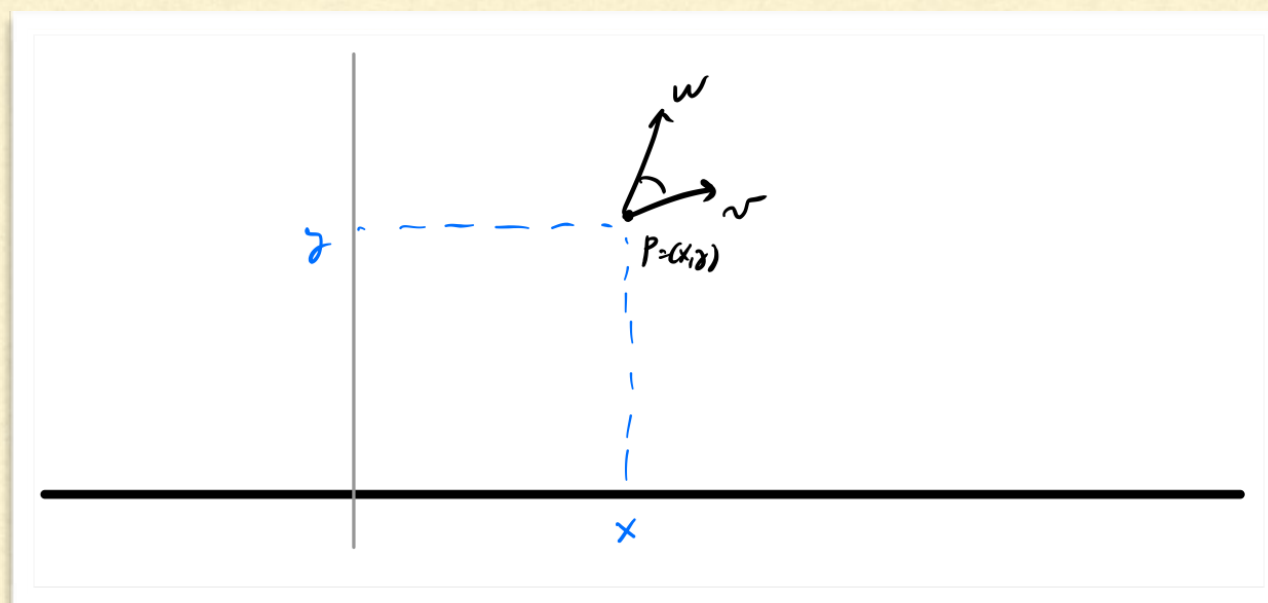

GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari I I

El pla hiperbòlic

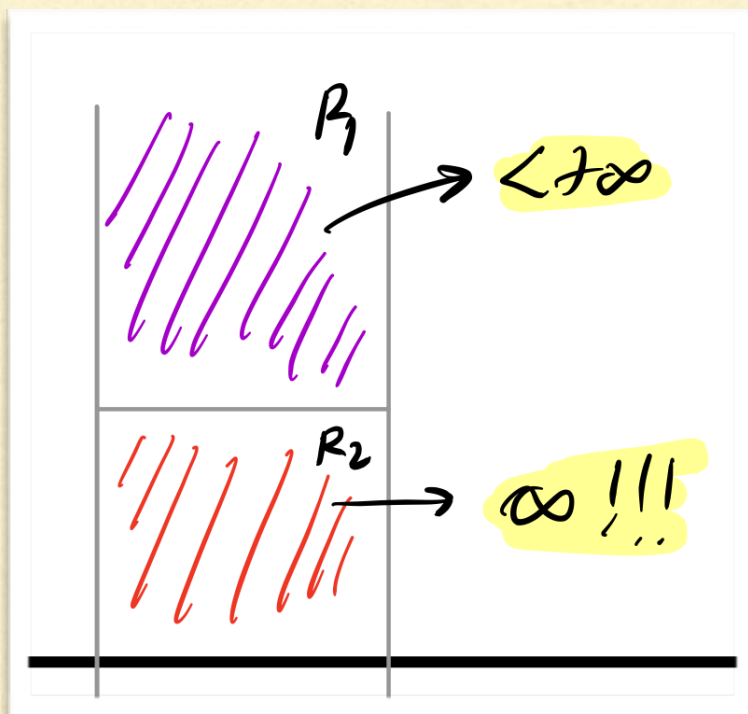
Es considera una superfície S que admet una parametrització global definida al semiplà superior $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ en la qual la primera forma fonamental I té coeficients $E = G = \frac{1}{y^2}$ i $F = 0$. Una tal superfície s'anomena *pla hiperbòlic*. Identifiquem S amb \mathbb{H} a través d'aquesta parametrització.

Exercici 11.1. Comproveu que la mesura d'angles de \mathbb{H} coincideix amb la mesura d'angles euclidiana en el punt de coordenades (x, y) .



Solució: Si $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$ llavors $\langle v, w \rangle_{\text{hip}} = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle_{\text{eucl}}$. Els cosinus coincideixen i ja ho tenim.

Exercici 11.2. Calculeu l'àrea de la regió $R_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 1 < y < \infty\}$. Comproveu que la regió $R_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ té àrea infinita.



Solució:

$$A(R_1) = \int_{R_1} \sqrt{EG - F^2} dx dy = \int_0^1 \int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy dx = 1, \quad A(R_2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y^2} dy dx = \infty.$$

Exercici 11.3. Es possible determinar, a partir de les dades anteriors, les línies de curvatura de S ? I les línies asimptòtiques?

Solució: No. Les línies asimptòtiques i les línies de curvatura es calculen mitjançant la segona forma fonamental que no sabem quina és.

Exercici 11.4. Determinem les geodèsiques $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

(a) Deduïu, fent servir les equacions d'Euler-Lagrange, que les equacions de les geodèsiques en aquestes coordenades estan donades per

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{1}{y} \dot{x}^2 - \frac{1}{y} \dot{y}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Euler-Lagrange}$$

i que per tant els símbols de Christoffel són $-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$ i la resta zero.

Solució:

a) Derivem $L = y^{-2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y^{-3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2y^{-2}\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2y^{-2}\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2y^{-3}(y\ddot{x} - 2\dot{x}\dot{y}), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2y^{-3}(\ddot{y}y - 2\dot{y}^2).$$

Substituïnt a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

surt.

(b) Comproveu que la curvatura de Gauss de \mathbb{H} és constant $K = -1$.

Solució:

$$K = \frac{1}{E}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u).$$

(c) Comproveu que les semirectes verticals $\gamma(t) = (x_0, e^{at})$ són geodèsiques.

Es comprova i surt.

(d) Deduïu de les equacions del primer apartat que les geodèsiques compleixen $\dot{x}/y^2 = ct$. Veieu que llavors es té que $\cos \phi / y = ct$. on ϕ és l'angle format per la geodèsica γ amb les rectes horitzontals $y = ct$ al punt considerat.

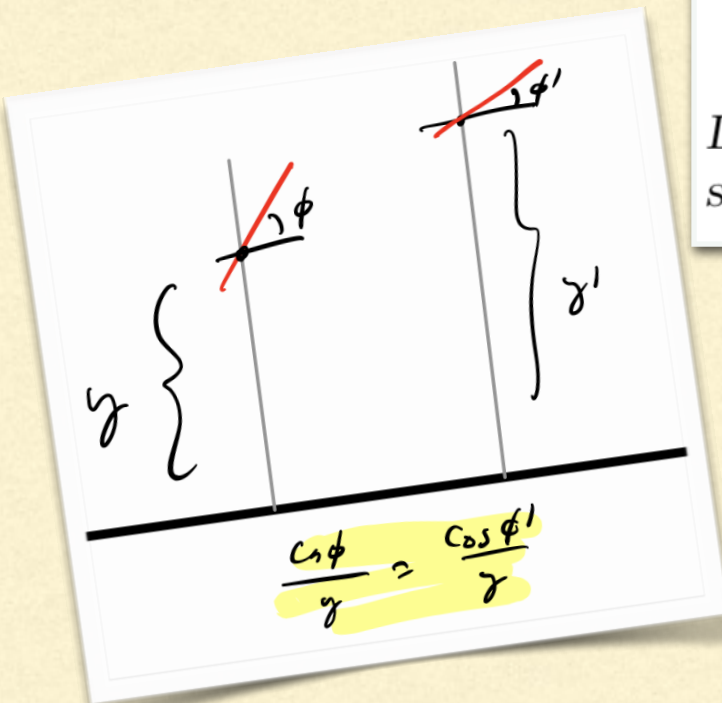
Per la primera equació,

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{y^2} = \frac{\ddot{x}}{y^2} - 2 \frac{\dot{x}\dot{y}}{y^3} = \frac{1}{y^2} (\ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x}\dot{y}) = 0$$

Per tant $\frac{\dot{x}}{y^2}$ és constant. Com que també $|\gamma'|$ és constant, deduïm

$$\frac{\cos \phi}{y} = \frac{E\dot{x}}{y|\gamma'|\sqrt{E}} = \frac{\dot{x}}{y^2|\gamma'|} = ct.$$

De la relació $\cos \phi / y = ct$. veiem que unes geodèsiques tornen cap avall i altres $\phi = \pi/2$ són les de l'apartat anterior.



$$\cos \phi = \frac{\langle (1,0), \gamma' \rangle}{|(1,0)| |\gamma'|} = \frac{\frac{x'}{y^2}}{\frac{1}{y} \cdot 1} = \frac{x'}{y} \Rightarrow \frac{\cos \phi}{y} = \frac{x'}{y^2} = ct.$$

- (e) Proveu que les semicircumferències (euclidianes) a \mathbb{H} amb centre a la recta $y = 0$ compleixen la relació $\frac{1}{y} \cos \phi = ct$. Proveu que les geodèsiques γ de S són de la forma $x = x_0 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on $\theta = \theta(t)$ compleix l'equació $\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 \cot \theta$.

Solució: És evident que $\cos \phi = \sin \theta = \frac{y}{r}$ (veure dibuix). Això demostra la primera afirmació. Per a la segona part, no usem formalment aquest fet, sinó que plantegem $\gamma(t) = r(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ i calculem:

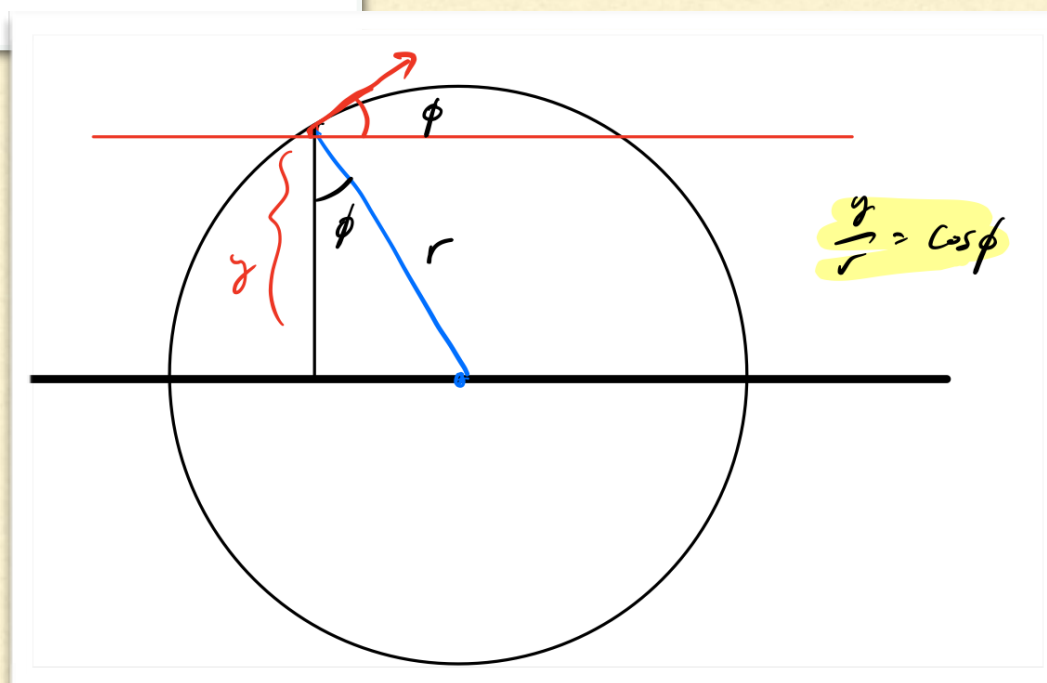
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r\dot{\theta} \sin \theta & \ddot{x} &= -r\dot{\theta}^2 \cos \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= r\dot{\theta} \cos \theta & \ddot{y} &= -r\dot{\theta}^2 \sin \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

I per tant les equacions (a) es converteixen en

$$0 = \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} = r\dot{\theta}^2 \cos \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta \quad (11.3)$$

$$0 = \ddot{y} + \frac{1}{y}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = r\ddot{\theta} \cos \theta - r \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \dot{\theta}^2 \quad (11.4)$$

que equivalen totes dues a $\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 \cot \theta$. Tota solució donarà lloc a una corba que compleix les equacions de les geodèsiques.



(f) Per resoldre $\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 \cot \theta$ busquem $\theta = \theta(t)$ de manera que t sigui un múltiple del paràmetre arc s de γ . Comproveu que $s = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)$ i que per tant $\theta = 2 \arctan e^s = 2 \arctan e^{at+b}$.

(g) Deduiu, com a conclusió, que les geodèsiques (no verticals) de \mathbb{H} estan donades per

$$x(t) = x_0 + r \frac{1 - e^{2(at+b)}}{1 + e^{2(at+b)}}, \quad y(t) = r \frac{2e^{at+b}}{1 + e^{2(at+b)}}.$$

Com que $\gamma = (x_0, 0) + r(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \gamma' = r(-\sin \theta, \cos \theta) \theta' \Rightarrow$

$$|\gamma'|^2 = \frac{r^2 \theta'^2}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\theta'^2}{\sin^2 \theta} \Rightarrow s = \int^* \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \theta = x_0 + r \cos(2 \arctan e^s) \\ y &= r \sin(2 \arctan e^s) \end{aligned} \right\} \text{ Fem servir que } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos(2 \arctan e^s) = \cos^2(\arctan e^s) - \sin^2(\arctan e^s) = \frac{1}{1 + e^{2s}} - \frac{e^{2s}}{1 + e^{2s}} = \frac{1 - e^{2s}}{1 + e^{2s}}$$

$$\sin(2 \arctan e^s) = 2 \cdot \frac{\tan(\cdot)}{1 + \tan^2(\cdot)} = \frac{2e^s}{1 + e^{2s}}.$$

El nostre punt $s = at + b$.

Exercici 11.5. Proveu que les aplicacions de la forma $\Psi_1(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$, $\Psi_2(x, y) = (kx, ky)$ i $\Psi_3(x, y) = (x + c, y)$ són isometries de \mathbb{H}^2 , on $k > 0, c \in \mathbb{R}$.

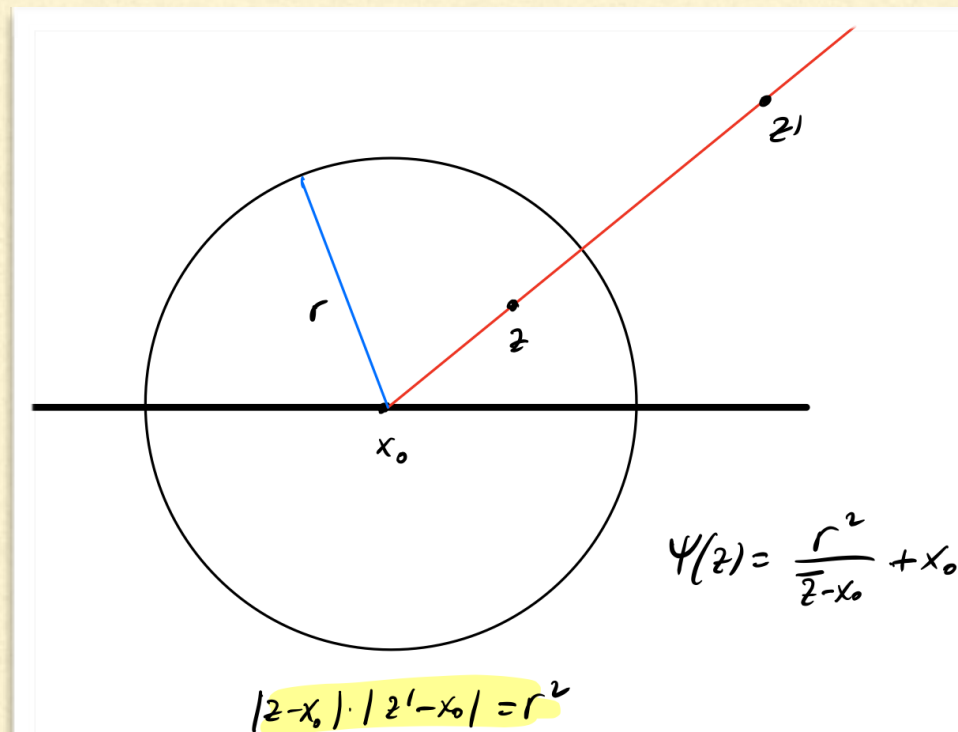
Solució:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = (x^2 + y^2)^{-2}(y^2 - x^2, -2xy), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = (x^2 + y^2)^{-2}(-2xy, x^2 - y^2).$$

$$I\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) = \left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)^2 (x^2 + y^2)^{-4} ((y^2 - x^2)^2 + 4x^2 y^2) = \frac{1}{y^2} = E$$

$$I\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) = \dots = 0 = F, \quad I\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right) = \dots = \frac{1}{y^2} = G$$

$$\begin{cases} \psi_1(z) = \frac{1}{z} & \text{Invariànt} \\ \psi_2(z) = kz & \text{Homotètic} \\ \psi_3(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{R} & \text{Translació} \end{cases}$$



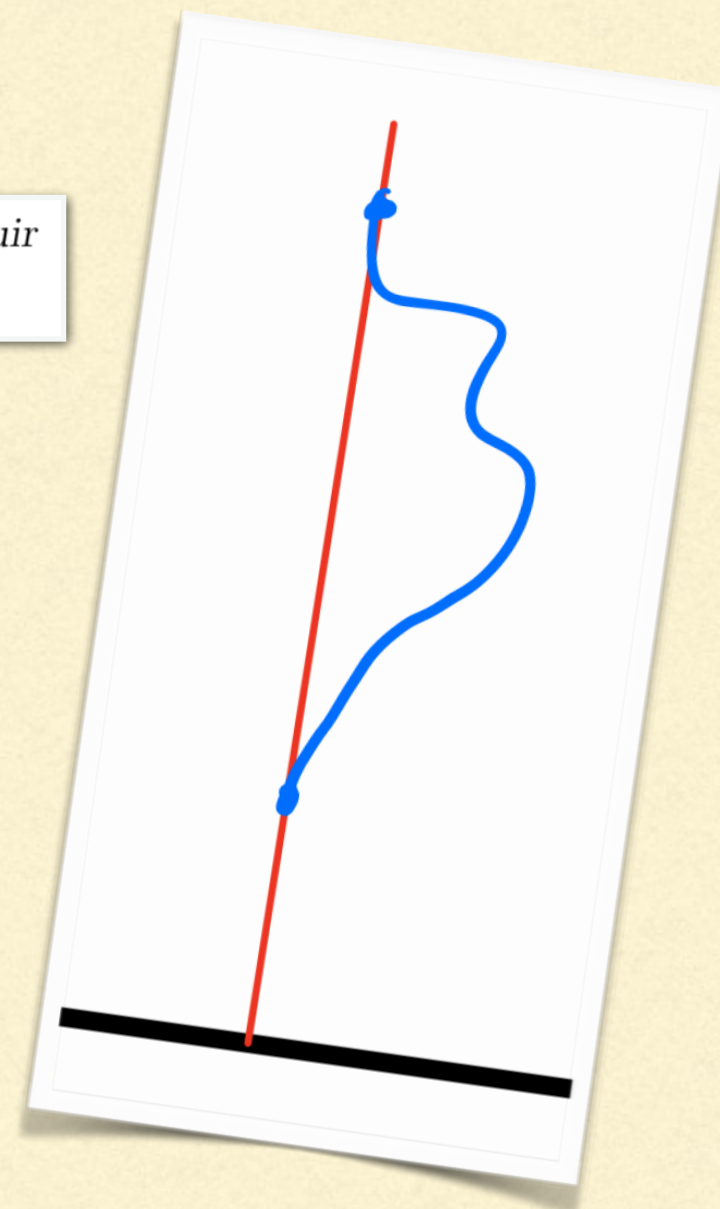
Exercici 11.6. Donat $c \in \mathbb{R}$ considerem $\Psi(x, y) = \frac{1+c^2}{(x-c)^2+y^2}(x-c, y) + (c, 0)$. Proveu que $\Psi(0, e^{-t}) = (x(t), y(t))$ amb $x(t), y(t)$ donades a (11.5) i trobeu x_0, r, a, b .

Indicacions:

Veiem que Ψ és isometria. Per tant $\Psi(0, e^{-t})$ ha de ser geodèsica. No cal calcular $\Psi(0, e^{-t})$.

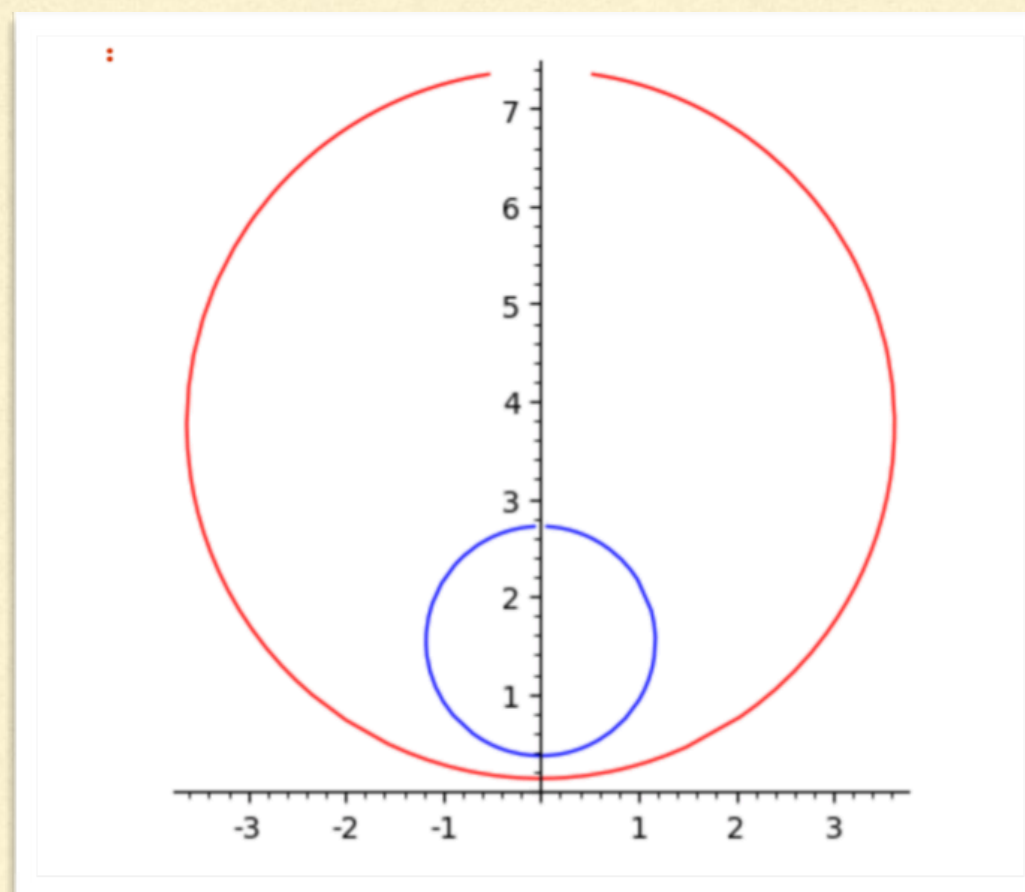
Exercici 11.7. Donats dos punts $p, q \in \mathbb{H}$, proveu que existeix una geodèsica $\gamma(t)$ de \mathbb{H} tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Proveu que la longitud de $\gamma([0, 1])$ és menor o igual que la longitud de qualsevol corba que uneixi $\gamma(0)$ amb $\gamma(1)$.

Indicacions: La primera part es dedueix del que hem vist. Per a la segona part, ens podem reduir al cas en què $\gamma(t)$ és vertical. En aquest cas, es comprova fàcilment que γ minimitza longituds.



Exercici 11.8. Donats $P \in \mathbb{H}$ i $v \in T_P\mathbb{H}$ un vector amb $I(v, v) = 1$, denotem per $\gamma_{P,v}(s)$ la geodèsica parametritzada per l'arc tal que $\gamma_{P,v}(0) = P$ i $\gamma'_{P,v}(0) = v$. Anomenem circumferència hiperbòlica de radi r i centre P al conjunt $S_r(P) = \{\gamma_{P,v}(r) : v \in T_P\mathbb{H}, I(v, v) = 1\}$.

- Dibuixeu amb **Sage** un parell de circumferències hiperbòliques centrades a $P = (0, 1)$.
- Proveu que les circumferències hiperbòliques al semiplà es veuen com circumferències euclidianes.



Per saber més.

1. *Corbes especials.* La circumferència euclidiana de centre (x_0, a) i radi a és tangent a la recta $\{y = 0\}$ en el punt $(x_0, 0)$ i és ortogonal a totes les geodèsiques que surten aquest punt. Aquest tipus de corbes s'anomenen horocicles i s'obtenen com el límit d'una família de circumferències hiperbòliques que passen per un punt fixat i el centre de les quals tendeix a l'infinit.

La intersecció amb \mathbb{H} d'una circumferència euclidiana, quan no és una geodèsica, ni una circumferència hiperbòlica, ni un horocicle (i.e. quan talla $y = 0$ en un angle diferent de 0 i $\pi/2$) s'anomena corba equidistant. Tots els punt d'aquesta corba estan a la mateix distància de la geodèsica que talla $y = 0$ en els mateixos punts.

2. *Pseudosfera.* La pseudosfera (sense un meridià) que hem tractat al seminari anterior és isomètrica a un troç de \mathbb{H} donat per $P = \{(x, y) \in \mathbb{H} : |x| < a^2, y > b^2\}$ (per a, b adequats). Un teorema de Hilbert diu que el plà hiperbòlic (complet) no es pot trobar com a superfície de \mathbb{R}^3 , en canvi un troç d'ell si que es pot trobar, la pseudosfera.

Sage

Hyperbolic Geometry

- Hyperbolic Points
- Hyperbolic Isometries
- Hyperbolic Geodesics
- Hyperbolic Models
- Interface to Hyperbolic Models

Referències:

- Smogorzhevski, A. *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Lecciones populares de matemáticas, 1978. Ed. MIR, Moscú.
- Ratcliffe, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 1994. Springer Verlag, NY.

http://doc.sagemath.org/html/en/reference/hyperbolic_geometry/index.html

Al CV trobareu un enllaç a una xerrada divulgativa de Geometria Hiperbòlica