Geometria diferencial
Curs 2017–18

Corbes: Parametritzacions. Longitud.

Exercici 1: Es consideren les aplicacions $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definides per

$$\alpha(t) = (\cos(2\,t), \cos(t))$$
$$\beta(t) = (\sin(2\,t), \cos(t))\,.$$

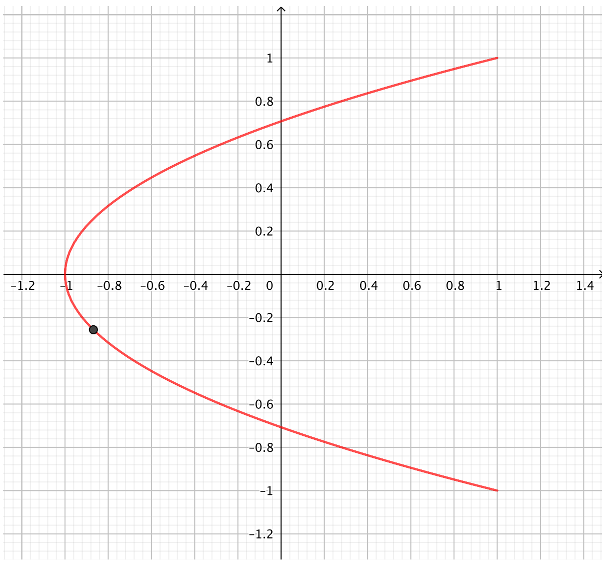
Decidiu si són corbes regulars (derivada mai nul·la).

Solució:

Cal veure si aquestes parametritzacions determinen un vector tangent a la corba no nul en cada punt. Com que

$$\alpha'(t) = (-2\,\sin(2\,t), -\sin(t))$$

La primera component s'anul·la en tots els valors de t que són múltiple enters de $\pi/2$ ($t = k\,\pi/2$) i la segona sempre que el valor de t sigui un múltiple enter de π ($t = k'\,\pi$). Això fa que les dues components s'anul·lin simultàniament en tots els múltiples enters de π. La corba parametritzada α deixa de ser regular en els valors de t múltiples enters de π. Si es fa un gràfic del seu recorregut s'obté un esquema com el següent:

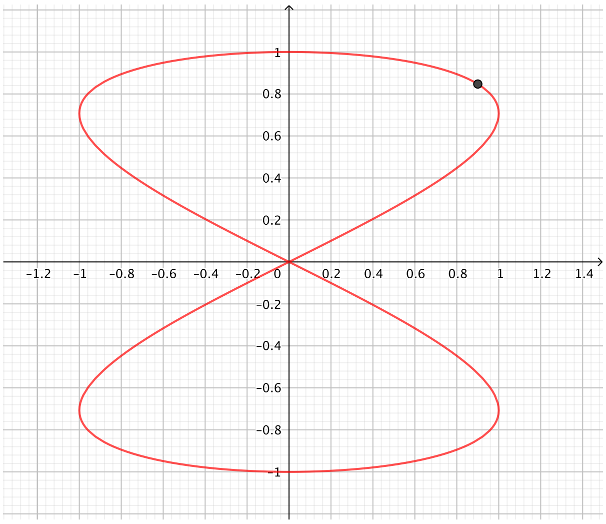


on es veu clarament que la corba correspon a un troç de paràbola. A l'enllaç `https://ggbm.at/kkh3ePA9` (GeoGebra) hi ha una animació d'aquesta corba amb el seu vector tangent on es pot comprovar com el vector tangent s'anul·la a les dues *puntes* on el recorregut de la corba *a de tornar enrera.*

Per a la corba β es compleix

$$\beta'(t) = (2\,\cos(2\,t), -\sin(t))$$

Per tal que s'anul·li la segona component ($\sin(t)$) el valor del paràmetre ha de ser un múltiple enter de π ($t = k\,\pi$) i, aleshores, la primera component del vector tangent serà $2\,\cos(2\,k\,\pi) = 1$ i, per tant, mai s'anul·len simultàniament les dues components del vector tangent a la corba β. Per tant, la corba parametritzada β és regular en tot el seu recorregut. El gràfic d'aquesta corba serà com el següent:



I podeu *jugar* amb una construcció dinàmica seguint l'enllaç `https://ggbm.at/UDsznsCt` .

Exercici 2: Parametritzeu les corbes de $\mathbb{R}^2$ definides implícitament per

(a) $4\,x^2 + y^2 = 1$.

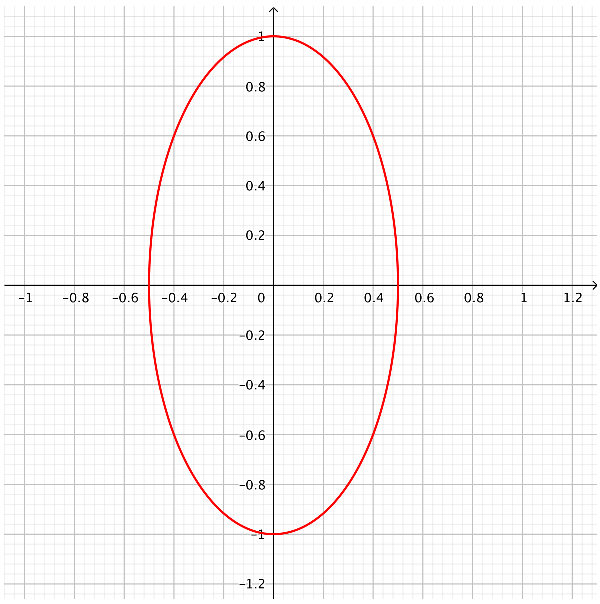
(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (**Astroide**, Hipocicloide de 4 punxes).

(c) $x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0$. (**Folium de Descartes**)

(d) $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$. (**Lemniscata de Bernoulli**)

Solució:

(a) $\boldsymbol{4\,x^2 + y^2 = 1}$



Pensant en termes de $(2\,x, y)$ es pot considerar que l'equació que determina la corba és

$$(2\,x)^2 + y^2 = 1$$

i, com que això diu que $(2\,x, y)$ és en una circumferència, posar

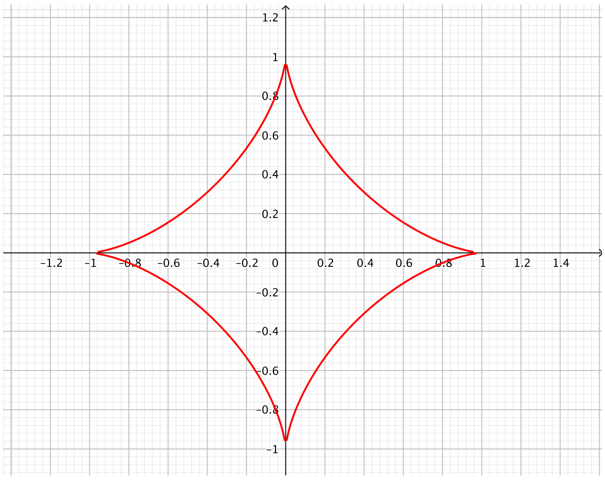
$$2\,x = \cos(t), \quad y = \sin(t)$$

per a un paràmetre t que representa *l'angle de gir* o la *coordenada angle* de les coordenades polars (les de $(2\,x, y)$, no les de (x, y)). D'aquesta forma, s'arriba a l'expressió

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t)\right)$$

amb $t \in [0, 2\,\pi]$. Obtindreu una il·lustració de la situació a l'enllaç `https://ggbm.at/WQrRAwuc`

(b) $\boldsymbol{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$



Serveix la mateixa estratègia que en el cas anterior: els punts de la forma $\left(\sqrt[3]{\cos(t)}, \sqrt[3]{\sin(t)}\right)$ per a cada (x, y) de la corba original han de ser a la circumferència de centre l'origen i radi 1, per tant es poden parametritzar per

$$\sqrt[3]{x} = \cos(t), \quad \sqrt[3]{y} = \sin(t)$$

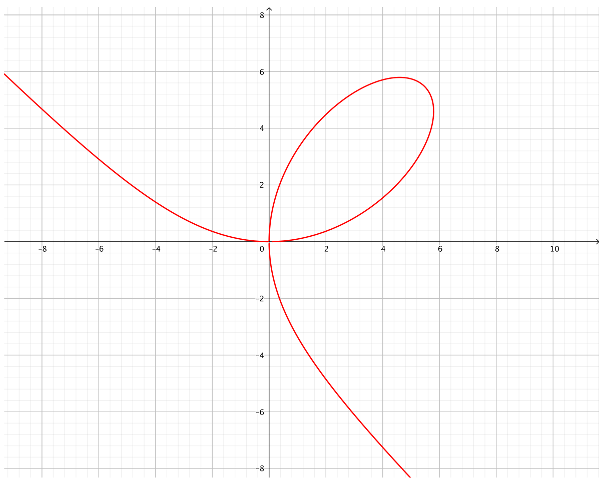
de forma que la corba s'obté per la parametrització

$$(x, y) = \left((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\right)$$

L'enllaç `https://ggbm.at/zF7QRe6h` mostra la situació.

Noteu, per la forma de la corba, que serà impossible parametritzar-la de forma regular i amb el vector tangent continu. La parametrització que es proposa té el vector tangent continu però anul·lant-se als punts on apareixen les *punxes*. No obstant, cada una de les quatre branque sí que acceptaran una parametrització regular (la que s'obté escrivint la coordenada y en funció de la coordenada x). Segons el que es vulgui fer serà més útil una parametrització o l'altra.

(c) $\boldsymbol{x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0}$



Un cop més, pensar en coordenades polars dóna un camí clar per obtenir una solució raonable. Pensem els punts del pla determinats per les seves coordenades polars (posen (r,t)) i determinem en funció d'aquests paràmetres quins són els punts de la corba. Si $(x,y) = r\,(\cos(t),\sin(t))$ l'equació de la corba s'escriu com

$$r^3\,(\cos(t))^3 + r^3\,(\sin(t))^3 - 3\,a\,r^2\cos(t)\,\sin(t) = 0$$

Traient els factors comuns r^2 (que són els que diuen que la corba passa per l'origen)

$$r\left((\cos(t))^3 + (\sin(t))^3\right) - 3\,a\cos(t)\,\sin(t) = 0$$

i, per tant,

$$r = \frac{3\,a\cos(t)\,\sin(t)}{(\cos(t))^3 + (\sin(t))^3}$$

Prenent, doncs,

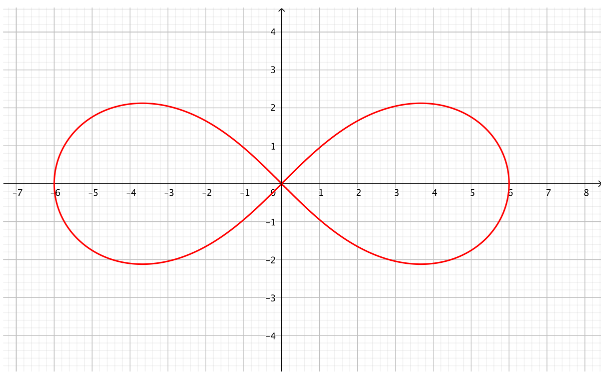
$$(x,y) = \frac{3\,a\cos(t)\,\sin(t)}{(\cos(t))^3 + (\sin(t))^3}\,(\cos(t),\sin(t))$$

s'obté una parametrització de la corba. En aquesta expressió cal notar uns quants fets importants:

- Des del punt de vista geomètric, aquesta construcció el que està mostrant és que en cada direcció del pla hi ha un únic punt de la corba i és d'aquesta manera que parametritzem la corba.
- Els punts apareixen associats a les *direccions* del pla no al raigs que surten de l'origen, això es manifesta en el fet que hi ha valors de t per als quals la r corresponent és negativa.
- En afegir mitja volta (π radians) al paràmetre t els sinus i cosinus canvien de signe i, per tant, apareix el mateix punt. Això significa que per descriure tota la corba n'hi ha prou amb un interval de t que cobreixi només mitja volta. (Això no deixa de ser una altra manifestació del mateix que apareix als punts anteriors).
- Quan $t = -\pi/4$ o $t = 3\,\pi/4$ el denominador de r es fa 0 i, per tant, l'expressió *tendeix a infinit*. Això significa que el millor interval per descriure la corba serà el que conté les t entre $-\pi/4$ i $3\,\pi/4$.

Podeu experimentar la situació a l'enllaç `https://ggbm.at/G3ZkvjTu`.

(d) $\boldsymbol{(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)}$



Com en els altres casos semblants, pensant $(x,y) = r\,(\cos(t),\sin(t))$ l'equació que defineix la corba s'escriu en funció de (r,t) com

$$r^4 = a^2\,r^2\left((\cos(t))^2 - (\sin(t))^2\right)$$

que es transforma immediatament en

$$r = a\,\sqrt{\cos(2\,t)}$$

i genera la parametrització

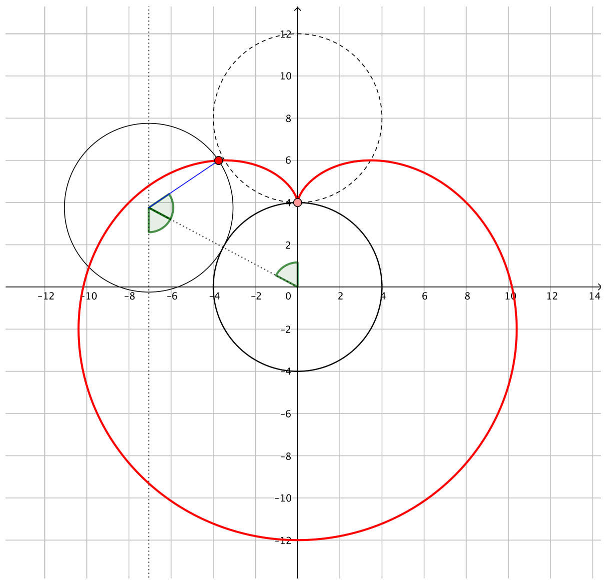
$$(x,y) = a\,\sqrt{\cos(2\,t)}\,(\cos(t),\sin(t))$$

És clar que aquesta expressió només té sentit quan $\cos(2\,t) \geq 0$ i això no es produeix quan t és a $(\pi/4, 3\,\pi/4)$ o a $(5\,\pi/4, 7\,\pi/4)$. Per tant, quan es pensa d'aquesta manera s'hauran de considerar per separat la parametrització del *llaç de la dreta* (per a $t \in [-\pi/4, \pi/4]$) i la del *llaç de l'esquerra* ($t \in [3\,\pi/4, 5\,\pi/4]$).

Exercici 3: Determineu una parametrització de la *cardioide*: corba caracteritzada per ser el lloc geomètric de l'òrbita d'un punt P d'una circumferència de radi a a mesura que gira sense lliscament sobre una altra circumferència fixada del mateix radi que l'anterior.

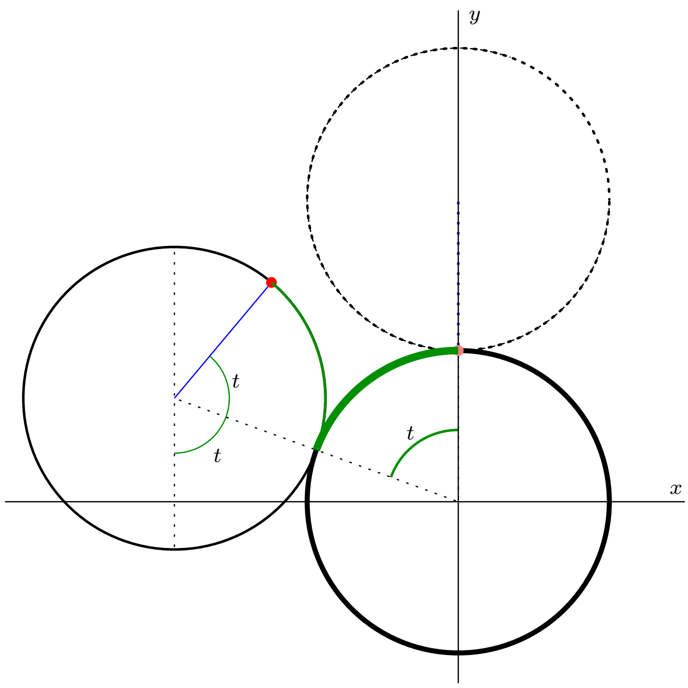
Solució:

Podeu veure un document GeoGebra amb la construcció d'una cardioide amb l'enllaç següent (feu clic sobre el dibuix):



Podreu manipular els paràmetres i prendre mesures.

En qualsevol cas, si es considera, com en l'animació, que la circumferència que va rodant comença a la part de dalt de tot i es segueix el punt en el que coincidien les dues circumferències, la situació després d'haver recorregut un arc d'angle t sobre la circumferència fixada serà com a l'esquema següent



On, potser, l'únic que cal explicar és que l'angle entre la recta que uneix els centres de les circumferències i la direcció vertical també val t ja que es tracta de l'angle que forma una secant entre dues paral·leles.

Vist això, la posició del centre de la circumferència que roda, després del gir corresponent a l'arc t, serà

$$C = (-2\,a\,\sin(t), 2\,a\,\cos(t))$$

i el *vector* que va des del centre fins a punt que s'està seguint serà

$$v = (a\,\sin(2\,t), -a\,\cos(2\,t))$$

De forma que la posició del punt vermell és

$$(x, y) = C + v = (-a\,(2\,\sin(t) + \sin(2\,t)), a\,(2\,\cos(t) - \cos(2\,t)))$$

Naturalment hi ha altres opcions que difereixen d'aquesta per la posició de les circumferències respecte els eixos, la posició relativa del punt inicial, etc.

Exercici 4: Siguin F_1 i F_2 dos punts del pla a distància $2\,c$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > c$. Posem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (semieix menor), $e = \dfrac{c}{a} < 1$ (excentricitat) i $p = \dfrac{b^2}{a}$ (paràmetre focal). L'el·lipse amb focus F_1 i F_2 i semieix major a és el lloc geomètric dels punts P del pla que verifiquen

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a$$

(a) Prenent el pol (origen de coordenades) en un dels dos focus i origen d'angles a la semirecta que l'uneix amb l'altre proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

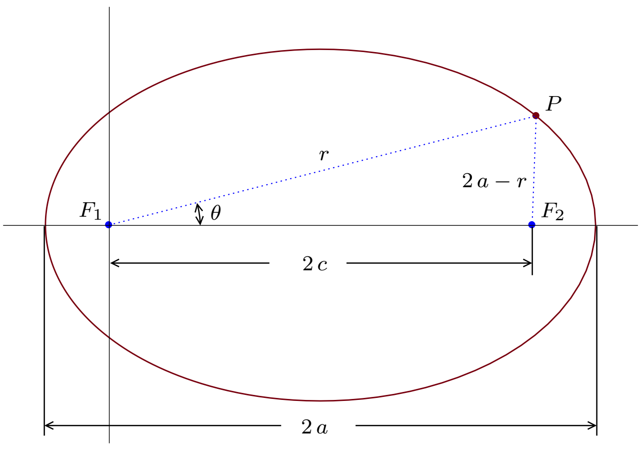
(b) Prenent coordenades cartesianes centrades en el punt mig de F_1F_2 (centre de l'el·lipse) i amb eix Ox a la semirecta OF_2 proveu que l'equació de l'el·lipse és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(c) Proveu que $\gamma(t) = (a\,\cos(t), b\,\sin(t))$ és una parametrització regular de l'el·lipse.

Solució:

(a) La situació correspon al l'esquema següent



Aleshores el T. del cosinus sobre el triangle F_1F_2P dóna la igualtat

$$(2\,a - r)^2 = (2\,c)^2 + r^2 - 2\,(2\,c)\,r\,\cos(\theta)$$

que serà equivalent a

$$4\,a^2 - 4\,a\,r + \boxed{r^2} = 4\,c^2 + \boxed{r^2} - 4\,c\,r\,\cos(\theta)$$

(que és lineal respecte r) i permet escriure

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\,\cos(\theta)} = \frac{(a^2 - c^2)/a}{1 - (c/a)\,\cos(\theta)}$$

Tenint en compte les definicions de b, p i e

$$r = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

(b) En el sistema de coordenades que es proposa, els focus són als punts $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ de forma que les distàncies d_1 i d_2 d'un punt (x, y) qualsevol a cada un d'ells compliran ${d_1}^2 = (x+c)^2 + y^2$, ${d_2}^2 = (x-c)^2 + y^2$. Com que la condició que s'ha de verificar per tal que un punt sigui de la el·lipse és

$$d_1 + d_2 = 2\,a$$

això és equivalent a

$$(2\,a - d_1)^2 = {d_2}^2$$

que donaria

$$4\,a^2 - 4\,a\,d_1 + {d_1}^2 = {d_2}^2$$

substituint els quadrats

$$4\,a^2 - 4\,a\,d_1 + x^2 + c^2 + 2\,c\,x + y^2 = x^2 + c^2 - 2\,c\,x + y^2$$

eliminant els termes repetits

$$a\,d_1 = a^2 + c\,x$$

tornant a fer quadrats

$$\begin{gathered} a^2\,{d_1}^2 = (a^2 + c\,x)^2 = a^4 + c^2\,x^2 + 2\,a^2\,c\,x \\ a^2\,\left(x^2 + c^2 + 2\,c\,x + y^2\right) = a^4 + c^2\,x^2 + 2\,a^2\,c\,x \\ (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,c^2 = a^2\,\left(a^2 - c^2\right) \\ b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \end{gathered}$$

Naturalment, aquesta és l'opció que utilitza els càlculs més simples. Però es pot utilitzar la forma polar dels punts de l'el·lipse que s'ha obtingut en l'apartat anterior i tenir en compte que d'aquesta manera es pot dir que els punts de la corba tenen coordenades de la forma

$$(x, y) = (-c, 0) + \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}\,(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

i fer les comprovacions corresponents.

(c) El vector tangent a la corba respecte aquesta parametrització serà

$$\gamma'(t) = (-a\,\sin(t), b\,\cos(t))$$

i les funcions sinus i cosinus mai s'anul·len simultàniament. Així doncs la parametrització és regular.

Exercici 5: Determineu (si es pot) una parametrització per l'arc de les corbes definides per

(a) $y = \log x$

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

(c) $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t\,\sin(t), 1, \mathrm{e}^t\,\cos(t))$

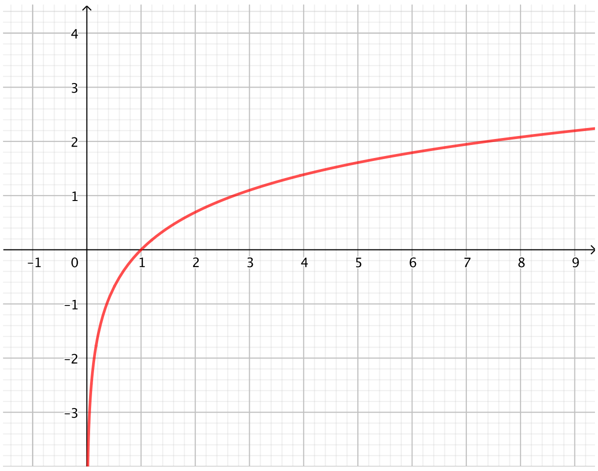
(d) $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$

(e) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$

(f) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Solució:

(a) $\boldsymbol{y = \log(x)}$



La longitud $s(x)$ de la corba des del punt $(1,0)$ fins al punt de coordenades $(x, \log(x))$ serà

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, dt$$

ja que el vector tangent s'expressa com $(1, 1/x)$ per a un valor arbitrari x del paràmetre. Amb una mica d'habilitat es pot veure que el valor d'aquesta integral serà

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, dt = \sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)$$

(La part dels logaritmes també es pot escriure en termes de $\operatorname{artanh}(y) = \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$).

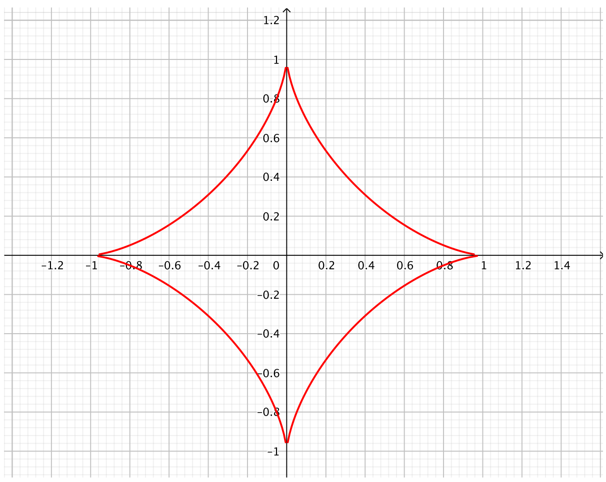
Això vol dir que la funció longitud $s(x)$ serà

$$s(x) = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)$$

(si no hi ha errors de transcripció).

No es podrà, doncs, donar una expressió de l'arc s en funció de la variable original x encara que sí que es pugui calcular de forma explícita la longitud.

(b) $\boldsymbol{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$



Si parametritzem la corba per $\alpha(t) = \left(a\,(\cos(t))^3, a\,(\sin(t))^3\right)$ el vector tangent serà

$$\alpha'(t) = \left(-3\,a\,\sin(t)\,(\cos(t))^2, 3\,a\,\cos(t)\,(\sin(t))^2\right)$$

i la seva norma

$$|\alpha'(t)| = 3\,a\,\sin(t)\,\cos(t)$$

Per tant, la longitud $s(t)$ de la corba α des del punt corresponent al valor 0 del paràmetre fins al corresponent al valor t serà

$$s(t) = \int_0^t 3\,a\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \frac{3\,a}{2}\,(\sin(t))^2$$

que proporciona la relació inversa

$$t(s) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)$$

Això fa que es pugui parametritzar en funció de l'arc s com

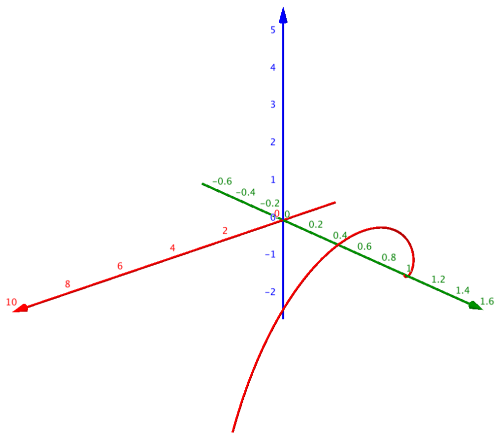
$$\alpha(s) = \left(a\,(\cos(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)))^3, a\,(\sin(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)))^3\right)$$

(De fet, s'hauria d'escriure $\alpha(t(s))$).

Tenint en compte les relacions entre sinus i cosinus

$$\alpha(s) = \left(a\,\left(1-\frac{2}{3\,a}\,s\right)^{3/2}, a\,\left(\frac{2}{3\,a}\,s\right)^{3/2}\right)$$

(c) $\boldsymbol{\alpha(t) = (\mathrm{e}^t\,\sin(t), 1, \mathrm{e}^t\,\cos(t))}$



El vector tangent serà

$$\alpha'(t) = \left(\cos(t)\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t\sin(t)\,,\,0,\,\cos(t)\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t\sin(t)\right)$$

i la seva norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$$

Això per met determinar que la longitud $s(t)$ de la corba entre els valors del paràmetre 0 i t serà

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{e}^x\,dx = \sqrt{2}\,(\mathrm{e}^t - 1)$$

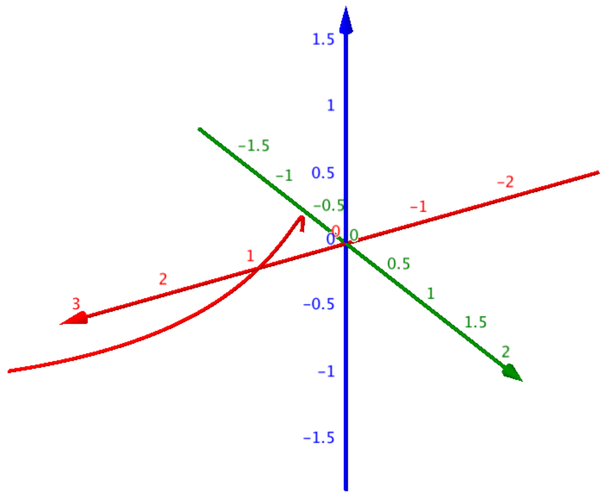
de forma que el paràmetre t serà, en funció de la longitud s,

$$t = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)$$

i es pot reparametritzar com

$$\alpha(s) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)\,\sin(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)), 1, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right)\,\cos(\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,s+1\right))\right)$$

(d) $\boldsymbol{\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)}$



El vector tangent és

$$\alpha'(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1)$$

La seva norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(\cosh(t))^2 + (\sinh(t))^2 + 1} = \sqrt{2}\, \cosh(t)$$

La longitud d'arc $s(t)$ entre 0 i t

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, \cosh(x)\, dx = \sqrt{2}\, \sinh(t)$$

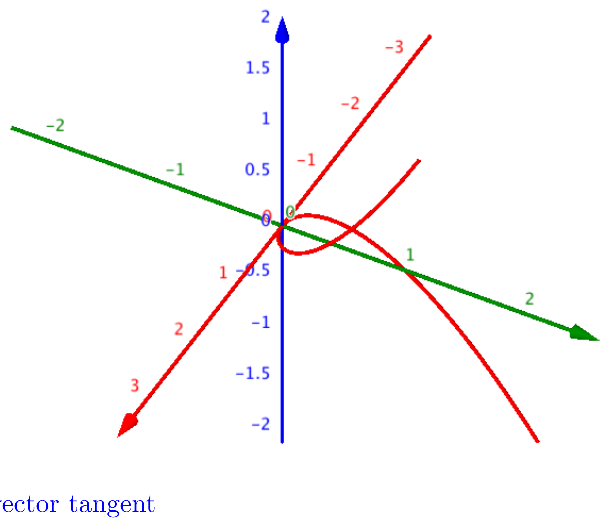
El paràmetre t en funció de l'arc s

$$t(s) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s\right)$$

I la reparametrització per l'arc

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{2}}\, , \frac{\sqrt{2}}{2}\, s, \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, s\right)\right)$$

(e) $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2, t^3)}$



En aquest cas es té un vector tangent

$$\alpha'(t) = (1, 2\,t, 3\,t^2)$$

amb norma

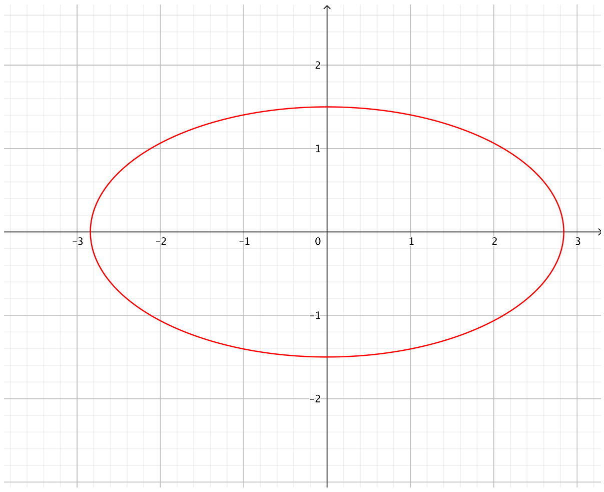
$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}$$

De forma que la longitud $s(t)$ fins a un cert punt es calcularà amb una integral del tipus

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4\,x^2 + 9\,x^4}\,dx$$

que no té manera d'expressar-se en termes de funcions elementals. Això significa que en aquest cas no hi ha manera de fer res mes.

(f) $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$



Una parametrització òbvia de la corba és

$$\alpha(t) = (a\,\cos(t), b\,\sin(t))$$

que tindrà com a vector tangent

$$\alpha'(t) = (-a\,\sin(t), b\,\cos(t))$$

amb norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2\,(\sin(t))^2 + b^2\,(\cos(t))^2}$$

Per a calcular la longitud $s(t)$ fins a un cert valor del paràmetre caldrà fer la integral

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\,(\sin(x))^2 + b^2\,(\cos(x))^2}\,dx$$

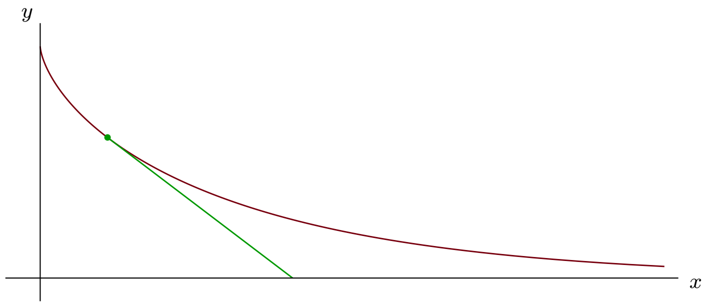
que tampoc és expressable en termes de funcions elementals si no s'està en el cas $a = b$ (circumferència). Per tant, ja no es pot fer res més.

Exercici 6: Parametritzeu la corba anomenada *tractriu*, caracteritzada geomètricament pel fet següent: per tot punt P de la corba, la distància entre aquest punt i el punt Q, d'intersecció entre la recta tangent a la corba en P amb l'eix d'abscisses, és constant i igual a 1. Es diu que és el camí que es veu obligat a fer un gos lligat a una corda, i que va tibant cap al nord, quan el seu amo es passeja cap a l'est. Doneu també una parametrització per l'arc de la *tractriu*.

Solució:

Si (x, y) és la posició sobre la corba en un instant qualsevol, el vector tangent a la corba serà (x', y'), la recta tangent $(x, y) + s\,(x', y')$ tallarà l'eix d'abscisses en el punt $(x - y\,x'/y', 0)$ (corresponent a $s = -y/y'$) la distància (al quadrat) d'aquest punt a la posició sobre la corba serà doncs

$$\left(y\,\frac{x'}{y'}\right)^2 + y^2$$



Com que aquest valor ha de ser constant (igual a 1 tot el temps) s'arriba a la condició

$$1 = \left(y \, \frac{x'}{y'} \right)^2 + y^2$$

Manipulant per separar variables quedarà *l'equació diferencial*

$$\frac{1 - y^2}{y^2} \, (y')^2 = (x')^2$$

A partir d'aquí ja es poden obtenir parametritzacions de la corba introduint variables que permetin fer la *integració* de l'equació. Però si la finalitat és obtenir una parametrització per l'arc, es pot afegir la condició

$$1 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{1 - y^2}{y^2} \, (y')^2 + (y')^2 = \left(\frac{y'}{y} \right)^2$$

Traient quadrats (i si s'espera una corba com la de l'esquema inicial)

$$\frac{y'}{y} = -1$$

i, per tant, respecte el paràmetre arc s l'expressió de y serà

$$y = \mathrm{e}^{-s}$$

(si també s'espera que el punt corresponent a $s = 0$ sigui el $(0, 1)$). Noteu que això implica que el recorregut s de la corba des de el punt $(1, 0)$ fins a un punt qualsevol $(x(s), y(s))$ serà igual a $-\log(y) = \log(1/y)$. Per acabar d'obtenir la parametrització *només* cal recuperar l'expressió de x' i fer la integral corresponent. Imposant que x' ha de ser positiva com a l'esquema i que $x(0) = 0$ això serà

$$x' = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \, y'$$

que, per a $y = \mathrm{e}^{-s}$ donarà

$$x' = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\,s}} \Longrightarrow x = \int \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2\,s}} \, ds$$

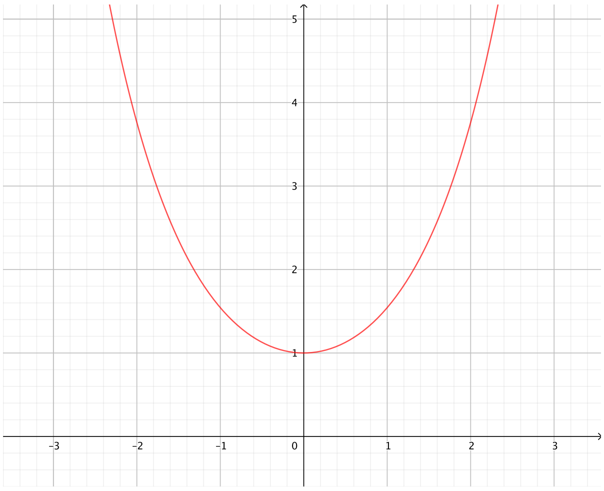
D'aquí s'arribarà a (si no hi ha errors de transcripció)

$$x = -\sqrt{1 - \mathrm{e}^{(-2\,x)}} + \frac{1}{2} \log \left(1 + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{(-2\,x)}} \right) - \frac{1}{2} \log \left(1 - \sqrt{1 - \mathrm{e}^{(-2\,x)}} \right)$$

(la part dels logaritmes es pot donar en termes de les funcions inverses de les funcions hiperbòliques).

Exercici 7: La corba plana donada per la gràfica de la funció $y = \cosh(x)$ s'anomena *catenària*. Parametritzeu-la per l'arc.

Solució:



El vector tangent a una corba de la forma $(x, \cosh(x))$ serà $(1, \sinh(x))$ amb norma $\sqrt{1 + (\sinh(x))^2} = \cosh(x)$.

Per tant, la funció longitud $s(x)$ serà

$$s(x) = \int_0^x \cosh(t)\, dt = \sinh(x)$$

de forma que la parametrització de l'arc s'obtindrà prenent $x = \operatorname{arsinh}(s)$ i serà de la forma

$$\alpha(s) = (\operatorname{arsinh}(s), \sqrt{1 + s^2}\ )$$

(ja que $\cosh(t) = \sqrt{1 + (\sinh(t))^2}$).