Aquesta igualtat ens dóna directament (calculant la inversa, que és igual a la transposada, ja que estem manipulant matrius ortogonals)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Apliquem ara M a la hèlix i trobem la corba demanada

$$\gamma(t) = M \begin{pmatrix} \frac{3}{25}\cos(t) - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25}\sin(t) \\ -\frac{4}{25}t \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 9\sin(t) + 16\,t \\ -15\cos(t) + 15 \\ 12\sin(t) - 12\,t \end{pmatrix}$$

Que, un cop reparametritzada per l'arc, és a dir posant $t = 5\,s$, ens dóna exactament la corba que ha aparegut abans.

Exercici 28: [13]Trobeu les hèlixs esfèriques.

Solució: Per estar sobre una esfera de radi a,

$$\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4\tau^2} = a^2,$$

amb $k = k(s), \tau = \tau(s)$ (exercici 24). O, en funció del radi de curvatura $\rho = 1/k$,

$$\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2} = a^2.$$

Per ser hèlix $1/\tau = \rho\tan(\alpha)$ per a una certa constant α. Substituint tenim

$$\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\tan(\alpha) = ds.$$

Integrant obtenim

$$-\sqrt{a^2-\rho^2}\,\tan(\alpha) = s + C.$$

Si prenem $s = 0$ en el punt on $\rho = a$ obtenim les equacions intrínseques de les hèlixs esfèriques

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{1}{k^2} &= s^2\cot^2(\alpha) \\ s^2 + \frac{1}{\tau^2} &= a^2\tan^2(\alpha) \end{aligned}$$

Observem que la primera d'aquestes equacions és (si la corba fos plana) l'equació intrínseca de les epicicloides (exercici 35).

Això ens suggereix de projectar l'hèlix sobre un pla.

[13] Fet a Seminaris.

Considerem l'hèlix esfèrica $\gamma(s)$, parametritzada per l'arc, amb eix l'eix de les z, és a dir,

$$\langle \gamma'(s), e \rangle = \cos(\alpha) = constant, \quad e = (0,0,1).$$

Si la projectem sobre el pla $z = 0$ obtenim la corba

$$\gamma_1(s) = \gamma(s) - \langle \gamma(s), e \rangle\, e.$$

Deduïm

$$\|\gamma_1'(s)\| = \sin(\alpha).$$

Per tant, el paràmetre arc s_1 de $\gamma_1(s)$ és

$$s_1(s) = s(\sin(\alpha))$$

i el radi de curvatura

$$\rho_1(s) = \rho(s)(\sin^2(\alpha))$$

Per tant es compleix que

$$\rho_1^2(s) + s_1^2 \cos^2(\alpha) = a^2 \sin^4(\alpha)$$

i per tant la corba projectada és una epicicloide. Com tenim l'expressió explícita de les epicicloides (exercici 35) podem trobar l'equació explícita de les hèlixs sense més que pujar aquestes equacions a l'esfera $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$.

Amb la notació de l'exercici 35 l'expressió anterior s'escriu

$$\frac{s_1^2}{A^2} + \frac{\rho_1^2}{B^2} = 1$$

amb

$$A = a\tan(\alpha)\sin(\alpha), \quad B = a\sin^2(\alpha).$$

I eliminant R i r en funció de Ai B a les fórmules de l'exercici 35 tenim

$$R = \frac{AB^2}{A^2 - B^2} = a\cos(\alpha)$$

aquest és el radi de la circumferència que genera la epicicloide. Geomètricament ja es veu ja que aquest cercle ha de ser la projecció del cercle on arriben les epicicloides. Això es veu directament descomponent $\gamma'(s) = \lambda v_\theta + \mu v_\varphi$, on v_θ, v_φ són les direccions unitàries en les direccions del pa ral·lel i meridià en el punt $\gamma(s)$. Tenim $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Llavors $\langle T, e \rangle = \mu\cos(\pi/2 - \varphi) = \cos(alpha)$ on φ és la col·latitud del punt. Per tant φ ha de ser més gran que $\pi/2 - \alpha$. Per tant, les hèlixs esfèriques no poden supera el paral·lel de latitud α i per tant de radi $a\cos(\alpha)$.

Exercici 29: Considerem la corba parametritzada $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Trobeu-ne la curvatura i la torsió. Demostreu que $\alpha(t)$ és una hèlix.
2. Trobeu el paràmetre arc de $\alpha(t)$.

Solució:

1. Fent els càlculs, tenim:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 1) \\
\alpha''(t) &= (\cosh(t), \sinh(t), 0) \\
\alpha'''(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 0) \\
||\alpha'(t)|| &= \sqrt{\cosh(2t) + 1} = \sqrt{2}\cosh(t) \\
\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= (-\sinh(t), \cosh(t), -1) \\
||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|| &= \sqrt{2}\cosh(t) \\
k(t) &= \frac{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{1}{2\cosh^2(t)} \\
\tau(t) &= -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||^2} = \frac{-1}{2\cosh^2(t)}
\end{aligned}$$

   Observem que $k(t)/\tau(t) = -1$, i per tant la corba és una hèlix.

   També es pot comprovar directament utilitzant la definició d'hèlix. En efecte, si prenem la direcció $\vec{v} = (0, 1, 0)$, l'angle entre $\alpha'(s)$ i $\vec{v}$ és constant i igual a $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

2. Calculem el paràmetre arc de α,

$$s(t) = \int_0^t ||\alpha'(x)||dx = \int_0^t \sqrt{2}\cosh(x)dx = \sqrt{2}\sinh(t)$$

   i per tant $t = \operatorname{argsinh}(s/\sqrt{2})$.

4 Exercicis complementaris de corbes planes

Exercici 30: Trobeu una corba parametritzada $\alpha(t)$ que tingui per traça el cercle $x^2 + y^2 = 1$ i tal que $\alpha(t)$ el recorri en el sentit de les agulles del rellotge amb $\alpha(0) = (0, 1)$.

Solució: La parametrització més natural de la circumferència unitat és $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Amb aquesta parametrització la circumferència es recorre en el sentit positiu dels angles, és a dir en contra de les agulles del rellotge, començant pel punt $(1, 0)$. Si volem recórrer-la en sentit contrari només hem de invertir la direcció del paràmetre t, és a dir, posar $-t$ en lloc de t. Així, la parametrització $t \mapsto (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$ comença també en el punt $(1, 0)$ però descriu la circumferència en el sentit de les agulles del rellotge.

Finalment, si volem una parametrització que comenci en un altre punt diferent del $(1, 0)$ només hem de fer una translació en el paràmetre t. Per exemple, per que $\alpha(0) = (0, 1)$ ens podem quedar amb la mateixa parametrització que ja tenim $(\cos t, -\sin t)$ però amb $t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi]$. Si ho volem reparametritzar entre 0 i 2π només hem de posar $T = t - \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi]$, i tindrem

$$\alpha(T) = (\cos(T + \frac{3\pi}{2}), -\sin(T + \frac{3\pi}{2})) = (\sin T, \cos T).$$

Exercici 31: Considerem la corba parametritzada $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - 2)$.

1. Determineu si els punts $(-1, -1)$, $(4, 2)$ i $(1, 2)$ estan sobre la seva traça.
2. Trobeu els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades.
3. Trobeu una equació que defineixi el conjunt imatge.

Solució: En primer lloc, observem que $\alpha(t) = (t(t^2 - 2), t^2 - 2)$.

(a) $(-1, -1)$ pertany a la imatge de α. En efecte, les equacions $t^2 - 2 = -1$ i $t(-1) = -1$ tenen per solució el paràmetre $t = 1$, és a dir, $\alpha(1) = (-1, -1)$. De la mateixa manera $\alpha(2) = (4, 2)$. En canvi, el punt $(1, 2) \notin \operatorname{Im} \alpha$ ja que el sistema de equacions $t^2 - 2 = 2$ i $t \cdot 2 = 1$ no té solució.

(b) La intersecció de la imatge de α amb l'eix de les x $(y = 0)$ ve donada pels paràmetres t que fan que $t^2 - 2 = 0$, és a dir, per $t = \pm\sqrt{2}$, i $\alpha(\pm\sqrt{2}) = (0, 0)$. D'altra banda, la intersecció amb l'eix de les y $(x = 0)$ s'obté al resoldre $t(t^2 - 2) = 0$ i consisteix per tant en l'origen: $\alpha(\pm\sqrt{2}) = (0, 0)$ i en $\alpha(0) = (0, -2)$.

(c) Tenim que $\frac{x(t)}{y(t)} = t$, d'on $\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 = y(t)$. De manera que la imatge està continguda en el conjunt $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 2y^2 - y^3 = 0\}$. D'altra banda, tot punt (x, y) de C compleix automàticament que $y \geq -2$, de manera que podem prendre $t = \sqrt{y + 2}$ i tenim $\alpha(t) = (x, y)$, i.e. la imatge de α no només està continguda a C si no que és igual a C.

Exercici 32 (Trocoide): Trobeu una parametrització de la *trocoide*: corba caracteritzada per ser l'òrbita d'un punt P situat a una distància a del centre d'una circumferència de radi b quan aquesta roda sense lliscament sobre una recta fixada:

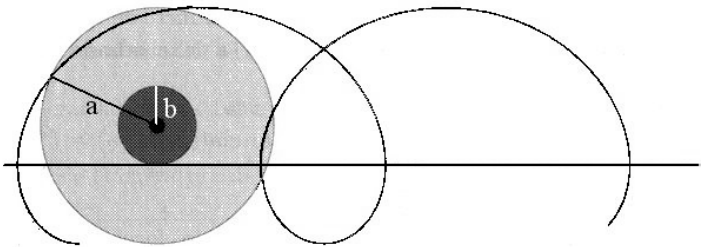


Figura 1: Trocoide amb $a > b$

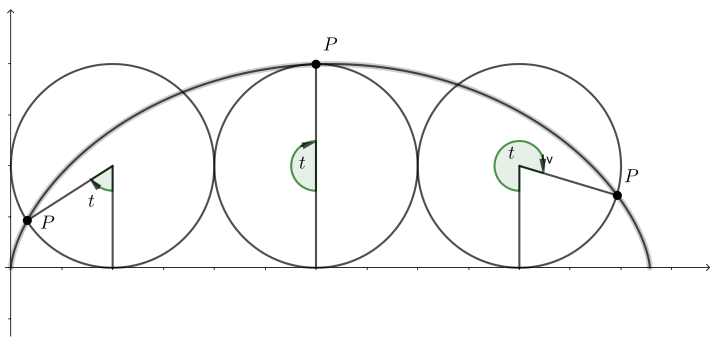
En el cas $a = b$ s'anomena *cicloide*. Calculeu el paràmetre arc de la *cicloide*.

Solució: Comencem buscant una parametrització de la trocoide. La parametrització del centre de la circumferència és $t \mapsto (bt, b)$. Naturalment el factor que multiplica la t no és necessari però ens simplificarà els càlculs, el motiu és que d'aquesta forma t representa l'angle de gir de la circumferència (vegeu el dibuix de més avall) i així quan t varia entre 0 i 2π la circumferència a fet una volta completa. Aleshores un punt P situat a distància a del centre i fixat a aquest per mitjà d'un radi té una posició relativa al centre donada per $t \mapsto (-a\sin(t), -a\cos(t))$. Així doncs la parametrització demanada és

$$\alpha(t) = (bt - a\sin(t), b - a\cos(t)).$$

Per $a = b$ tenim la cicloide

$$\alpha(t) = a(t - \sin(t), 1 - \cos(t)). \tag{7}$$



Paràmetre arc de la cicloide. Com que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= a(1 - \cos(t), \sin(t)) \\ \|\alpha'(t)\| &= a\sqrt{2(1 - \cos(t))}, \end{aligned}$$

el paràmetre arc és

$$s(t) = a\int_0^t \sqrt{2(1-\cos(x)}dx = 2a\int_0^t \sqrt{(\sin^2(\frac{x}{2})}dx = 4a(1-\cos(t/2)).$$

En particular, la longitud d'un arc de cicloide és $s(2\pi) = 8a$, resultat obtingut per Christoffer Wren el 1658.

Exercici 33 (**Cicloide com isocrona**[14]**):** A *Moby Dick* de Herman Melville (1851) trobem la següent cita:

Quan no s'utilitzen, aquestes calderes es conserven considerablement netes. A vegades les poleixen amb sabó de sastre i sorra fins que brillen per dins com ponxeres de plata. Durant les guàrdies nocturnes, alguns vells mariners cínics s'hi entaforen, s'hi ajoquen i fan una becadeta. Quan els mariners es dediquen a polir-les -un home a cada caldera, tocar a tocar- es passen moltes comunicacions confidencials per damunt els llavis de ferro. També és un lloc adient per a profundes meditacions matemàtiques. Fou dins la caldera de mà esquerra del Pequod, amb el sabó de sastre que m'envoltava per totes bandes, que per primera vegada em va impressionar el fet remarcable que, en geometria, tots els cossos que llisquen al llarg de la corba cicloide*, el meu sabó de sastre per exemple, baixen en el mateix espai de temps des de qualsevol punt.*

(La destil·leria, Moby Dick)

Anem a verificar aquesta propietat de la qual ens parlen en forma de problema. S'anomena cicloide invertida una cicloide en la qual s'han canviat de signe les coordenades y dels punts de la corba. Volem comprovar que en una cicloide invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

(a) Comproveu que la cicloide invertida (de paràmetre $a = 1$) està donada per $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t - 1)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$. Dibuixeu-la i comproveu que el punt més baix correspon al paràmetre $t = \pi$. Verificarem a continuació que en una *cicloide* invertida el temps que triga un cos que cau lliscant per la corba per efecte de la gravetat (en particular, amb velocitat inicial nul·la) sense fregament en arribar al punt més baix és independent del punt de partida.

Per a això fem els següents passos:

(b) Suposem que un cos llisca (velocitat inicial zero i sense fregament) sobre la cicloide des del punt $\gamma(t_0)$ fins al punt $\gamma(t)$. Calculeu la velocitat $v(t)$ amb que arriba aquest cos al punt $\gamma(t)$.

(Indicació: Recordeu la llei de conservació de l'energia i les expressions de l'energia potencial i cinètica, $E_p = mgh$ i $E_c = mv^2/2$ respectivament).

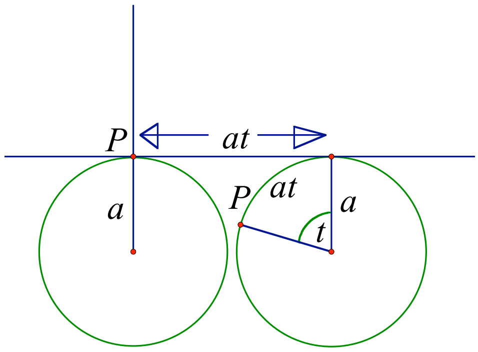
(c) Calculeu la distància recorreguda entre $\gamma(t_0)$ i $\gamma(t)$.

(d) Sigui $\tau = \tau(t)$ el temps transcorregut per anar de $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$. Observem doncs que $\tau(t_0) = 0$. Calculeu $\tau(\pi)$ (temps d'arribada des de $\gamma(t_0)$ al punt més baix) i comproveu que no depèn de t_0.

[14] La *cicloide* també verifica que és la *braquistocrona*, és a dir, la corba al llarg de la qual una partícula llisca sota l'acció de la gravetat i sense fregament en un temps mínim d'un punt A a un punt B situats en verticals diferents (vegeu *Aventuras Matemáticas*, Miguel de Guzmán, Ed. Labor 1988).

Solució:

(a) Tal com es veu directament a la figura (relacionem les coordenades (x, y) de P amb les del centre de la circumferència)



la cicloide invertida està parametritzada per

$$\begin{aligned} x &= at - a\sin t \\ y &= a\cos t - a \end{aligned}$$

que escrivim $\gamma(t) = a(t - \sin(t), \cos(t) - 1)$. Com era d'esperar no és més que l'equació 7 canviant y per $-y$.

(b) Igualant en els punts $\gamma(t_0)$ i $\gamma(t)$ la suma de les energies cinètica i potencial tenim $mgh = mv(t)^2/2$, és a dir $v(t) = \sqrt{2gh}$. Hem usat que en $\gamma(t_0)$ la velocitat inicial, i per tant l'energia cinètica en aquest punt, és zero. I h és la distància vertical entre aquest punts (diferència d'alçades). Per tant, $h = a(\cos(t_0) - 1) - (\cos(t) - 1)) = a(\cos(t_0) - \cos(t))$. Així que $v(t) = \sqrt{2ga(\cos(t_0) - \cos(t)}$.

(c) La distància recorreguda pel cos entre els punts $\gamma(t_0)$ i $\gamma(t)$ és

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} a\sqrt{1 + \cos^2(t) - 2\cos(t) + \sin^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} a\sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt = \\ &= \int_{t_0}^{t} 2a\sin(\frac{t}{2})\, dt = 4a\cos\frac{t_0}{2} - 4a\cos(\frac{t}{2}). \end{aligned}$$

(d) La derivada respecte el temps de l'espai recorregut dóna la velocitat:

$$\begin{aligned} \frac{ds(t(\tau))}{d\tau} &= 2a\sin(\frac{t}{2})_{t=t(\tau)}\frac{dt}{d\tau} = v(t(\tau)) = \sqrt{2ga(\cos(t_0) - \cos(t(\tau)))} \\ &= 2\sqrt{ga}\sqrt{\cos^2(\frac{t_0}{2}) - \cos^2(\frac{t(\tau)}{2})}. \end{aligned}$$

És a dir, tenim l'equació diferencial

$$\frac{2a\sin\frac{t(\tau)}{2}}{2\sqrt{ga}\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t(\tau)}{2}}}\frac{dt}{d\tau} = 1.$$

Per tant, integrant respecte τ, s'obté que el temps que tarda el cos en baixar des de la posició $\gamma(t_0)$ fins al punt més baix $\gamma(\pi)$ és

$$\begin{aligned}
\tau(\pi) &= \int_0^{\tau(\pi)} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\sin\frac{t(\tau)}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t(\tau)}{2}}} \frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t}{2}}}\, dt = \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\cos\frac{t_0}{2}}^{0} \frac{-2}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - u^2}}\, du = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\cos\frac{t_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\cos\frac{t_0}{2}}\right)^2}} \frac{du}{\cos\frac{t_0}{2}} = \\
&= 2\sqrt{\tfrac{a}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.
\end{aligned}$$

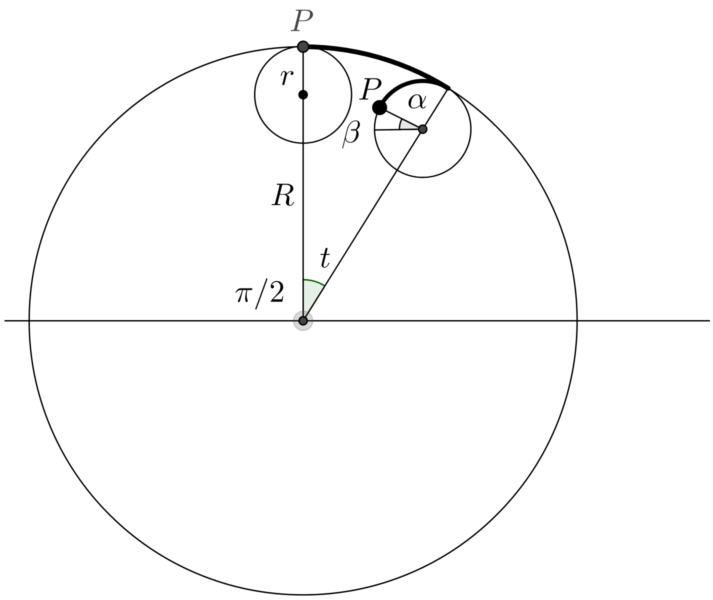
Com es veu, el temps de caiguda només depèn del radi de la circumferència que defineix la cicloide i no depèn de la posició inicial del cos.

Exercici 34: Parametritzeu les hipocicloides: la corba descrita per un punt d'un cercle de radi r que gira sense lliscar a l'interior d'un cercle més gran de radi $R = kr$.

Solució:

$$\begin{aligned}
x(t) &= r(k-1)\sin(t) - r\sin((k-1)t) \\
y(t) &= r(k-1)\cos(t) + r\cos((k-1)t)
\end{aligned}$$

Posant $k = m/n$ amb m, n coprimers, obtindem una hypocycloide tancada de paràmetre t que variarà a l'interval $[0, 2n\pi]$.



Les coordenades del centre del cercle petit són $((R-r)\sin(t), (R-r)\cos(t))$. Per trobar les coordenades de P hem de sumar $(r\cos\beta, r\sin\beta)$. Però $Rt = r\alpha$ i $\beta + \alpha = \pi/2 + t$.

Observeu que per $k = 4$ obtenim l'astroide. Recordeu que $\sin(3t) = 3\sin(t) - 2\sin^3(t)$.

Exercici 35 (Epicicloide)**:** Trobeu l'equació intrínseca de les epicicloides.

Solució: Quan una circumferència de radi r gira al voltant d'una circumferència de radi $R > r$, exteriorment a ella, la trajectòria de qualsevol dels seus punts es diu epicicloide. Els mateixos arguments fets en el problema anterior per a les hipocicloides porte a que les equacions de les epicicoides són

$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\sin(t) - r\sin(\frac{R+r}{r}t) \\ y(t) &= (R+r)\cos(t) - r\cos(\frac{R+r}{r}t) \end{aligned}$$

Càlculs senzills en diuen que

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4(R+r)^2\sin^2(\frac{Rt}{2}r)$$

d'on el paràmetre arc $s(t)$ i el radi de curvatura $\rho(t)$estan donats per

$$\begin{aligned} s(t) &= 4\frac{r(R+r)}{R}\cos(\frac{Rt}{2r}) \\ \rho(t) &= \frac{4r(R+r)}{R+2r}\sin\frac{Rt}{2r} \end{aligned}$$

d'on, clarament,

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{\rho(s)^2}{B^2} = 1,$$

amb $A = \frac{4r(R+r)}{R}$, $B = \frac{4r(R+r)}{R+2r}$. Com la curvatura determina la corba aquesta és l'equació intrínseca de les epicicloides.

Exercici 36: Recordem que per una corba plana $\gamma(s)$, la definició de curvatura és amb signe de tal manera que si $\gamma(s)$ està parametritzada per l'arc llavors

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)).$$

(a) Sigui $\kappa : I \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable i siguin $s_0, s_1, s_2 \in I$. Si posem $\theta(s) = \int_{s_0}^{s}\kappa(u)du$, comproveu que tota corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametritzada per l'arc i amb curvatura igual a aquesta funció donada $\kappa(s)$, es pot escriure, respecte d'una certa referència ortonormal, de la forma

$$\gamma(s) = \Big(\int_{s_1}^{s}\cos\theta(u)du, \int_{s_2}^{s}\sin\theta(u)du\Big).$$

(b) Observeu que un canvi en les constants s_0, s_1, s_2 indueix un moviment rígid (rotació més translació) en la imatge.

(c) Deduïu que tota corba plana de curvatura constant no nul·la és una circumferència.

(d) Sigui $\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = k(s)$. Demostreu que la traça de γ és simètrica respecte de la recta normal de γ en $\gamma(0)$.

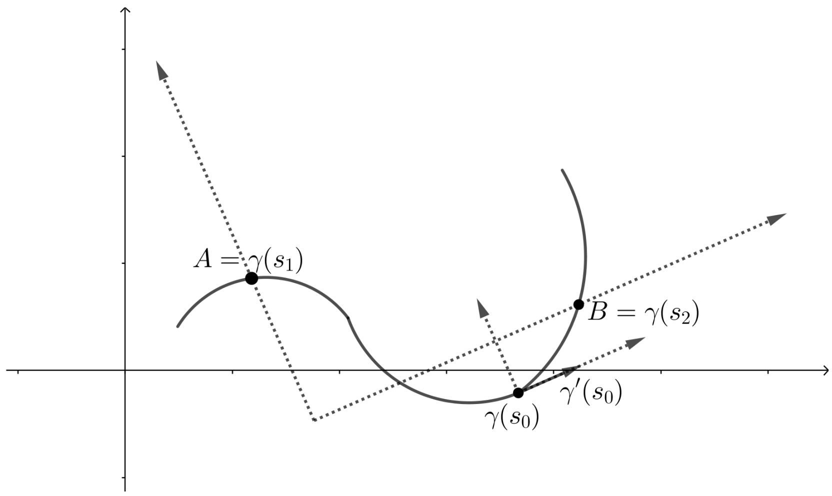
(e) Sigui $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ tal que la seva curvatura verifica $k(-s) = -k(s)$. Demostreu que la traça de α és simètrica respecte del punt $\alpha(0)$.

Solució:

(a) Abans de començar observem que $\theta(s_0) = 0$ i que $\theta'(s) = k(s)$. Observem també que si podem escriure γ com s'indica a l'enunciat, llavors tindríem $\gamma(s_1) = (0, -)$, $\gamma(s_2) = (-, 0)$, i $\gamma'(s_0) = (\cos\theta(s_0), \sin\theta(s_0)) = (1, 0)$.

Amb això present tornem a l'enunciat. Sigui $\gamma : I \to \mathbb{R}$ una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $\kappa(s)$. Siguin $A = \gamma(s_1)$ i $B = \gamma(s_2)$. Considerem uns nous eixos ortogonals de coordenades, que tinguin l'origen en $\gamma(s_0)$ i eix de les $x's$ en la direcció $\gamma'(s_0)$. Més concretament situem en $\gamma(s_0)$ la base ortonormal directa $(T(s), \widehat{N}(s))$ prenent aquestes direccions respectivament com les direccions positives dels nous eixos x, y.

A continuació els traslladem paral·lelament de manera que A estigui sobre el nou eix de les $y's$ i B sobre el nou eix de les $x's$.



Llavors, respecte dels nous eixos, tenim: $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ amb $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, de manera que el vector normal és $\widehat{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$, (vegeu l'exercici 12).

Sabem que en aquestes circumstàncies existeix una *determinació de l'argument*[15], és a dir, una funció $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos\alpha(s) \\ y'(s) &= \sin\alpha(s) \end{aligned}$$

En particular $\langle \gamma'(s), (1, 0)\rangle = x'(s) = \cos\alpha(s)$ i per tant $x''(s) = -\alpha'(s)\sin\alpha(s)$.

Com $\gamma''(s) = \kappa(s)\widehat{N}(s)$ (vegeu novament l'exercici 12) tenim $x''(s) = -\kappa(s)y'(s) = -\kappa(s)\sin\alpha(s)$, i per tant $\kappa(s) = \alpha'(s)$, resultat ben conegut (la curvatura és la velocitat de gir de la tangent respecte el paràmetre arc).[16]

Per tant, $\alpha'(s) = \theta'(s)$, i com $\alpha(s_0) = \theta(s_0) = 0$, ha de ser $\theta(s) = \alpha(s)$.

Llavors tenim

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = (\int_{s_1}^{s} x'(u)du, \int_{s_2}^{s} y'(u)du)$$

[15] Donades dues funcions $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables definides en un obert I de $\mathbb{R}$, tals que $a^2 + b^2 = 1$, existeix $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(t) = \cos(\theta(t))$ i $b(t) = \sin(\theta(t))$, $\forall t \in I$.

[16] Si no s'introdueix la curvatura amb signe només podem dir $k(s) = |\alpha'(s)|$.

ja que $x(s_1) = y(s_2) = 0$. Per tant

$$\gamma(s) = (\int_{s_1}^{s} x'(u)du, \int_{s_2}^{s} y'(u)du) = (\int_{s_1}^{s} \cos\alpha(u)du, \int_{s_2}^{s} \sin\alpha(u)du),$$

i com $\alpha(u) = \theta(u)$ hem acabat.

(b) Ça c'est tout à fait évident. En efecte, canviar s_0 vol dir canviar la direcció de l'eix de les $x's$, és a dir, fer una rotació. Aquests eixos després s'han de traslladar per tal de que passin per $A = \gamma(s_1)$ i $B = \gamma(s_2)$, punts que depenen, com es veu, de s_1 i s_2. Hem demostrat, doncs, que dues corbes planes amb la mateixa funció de curvatura difereixen en un moviment rígid ja que totes dues es poden escriure exactament igual però sobre referències ortonormals diferents.

(c) Si $\kappa(s)$ és constant, tenim $\theta(s) = \kappa(s - s_0)$ amb κ el valor constant de la curvatura. En particular

$$\gamma(s) = (\int_{s_1}^{s} \cos\kappa(u - s_0)du, \int_{s_2}^{s} \sin\kappa(u - s_0)du)$$

Integrant tenim

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{\kappa}\sin\kappa(s - s_0) + a \\ y(s) &= -\frac{1}{\kappa}\cos\kappa(s - s_0) + b \end{aligned}$$

per a certes constants $a, b \in \mathbb{R}$.

Per tant la corba està continguda a la circumferència

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (\frac{1}{\kappa})^2.$$

(d) Fent un gir i una translació podem suposar que $\alpha(0) = (0, 0)$ i $\alpha'(0) = (1, 0)$, de manera que la recta normal per $\alpha(0)$ és l'eix de les y. Equival a agafar $s_0 = s_1 = s_2 = 0$. Calculem en primer lloc $\theta(-s)$ utilitzant que $\kappa(-u) = \kappa(u)$.

$$\theta(-s) = \int_0^{-s} \kappa(u)du = -\int_{-s}^{0} \kappa(u)\, du = -\int_{-s}^{0} \kappa(-u)du$$

fent el canvi de variable $w = -u$ tenim

$$\theta(-s) = -\int_{-s}^{0} \kappa(-u)du = \int_{s}^{0} \kappa(w)\, dw = -\int_0^{s} \kappa(w)dw = -\theta(s)$$

I posem ara

$$\begin{aligned} x(-s) &= \int_0^{-s} \cos\theta(u)du = \int_0^{-s} \cos(-\theta(-u))\, du \\ &= \int_0^{-s} \cos(\theta(-u))\, du = -\int_0^{s} \cos(\theta(w))dw = -x(s), \quad (w = -u) \\ y(-s) &= \int_0^{-s} \sin\theta(u)du = \int_0^{-s} \sin(-\theta(-u))\, du \\ &= -\int_0^{-s} \sin(\theta(-u))\, du = \int_0^{s} \sin(\theta(w))dw = y(s), \quad (w = -u) \end{aligned}$$

Per tant, α és simètrica respecte de l'eix de les y.

(e) De la mateixa manera es veu que si $\kappa(-s) = -\kappa(s)$ aleshores $\theta(-s) = \theta(s)$ i per tant, $x(-s) = -x(s)$ i $y(-s) = -y(s)$, de manera que α és llavors simètrica respecte de l'origen $(0,0) = \alpha(0)$.

Exercici 37: Trobeu una corba $\gamma(s)$ parametritzada per l'arc, amb curvatura

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

i tal que $\gamma(0) = (0,0)$ i $\gamma'(0) = (1,0)$. Podríeu dir de quin tipus de corba es tracta? (podeu utilitzar que $\int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \operatorname{arcsinh}(s) + c$).

Solució: Utilitzarem el problema 36 amb $s_0 = s_1 = s_2 = 0$. Prenem

$$\theta(s) = \int_0^s k(s)\, ds = \arctan s,$$

i sabem directament que la corba és

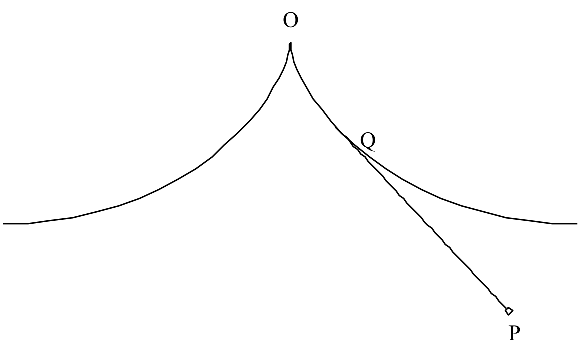
$$\gamma(s) = (\int_0^s \cos(\arctan u) du, \int_0^s \sin(\arctan u) du) = (\operatorname{arcsinh} s, \sqrt{1+s^2} - 1).$$

És doncs la catenària, concretament l'estudiada en el problema 7, traslladada segons el vector $(0,-1)$.

Exercici 38: Rellotges de pèndol, Huygens, 1673. Per evitar que les variacions d'amplitud en les oscil·lacions d'un pèndol provoquessin un error en la mesura del temps, Huygens va idear un sistema basat en les propietats de la *cicloide*. Considerem una cicloide invertida de paràmetre a, és a dir

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(\cos t - 1)), \quad -\pi < t < \pi.$$

Suposem que aquesta corba és rígida, construïda amb un determinat metall. Del vèrtex O de la cicloide (vegeu la figura) pengem un cordill amb un pes a l'altre extrem (punt P de la figura).



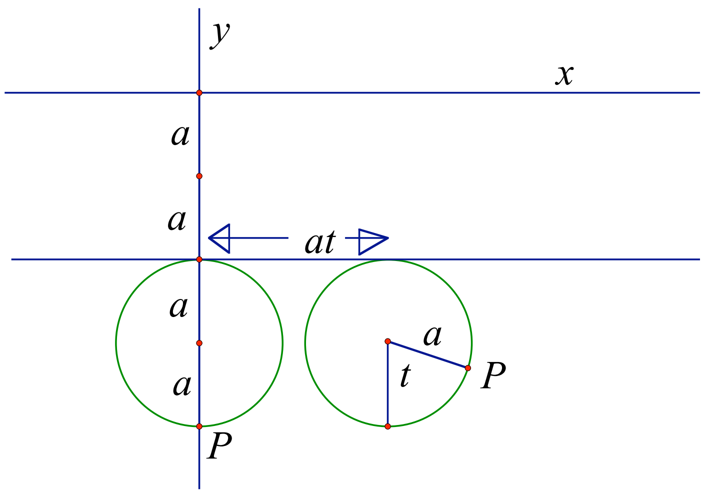
El cordill pot oscil·lar, però en el seu moviment no pot travessar mai la cicloide metàl·lica. A la figura hem designat per Q el punt de la cicloide en què el cordill deixa d'estar recolzat sobre la cicloide. La recta determinada per Q i P és tangent a la cicloide. Llavors la corba que descriu l'extrem lliure del pèndol és ortogonal a les rectes tangents; per tant, és una involuta de la *cicloide*. Si s'agafa un cordill de longitud $4a$ aquesta corba és una *cicloide*. Llavors el semi període del pèndol (el temps que triga en anar des d'un extrem a la posició d'equilibri) és independent de l'amplitud degut a que és el temps que tarda un cos en caiguda lliure sobre una *cicloide* en anar al punt més baix. Calculeu la corba descrita per l'extrem del pèndol i comproveu que és una *cicloide*.

Solució: El vector tangent és $\gamma'(t) = a(1 - \cos t, -\sin t)$ i té norma $||\gamma'(t)|| = 2a\sin(t/2)$. La longitud de la cicloide des del vèrtex O a un punt $\gamma(t)$ ve donada per $L(t) = 4a(1 - \cos(t/2))$ (fórmula obtinguda en el problema 33, apartat c), amb $\alpha = 0$).

Si el cordill té longitud $4a$ vol dir que la parametrització de la corba descrita per l'extrem del pèndol ve donada per

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \gamma(t) + \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}(4a - L(t)) \\
&= a(t - \sin(t), \cos(t) - 1) + \frac{2a\cos(t/2)}{\sin(t/2)}(1 - \cos(t), -\sin(t)) \\
&= a(t - \sin(t), \cos(t) - 1) + 2a\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}(2\sin^2(t/2), -2\sin(t/2)\cos(t/2)) \\
&= a(t + \sin(t), -3 - \cos(t)),
\end{aligned}$$

que és clarament la cicloide de la figura (just have a look at the picture)



Exercici 39 (Evolutes)**:** Diem que una corba regular plana β és l'*evoluta* d'una altra corba regular plana α si i només si α és una involuta de β. Dit d'una altra manera, β és l'envolupant de la família de rectes normals de α. S'anomena *envolupant* d'una família de corbes a una corba que és tangent a totes les corbes de la família.

(a) Trobeu una parametrització de β en funció del paràmetre arc de α, suposant que la curvatura de α no s'anul·la.

(b) Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda.

(c) Trobeu l'evoluta de la *cicloide*.

Solució:

(a) Suposem que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc. La família de rectes normals es pot escriure com
$$\alpha(s) + tN(s), \quad t \in \mathbb{R},$$
una recta per a cada valor del paràmetre s.

Podem construir una corba que tingui un punt sobre cadascuna d'aquestes rectes i que en aquest punt aquesta recta de la família de normals sigui la seva recta tangent?

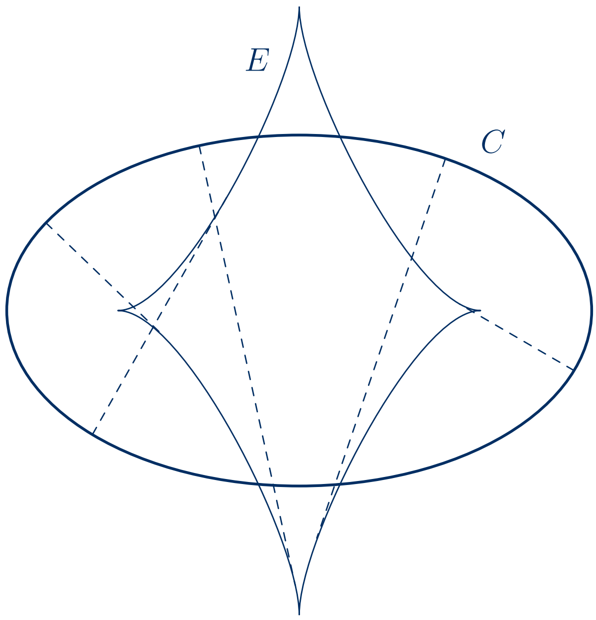
Si la podem construir serà la evoluta de α.

La pregunta anterior és equivalent a la següent: existeix una funció diferenciable $\lambda(s)$ tal que la corba $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$ compleixi que $\beta'(s)$ tingui la mateixa direcció que $N(s)$?

Només hem de derivar i obtenim
$$\begin{aligned} \beta'(s) &= T(s) + \lambda'(s)N(s) - k(s)\lambda(s)T(s) \\ &= (1 - k(s)\lambda(s))T(s) + \lambda'(s)N(s). \end{aligned}$$

Per tant ha de ser $1 - k(s)\lambda(s) = 0$, és a dir, $\lambda(s) = \frac{1}{k(s)}$. Per tant, en termes del radi de curvatura $\rho(s) = 1/k(s)$ la evoluta de $\alpha(s)$ és la corba
$$\beta(s) = \alpha(s) + \rho(s)N(s).$$

Observem que si canviem el paràmetre la fórmula anterior no canvia. La figura representa la evoluta E de la e l·lipse C.



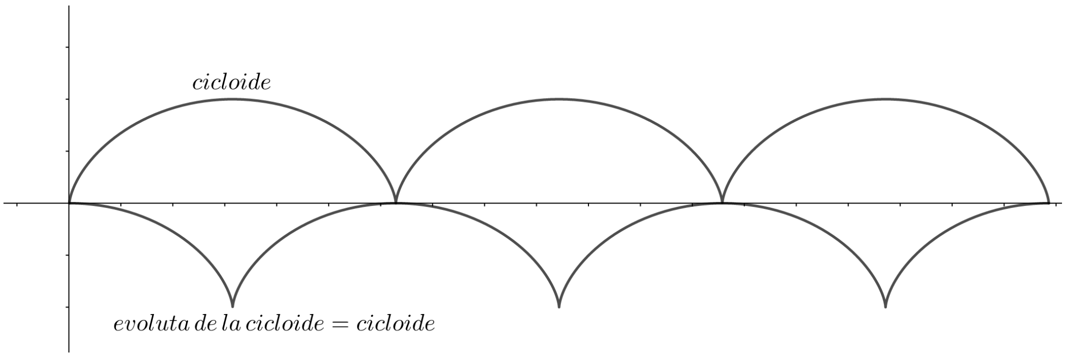
(b) L'evoluta és el lloc geomètric dels centres de curvatura d'una corba plana.

(c) Considerem la cicloide $\alpha(t) = a(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. Aleshores, recordant que la normal principal d'una corba plana $(x(t), y(t))$ que no està en principi parametritzada per l'arc és $N(t) = (-y'(t), x'(t))/|(-y'(t), x'(t))|$ si $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) > 0$ i $N(t) = -(-y'(t), x'(t))/|(-y'(t), x'(t))|$ si $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) < 0$ (que serà el nostre cas) tenim

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= a(1-\cos(t), \sin(t)) \\
\alpha''(t) &= a(\sin(t), \cos(t)) \\
N(t) &= -\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} a(-\sin(t), 1-\cos(t)) = -\frac{1}{2a\sin(\frac{t}{2})} a(\sin(t), -1+\cos(t)) \\
\|\alpha'(t)\|^2 &= 2a^2(1-\cos(t)) \\
\rho(t) &= \frac{\|\alpha'(t)\|^3}{|\det(\alpha', \alpha'')|} = 4a\sin(\frac{t}{2})
\end{aligned}
$$

Per tant $\beta(t) = \alpha(t) + \rho(t)N(t) = a(t+\sin(t), (-1+\cos(t))) = a(t+\sin(t), -1+\cos(t))$.

La figura següent mostra les gràfiques de dues cicloides: $\alpha(t) = a(t-\sin(t), 1-\cos(t))$ i la seva evoluta $\beta(t) = a(t+\sin(t), -1+\cos(t))$ per a $0 \leq t \leq 6\pi$.



Observem que passem de l'una a l'altra per la translació de vector $(\pi, -2)$, és a dir, que si fem el canvi de variables

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= x + \pi \\
\bar{y} &= y - 2
\end{aligned}
$$

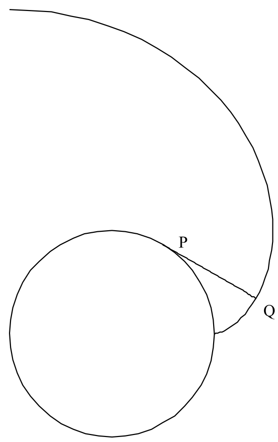
tenim

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= t - \sin(t) + \pi \\
\bar{y}(t) &= -1 - \cos(t)
\end{aligned}
$$

i tenim una reparametrització de $\beta(t)$ ja que $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \beta(t+\pi)$. La evoluta de la cicloide és la mateixa cicloide traslladada!!

Exercici 40 (Involuta)**:** Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una corba regular plana. S'anomena *involuta* de α a qualsevol corba β que talli ortogonalment a totes les rectes tangents de α. Es diu llavors que α és l'*evoluta* de β. La figura següent mostra una involuta de la circumferència.

Observeu, per exemple, que la recta PQ de la figura és tangent a la circumferència en el punt P i normal a la involuta en el punt Q.



Suposem que α està parametritzada pel paràmetre arc s. Per a un s fixat, la recta tangent a α en el punt $\alpha(s)$ és $\alpha(s)+t\alpha'(s),\ t\in\mathbb{R}$, i el punt en què aquesta recta tangent talla la involuta β és de la forma $\beta(s)=\alpha(s)+\lambda(s)\alpha'(s)$ per a un cert valor de $t=\lambda(s)$ (atenció: s és paràmetre arc de α, però no ho serà de β).

1. Trobeu quina ha de ser la funció $\lambda(s)$ sabent que per a un $s=s_0$ fixat $\beta(s_0)=\alpha(s_0)$ (a la figura anterior, s_0 seria el paràmetre de la circumferència corresponent al punt en què la involuta talla la circumferència).

2. Interpreteu geomètricament la parametrització obtinguda. (Indicació: Podeu utilitzar un cordill.)

3. Trobeu una parametrització de la involuta β quan la corba inicial α no està parametritzada per l'arc sinó per un altre paràmetre.

4. Trobeu la involuta de la *catenària* $y=\cosh x$ que passa pel punt $(0,1)$. Comproveu que es tracta de la *tractriu.*

5. Trobeu parametritzacions de les involutes de la circumferència i de la cicloide.

Solució:

1. Sigui $\alpha(s)$ una corba regular plana parametritzada per l'arc. Mirem si existeix una funció diferenciable $\lambda(s)$ tal que

$$\beta(s)=\alpha(s)+\lambda(s)\alpha'(s),$$

sigui la involuta de $\alpha(s)$. Només hem d'imposar $\langle\alpha'(s),\beta'(s)\rangle=0$.

Per tant

$$\langle\alpha'(s),\alpha'(s)+\lambda'(s)\alpha'(s)+\lambda(s)k(s)N(s)\rangle=1+\lambda'(s)=0,$$

per tant només hem d'agafar $\lambda(s)=-s+c$ on c és una constant

Així doncs

$$\beta(s)=\alpha(s)+(c-s)\alpha'(s).$$

Per determinar aquesta constant imposem la condició de l'enunciat $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ que ens diu $c = s_0$, és a dir, la corba demanada és

$$\beta(s) = \alpha(s) + (s_0 - s)\alpha'(s).$$

Observem que en el cas $k \equiv 0$, i.e, una recta, qualsevol recta perpendicular és una involuta i tanmateix no admet una parametrització d'aquest tipus.

2. Observem que podem suposar sense pèrdua de generalitat que α està parametritzada per l'arc. Aleshores la distància de $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ mesurada al llarg de la recta tangent és $|s_0 - s|$, que és la longitud de la corba $\alpha(s)$ entre els punts de coordenades s_0 i s. Per tant podem pensar que la involuta és la corba que s'obté al desembolicar una corda tibant que ha estat embolicada al llarg de α.

3. Suposem ara que t no és paràmetre arc de α. Sigui $s_\alpha(t)$ un paràmetre arc corresponent a α. Aleshores $\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\alpha'(t)$ i tenim

$$\beta(t) = \alpha(t) + (s_\alpha(t_0) - s_\alpha(t))\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \tag{8}$$

4. Només cal aplicar la fórmula de l'apartat (c) als càlculs de l'exercici ?.

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (t, \cosh(t)) \\
\alpha'(t) &= (1, \sinh(t)) \\
\|\alpha'(t)\| &= \cosh(t) \\
s(t) &= \sinh(t)
\end{aligned}$$

Com $\alpha(0) = (0, 1)$ i volem que β passi pel punt $(0, 1)$ prenem $t_0 = 0$. Aleshores

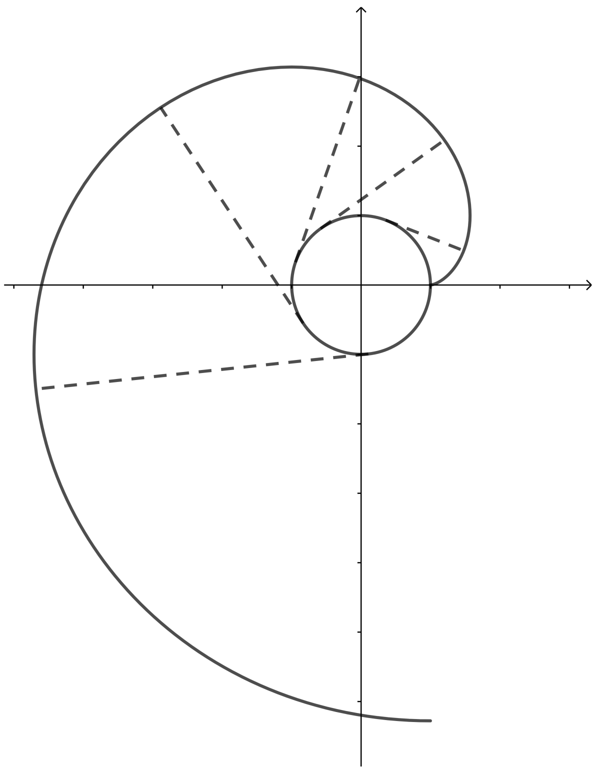
$$\beta(t) = \left(t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)}\right)$$

que és una parametrització de la tractriu (recorreguda en sentit contrari al que havíem pres a l'exercici 7).

5. *Circumferència.* Sigui $\alpha(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$. Aleshores $\alpha'(t) = (-R\sin(t), Rcos(t))$, $\|\alpha_1'(t)\| = R$ i $s(t) = Rt + c$. Per determinar la constant c imposem $s(0) = 0$ (desembolique a partir del punt $(1, 0)$) i obtenim $c = 0$ de manera que el paràmetre arc és $s(t) = Rt$

   Per tant, aplicant la fórmula (8) tenim

$$\beta(t) = R(\cos(t) + t\sin(t), \sin(t) - t\cos(t).$$



La longitud de cada tangent es igual a la longitud de la circumferència entre el punt de contacte i el punt $(1,0)$.

Cicloide. Considerem la cicloide

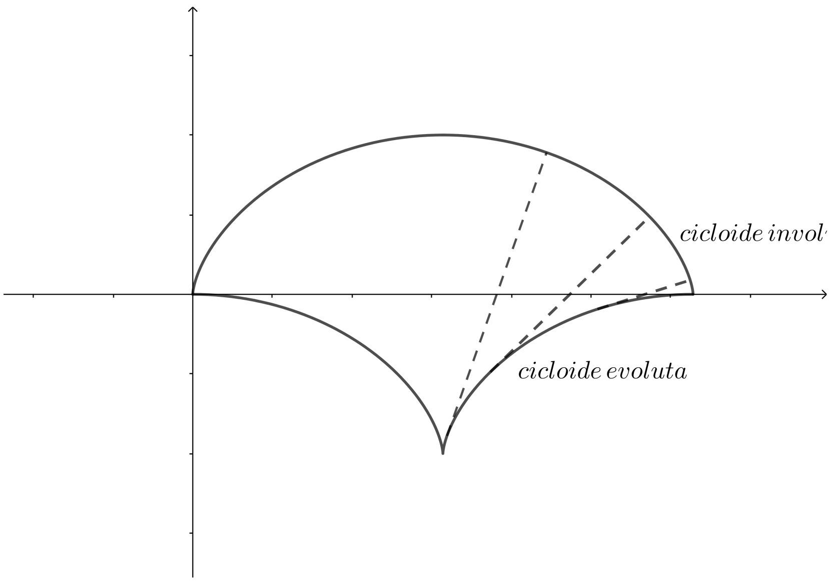
$$\alpha(t) = (t + \sin(t), -1 + \cos(t)),$$

vegeu l'exercici 39. Tenim $\alpha'(t) = (1 + \cos(t), -\sin(t))$, $\|\alpha'(t)\| = 2\cos(t/2)$ i $s(t) = 4\sin(\frac{t}{2}) + c$. Per determinar la constant c imposem $s(2\pi) = 0$ (vegeu figura) i obtenim $c = 0$ de manera que el paràmetre arc és $s(t) = 4\sin(\frac{t}{2})$.

Aleshores, aplicant la fórmula (8) tenim

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (t + \sin(t), -1 + \cos(t)) - 4\sin(\frac{t}{2})\frac{1}{2\cos(t/2)})(1 + \cos(t), -\sin(t)) \\ &= (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).\end{aligned}$$

com era d'esperar a partir de l'exercici 39 abans comentat.

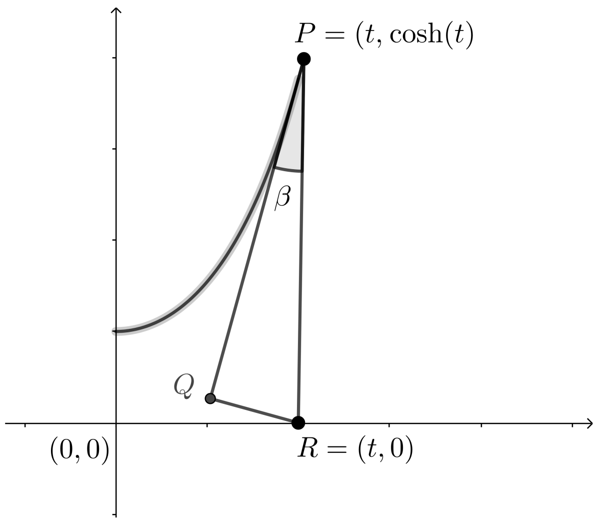


Observeu que el desenvolupament del cordill és només entre π i 2π ja que el punt de paràmetre π és singular. La longitud de cada tangent es igual a la longitud de la cicloide (evoluta) entre el punt de contacte i $(2\pi, 0)$.

Exercici 41: Deduïu geomètricament que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*.

Solució: Recordem que la tractriu té la propietat de que la longitud de la subtangent és constant. Recordem que la subtangent és el segment de la tangent a la corba en un punt determinat per aquest punt i el punt de tall de la tangent amb l'eix de les x.

És el mateix veure que l'evoluta de la *tractriu* és la *catenària*, que veure que una involuta de la catenària és la tractriu.



Hem vist a l'exercici 7 que el paràmetre arc de la catenària $(t, \cosh t)$ està donat per $s(t) = \sinh t$. Observem que $s(0) = 0$, és a dir que mesurem longituds a partir del punt $(0, 1)$.

Prenem sobre la tangent a la catenària per P la longitud $\sinh t$, és a dir, la longitud de la catenària entre els punts $(0, 1)$ i $P = (t, \cosh t)$, de manera que la distància entre P i Q és també $\sinh t$.

L'angle $\beta = \angle RPQ$ és el complementari de l'angle que forma la tangent PQ amb l'eix de les $x's$. Com que el pendent de la tangent és $\sinh t$, tenim

$$\tan\beta = \frac{1}{\sinh t}.$$

En particular

$$\cos\beta = \tanh t, \quad \sin\beta = \frac{1}{\cosh t}.$$

Per altra banda és clar que

$$Q = (t - \sinh t \sin\beta, \cosh t - \sinh t \cos\beta)$$

de manera que

$$Q = (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}).$$

En particular

$$d(Q, R) = 1.$$

Com que $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, el triangle $\triangle PQR$ ha de ser rectangle en Q.

Així, la corba descrita per Q té subtangent 1, és a dir, és la tractriu, i talla ortogonalment les tangents de la catenària, és a dir, és la seva involuta.

Exercici 42: Relació entre les curvatures d'una corba i de la seva evoluta.

1. Trobeu la curvatura de la *catenària* en paràmetre arc.
2. Trobeu la curvatura de la *tractriu* en el paràmetre induït per la *catenària*.
3. Deduïu una fórmula general per la curvatura d'una involuta de α en el paràmetre induït per l'arc de α.

Solució:

(a) Reprenem els càlculs de l'exercici 7. Respecte el paràmetre 'natural' t, la catenària està donada per $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1, \sinh(t)) \\ \alpha''(t) &= (0, \cosh(t)) \\ k(t) &= \frac{|\det(\alpha', \alpha'')|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{\cosh^2(t)} \end{aligned}$$

La parametrització de la catenària respecte el paràmetre arc és $\beta(s) = (\operatorname{arcsinh} s, \sqrt{1+s^2})$, i el paràmetre arc està donat per $s(t) = \sinh(t)$ (recordeu que s és la integral de la norma del vector tangent). Aleshores

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right) \\ \beta''(s) &= \left(\frac{-s}{(s^2+1)^{3/2}}, \frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Per tant

$$k(s) = \|\beta''(s)\| = \frac{1}{1+s^2}.$$

Observem que si en aquesta fórmula canviem s pel seu valor $s(t) = \sinh t$ obtenim el valor de $k(t)$ obtingut abans.

(b) L'expressió de la tractriu en el paràmetre 'natural' de la catenària és (vegeu exercici 6).

$$\gamma(t) = (t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)}).$$

Per tant

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}, -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}), \\
\gamma''(t) &= (\frac{2\sinh(t)\cosh(t)}{\cosh^4(t)}, \frac{\cosh(t)(\sinh^2(t)-1)}{\cosh^4(t)}).
\end{aligned}$$

La curvatura és doncs

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{1}{\sinh(t)}.$$

Però $s(t) = \sinh(t)$ és el paràmetre arc de la catenària, comptades les longituds a partir del punt $(0,1)$ comú a la catenària i a la tractriu, $s(0) = 0$, així que

$$k(t) = \frac{1}{s(t)},$$

és a dir, la curvatura de la tractiu és l'invers del paràmetre arc de la catenària, més concretament, *la curvatura de la tractriu en el punt corresponent al punt de la catenària que dista s de l'origen és $1/s$.* En general serà (vegeu l'apartat (c) següent): *la curvatura de la involuta en el punt que s'obté quan s'ha desembolicat una longitud s del cordill inicialment sobre la evoluta, és $1/s$*

Nota: Si pensem la tractriu com $\gamma(x) = (x, y(x))$ on $y(x)$ és la solució de l'equació diferencial

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

tenim $\gamma'(x) = (1, y'(x))$, $\gamma''(x) = (0, y''(x))$.

Però és fàcil veure que

$$\begin{aligned}
|\gamma'(x)| &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
y''(x) &= -\frac{y'(x)}{(1-y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Per tant la curvatura val

$$k(x) = \frac{\det(\gamma'(x), \gamma''(x))}{|\gamma'(x)|^3} = -y'(x).$$

La curvatura és simplement la derivada (canviada de signe).

(c) Sigui $\alpha(s)$ una corba parametritzada per l'arc. Les seves involutes s'escriuen com $\beta(s) = \alpha(s) + (s_0 - s)\alpha'(s)$, vegeu exercici 40. El punt on es comença a desembolicar el cordill és, doncs, $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$. Així,

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= (s_0 - s)\, k(s)\, N(s) \\
\beta''(s) &= (-k(s) + (s_0 - s)k'(s))\, N(s) - k^2(s)(s_0 - s)\, T(s).
\end{aligned}$$

Per tant la curvatura $k_\beta(s)$ de la corba β és

$$k_\beta(s) = \frac{1}{|s - s_0|},$$

d'acord amb el que hem comentat a l'apartat (b).

Exercici 43: Demostreu que la càustica d'una corba Γ respecte un punt P és l'evoluta de l'ortotòmica de Γ respecte de P.

Solució: Recordem que la ortotòmica és l'envolvent de les circumferències de centres en el punts $\gamma(t)$ de Γ i que passen per P.

Primera part.

Vegem primerament que la ortotòmica de Γ respecte P coincideix amb la corba $\beta(t)$ dels simètrics de P respecte de les tangents a Γ. És a dir, $\beta(t)$ i P són simètrics respecte de la tangent a Γ en el punt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

En efecte, les circumferències que generen la ortotòmica són

$$C_t(u) = (X(t,u), Y(t,u)) = (x(t) + r(t)\cos u, y(t) + r(t)\sin u), \quad u \in [0, 2\pi],$$

amb $r(t) = |\overrightarrow{\gamma(t), P}|$.

En particular,

$$r' = \frac{x'(x - p_1) + y'(y - p_2)}{r}, \qquad P = (p_1, p_2).$$

L'equació de l'envolvent s'obté substituint a l'expressió de $C_t(u)$, el paràmetre u pel valor que deduïm de la igualtat

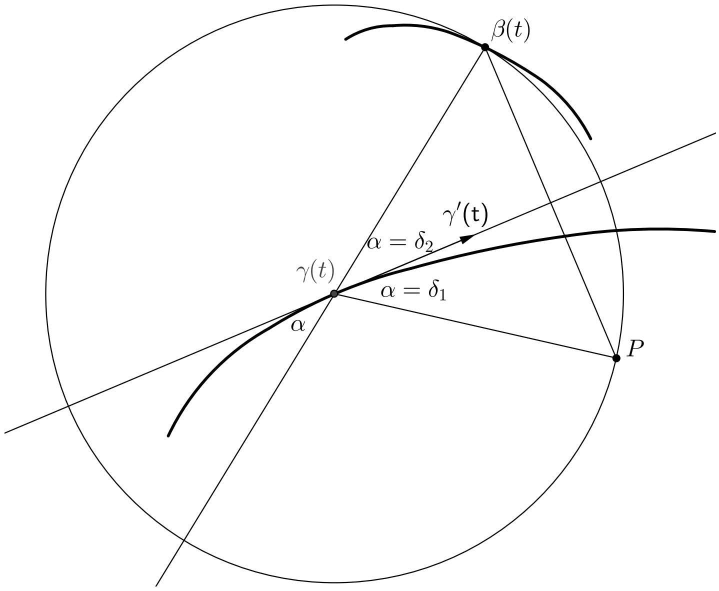
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial t} & \dfrac{\partial Y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' + r'\cos u & y' + r'\sin u \\ -r\sin u & r\cos u \end{vmatrix} = 0.$$

És a dir,

$$x'\cos u + y'\sin u + r' = 0. \tag{9}$$

Així doncs $\beta(t) = (x(t) + r(t)\cos u, y(t) + r(t)\sin u)$, amb u donada per (9).

Comprovem que $\beta(t)$ és el simètric de P respecte de la tangent.



1)

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{P\beta(t)}, \gamma'(t)\rangle &= \langle (x + r\cos u - p_1, y + r\sin u - p_2), (x', y')\rangle \\ &= xx' + rx'\cos u - p_1x' + yy' + ry'\sin u - p_2y' \\ &= rx'\cos u + ry'\sin u + rr' = 0.\end{aligned}$$

2) Angle $\delta_1 = \angle\overrightarrow{\gamma(t)P}, \gamma'(t)$.

$$\langle \overrightarrow{\gamma(t)P}, \gamma'\rangle = r\cos\delta_1 = -(x - p_1)x' - (y - p_2)y' = -rr'.$$

3) Angle $\delta_2 = \angle\overrightarrow{\gamma(t)\beta(t)}, \gamma'(t)$.

$$\langle \overrightarrow{\beta(t)\gamma(t)}, \gamma'(t)\rangle = r\cos\delta_2 = \langle (r\cos u, r\sin u), (x', y')\rangle = -rr'.$$

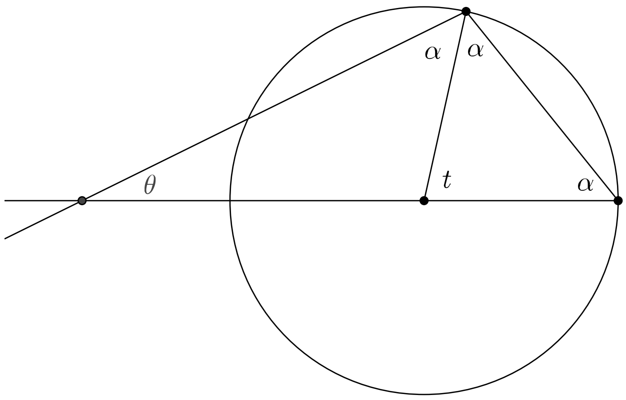
Per tant $\delta_1 = \delta_2$ i hem acabat.

Remark. Això es pot veure sense cap càlcul així. Si prenem dues circumferències de la nostra família, pròximes, una amb centre $\gamma(t)$ i l'altre amb centre $\gamma(t+\epsilon)$, les dues per P, la recta que uneix els punts de tall P, P' és perpendicular a la línia que uneix els centres, i P i P' són simètrics respecte d'aquesta recta. En el límit, quan $\epsilon \to 0$, aquesta recta és la tangent i P' és el punt de l'envolvent.

Segona part. Per definició de corba envolvent, en el punt de paràmetre t la tangent a la corba ortotòmica $\beta(t)$ i la tangent a la circumferència de centre $\gamma(t)$ per P (que passa per $\beta(t)$) coincideixen , i per tant les normals també. Però la normal a la tangent en un punt d'una circumferència és un diàmetre, de manera que podem afirmar que les rectes $\gamma(t)\beta(t)$ són les rectes normals a la corba ortotòmica. La seva envolvent és doncs la evoluta de la ortotòmica, però com que les rectes $\gamma(t)\beta(t)$ són també les rectes reflexades de les rectes $P\gamma(t)$, podem dir que *la caustica de Γ respecte de P és la evoluta de l'ortotòmica de Γ respecte de P.*

Exercici 44: Demostreu que la càustica d'una circumferència respecte un dels seus punts és la cardioide.

Solució: Sigui $P = (1,0)$ i Γ la circumferència $x^2 + y^2 = 1$. El raig de llum que surt del punt $P = (1,0)$ i arriba al punt $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ surt reflectit en una recta de pendent $\theta = t - \alpha$, on α és l'angle a la base del triangle isòsceles $(0,0), (1,0), (\cos t, \sin t)$.



Per tant $2\alpha + t = \pi$ i $\theta + \alpha = t$, i així

$$\theta = \frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

El raig reflectit és doncs la recta

$$y - \sin t = \tan(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{2})(x - \cos t),$$

que, simplificant, queda

$$\cos\frac{3t}{2}x + \sin\frac{3t}{2}y = \cos\frac{t}{2}.$$

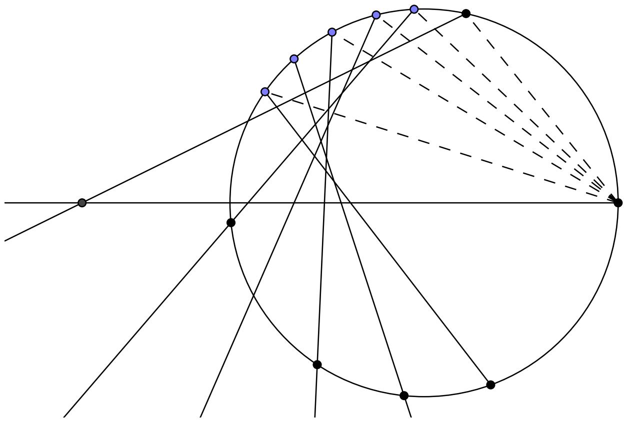
Per trobar l'envolvent d'aquestes rectes només hem de resoldre el sistema format per aquesta equació i per l'equació de les rectes que tenen coeficients les derivades dels coeficients d'aquesta recta, és a dir,

$$-3\sin\frac{3t}{2}x + 3\cos\frac{3t}{2}y = -\sin\frac{t}{2}$$

Resolent per Cramer obtenim

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}(\cos t + \cos^2 t) - \frac{1}{3}, \\ y &= \frac{2}{3}(\sin t + \sin t\cos t). \end{aligned}$$

Hem usat que $2\cos^2\frac{t}{2} = 1 + \cos t$ i que $\sin t = \sin(\frac{3t}{2} - \frac{t}{2})$, i similars. I això és una cardioide com es veu directament comparant aquestes equacions amb les equacions de la cardioide obtinguda al problema 3, llista 1.



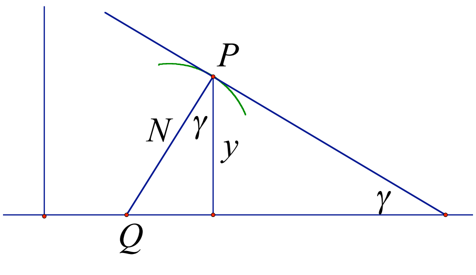
Exercici 45: Una altra expressió de la curvatura per a les còniques. Donada una corba α diferenciable i un punt P sobre ella, la *subnormal* per P és el segment de la recta normal que va de P al tall amb l'eix x. Denotem per N la longitud de la subnormal en P.

Proveu que la curvatura k de l'el·lipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ en el punt P és

$$k = \frac{p^2}{N^3}$$

on $p = b^2/a$ és el paràmetre de l'el·lipse. Proveu el mateix per a la hipèrbola $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$ i la paràbola $y^2 = 2px$.

Solució: Calculem primerament la subnormal per a tota corba donada de la forma $(x, y(x))$. Per a això observem que si γ és l'angle que forma la tangent a aquesta corba en un punt $P = (x, y(x))$ amb l'eix x, llavors $N \cos\gamma = y(x)$ on N és la subnormal en P.



Però $1/\cos\gamma = \sqrt{1 + \tan^2\gamma}$ i per tant $N = y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}$.

Per altra banda, la fórmula de la curvatura quan la corba no està parametritzada per l'arc aplicada a la corba $(x, y(x))$, dóna

$$k(x) = \frac{|y''|}{(\sqrt{1 + (y')^2})^{3/2}}$$

que es pot escriure doncs com

$$k(x) = \frac{y^3|y''|}{N^3}, \tag{10}$$

fórmula, doncs, vàlida per a tota corba donada com a gràfica d'una funció $y = y(x)$. Apliquem ara aquests càlculs a l'el·lipse. Derivant dos cops l'equació de l'el·lpse obtenim les equacions

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} &= 0, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}(y'^2 + yy'') &= 0, \end{aligned}$$

a partir de les quals, i de l'equació inicial de l'el·lipse, podem aïllar y'' i obtenir

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Substituint aquest valor de y'' a (10) obtenim l'expressió que volíem (hem assumit, per seguir el dibuix $y \geq 0$).

Exercici 46: Hipèrbola. Siguin F un punt del pla, d una recta a distància δ de F i $e > 1$. Posem

$$p = e\delta, \qquad c = \frac{ep}{e^2 - 1}, \qquad a = \frac{p}{e^2 - 1}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

La hipèrbola amb focus F, directriu d i excentricitat e és el lloc geomètric dels punts del pla tals que

$$d(P, F) = e \cdot d(P, d).$$

1. Prenent F com a pol i com a origen d'angles la semirecta per F perpendicular a d i que no talla a d, proveu que l'expressió de la hipèrbola en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

2. Prenent ara coordenades cartesianes amb origen O en el punt de coordenades polars $r = c$, $\theta = \pi$ (centre de la hipèrbola) i amb eix Ox a la direcció OF, proveu que l'equació de la hipèrbola és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

3. Proveu que $\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ és una parametrització regular de la hipèrbola.

Solució: Aquest problema és completament anàleg a l'anterior i no el farem aquí. Només dir que la parametrització en polars $r(\theta) = \frac{p}{1-e\cos\theta}$ de l'el.lipse, quan $e < 1$ i de la hipèrbola, quan $e > 1$ coincideix amb la de la paràbola quan $e = 1$. Si fem variar contínuament el paràmetre $e \in [0, \infty)$ veiem com van apareixent les diferents còniques. Una altra observació és que tota cònica no degenerada (el.lipse, hipèrbola i paràbola) és el lloc geomètric dels punts P que verifiquen que $d(P, F) = e\,d(P, d)$ on F és un punt anomenat el focus, d és una recta anomenada eix i $e \in [0, \infty)$ és un valor anomenat excentricitat. Per $e = 0$ obtenim les circumferències, per $0 < e < 1$ les el.lipses, per $e = 1$ les paràboles i finalment, per $e > 1$ les hipèrboles.

5 Exercicis complementaris de corbes a l'espai

Exercici 47: Considerem una corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Suposem que $\gamma(t_0)$ i $\gamma'(t)$ són ortogonals a $\vec{v}$ per a tot $t \in I$. Demostreu que $\gamma(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per a tot t.

Solució: Hem de veure que el producte escalar $\langle \gamma(t), \vec{v} \rangle$ és idènticament zero. Per a això definim la funció $f(t) = \langle \gamma(t), \vec{v} \rangle$ i veiem que s'anul·la idènticament. Com que $f(t)$ és diferenciable n'hi ha prou amb veure que la seva derivada, $f'(t)$, és idènticament zero, amb la qual cosa $f(t)$ és constant, i com per hipòtesis $f(t_0) = 0$ ha de ser $f(t) = 0$ per a tot t. Derivant, doncs, obtenim

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \vec{v} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \gamma'(t), \vec{v} \rangle + \langle \gamma(t), \vec{v}' \rangle = \langle \gamma'(t), \vec{v} \rangle$$

que és idènticament zero gràcies a la hipòtesi de que $\gamma'(t)$ és ortogonal a $\vec{v}$ per tot $t \in I$. Observem que la igualtat $(*)$ és fàcil de deduir de l'expressió en coordenades del producte escalar a $\mathbb{R}^2$ i s'utilitza molt sovint en aquest capítol.

Exercici 48: Doneu una parametrització diferenciable de la corba determinada per la gràfica de la funció $y = |x|$ a l'interval $-1 < x < 1$.

Solució: Prenem $\gamma(t) = (h(t), h(t))$ si $t \geq 0$ i $\gamma(t) = (-h(t), h(t))$ si $t \leq 0$ on $h(t) = e^{-1/t^2}$ Com totes les derivades de $h(t)$ quan $t = 0$ són zero aquesta funció és $\mathcal{C}^\infty$.

Si en tenim prou amb una parametrització $\mathcal{C}^2$ podem prendre per exemple $h(t) = (t - \sin(t))$.

Exercici 49: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular. Demostreu que si totes les seves rectes tangents passen per un punt fix, llavors la traça de α està continguda en una recta.

Solució: En primer lloc, reparametritzem $\alpha(s)$ per l'arc. Fent una translació si és necessari podem suposar que totes les rectes tangents passen per l'origen, és a dir, que per tot $s \in I$ existeix (un únic) $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s) = 0$. Observem que la funció $\lambda(s)$ (que està ben definida) és diferenciable, ja que $\lambda(s) = -\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle$.

Derivant obtenim

$$\alpha'(s) + \lambda'(s)\alpha'(s) + \lambda(s)\alpha''(s) = 0.$$

Si la curvatura $k(s)$ de $\alpha(s)$ fos diferent de zero en un punt, seria diferent de zero en un entorn d'aquest punt, i en aquest entorn tindríem

$$(1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0,$$

on $T(s)$ i $N(s)$ són els vectors tangent i normal principal unitaris. Recordem que per poder definir la normal principal necessitem $k(s) \neq 0$.

Com que $T(s)$ i $N(s)$ són linealment independents tenim

$$1 + \lambda'(s) = 0, \quad \lambda(s)k(s) = 0,$$

que, amb $k(s) \neq 0$, són dues equacions incompatibles. Per tant $k(s) = 0$ en tot punt i α és una recta.

Exercici 50: Sigui P un punt de $\mathbb{R}^3$ que no està contingut en la imatge de la corba $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Sigui $s_0 \in I$ tal que el punt $\alpha(s_0)$ és el punt de la corba més proper a P. Demostreu que $\alpha'(s_0)$ és ortogonal al vector $\alpha(s_0) - P$.

Solució: Considerem la funció

$$h(s) = \langle(\alpha(s) - P), (\alpha(s) - P)\rangle.$$

Per hipòtesis, $h'(s_0) = 0$. Però aquesta derivada val

$$h'(s_0) = 2\langle\alpha'(s_0), (\alpha(s_0) - P)\rangle = 0$$

i hem acabat.

Exercici 51: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si totes les seves rectes normals passen per un mateix punt aleshores la traça de α està continguda en una circumferència.

Solució: Parametritzem α per l'arc. La hipòtesi de que la curvatura de $\alpha(s)$, $k(s)$, no s'anul·la mai implica que el vector normal $N(s)$ està definit per tot $s \in I$. Després de fer una translació si s'escau tenim que totes les rectes normals passen per l'origen, és a dir, que per tot $s \in I$ existeix un únic $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) + \lambda(s)N(s) = 0$. De la mateixa manera que al problema 49 es veu que la funció $\lambda(s)$ és diferenciable. Derivant llavors la expressió anterior obtenim que $\alpha'(s) + \lambda(s)N'(s) + \lambda'(s)N(s) = 0$, és a dir,

$$(1 - \lambda(s)k(s))T(s) + \lambda'(s)N(s) - \lambda(s)\tau(s)B(s) = 0.$$

Per tant, igualant a zero els tres coeficients, veiem que $\lambda(s)$ és una constant no nul·la, $k(s) = 1/\lambda(s)$, i $\tau(s) \equiv 0$. Com que la torsió és zero la corba és plana (exercici 18). I les corbes planes de curvatura constant són circumferències (exercici 8).

Exercici 52: Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una corba regular amb $k(s) \neq 0$ per a tot $s \in I$. Demostreu que si tots els plans osculadors de α passen per un punt fix llavors la corba és plana.

Solució: Per hipòtesis, existeixen funcions $\lambda(s)$ i $\mu(s)$, que suposarem diferenciables, tals que

$$P = \alpha(s) + \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s).$$

Derivant

$$\vec{0} = T + \lambda(s)k(s)N(s) + \lambda'(s)T(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)(-k(s)T + \tau(s)B(s)).$$

Equival al sistema

$$\begin{aligned} 1 + \lambda'(s) - k(s)\mu(s) &= 0 \\ \lambda(s)k(s) + \mu'(s) &= 0 \\ \mu(s)\tau(s) &= 0 \end{aligned}$$

D'aquí deduïm que $\tau(s) = 0$ per tot s, i per tant la corba és plana. En efecte, si $\tau(s_0) \neq 0$, llavors $\tau(s) \neq 0$ en un petit entorn obert de s_0. En aquest entorna ha de ser, per la tercera equació, $\mu(s) = 0$. I, per tant, també $\mu'(s) = 0$ en aquest entorn. Però llavors la segona equació ens diu $\lambda(s) = 0$ i la primera $1 + \lambda'(s) = 0$, contradicció.

Exercici 53: Comproveu que la corba $\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ té la imatge sobre un con de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la velocitat i l'acceleració de $\alpha(t)$ en el vèrtex del con.

Solució: Aquesta corba està continguda en el con $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. $\alpha(0)$ és el vèrtex del con. Obtenim $\alpha'(0) = (1, 0, 1)$ i $\alpha''(0) = (0, 2, 0)$.

Exercici 54 (Espiral logarítmica): Considerem la corba plana $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$$

amb $b < 0 < a$.

1. Estudieu el comportament de $\alpha(t)$ quan t tendeix a $+\infty$.
2. Proveu que $\alpha'(t) \to (0, 0)$ quan $t \to \infty$ i que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(s)|\, ds$$

   és finit. Es a dir que $\alpha(t)$ té longitud finita a tot interval de la forma $[t_0, \infty)$.

Solució:

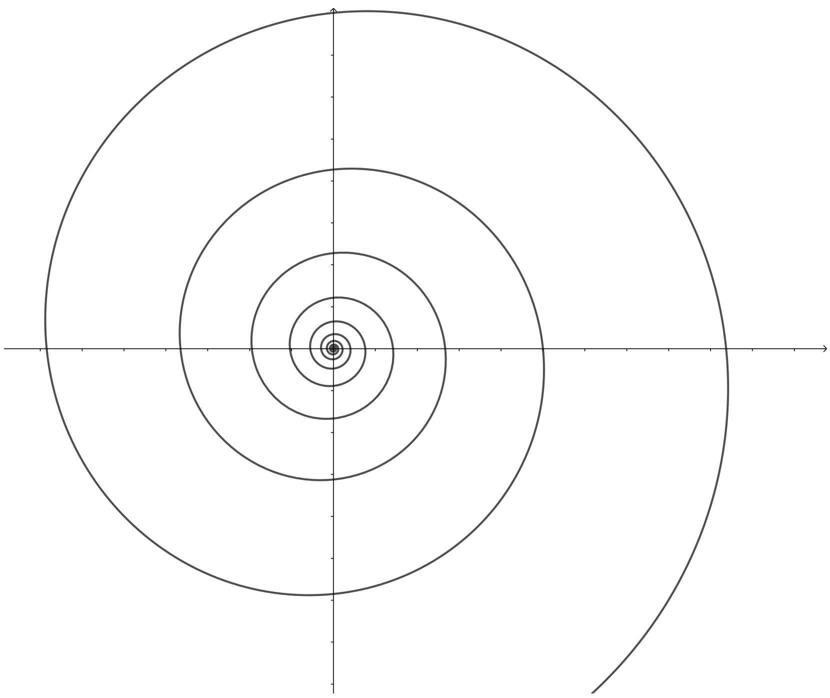
1. $\lim_{t\mapsto\infty} \alpha(t) = (0, 0)$ ja que $b < 0$.
2. $\alpha'(t) = (abe^{bt}\cos(t) - ae^{bt}\sin(t), abe^{bt}\sin(t) + ae^{bt}\cos(t))$, per tant, $\lim_{t\mapsto\infty} \alpha'(t) = (0, 0)$ ja que $b < 0$. La norma de la derivada és

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2b^2e^{2bt} + a^2e^{2bt}} = ae^{bt}\sqrt{1 + b^2},$$

   per tant

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(s)|\, ds = \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} ae^{bt}\sqrt{1 + b^2}\, ds = -\frac{a}{b}\sqrt{1 + b^2}\; e^{bt_0}$$

   que és un número finit positiu.



El dibuix està fet per a $a = 1$, $b = -0.1$ i $t \in [-20, 100]$.

Exercici 55: Sigui $\alpha(s)$ una corba tal que curvatura i torsió no s'anul·len mai. Demostreu que el coneixement del vector binormal $B(s)$ determina la curvatura $k(s)$ i el valor absolut de la torsió $\tau(s)$.

Solució: Podem suposar que la corba està parametritzada per l'arc. Fent servir el triedre de Frenet sabem que $B' = \tau \cdot N$ (sobreentenem en el punt s) i per tant $|\tau| = |B'|$.

Derivant un altre cop

$$B'' = \tau' \cdot N + \tau(-k \cdot T - \tau \cdot B) = -k \cdot \tau \cdot T + \tau' \cdot N - \tau^2 B.$$

Aleshores, com que $B \wedge B' = \tau T$ tenim

$$\left\langle B'', \frac{B \wedge B'}{||B \wedge B'||} \right\rangle = \pm k \cdot \tau \quad ; \quad k = \left| \frac{1}{\tau} \left\langle B'', \frac{B \wedge B'}{||B \wedge B'||} \right\rangle \right|.$$

És a dir, hem sabut calcular k i $|\tau|$ usant el vector binormal B i les seves derivades.

Exercici 56: Sigui $\alpha(t)$ una corba regular i t_0 un valor del paràmetre pel qual la curvatura $k(t_0) \neq 0$. Sigui π la projecció ortogonal sobre el pla osculador de α en t_0. Proveu que el valor $k_0(t_0)$ de la curvatura de la corba projectada $\alpha_0 = \pi \circ \alpha$ coincideix amb $k(t_0)$.

Solució: Reparametritzem $\alpha(t)$ pel paràmetre arc s amb $s = 0$ en el punt $\alpha(t_0)$. És molt fàcil veure que, respecte de la referència de Frenet en $s = 0$, la corba és

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2}{6} s^3 + \ldots \\ y(s) &= \frac{k}{2} s^2 + \frac{k'}{6} s^3 + \ldots \\ z(s) &= \frac{k\tau}{6} s^3 + \ldots \end{aligned}$$

on k, τ són la curvatura i la torsió de la corba en $s = 0$, i k' és la derivada de la curvatura en $s = 0$. Projectar sobre el pla osculador vol dir considerar la corba $\gamma(s) = (x(s), y(s)) = (s - \frac{k^2}{6} s^3 + \ldots, \frac{k}{2} s^2 + \frac{k'}{6} s^3 + \ldots)$. Però clarament $\gamma'(0) = (1, 0)$ i $\gamma''(0) = (0, k)$ de manera que la curvatura en $s = 0$ de $\gamma(s)$ és igual a k, justament la curvatura de α en $s = 0$.

Podem interpretar la torsió de la corba α com el que fa *pujar* (torsió negativa o *moviment dextrogir*) o *baixar* (torsió positiva o *moviment levogir*) la corba des del pla osculador (respecte al vector binormal). Es pot fer un quadre amb entrades $b > 0, b < 0, c > 0, c < 0$ que il·lustri aquestes nocions en el cas de l'hèlix del problema 26. Observem també que si reparametritzem una corba canviant-li el sentit llavors els vectors tangent i binormal canvien de signe i el vector normal continua sent el mateix.

Exercici 57: Sigui $\alpha(s)$ una corba regular. Suposem que la curvatura $k(s)$ i la torsió $\tau(s)$ no s'anul·len en cap punt de la corba.

1. Demostreu que

$$\frac{(N(s) \times N'(s)) \cdot N''(s)}{\|N'(s)\|^2} = \frac{\left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)'}{\left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)^2 + 1}. \tag{11}$$

2. Demostreu que si s és el paràmetre arc, es coneix $N(s)$ en tot punt i en s_0 coneixem el quocient $\dfrac{k(s_0)}{\tau(s_0)}$, llavors podem calcular $k(s)$ i $\tau(s)$ en tot punt de la corba (i per tant, la corba, llevat de moviments rígids).

Solució:

(a) Suposarem primerament que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc. Després estendrem el resultat amb un paràmetre qualsevol. Per les fórmules de Frenet tenim que

$$\begin{aligned} N'(s) &= -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ N''(s) &= -k'(s)T(s) - (k(s)^2 + \tau(s)^2)N(s) - \tau(s)'B(s) \end{aligned}$$

Llavors,

$$\begin{aligned} |N'(s)|^2 &= k(s)^2 + \tau(s)^2 \\ N(s) \times N'(s) &= k(s)B(s) - \tau(s)T(s) \\ \langle N(s) \times N'(s), N''(s) \rangle &= k'(s)\tau(s) - \tau'(s)k(s) \end{aligned}$$

Així,

$$\frac{\langle N(s) \times N'(s), N''(s) \rangle}{|N'(s)|^2} = \frac{\left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)'}{1 + \left(\frac{k(s)}{\tau(s)}\right)^2}$$

D'altra banda, si la corba $\alpha(t)$ no està parametritzada per l'arc, la podem reparametritzar per l'arc $s = s(t)$ i denotant $v = ds/dt$ i aplicant la regla de la cadena tenim

$$\begin{aligned} N'(t) &= v\dot{N} \\ N''(t) &= v'\dot{N} + v^2\ddot{N} \\ \langle N(t) \times N'(t), N''(t) \rangle &= v^3 \langle N \times \dot{N}, \ddot{N} \rangle \\ \left(\frac{k(t)}{\tau(t)}\right)' &= v\left(\frac{k}{\tau}\right)^{\cdot} \end{aligned}$$

on el punt denota la derivada respecte del paràmetre arc s i la prima la derivada respecte del paràmetre t. Així $\dot{N} = \frac{dN(t(s))}{ds}$, etc. En particular, doncs,

$$\frac{\langle N(t) \times N'(t), N''(t) \rangle}{|N'(t)|^2} = \frac{v\langle N \times \dot{N}, \ddot{N} \rangle}{|\dot{N}|^2} = \frac{v\left(\frac{k}{\tau}\right)^{\cdot}}{1 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2} = \frac{\left(\frac{k}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{k}{\tau}\right)^2}$$

(b) Sigui s el paràmetre arc. Conèixer $N(s)$ per a tot s, vol dir conèixer el primer terme de l'equació (11). Diguem-li $f(s)$. Llavors tenim l'equació diferencial

$$\frac{y'}{1 + y^2} = f(s)$$

amb $y(s) = k(s)/\tau(s)$, d'integració immediata i que ens dóna $y(s) = \tan \int f(s) + C$, i la constant d'integració C queda determinada per la condició inicial (el valor $y(s_0)$ és conegut).

Coneixem doncs el quocient $k(s)/\tau(s)$. Però, a més, sabem que $|N'(s)|^2 = k(s)^2 + \tau(s)^2$. De manera que també coneixem la suma $k(s)^2 + \tau(s)^2$, per a tot s. Aquests dos valors (el quocient i la suma de quadrats) determinen totalment $k(s)$ i $\tau(s)$, i per tant, llevat de moviments rígids, la corba.

Exercici 58: Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = 1/s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi pel punt $(1, 0, 0)$ quan $s = 1$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

Solució: Com que la corba es plana sabem que $k(s) = |\theta'(s)|$ on $\theta(s)$ és l'angle que forma la tangent a la corba amb la direcció $(1, 0)$.

Més concretament, $\theta(s)$ és una determinació de l'argument, vegeu exercici 36, és a dir una funció $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on I és l'interval on està definida la corba, tal que $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$.

D'aquesta manera $\langle\gamma'(s), (1, 0)\rangle = x'(s) = \cos\theta$.

En el nostre cas, doncs, $\theta'(s) = 1/s$, que integrant i tenint en compte que $\theta(1) = 0$, ens dóna

$$\theta(s) = \ln s.$$

Finalment, integrant les expressions $x'(s) = \cos(\ln s)$ i $y'(s) = \sin(\ln s)$ i tenint en compte les condicions inicials obtenim

$$\gamma(s) = (\frac{s}{2}(\sin(\ln s) + \cos(\ln s)) + \frac{1}{2}, \frac{s}{2}(\sin(\ln s) - \cos(\ln s)) - \frac{1}{2}, 0).$$

Exercici 59: Trobeu totes les corbes parametritzades per l'arc $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que tinguin vector binormal $B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 1)$ i torsió positiva.

Solució: Utilitzem el triedre de Frenet. Tenim

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{2}(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0) = \tau(s)\cdot N(s)$$

d'on $\tau(s) = 1/2$ (ja que imposem que sigui positiva) i $N(s) = (\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$. Aleshores

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 0) = -k(s)\cdot T(s) - \frac{1}{2}B(s)$$

d'on

$$k(s)\cdot T(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -1)$$

Per tant $T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -1)$ i $k = \frac{1}{2}$. Així doncs la corba demanada és l'hèlix

$$\alpha(s) = (-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}) + (x_0, y_0, z_0)$$

on $\alpha(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercici 60: Sigui $\alpha(s)$ una corba regular parametritzada per l'arc, amb curvatura mai nul·la. Definim la seva *indicatriu tangent* com la corba esfèrica $\alpha_1(s) = \alpha'(s)$. Trobeu la curvatura $k_1(s)$ i la torsió $\tau_1(s)$ de $\alpha_1(s)$ en funció de la curvatura $k(s)$ i la torsió $\tau(s)$ de $\alpha(s)$. Deduïu que $\alpha_1(s)$ és plana si i només si $\frac{\tau(s)}{k(s)}$ és constant. Doneu una definició d'*indicatriu binormal* i deduïu fórmules anàlogues.

Solució: Utilitzarem la següent notació: les lletres sense subíndex es referiran a la corba α i en canvi les lletres amb subíndex 1 a la corba α_1. Totes elles valorades en el punt de paràmetre s que ometem. A partir de les fórmules de Frenet de α obtenim

$$
\begin{aligned}
\alpha_1' &= \alpha'' = kN \\
v_1 &= k \\
\alpha_1'' &= k'N + kN' = -k^2T + k'N - k\tau B \\
\alpha_1''' &= (-k^2)'T - k^2T' + k''N + k'N' - (k\tau)'B - k\tau\vec{b'} \\
&= -3kk'T + \Big(k'' - k^3 - k\tau^2\Big)N - \Big(2k'\tau + k\tau'\Big)B \\
\alpha_1' \times \alpha_1'' &= k^3B - k^2\tau T \\
|\alpha_1' \times \alpha_1''|^2 &= k^4(k^2 + \tau^2) \\
\langle \alpha_1' \times \alpha_1'', \alpha_1''' \rangle &= kk'\tau - k^2\tau'
\end{aligned}
$$

Així, la curvatura i la torsió de α_1 són

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k} \\
\tau_1 &= \frac{1}{k}\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)'}{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2}
\end{aligned}
$$

En particular, α_1 és plana si i només si $\tau_1 \equiv 0$, o equivalentment si $\frac{\tau}{k}$ és constant, és a dir, si i només si α és una hèlix.

De la mateixa manera, definim la indicatriu binormal de α com $\alpha_2(s) = B(s)$. Seguirem denotant sense subíndex els elements de α i amb un subíndex 2 el corresponents a α_2. I ometem la referència al paràmetre s on estan valorades totes les funcions. Un altre cop a partir de les fórmules de Frenet de α obtenim

$$
\begin{aligned}
\alpha_2' &= B' = \tau N \\
v_2 &= |\tau| \\
\alpha_2'' &= \tau'N + \tau N' = -k\tau T + \tau'N - \tau^2B \\
\alpha_2''' &= (-k\tau)'T - k\tau T' + \tau''N + \tau'N' - (\tau^2)'B - \tau^2\vec{b'} \\
&= \Big(-k'\tau - 2k\tau'\Big)T - \Big(k^2\tau - \tau^3\Big)N - 3\tau\tau'B \\
\alpha_2' \times \alpha_2'' &= k\tau^2B - \tau^3T \\
|\alpha_2' \times \alpha_2''|^2 &= \tau^4(k^2 + \tau^2) \\
\langle \alpha_2' \times \alpha_2'', \alpha_2''' \rangle &= \tau^3(k'\tau - k\tau')
\end{aligned}
$$

Així, la curvatura i la torsió de α_2 són

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{|\tau|} \\
\tau_2 &= \frac{k^2}{\tau}\left(\frac{\tau}{k}\right)'\frac{1}{k^2 + \tau^2}
\end{aligned}
$$

També tenim que α_2 és plana ($\tau_2 \equiv 0$) si i només si $\frac{\tau}{k}$ és constant, és a dir, si i només si α és una hèlix.

Exercici 61: Sigui $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba regular plana i $\alpha_1 : I \longrightarrow S^1$ la seva indicatriu de les tangents. Fixem un punt $t_0 \in I$. Donat $t \in I$ denotem per $L(t)$ (resp. $L_1(t)$) la longitud de l'arc de α (resp. α_1) entre t_0 i t. Demostreu que la curvatura $k(t_0)$ de α en t_0 és igual al límit del quocient $\frac{L_1(t)}{L(t)}$ quan $t \to t_0$.

Solució: Quan la corba inicial $\alpha(t)$ no està parametritzada per l'arc, la indicatriu de les tangents s'escriu com

$$\alpha_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{d\alpha(t(s))}{ds}_{|s=s(t)}$$

on s és el paràmetre arc de $\alpha(t)$. Sabem doncs que $ds/dt = |\alpha'(t)|$. Les longituds venen donades per

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt, \\ L_1(t) &= \int_{t_0}^{t} |\alpha_1'(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Diguem s_1 al paràmetre arc de $\alpha_1(t)$. Tenim doncs

$$\frac{ds_1}{dt}_{|t=t(s)} = |\frac{d\alpha_1}{dt}_{|t=t(s)}| = |\frac{d\alpha_1(t(s))}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}_{|t=t(s)}| = |\frac{d}{ds}\frac{d\alpha(t(s))}{ds}|\cdot|\alpha'(t)_{|t=t(s)}| = k(t(s))\cdot|\alpha'(t(s))|.$$

Com aquesta igualtat és certa per tot s ho és per tot valor de t de manera que tenim

$$|\alpha_1'(t)| = k(t)\cdot|\alpha'(t)|.$$

Per tant

$$L_1(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha_1'(t)|\, dt = \int_{s_0}^{s} k(t)|\alpha'(t)|\, dt.$$

Pel teorema del valor mitjà per a integrals hem acabat.

Exercici 62: El triedre de Frenet d'una corba està format per vectors lliures i podem pensar, doncs, que en variar el paràmetre t de la corba, tenim una família de triedres que es mouen amb un punt fix (per exemple, l'origen de coordenades). És ben sabut que quan un cos rígid (en aquest cas, el triedre) es mou amb un punt fix, el moviment és un gir infinitesimal al voltant d'un eix.

Trobeu la velocitat angular en que gira el triedre de Frenet d'una corba.

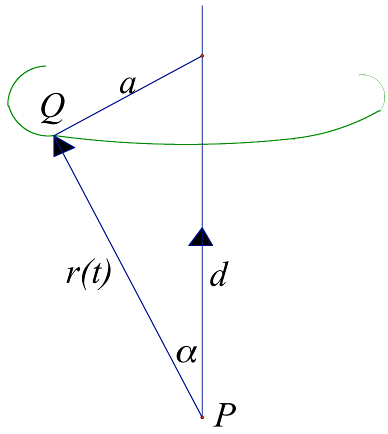
Solució: *Cas particular previ.* Suposem un punt Q que gira al voltant d'un eix, descrivint doncs una circumferència en un pla perpendicular a aquest eix. Si $r(t)$ és el vector posició, per ser $|r(t)| = constant$, obtenim $\langle r'(t), r(t)\rangle = 0$. Per altra banda, si denotem per e el vector unitari director de l'eix, obtenim $\langle r(t), e\rangle = |r(t)|\cos\alpha = constant$, i per tant $\langle r'(t), e\rangle = 0$. Com $r'(t)$ és perpendicular a $r(t)$ i a e tenim

$$r'(t) = \lambda(t) e \wedge r(t). \tag{12}$$

Igualant els mòduls

$$|r'(t)| = \lambda(t)|r(t)|\sin\alpha = \lambda(t)a,$$

on a és el radi de gir.



Però $|r'(t)|$ és la velocitat $v(t)$ del punt, i per definició de velocitat angular tenim

$$v(t) = \omega(t)a$$

de manera que $\lambda(t) = \omega(t)$. Definim el vector de Darboux com

$$d(t) = \omega(t)\, e \tag{13}$$

i l'equació del moviment (12) s'escriu

$$r'(t) = d(t) \wedge r(t).$$

Cas general. Considerem una corba i les seves equacions de Frenet. Els tres vectors $T'(t), N'(t), B'(t)$ pertanyen, en cada punt, al pla $E(t)$ donat per

$$E(t) = \langle N(t), -k(t)T(t) - \tau(t)B(t)\rangle.$$

El vector director d'aquest pla, al que denotem $d(t)$ per analogia amb el cas anterior (però ara varia amb t també la direcció), és

$$d(t) = N(t) \wedge (-k(t)T(t) - \tau(t)B(t)) = k(t)B(t) - \tau(t)T(t)$$

de manera que

- $T'(t)$ és ortogonal a $T(t)$ i a $d(t)$. Per tant, $T'(t) = \lambda(t)d(t) \wedge T(t)$.
- $N'(t)$ és ortogonal a $N(t)$ i a $d(t)$. Per tant, $N' = \mu(t)d(t) \wedge N(t)$.
- $B'(t)$ és ortogonal a $B(t)$ i a $d(t)$. Per tant, $B' = \nu(t)d(t) \wedge B(t)$.

Comparant amb les fórmules de Frenet obtenim $\lambda = \mu = \nu = 1$. En efecte,

$$T'(t) = k(t)N(t) = \lambda(t)(k(t)B(t) - \tau(t)T(t)) \wedge T(t) = \lambda(t)k(t)N(t),$$

per tant $\lambda(t) = 1$. Anàlogament

$$B'(t) = \tau(t)N(t) = \nu(t)(k(t)B(t) - \tau(t)T(t)) \wedge B(t) = \nu(t)\tau(t)N(t),$$

per tant $\nu(t) = 1$. I

$$N'(t) = -k(t)T(t) - \tau(t)B(t) = \mu(t)(k(t)B(t) - \tau(t)T(t)) \wedge N(t) = -\mu(t)k(t)T(t) - \mu(t)\tau(t)B(t),$$

per tant $\mu(t) = 1$.

En particular, les fórmules de Frenet es poden reescriure com

$$\begin{array}{rcl} T'(t) & = & d(t) \wedge T(t), \\ N'(t) & = & d(t) \wedge N(t), \\ B'(t) & = & d(t) \wedge B(t). \end{array}$$

de manera que, per a qualsevol punt P, solidari al triedre de Frenet, és a dir, tal que el seu vector posició $r(t)$ respecte del triedre de Frenet sigui de la forma $r(t) = aT(t) + bN(t) + cB(T)$, amb a, b, c constants, tenim

$$\begin{array}{rcl} r'(t) & = & ad(t) \wedge T(t) + b\, d(t) \wedge N(t) + c\, d(t) \wedge B(t) \\ & = & d(t) \wedge aT(t) + d(t) \wedge bN(t) + d(t) \wedge cB(t) = d(t) \wedge r(t). \end{array}$$

La comparació d'aquesta fórmula $r'(t) = d(t) \wedge r(t)$ amb (13), que representa un gir, és el motiu de que es digui que tot moviment d'un sòlid rígid amb un punt fix és un *gir infinitesimal*.

Si definim la velocitat angular a l'instant t, $\omega(t)$, com el quocient entre la velocitat lineal $|r'(t)|$ i el radi (instantani) de gir

$$a(t) = |r(t)| \sin \alpha(t)$$

amb $\alpha(t)$ l'angle entre $r(t)$ i $d(t)$, tenim

$$|r'(t)| = \omega(t) a(t) = |d(t)||r(t)| \sin \alpha(t)$$

és a dir,

$$\omega(t) = |d(t)| = \sqrt{k(t)^2 + \tau(t)^2}.$$

Aquesta és la velocitat angular en la que gira el triedre de Frenet.

Observem que hem demostrat el següent resultat ben conegut des de fa uns 300 anys:

Teorema 2: Tot moviment d'un sòlid rígid amb un punt fix és un gir infinitesimal.

Demostració. Pensem que aquest sòlid rígid té una referència ortonormal solidària amb ell, amb origen el punt fix. Si d'aquesta referència en diem $T(t), N(t), B(t)$, com que per hipòtesis coneixem $T(t), N(t), B(t)$ en tot instant t, també coneixem les seves derivades. En particular podem pensar que és la referència de Frenet d'una corba de curvatura $|T'(t)|$ i torsió $|B'(t)|$ (suposem $\tau \neq 0$ i treballem localment amb τ sempre positiu o sempre negatiu). Les fórmules de Frenet d'aquesta corba que hem vist que es poden escriure com producte exterior amb un eix de gir $d(t)$ que varia amb el temps resolen el problema.

Exercici 63: Trobeu una corba parametritzada per l'arc amb curvatura $k(s) = s$, torsió $\tau(s) = 0$, que passi per l'origen quan $s = 0$ i que, en aquest punt, el seu triedre de Frenet sigui

$$\begin{array}{rcl} T(0) & = & (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ N(0) & = & (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ B(0) & = & (0, 0, -1). \end{array}$$

Solució: Abans de començar observem que, com sempre $k(s) \geq 0$, ha de ser $s \in [0, L]$ i per tant en el 0 només tindrem derivades per la dreta. Tot i que $k(0) = 0$ podrem definir $N(0)$ per obtenir el resultat de l'enunciat.

Com que la corba és plana el vector binormal és constant i tenim $B(s) = (0, 0, -1)$ per tot s, de manera que la corba està continguda en el pla xy. I la base $T(s), N(s)$ és negativa respecte la base canonica de xy ja que $T(s) \wedge N(s) = B(s)$ mentre que $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

Sabem que $k(s) = |\theta'(s)|$ on $\theta(s)$ és l'angle que forma la tangent a la corba amb la direcció $(1, 0, 0)$. Així, $\langle \gamma'(s), (1, 0, 0) \rangle = x'(s) = \cos\theta(s)$.

En el nostre cas, doncs, $|\theta'(s)| = s$, que, com $s \geq 0$, ens diu que $\theta'(s)$ només s'anul·la en $s = 0$ i $\theta(s)$ és per tant sempre creixent o sempre decreixent, és a dir, $\theta(s) = \pm\frac{s^2}{2} + C$, amb el signe $+$ per a tota s o amb el signe $-$ per a tota s.

Com $\theta(0) = \pi/4$, per la condició inicial que ens donen, tenim

$$\theta(s) = \pm\frac{s^2}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad s \geq 0.$$

Per tant

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos(\pm\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}) dt, \\ y(s) &= \int_0^s \sin(\pm\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}) dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Per controlar el signe calculem $N(0)$ que sabem que ha de ser igual a $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ i veiem que hem d'agafar el signe menys, i per tant la solució és

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos(-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}) dt, \\ y(s) &= \int_0^s \sin(-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}) dt. \end{aligned}$$

Aquestes integrals no són expressables per funcions elementals.

Un altre mètode. Podem procedir integrant directament les equacions de Frenet. Posant $T(s) = (x_1(s), x_2, x_3), N(s) = (x_4, x_5, x_6)$ les equacions de Frenet són

$$\begin{aligned} x_1' &= s x_4 \\ x_2' &= s x_5 \\ x_3' &= s x_6 \\ x_4' &= -s x_1 \\ x_5' &= -s x_2 \\ x_6' &= -s x_3 \end{aligned}$$

Per tant

$$x_4''' = -3\, s\, x_4 - s^2\, x_4'.$$

I expressions anàlogues per a x_5 i x_6.

Aquesta equació diferencial és difícil de resoldre, però ens limitem a comprovar que la solució donada anteriorment la compleix.

Com x_4 és la primera component de $N(s)$, i la corba $(x(s), y(s))$ donada per les equacions (14) està parametritzada per l'arc,

$$x_4(s) = \sin(-\frac{s^2}{2} + \frac{\pi}{4}),$$

funció que compleix efectivament l'equació diferencial anterior.

Exercici 64: Comproveu que la corba definida per

$$\alpha(s) = (\frac{a}{c}\int \sin\theta(s)ds, \frac{a}{c}\int \cos\theta(s)ds, \frac{b}{c}s),$$

amb $a^2 + b^2 = c^2$, i on $\theta(s)$ és qualsevol funció amb $\theta'(s) \neq 0$, compleix que $\dfrac{k(s)}{\tau(s)} = \pm\dfrac{a}{b}$ (en particular, és una hèlix).

Solució: Observem que

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= (\frac{a}{c}\sin\theta(s), \frac{a}{c}\cos\theta(s), \frac{b}{c}) \\
|\alpha'(s)| &= 1 \\
\alpha''(s) &= \frac{a}{c}(\theta'(s)\cos\theta(s), -\theta'(s)\sin\theta(s), 0) \\
\alpha'''(s) &= \frac{a}{c}(-\theta'(s)^2\sin\theta(s) + \theta''(s)\cos\theta(s), -\theta'(s)^2\cos\theta(s) - \theta''(s)\sin\theta(s), 0) \\
\alpha'(s)\wedge\alpha''(s) &= \frac{a\theta'(s)}{c^2}(b\sin\theta(s), b\cos\theta(s), -a) \\
|\alpha'(s)\wedge\alpha''(s)| &= \frac{a}{c}|\theta'(s)| \\
k(s) &= \frac{a}{c}|\theta'(s)| \\
\tau(s) &= \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{|\alpha'(s)\wedge\alpha''(s)|^2} = \frac{\dfrac{-a^2b\theta'(s)^3}{c^3}}{\dfrac{a\theta'(s)}{c}} = -\frac{b}{c}\theta'(s)
\end{aligned}$$

Així, $\frac{k(s)}{\tau(s)} = -\frac{a}{b}\frac{|\theta'(s)|}{\theta'(s)}$. Com $\theta'(s) \neq 0$, tindrem o bé sempre $\theta'(s) < 0$, i el quocient entre curvatura i torsió és positiu, o bé sempre $\theta'(s) > 0$, i el quocient entre curvatura i torsió és negatiu.

Exercici 65: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la. Demostreu que si tots els centres dels cercles osculadors de α estan continguts en una recta aleshores α és una circumferència. Indicació: recordeu que el cercle osculador és el cercle del pla osculador amb centre el punt $\alpha(s) + \rho(s)N(s)$ i radi $\rho(s)$, on $\rho(s)$ és el radi de curvatura de $\alpha(s)$.

el centre del cercle osculador de α en el punt $\alpha(s)$ és

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s).$$

Solució: Parametritzem α pel paràmetre arc s i definim la corba dels centres dels cercles osculadors $\beta(s) = \alpha(s)+\rho(s)N(s)$ on $\rho(s) = 1/k(s)$ és el radi de curvatura. La hipòtesi de que $\beta(s)$ està continguda en una recta es pot traduir en que la curvatura de $\beta(s)$ és zero, o equivalentment que $\beta'(s) \times \beta''(s) = 0$. Utilitzant les fórmules de Frenet de α obtenim (totes les funcions valorades en s, que ometem per comoditat)

$$\begin{aligned}
\beta' &= \alpha' - \rho' N + \rho N' = T - \rho' N + \rho(-kT - \tau B) \\
&= -\rho' N - \rho\tau B \\
\beta'' &= -\rho'' N + \rho'(kT + \tau B) - (\rho\tau)' B - \rho\tau^2 N \\
&= \rho' k T - (\rho'' + \rho\tau^2) N + \Big(\rho'\tau - (\rho\tau)'\Big) B \\
\beta' \times \beta'' &= \Big[- \rho'(\rho'\tau - (\rho\tau)') - \rho\tau(\rho'' + \rho\tau^2)]T - \rho\rho' k\tau N - \rho'^2 k B
\end{aligned}$$

Imposant ara que $\beta'(s) \times \beta''(s) = 0$ obtenim tres equacions que impliquen que $\rho'(s) = 0$ (i per tant $k(s)$ és constant) i $\tau(s) = 0$ (i per tant, la corba α és plana). Així, es dedueix que α és una circumferència.

Exercici 66: Demostreu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors és una corba tal que la seva tangent en cada punt és ortogonal a la tangent de la corba inicial en el punt corresponent.

Solució: La corba $\sigma(s)$, lloc geomètric dels centres de curvatura, s'escriu com

$$\sigma(s) = \alpha(s) + \rho(s) N(s),$$

on $\rho(s)$ és el radi de curvatura i $N(s)$ la normal principal. Derivant respecte del paràmetre arc s tenim

$$\sigma'(s) = T(s) + \rho'(s)N(s) + \rho(s)(-k(s)T(s) - \tau(s)B(s))$$

on $\tau(s)$ és la torsió i $B(s)$ el vector binormal.

Com que $\rho(s)k(s) = 1$, $\sigma'(s)$ és combinació lineal de $N(s)$ i $B(s)$, i és per tant ortogonal a $T(s)$, per a tot s.

Exercici 67: Vegeu que en un punt que no sigui extrem de la curvatura d'una corba plana, la corba travessa el cercle osculador en aquest punt.

Solució: Prenem, amb centre en aquest punt, la referència $T(0), N(0)$. D'aquesta manera la corba $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ compleix $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $y''(0) = k(0) = 1/\rho$, on ρ és el radi de curvatura en $\gamma(0)$. Podem pensar que s és el paràmetre arc.

Sigui $D(s)$ la funció *distància dels punts de la corba al centre de curvatura* $(0, \rho)$. Tenim

$$D(s) = \sqrt{x(s)^2 + (y(s) - \rho)^2}.$$

Farem les derivades successives de $D(s)$ observant que Aquestes derivades es simplifiquen bastant si anem pensant que només ens interessa el seu valor en $s = 0$.

En efecte,

$$\begin{aligned}
D'(s) &= (x(s)x'(s) + (y(s) - \rho)y'(s))D(s)^{-1} \\
D''(s) &= \big(x'(s)^2 + x(s)x''(s) + y'(s)^2 + (y(s) - \rho)y''(s)\big)\, D(s)^{-1} + D'(s)\lambda(s), \\
D'''(s) &= \big(x''(s)^2 + x'(s)x''(s) + x''(s)^2 + 2y'(s)y''(s) + (y(s) - \rho)y'''(s)\big)\, D(s)^{-1} \\
&+ \; D'(s)\mu(s) + D''(s)\nu(s),
\end{aligned}$$

on $\lambda(s), \mu(s), \nu(s)$ són certes funcions.

Posant ara $s = 0$ obtenim

$$\begin{array}{rcl} D(0) & = & \rho \\ D'(0) & = & 0 \\ D''(0) & = & 0 \\ D'''(0) & = & -y'''(0). \end{array}$$

És fàcil veure que $k'(0) = y'''(0)/2$, de manera que la hipòtesis de que el punt no sigui extrem de la curvatura vol dir que $y'''(0) \neq 0$.

Per tant, si desenvolupem $D(s)$ per Taylor obtenim

$$D(s) = \rho + as^3 + \ldots$$

on $a = -k'(0)/3$. Així a té signe oposat a $k'(0)$: positiu si la curvatura decreix i negatiu si la curvatura creix.

Si $a > 0$, els punts de la corba amb $s < 0$ són interiors al cercle osculador, i els punts de la corba amb $s > 0$ són exteriors al cercle osculador.

Si $a < 0$, els punts de la corba amb $s < 0$ són exteriors al cercle osculador, i els punts de la corba amb $s > 0$ són interiors al cercle osculador.

Exercici 68: Demostreu que cercles osculadors pròxims d'una corba plana no es tallen.

Solució: Sigui $\gamma(s)$ una corba plana parametritzada per l'arc. La corba $\sigma(s)$ dels centres de curvatura és la corba

$$\sigma(s) = \gamma(s) + \rho(s)N(s),$$

on $\rho(s)$ i $N(s)$ són respectivament el radi de curvatura i la normal de $\gamma(s)$.

Puntualitzarem l'enunciat suposant que $\rho'(0) > 0$. En particular existeix un petit entorn de 0 en el que $\rho'(s) > 0$. Veurem que els cercles osculadors corresponents a aquests valors de s no tallen el cercle osculador corresponent a $s = 0$.

La longitud de σ entre $\sigma(0)$ i $\sigma(s)$ és

$$l(\sigma(0), \sigma(s)) = \int_0^s |\sigma'(s)| ds = \int_0^s |\rho'(s)| ds = \rho(s) - \rho(0).$$

Sigui Q un punt qualsevol del cercle osculador en el punt $\gamma(0)$. Veurem que Q és interior al cercle osculador en el punt $\gamma(s)$. En efecte,

$$d(Q, \sigma(s)) \leq d(Q, \sigma(0)) + d(\sigma(0), \sigma(s)) \leq \rho(0) + l(\sigma(0), \sigma(s)) = \rho(s).$$

Però el signe igual en aquesta igualtat només es pot donar si la corba de centres de curvatura és una recta (en el petit interval que estem considerant). Però això vol dir que el vector normal $N(s)$ és constant, la qual cosa només es dóna quan γ és una recta, situació implícitament no considerada ja que quan parlem de $\rho(s)$ entenem que $k(s) \neq 0$. Per tant

$$d(Q, \sigma(s)) < \rho(s),$$

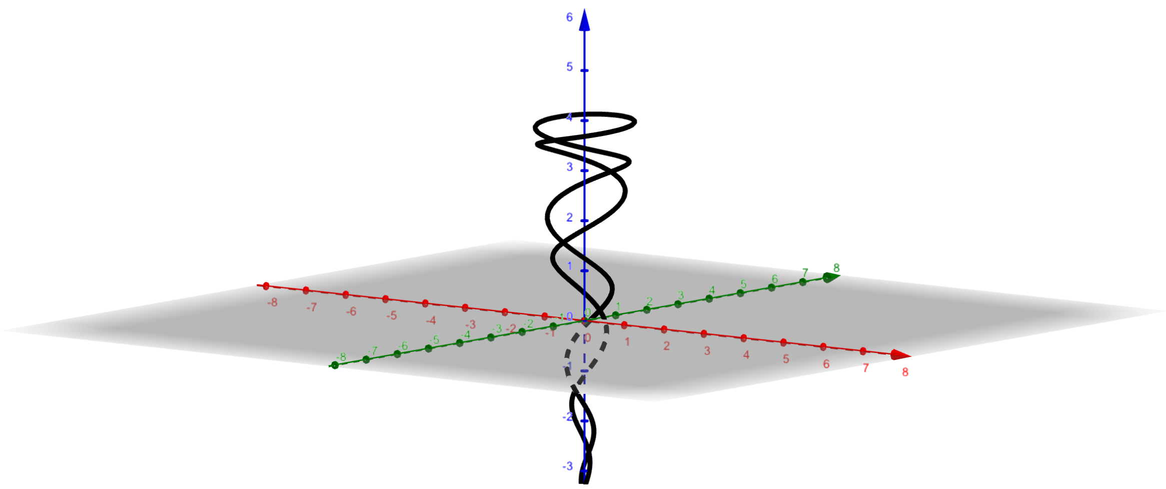
i tot punt del cercle osculador en el punt $\gamma(0)$ és interior al cercle osculador en el punt $\gamma(s)$.

Exercici 69 (Corbes de Salkowski)**:** [17] Comproveu amb ordinador que la corba

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{16}{\sqrt{257}}\left(-\frac{\sqrt{257}-1}{4(\sqrt{257}+2)}\sin(1+\frac{2}{\sqrt{257}})t - \frac{\sqrt{257}+1}{4(\sqrt{257}-2)}\sin(1-\frac{2}{\sqrt{257}})t - \frac{1}{2}\sin(t)\right)\\
y(t) &= \frac{16}{\sqrt{257}}\left(\frac{\sqrt{257}-1}{4(\sqrt{257}+2)}\cos(1+\frac{2}{\sqrt{257}})t + \frac{\sqrt{257}+1}{4(\sqrt{257}-2)}\cos(1-\frac{2}{\sqrt{257}})t + \frac{1}{2}\cos(t)\right)\\
z(t) &= 4\cos(\frac{2t}{\sqrt{257}})
\end{aligned}$$

(que és un cas particular de corba de Salkowski) té curvatura constant $k = 1$ i torsió variable $\tau(t) = \tan(\frac{t}{\sqrt{257}})$.

Solució: Deixem com exercici.



Exercici 70 (Corba no rectificable)**:** Considerem la corba $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

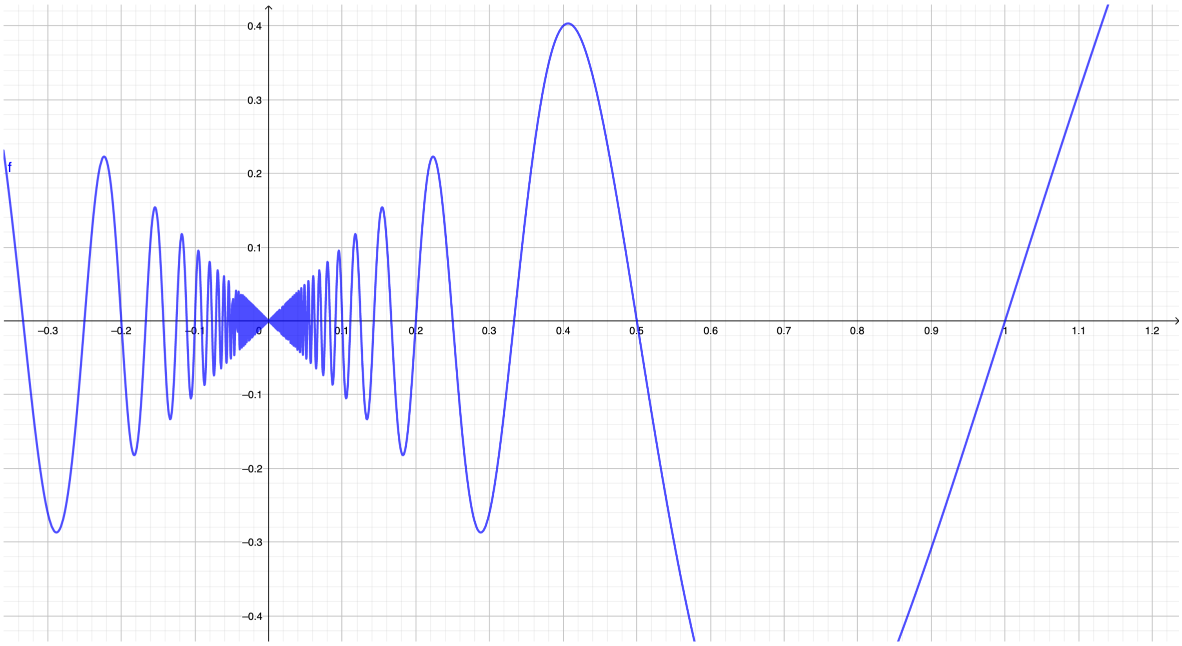
$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (t, t\sin(\pi/t)) \qquad \text{per a } t \neq 0\\
\alpha(0) &= (0,0).
\end{aligned}$$

Demostreu que la longitud d'arc de α corresponent a $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$ és, com a mínim, $2/(n+\frac{1}{2})$. Utilitzeu aquest fet per demostrar que la longitud d'arc de α a l'interval $1/N \leq t \leq 1$ és més gran que $2\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j+1}$ i, per tant, tendeix a infinit si $N \to \infty$.

[17] Vegeu *Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion*, Computer Aided Geometric Design, J. Monterde, Volume 26, Issue 3, March 2009, Pages 271-278

Solució: Observem que la corba $\alpha(t)$ passa pels punts A, B, C següents:

$$\begin{aligned} A &= \alpha(\frac{1}{n+1}) = (\frac{1}{n+1}, 0) \\ B &= \alpha(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}) = (\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}}) \\ C &= \alpha(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n}, 0) \end{aligned}$$



La longitud de la corba entre A i C és més gran o igual que la longitud de la poligonal ABC, la qual té longitud

$$2\overline{AB} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2(n+1)(n+\frac{1}{2})}\right)^2} \geq \frac{2}{n+\frac{1}{2}}$$

Resumint, la longitud de la corba a l'interval $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ és m´s gran o igual a $\frac{2}{n+\frac{1}{2}}$.

Donat N dividim l'interval $[\frac{1}{N}, 1]$ en els subintervals

$$[\frac{1}{N-k}, \frac{1}{N-k-1}], \qquad k = 0, 1, \ldots, N-2.$$

Apliquem el resultat anterior a cadascun d'aquests subintervals. Tindrem que la longitud de la corba a l'interval $[\frac{1}{N}, 1]$ és més gran o igual a

$$\sum_{k=0}^{N-2} \frac{2}{N-k-\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{N-\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2-\frac{1}{2}}) > 2(\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 2\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j+1}.$$

Quan N tendeix a infinit aquesta suma és la serie harmònica, que és divergent.

Mètode potser més curt [comentari Joaquim Bruna]. Considerem els punts consecutius sobre l'eix de les x on $\sin(\pi/x) = \pm 1$. Correspon a tenir la partició $\frac{2}{2k+1}$. La gràfica de la funció passa pels punts consecutius $A = (\frac{2}{2k+1}, \pm 1)$, $B = (\frac{2}{2k+3}, \mp 1)$, i la longitud de la corba entre ells és més gran que la distància

$$d(A,B) = \sqrt{(\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k+3})^2 + 4} \geq \frac{2}{2k+3}$$

Per tant la longitud de la poligonal és més gran que

$$\sum_1^\infty \frac{2}{2k+3}$$

suma que és divergent.

Exercici 71 (Clotoide): Trobeu el punt $A = (a, 0)$ i la clotoide adequada $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = A$, amb $\gamma'(0) = (1, 0)$ i que per a un cert valor del paràmetre s la clotoide sigui tangent a la circumferència de centre $(1, 1)$ i radi $1/2$.

Solució: Recordem que la clotoide és la corba que es defineix imposant que la seva curvatura varii linealment amb l'arc, és a dir,

$$k(s) = \lambda s$$

per a una certa constant λ. Si diem $\alpha(s)$ l'angle entre la tangent a aquesta corba i l'eix de les x sabem que

$$k(s) = \lambda s = \frac{d\alpha}{ds}$$

i per tant (suposant $\alpha(0) = 0$)

$$\alpha(s) = \frac{\lambda s^2}{2}.$$

Com $\langle (x'(s), y'(s)), (1, 0) \rangle = x'(s) = \cos \alpha(s)$ la clotoide és

$$\gamma(s) = (\int_0^s \cos(\mu\, s^2), \int_0^s \sin(\mu\, s^2)), \quad 2\mu = \lambda.$$

La clotoide que busquem en aquest problema en particular és de la forma

$$\gamma(s) = \left(a + \int_0^s \cos(\mu\, t^2)\, dt, \int_0^s \sin(\mu\, t^2)\, dt\right).$$

La seva curvatura és

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = 2\mu\, s$$

de manera que $k(s) = 2$ (curvatura del cercle donat) quan $s = 1/\mu$.

Per aquest valor de s s'han de complir dues coses:

1. $\|\gamma(1/\mu) - (1, 1)\| = 1/2$, (el punt de la clotoide està en el cercle donat),
2. $\langle \gamma(1/\mu) - (1, 1), (\cos(\mu\, s^2), \sin(\mu\, s^2)) \rangle = 0$, (la clotoide és tangent al cercle en el punt de contacte).

Aquestes dues equacions, amb les dues incògnites a, μ, són

$$\left(a+\int_0^{1/\mu}\cos(\mu\, t^2)\,dt-1\right)^2+\left(\int_0^{1/\mu}\sin(\mu\, t^2)\,dt-1\right)^2=\frac{1}{4},$$
$$\left(a+\int_0^{1/\mu}\cos(\mu\, t^2)\,dt-1\right)\cos(1/\mu)+\left(\int_0^{1/\mu}\sin(\mu\, t^2)\,dt-1\right)\sin(1/\mu)=0.$$

Deduïm

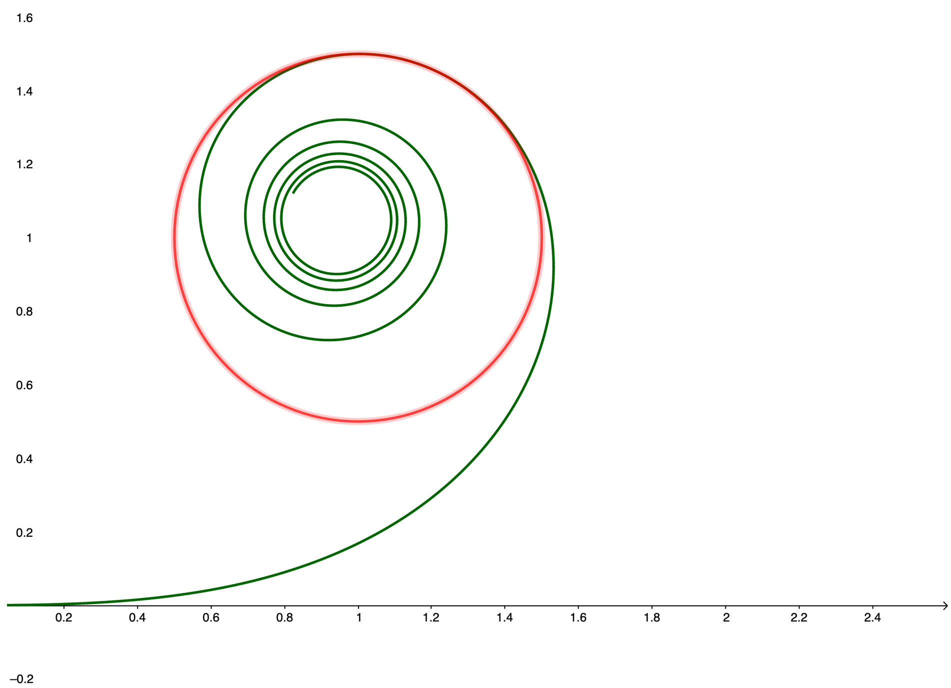
$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\sin(1/\mu)+1-\int_0^{1/\mu}\cos(\mu\, t^2)dt \\ \int_0^{1/\mu}\sin(\mu\, t^2)dt-1 &= -\frac{1}{2}\cos(1/\mu). \end{aligned}$$

La segona equació només involucra μ i té solució $\mu = 0.356$ i per tant, substituint i resolent la primera equació obtenim $a = -0.106$.

Per tant la clotoide buscada és

$$\gamma(s)=\left(-0.106+\int_0^s\cos(0.356\, t^2)\,dt, \int_0^s\sin(0.356\, t^2)\,dt\right).$$

Si dibuixem aquesta funció[18] obtenim



[18]Aprofito els càlculs en GeoGebra fets per Bernat Ancochea.