

d) Calculeu $\omega \wedge \omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega$.

e) Provar que $|\omega_p(X,Y)| \leq a(X,Y)$ on $a(X,Y)$ és l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors $X, Y$ tangents a $\mathbb{R}^{2n}$ en el punt $p$. La igualtat es dona si i només si $X, Y$ generen una recta complexa.

**Exercici 12.6**. Sigui $\alpha$ la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = ydx + xdy + zdz$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$ i per $d(f^*\alpha)$.

**Exercici 12.7**. Per una funció $f$ es defineix el gradient de $f$ com el camp

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Per un camp vectorial $X = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$ es defineixen la funció divergencia i el camp rotacional com

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}, \qquad \operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right).$$

Es defineixen també les formes diferencials

$$\begin{aligned} \omega_X^1 &= X^1\, dx + X^2\, dy + X^3\, dz \\ \omega_X^2 &= X^1\, dy \wedge dz + X^2\, dz \wedge dx + X^3\, dx \wedge dy \\ \omega_f^3 &= f\, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

a) Comproveu que es compleix

$$\begin{aligned} df &= \omega^1_{\operatorname{grad} f} \\ d(\omega_X^1) &= \omega^2_{\operatorname{rot} X} \\ d(\omega_X^2) &= \omega^3_{\operatorname{div} X} \end{aligned}$$

b) Deduïu de l'apartat anterior que es compleixen les igualtats: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} X$

**Exercici 12.8**. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $h$ és una funció, proveu que

$$f^*(h\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

on $f'$ denota la matriu jacobiana de $f$.

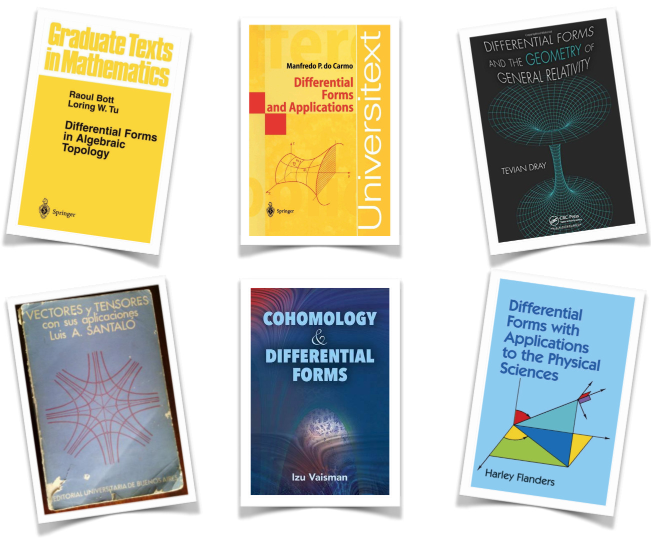


Figura 12.6: Uns quants llibres