Capítol 2

Subvarietats de $\mathbb{R}^n$

Excepte menció explícita, totes les funcions i aplicacions considerades al llarg d'aquest capítol seran diferenciables de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2.1 Funcions planes

Definició 2.1.1. Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Es defineix el **suport** de f com el subconjunt tancat de U

$$\mathrm{Sup}(f) := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

Denotarem per $B_a(x)$ la bola oberta de $\mathbb{R}^n$ de centre x i radi a.

Lema 2.1.2. *Siguin $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $a, b \in \mathbb{R}$ amb $0 < a < b$. Hi ha una funció diferenciable $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ amb $\mathrm{Sup}(\rho) \subset \overline{B_b(x_0)}$ i tal que $\rho|_{B_a(x_0)} \equiv 1$.*

Demostració. La funció $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x \notin (a,b) \end{cases}$$

és de classe $\mathcal{C}^\infty$. La funció $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$\phi(x) = \frac{\displaystyle\int_x^b \varphi(t)dt}{\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt}$$

és també de classe $\mathcal{C}^\infty$ i compleix $\phi(x) = 1$ si $x \leq a$ i $\phi(x) = 0$ si $x \geq b$. Llavors la funció

$$\rho(x^1, \ldots, x^n) = \phi\big((x^1 - x_0^1)^2 + \ldots (x^n - x_0^n)^2\big)$$

compleix les condicions requerides. $\square$

Proposició 2.1.3. *Siguin $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ amb K compacte i U obert. Hi ha una funció $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de manera que $f|K \equiv 1$ i $\mathrm{Sup}(\rho) \subset U$.*

Demostració. Podem trobar una col.lecció finita de boles $B_i \subset B_i'$, $i = 1, 2, \ldots, k$, que suposarem concèntriques, de manera que $B_i' \subset U$ i $K \subset \cup_{i=1}^k B_i$. Siguin ρ_i les funcions donades pel lema anterior per a cada parell (B_i, B_i'), llavors

$$\rho = 1 - (1-\rho_1)(1-\rho_2)\ldots(1-\rho_k)$$

compleix les condicions requerides. □

Comentari 2.1.4. El *principi de prolongació analítica* ens diu que no hi ha funcions $\mathcal{C}^\omega$ en les condicions de la proposició anterior.

Corol·lari 2.1.5. *Siguin $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ com en la proposició i sigui $f : U \to \mathbb{R}$ funció diferenciable. Hi ha $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable de manera que $\widetilde{f}|_K = f|_K$ i $\widetilde{f}|_{\mathbb{R}^n \setminus U} \equiv 0$.*

2.2 Immersions i submersions

Definició 2.2.1. Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicació diferenciable.

a) Diem que f és **immersió en** $x_0 \in U$ si $df_{x_0} = Df(x_0)$ és injectiva. En aquest cas $n \leq m$. Diem que f és **immersió** si és immersió en cada punt de U.
b) Diem que f és **submersió en** $x_0 \in U$ si $df_{x_0} = Df(x_0)$ és exhaustiva. En aquest cas $n \geq m$. Diem que f és **submersió** si és submersió en cada punt de U.

Comentari 2.2.2. Si f és immersió (resp. submersió) en un punt x_0 del seu domini també ho és en tot un entorn de x_0.

Exemples 2.2.3.

1. La **inclusió canònica**
$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q} \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$
és immersió. Si $g\colon U \subset \mathbb{R}^{p+q} \to g(U) \subset \mathbb{R}^{p+q}$ és un difeomorfisme llavors la composició $g \circ i$ és una immersió.
2. La **projecció canònica**
$$\begin{aligned} \pi_1\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q &\to \mathbb{R}^p \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$
és submersió. Si $g\colon U \subset \mathbb{R}^{p+q} \to g(U) \subset \mathbb{R}^{p+q}$ és un difeomorfisme llavors la composició $\pi_1 \circ g$ és una submersió.
3. Sigui $f\colon U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una aplicació diferenciable llavors la **gràfica** $\Gamma(f)$ de f, és a dir l'aplicació definida per
$$\begin{aligned} \Gamma(f)\colon U \subset \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q} \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$
és una immersió injectiva. Notem que, de fet, $\Gamma(f)$ és un homeomorfisme de U sobre la seva imatge $\Gamma(f)(U)$ (amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^{p+q}$).

Definició 2.2.4. Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable.

a) Diem que f és un **difeomorfisme** (sobre la seva imatge) si $f(U)$ és obert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow f(U)$ és un homeomorfisme i f^{-1} és també diferenciable.

b) Diem que f és un **difeomorfisme local** si, $\forall x \in U$, $\exists V$ obert amb $x \in V \subset U$ i tal que $f|_V$ és un difeomorfisme.

Exemple 2.2.5. $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ és un difeomorfisme local però no global.

Teorema 2.2.6 (Teorema de la funció inversa)**.** *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Suposem que, en un punt $x_0 \in U$, la diferencial df_{x_0} és un isomorfisme, llavors hi ha un entorn $x_0 \in V \subset U$ tal que $f|_V$ és difeomorfisme.*

Teorema 2.2.7 (Estructura local de les immersions)**.** *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ immersió en $x_0 \in U$. Hi ha entorns oberts U' i V de x_0 i de $i(x_0)$ en $U \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ respectivament, així com un difeomorfisme sobre la seva imatge $g\colon V \to \mathbb{R}^m$ de manera que, a U', es compleix $\varphi = g \circ i$, és a dir que el següent diagrama és commutatiu*

$$\begin{tikzcd}
 & V \subset \mathbb{R}^m \arrow[d, "g"] \\
U' \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\varphi"] & g(V) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

(Aquí $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$ és la inclusió canònica.)

Comentari 2.2.8. De manera esquemàtica podem escriure

$$\varphi(x) = g \circ i(x) = g(x, 0).$$

Aquest resultat diu que, localment, tota immersió és com l'exemple (1) descrit a 2.2.3.

Comentari 2.2.9. D'aquest resultat resulta en particular que la restricció $\varphi|_{U'}$ és un homeomorfisme de U' en la seva imatge $\varphi(U')$ (amb la topologia induïda per $\mathbb{R}^m$).

Demostració. Notem que $n \leq m$. Per hipòtesi, la matriu jacobiana $J\varphi(x_0) = \left(\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x_0)\right)$ que representa la diferencial $d\varphi_{x_0}$, té rang n. Podem suposar que $\det\left(\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x_0)\right) \neq 0$ on $i, j = 1, \ldots, n$ (en cas contrari podem substituir φ per $\sigma \circ \varphi$ on σ és un canvi d'ordre de les coordenades). Definim

$$\begin{aligned} g\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m \\ (x, y) \quad &\longmapsto \quad \varphi(x) + (0, y) \end{aligned}$$

Aleshores es compleix $g(x, 0) = \varphi(x)$ i la diferencial $dg_{(x_0,0)}$ està donada per la matriu

$$Jg(x_0, 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^n}(x_0) & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^n}(x_0) & \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^n}(x_0) & \mathrm{Id} \end{array}\right)$$

que té determinant no nul. Pel teorema de la funció inversa hi ha un entorn V de $(x_0, 0) = i(x_0)$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $g|_V$ és un difeomorfisme de V sobre un obert de $\mathbb{R}^m$. Sigui $U' \subset \mathbb{R}^n$ obert amb $x_0 \in U' \subset U$ i tal que $i(U') \subset V$. Llavors U', V i g compleixen les condicions del teorema. □

Teorema 2.2.10 (Estructura local de les submersions)**.** *Sigui $U \subset \mathbb{R}^n$ obert i $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ submersió en $z_0 \in U$. Hi ha un entorn V de z_0 en U i un difeomorfisme sobre la seva imatge $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ de manera que el diagrama següent és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} V \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{R}^m \\ g(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

(Aquí $\pi_1\colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ és la projecció canònica.)

Comentari 2.2.11. De manera esquemàtica podem escriure

$$F = \pi_1 \circ g \quad \Longleftrightarrow \quad F \circ g^{-1}(x, y) = x.$$

Aquest resultat diu que, localment, tota immersió és com l'exemple (2) descrit a 2.2.3.

Demostració. Notem que $n \geq m$. Per hipòtesi, la matriu jacobiana $J\varphi(z_0) = \left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(z_0)\right)$ té rang m. Substituint F per $F \circ \sigma$, on σ és un canvi d'ordre de les coordenades, podem suposar que $\det\left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(z_0)\right) \neq 0$ on $i, j = 1, \dots, m$. Identifiquem $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ i definim

$$\begin{aligned} g\colon U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \\ (x, y) &\longmapsto (F(x, y), 0) + (0, y) \end{aligned}$$

Aleshores es compleix $F(x, y) = \pi_1 \circ g(x, y)$ i la diferencial $dg_{(z_0)}$ està donada per la matriu

$$Jg(z_0) = \left(\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(z_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^m}(z_0) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(z_0) \\ \hline & 0 & & & \mathrm{Id} \end{array}\right)$$

que té determinant no nul. Pel teorema de la funció inversa, hi ha un entorn obert $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ de z_0 tal que $g|_V$ és un difeomorfisme sobre la seva imatge. I sobre V es compleix $\pi_1 \circ g = F$. □

Comentari 2.2.12. Notem que cada un d'aquests dos teoremes anteriors és equivalent al teorema de la funció inversa.

2.3 Subvarietats de $\mathbb{R}^n$

En aquest apartat farem $n = p + q$, identificarem $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ i denotarem per $x = (x^1, \ldots, x^p)$ i $y = (y^1, \ldots, y^q)$ les coordenades de $\mathbb{R}^p$ i $\mathbb{R}^q$ respectivament.

Definició 2.3.1. Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$. Diem que S és una **subvarietat** de $\mathbb{R}^n$ de **dimensió** p (i **codimensió** q) si per a tot $z \in S$ podem trobar un entorn U de z en $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme $g : U \to g(U) \subset \mathbb{R}^n$ de manera que

$$g(U \cap S) = g(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}). \tag{2.1}$$

Teorema 2.3.2. *Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$. Les següents condicions són equivalents:*

a) *S és una subvarietat de $\mathbb{R}^n$ de dimensió p.*

b) *$\forall z \in S$, $\exists U$ entorn obert de z en $\mathbb{R}^n$ i $F : U \to \mathbb{R}^q$ submersió tal que $S \cap U = F^{-1}(0)$.*

c) *$\forall z \in S$, $\exists U$ entorn obert de z en $\mathbb{R}^n$, Ω obert de $\mathbb{R}^p$ i $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que*

   i) φ és immersió.

   ii) φ és homeomorfisme de Ω sobre $S \cap U$ (amb la topologia relativa induïda per $\mathbb{R}^n$).

Demostració. Suposem primer que S és una subvarietat de $\mathbb{R}^n$ de dimensió p. Donat $z \in S$, sigui U entorn de z en $\mathbb{R}^n$ i $g \colon U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfisme amb $g(U \cap S) = g(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

La composició $F = \pi_2 \circ g$, on $\pi_2 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ és la projecció sobre el segon factor, és una submersió definida a U que compleix $S \cap U = F^{-1}(0)$. Això prova la implicació a) $\Rightarrow$ b).

D'altra banda, si pensem $\Omega = g(U \cap S) = g(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ com un obert de $\mathbb{R}^p$ i definim $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ per $\varphi = g^{-1}|_\Omega$, aleshores φ és una immersió que aplica Ω bijectivament sobre $S \cap U$ i aquesta bijecció és un homeomorfisme per ser restricció d'un difeomorfisme. Això prova la implicació a) $\Rightarrow$ c).

Suposem que es compleix la condició b) i sigui $z \in S$. Pel teorema d'estructura local de les submersions podem escriure $F = \pi_2 \circ g$ on $g \colon U \to \mathbb{R}^n$ és un difeomorfisme. (Podem suposar que el domini de g és tot U restringint-nos a un entorn suficientment petit de z.) Llavors g compleix igualtat (2.1). Això prova la implicació b) $\Rightarrow$ a).

Suposem que es compleix la condició c) i sigui $z \in S$. Pel teorema d'estructura local de les immersions, en un entorn de $\varphi^{-1}(z)$ es complirà $g \circ \varphi = i$, on $i \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ és la inclusió canònica i $g \colon U \to \mathbb{R}^n$ és un difeomorfisme. La condició ii) de c) implica que, prenent els conjunts Ω i U prou petits, tindrem $U \cap S = U \cap \varphi(\Omega)$ i per tant

$$\begin{aligned} g(U \cap S) &= g(U \cap \varphi(\Omega)) = g(\varphi(\Omega)) \\ &= i(\Omega) = g(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}), \end{aligned}$$

és a dir que g complirà la igualtat (2.1). Això prova la implicació c) $\Rightarrow$ a). $\square$

Nota 2.3.3. Sigui S una subvarietat de $\subset \mathbb{R}^n$. Un parell (Ω, φ) complint les hipòtesis de la condició c) del teorema anterior s'anomena **parametrització** de S. El parell $(\varphi(\Omega), \varphi^{-1})$ s'anomena **carta local** de S.

Comentari 2.3.4. Una subvarietat pot no estar globalment definida per una única submersió. És el cas per exemple d'una superfície no orientable de $\mathbb{R}^3$, com la banda de Moebius. De manera similar, pot no estar definida per una única immersió, com l'esfera o qualsevol superfície compacta de $\mathbb{R}^3$. Veiem que les obstruccions són globals, de tipus topològic.

Proposició 2.3.5. *Siguin* (Ω_1, φ_1) *i* (Ω_2, φ_2) *dues parametritzacions d'una subvarietat* S *de* $\mathbb{R}^n$. *La composició* $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ *és diferenciable en el seu domini (i per tant un difeomorfisme sobre la seva imatge).*

Demostració. Al ser la diferenciabilitat una propietat local, és suficient provar l'afirmació en un entorn de cada punt del domini de $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Sigui $z \in \varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2)$ i denotem $x_1 = \varphi_1^{-1}(z)$ i $x_2 = \varphi_2^{-1}(z)$. Per ser S subvarietat, hi ha un entorn obert U de z en $\mathbb{R}^n$ i un difeomorfisme sobre la seva imatge $g\colon U \to \mathbb{R}^n$ tal que $g(U \cap S) = g(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. Hi ha un entorn obert W_i de x_i de manera que la composició $\psi_i = \pi_1 \circ g \circ \varphi_i$ està definida en W_i i és un difeomorfisme sobre la seva imatge. Llavors, en un entorn de x_1, es compleix

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \psi_2^{-1} \circ \psi_1 = \big(\pi_1 \circ g \circ \varphi_2\big)^{-1} \circ \big(\pi_1 \circ g \circ \varphi_1\big),$$

la qual cosa prova que la composició $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ és diferenciable en un entorn de x_1. □

L'exercici que segueix proporciona un criteri útil per a decidir que una certa aplicació és una parametrització d'una subvarietat donada.

Exercici 2.3.6. Sigui S una subvarietat de $\mathbb{R}^n$ de dimensió p i sigui $\varphi\colon \Omega \to S \subset \mathbb{R}^n$ una aplicació diferenciable, on Ω és un obert de $\mathbb{R}^p$, tal que

i) φ és immersió,

ii) φ és injectiva.

Demostreu que $\varphi(\Omega)$ és un obert de S (amb la topologia relativa induïda per $\mathbb{R}^n$) i que $\varphi\colon \Omega \to g(\Omega) \subset S$ és un homeomorfisme. Per tant (Ω, φ) és una parametrització de S.

Exemples 2.3.7. 1) L'esfera unitat $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, definida per la submersió

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0,$$

és una subvarietat.

2) El tor $T^2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\}$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^4$ que pot ser parametritzada, en un domini adequat, per

$$g(\alpha, \beta) = (\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta).$$

3) El conjunt $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$, on $f : U \to \mathbb{R}^n$ és diferenciable i $U \subset \mathbb{R}^2$ és obert, és una subvarietat.

4) El conjunt $S = \{(x, y) \in S^2 \mid y = |x|\}$ no és una subvarietat de $\mathbb{R}^2$.

5) Una figura S en forma de ∞ no és subvarietat de $\mathbb{R}^2$. Observem que l'aplicació

$$\varphi(t) = \Big(2\cos\big(h(t) - \frac{\pi}{2}\big)\,,\ \sin 2\big(h(t) - \frac{\pi}{2}\big)\Big) \quad \text{on} \quad h(t) = 2\arctan t.$$

parametritza de manera bijectiva un conjunt S d'aquest tipus. L'aplicació φ és una immersió injectiva però no és homeomorfisme sobre la seva imatge.

Exercicis 2.3.8. 1. Sigui $S_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$ on $\lambda \in \mathbb{R}$. Decidiu per a quins valors de λ el conjunt S_λ és una subvarietat de $\mathbb{R}^3$.

2. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 1, \qquad x\,y + u\,v = 0.$$

Demostreu que S és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^4$ i calculeu-ne la dimensió.

2.4 Superfícies de $\mathbb{R}^3$

Definició 2.4.1. Una subvarietat de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ s'anomena **superfície** (regular) de $\mathbb{R}^3$.

Les superfícies regulars es poden caracteritzar localment per medi de submersions o de parametritzacions tal i com estableix el Teorema 2.3.2. Les parametritzacions són particularment útils a la pràctica ja que proporcionen coordenades locals en la superfície. Una altra caracterització que resulta útil en l'estudi d'exemples concrets és la següent.

Proposició 2.4.2. *Sigui S un subconjunt de $\mathbb{R}^3$. Les següents condicions són equivalents*

a) *S és una superfície.*

b) *$\forall z_0 \in S$, $\exists U$ entorn obert de z_0 en $\mathbb{R}^3$, un canvi de d'ordre de les coordenades σ, un entorn V de $\pi_1(\sigma(z_0))$ en $\mathbb{R}^2$ (on $\pi_1 : \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ és la projecció canònica) i una aplicació diferenciable $h : V \to \mathbb{R}$ de manera que $\sigma(S \cap U)$ és el gràfic de h, és a dir, $\sigma(S \cap U) = \Gamma(h)(V)$.*

Comentari 2.4.3. Aquest enunciat diu en particular que, localment i llevat d'un canvi d'ordre de les coordenades, una superfície de $\mathbb{R}^3$ és la gràfica d'una funció diferenciable, és a dir de la forma $z = h(x, y)$.

Demostració. Suposem que S és una superfície regular i sigui $z \in S$. D'acord amb la condició c) del Teorema 2.3.2, hi ha un entorn obert U_1 de z en $\mathbb{R}^3$ i una immersió $\varphi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que és un homeomorfisme de Ω en $S \cap U_1$. Sigui $x_0 = \varphi^{-1}(z_0)$. Hi ha un canvi d'ordre de les coordenades σ tal que $\tilde{\varphi} = \sigma \circ \varphi$ té la matriu jacobiana en x_0 amb el determinant del primer menor no nul. Per simplicitat de la notació suposem $\sigma = \mathrm{Id}$ i per tant fem $\tilde{\varphi} = \varphi$.

En aquesta situació, la composició $\pi_1 \circ \varphi$, restringida a un un entorn Ω' de x_0 en Ω, és un difeomorfisme sobre la seva imatge. Posem $V = \pi_1 \circ \varphi(\Omega')$ i definim

$$h\colon (\pi_2 \circ \varphi) \circ (\pi_1 \circ \varphi)^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

llavors

$$\begin{aligned}\Gamma(h)(x) &= \big(x, h(x)\big) = \big((\pi_1 \circ \varphi) \circ (\pi_1 \circ \varphi)^{-1}(x)\,,\,(\pi_2 \circ \varphi) \circ (\pi_1 \circ \varphi)^{-1}(x)\big)\\ &= \varphi \circ (\pi_1 \circ \varphi)^{-1}(x).\end{aligned}$$

Per tant, $\Gamma(h) = \varphi \circ (\pi_1 \circ \varphi)^{-1}$ i es compleix

$$\Gamma(h)(V) = \varphi\big((\pi_1 \circ \varphi)^{-1}(V)\big) = \varphi(\Omega')$$

Com que $\varphi\colon \Omega \to U_1 \cap S$ és homeomorfisme i $\Omega' \subset \Omega$ és obert, $\exists U_2$ obert de $\mathbb{R}^3$ amb $\varphi(\Omega') = U_1 \cap U_2 \cap S$. Posem $U = U_1 \cap U_2$, que és obert. Llavors $\varphi(\Omega') = U \cap S$. Per tant, $\Gamma(h)(V) = \varphi(\Omega') = \varphi(U \cap S)$. Això prova la implicació a) $\Rightarrow$ b).

Suposem que es compleix b) i suposem aquí també, per simplicitat, que $\sigma = \mathrm{Id}$. Si posem $\Omega = V$ i $\varphi(x) = \Gamma(h)(x) = (x, h(x))$ llavors φ és immersió i homeomorfisme sobre la seva imatge (ja que φ i π_1 són contínues). Per tant b) $\Rightarrow$ a). □

Comentari 2.4.4. Un enunciat anàleg al de la proposició anterior és vàlid per a subvarietats de $\mathbb{R}^n$ de dimensió p. Deixem com exercici el seu enunciat precís i l'adaptació de la demostració anterior a aquest cas.

Exemples 2.4.5. 1. L'**esfera** unitat $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definida per $F(x,y,z)=0$, on F és la submersió $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, es pot parametritzar per

$$\begin{cases} x &= \sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta \end{cases}$$

on $\theta\in[0,\pi]$ i $\varphi\in[0,2\pi]$. En aquesta parametrització els angles φ i θ s'anomenen **longitud** i **colatitud** respectivament.

2. El conjunt $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=|y|\}$ no és una superfície regular.

3. El **tor** de revolució $T^2\subset\mathbb{R}^3$ definit per $F(x,y,z)=z^2+\big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)^2-r^2=0$, es pot parametritzar per

$$\begin{cases} x &= \big(R+r\cos\theta\big)\cos\varphi \\ y &= \big(R+r\cos\theta\big)\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{cases}$$

on $\theta,\varphi\in[0,2\pi]$.

4. Doneu una parametrització del **pla** d'equació $ax+by+cz=d$.

5. El **cilindre** $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(\cos u,\sin u,v\big).$$

6. La superfície "uralita", parametritzada per $\varphi(u,v)=(u,v,\sin v)$, està determinada també per l'equació $z=\sin y$.

7. L'**helicoide**, definit per l'equació $y\cos\frac{z}{b}-x\sin\frac{z}{b}$, es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(v\cos u,v\sin u,bu\big).$$

8. L'**el·lipsoide**, definit per l'equació $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(a\sin u\cos v,b\sin u\sin v,c\cos u\big).$$

9. **Superfícies de revolució.** Considerem una corba en el pla Oyz donada per $\alpha(t)=(y(t),z(t))=(a(t),b(t))$. La superfície de revolució obtinguda al girar aquesta corba entorn de l'eix Oz es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(a(u)\cos v,a(u)\sin v,b(u)\big).$$

Per exemple, si la corba és $z=y^2$, s'obté el **paraboloide el·líptic** parametritzat per

$$\varphi(u,v)=\big(u\cos v,u\sin v,u^2\big).$$

Quines condicions han de complir les funcions a i b per poder assegurar que la superfície de revolució obtinguda és regular?

10. **Paraboloides.** El **paraboloide el·líptic** definit per $z=x^2+y^2$ també es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(u,v,u^2+v^2\big).$$

El **paraboloide hiperbòlic** definit per $z=x^2-y^2$ es pot parametritzar per

$$\varphi(u,v)=\big(u,v,u^2-v^2\big).$$

11. **Hiperboloides.** Considerem la superfície de revolució S definida per la quàdrica $x^2+y^2-z^2=a$. Segons els valors de a podem tenir els següents tipus de superfícies:
   - **Hiperboloide el·líptic**, si $a<0$:
     Si per exemple $a=-1$, la seva equació és $z^2-x^2-y^2=1$ i pot ser parametritzada per
     $$\varphi(u,v)=\big(\sinh u\cos v\,,\ \sinh u\sin v\,,\ \pm\cosh u\big).$$
   - **Con**, si $a=0$:
     L'equació és $x^2+y^2-z^2=0$ i pot ser parametritzada per
     $$\varphi(u,v)=\big(u\cos v, u\sin v, u\big).$$
   - **Hiperboloide hiperbòlic**, si $a>0$:
     Si per exemple $a=1$, la seva equació és $x^2+y^2-z^2=1$ i pot ser parametritzada per
     $$\varphi(u,v)=\big(\cosh u\cos v\,,\ \cosh u\sin v\,,\ \sinh u\big).$$

2.5 Funcions diferenciables

Definició 2.5.1. Sigui S una superfície (regular) de $\mathbb{R}^3$. Diem que una aplicació $f\colon S\to\mathbb{R}^k$ és diferenciable en un punt $p\in S$ si hi ha una parametrització local (Ω,φ) de S amb $p\in\varphi(\Omega)$ tal que $f\circ\varphi$ és diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$. Diem que f és **diferenciable** si és diferenciable en cada punt de S.

Comentaris 2.5.2. a) La Proposició 2.3.5 garanteix que aquesta definició no depèn de l'elecció de la parametrització local (Ω,φ).

b) Sigui $\varphi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$ l'expressió en coordenades de la parametrització local de S. Sovint farem l'abús de notació que consisteix en escriure la composició $f\circ\varphi$, com a funció de les variables (u,v), en la forma $f=f(u,v)$ o, si volem especificar les components de f, en la forma
$$f(u,v)=\big(f^1(u,v),\dots,f^k(u,v)\big).$$
Amb aquest conveni, l'anterior definició diu que f és diferenciable si i només si les funcions $f^i=f^i(u,v)$ depenen diferenciablement de les coordenades (u,v).

Proposició 2.5.3. *Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $f\colon S\to\mathbb{R}^k$ una aplicació diferenciable. Donat $p\in S$ hi ha un entorn obert U de p en $\mathbb{R}^3$ i una aplicació diferenciable $\tilde f\colon U\to\mathbb{R}^k$ tal que $\tilde f|_{U\cap S}=f|_{U\cap S}$.*

Demostració. Llevat d'un canvi d'ordre de les coordenades, podem suposar que, en un entorn U de p, la intersecció $S\cap U$ és la gràfica d'una funció diferenciable, $z=h(x,y)$. L'aplicació donada per
$$\varphi(x,y)=\big(x,y,h(x,y)\big)$$
és una parametrització local de S i per tant $f\circ\varphi$ és diferenciable. Aleshores l'aplicació $\tilde f\colon U\to\mathbb{R}^k$ definida com la composició $\tilde f=f\circ\varphi\circ\pi_1$, és a dir
$$\tilde f(x,y,z)=(f\circ\varphi)(x,y),$$
és diferenciable i compleix les condicions requerides. □

Hem de remarcar també el resultat següent. Deixem com exercici la seva demostració que es basa en la caracterització local de les subvarietats (condició c) del Teorema 2.3.2) i en el teorema d'estructura local de les immersions.

Proposició 2.5.4. *Sigui S una superfície (regular) de $\mathbb{R}^3$. Sigui U un obert de $\mathbb{R}^m$ i $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ una aplicació diferenciable tal que $f(U) \subset S$. Si (Ω, φ) és una parametrització local de S llavors la composició $\varphi^{-1} \circ f$ és una aplicació diferenciable en el seu domini.*

Definició 2.5.5. Diem que una aplicació entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ és diferenciable si per a cada punt $p \in S_1$ hi ha parametritzacions (Ω_1, φ_1) i (Ω_2, φ_2) de S_1 i S_2 respectivament, amb $p \in \varphi_1(\Omega_1)$ i $f(p) \in \varphi_2(\Omega_2)$, i tal que la composició $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ és diferenciable en el seu domini.

Exercici 2.5.6. Demostreu que una aplicació entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ és diferenciable si i només si f, pensada com aplicació $f\colon S_1 \to \mathbb{R}^3$, és diferenciable.

Comentari 2.5.7. Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba diferenciable amb imatge continguda en S. Sigui (Ω, φ) una parametrització local de S i suposem que, de fet, $\alpha(I) \subset \varphi(\Omega)$. Posem $\varphi = \varphi(u, v)$. Combinant l'Exercici 2.5.6 i la Proposició 2.5.4 deduïm que la corba α de S es pot escriure $\alpha(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big)$ amb $u = u(t)$ i $v = v(t)$ funcions diferenciables.

2.6 Espai tangent

Definició 2.6.1. Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $p \in S$. Si $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$ és una corba diferenciable amb $\alpha(0) = p$, diem que $\alpha'(0)$ és un **vector tangent** a S en p. El conjunt d'aquests vectors s'anomena **espai tangent** (o pla tangent) a S en p i es denota per T_pS.

Proposició 2.6.2. *Sigui p un punt d'una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Sigui (Ω, ψ) una parametrització local de S amb $p \in \psi(\Omega)$ i sigui $F\colon U \to \mathbb{R}$ una submersió amb $S \cap U = F^{-1}(0)$ i $p \in U$. Posem $\bar{p} = \psi^{-1}(p)$. Aleshores es compleix*

$$\operatorname{Im} d\psi_{\bar{p}} = T_pS = \ker dF_p. \tag{2.2}$$

En particular, T_pS és un espai vectorial de dimensió 2.

Demostració. Sigui $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$ corba diferenciable amb $\alpha(0) = p$ i amb imatge continguda en $\psi(\Omega)$ i en U. Aleshores, pel Comentari 2.5.7, poden escriure $\alpha(t) = \psi(u(t), v(t))$ i es compleix $(F \circ \alpha)(t) \equiv 0$. D'aquí resulten les inclusions

$$\operatorname{Im} d\psi_{\bar{p}} \subset T_pS \subset \ker dF_p.$$

Com que $\dim(\operatorname{Im} d\psi_{\bar{p}}) = 2 = \dim(\ker dF_p)$, les inclusions han de ser igualtats. □

Expressió en coordenades. Sigui $(\Omega, \psi = \psi(u, v))$ una parametrització local de S. Les línies coordenades $u \mapsto \psi(u, v_0)$ i $v \mapsto \psi(u_0, v)$ determinen vectors tangents

$$\Big\{\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0)\,,\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0)\Big\} \tag{2.3}$$

que formen una base del pla tangent T_pS, on $p = (u_0, v_0)$. Si no volem precisar el punt $p = (u_0, v_0)$ escriurem simplement

$$\Big\{\psi_u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial u}\,,\ \psi_v \equiv \frac{\partial \psi}{\partial v}\Big\}. \tag{2.4}$$

Si $\alpha = \alpha(t)$ és una corba diferenciable de S amb imatge continguda en $\psi(\Omega)$ podem escriure $\alpha(t) = \psi(u(t), v(t))$ (cf. Comentari 2.5.7). La regla de la cadena ens diu llavors que es compleix

$$\alpha'(0) = u'(0) \cdot \psi_u + v'(0) \cdot \psi_v. \tag{2.5}$$

Nota 2.6.3. Fent un abús de notació, en lloc d'escriure $\alpha(t) = \psi\big(u(t), v(t)\big)$ sovint posarem simplement $\alpha(t) = \big(u(t), v(t)\big)$.

Exercici 2.6.4. Es considera l'esfera $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Comproveu que el pla tangent a S_R en en punt $(a, b, c) \in S_R$ està donat per l'equació

$$a\,x + b\,y + c\,z = R^2.$$

Suposem ara que $R = 1$. Determineu l'equació del pla tangent a l'esfera en el punt $p = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ utilitzant la parametrització de S_1 donada per

$$\psi(\theta, \varphi) = \big(\sin\theta\cos\varphi\,,\ \sin\theta\sin\varphi\,,\ \cos\theta\big).$$

Recordem el fet següent, conseqüència directa de la regla de la cadena, i que servirà de motivació a la definició 2.6.6.

Lema 2.6.5. *Sigui $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable i sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba de $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = \vec{v}$. Aleshores es compleix $df_p(\vec{v}) = \big(f \circ \alpha\big)'(0)$.*

Aquest resultat expressa que $\big(f \circ \alpha\big)'(0)$ és independent de la corba α sempre que compleixi les condicions especificades.

Definició 2.6.6. Sigui $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicació diferenciable entre superfícies. Es defineix l'**aplicació tangent**, o **diferencial**, de f en $p \in S_1$ com l'aplicació $df_p\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ definida per

$$df_p(\vec{w}) = \big(f \circ \alpha\big)'(0) \qquad \text{si} \quad \vec{w} \in T_p(S_1), \tag{2.6}$$

on $\alpha = \alpha(t)$ és una corba de S_1 tal que $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = \vec{w}$.

Comentari 2.6.7. Cal provar que la definició d'aplicació tangent donada per (2.6) no depèn de la corba α. Notem però que el lema anterior no és directament aplicable. La independència d'aquesta definició respecte de la corba serà conseqüencia de la proposició que segueix.

Siguin $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicació diferenciable i p un punt de S_1. Siguin $\varphi = \varphi(u, v)$, $\bar\varphi = \bar\varphi(\bar u, \bar v)$ parametritzacions locals de S_1 i S_2 de forma que les seves imatges continguin els punts p i $f(p)$ respectivament. Posem $\bar u = f_1(u, v)$ i $\bar v = f_2(u, v)$, és a dir que f_1 i f_2 són les funcions components de $\bar\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Amb aquesta notació es compleix

Proposició 2.6.8. *L'aplicació tangent $df_p\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ definida per (2.6) és lineal. En les bases $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de T_pS_1 i $\{\bar\varphi_{\bar u}, \bar\varphi_{\bar v}\}$ de $T_{f(p)}S_2$, l'aplicació df_p està donada per la matriu*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

on les derivades estan avaluades en el punt $\varphi^{-1}(p)$.

Demostració. Sigui $\alpha = \alpha(t)$ corba de S_1 amb $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = \vec{w} \in T_pS_1$. Podem escriure $\alpha(t) = \varphi\big(u(t), v(t)\big)$ i serà

$$\vec{w} = u'(0)\,\varphi_u + v'(0)\,\varphi_v = a\,\varphi_u + b\,\varphi_v.$$

Llavors $\bar{\alpha}(t) = f \circ \alpha(t)$ és una corba de S_2 amb $\bar{\alpha}(0) = f(p)$ que podem escriure $\bar{\alpha}(t) = \bar{\varphi}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$.

$$\begin{aligned} df_p(\vec{w}) &= \big(f \circ \alpha\big)'(0) = \bar{\alpha}'(0) = \bar{u}'(0)\,\varphi_{\bar{u}} + \bar{v}'(0)\,\varphi_{\bar{v}} \\ &= \Big[\frac{\partial f_1}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}v'(0)\Big]\bar{\varphi}_{\bar{u}} + \Big[\frac{\partial f_2}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}v'(0)\Big]\bar{\varphi}_{\bar{v}} \\ &= \Big[a\,\frac{\partial f_1}{\partial u} + b\,\frac{\partial f_1}{\partial v}\Big]\bar{\varphi}_{\bar{u}} + \Big[a\,\frac{\partial f_2}{\partial u} + b\,\frac{\partial f_2}{\partial v}\Big]\bar{\varphi}_{\bar{v}} \end{aligned}$$

d'on resulta l'enunciat de la proposició. □

Comentari 2.6.9. A partir d'ara farem l'abús de notació consistent en identificar f amb $\bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi$ posant $\bar{u} = f_1(u, v)$ i $\bar{v} = f_2(u, v)$.

Comentari 2.6.10. Si particularitzem el càlcul anterior a l'aplicació $f = \mathrm{Id}\colon S \to S$ obtenim la matriu del canvi de base entre les bases $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ i $\{\bar{\varphi}_{\bar{u}}, \bar{\varphi}_{\bar{v}}\}$ de T_pS associades a dues parametritzacions $\varphi = \varphi(u, v)$ i $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v})$: si posem $h = \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ i $\bar{u} = h_1(u, v)$, $\bar{v} = h_2(u, v)$, llavors la matriu de canvi és la matriu jacobiana

$$J_h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ara és fàcil comprovar que els resultats bàsics del càlcul diferencial són també vàlids per a aplicacions diferenciables entre superfícies o entre superfícies i espais euclidians. Mencionem en particular la regla de la cadena o el teorema de la funció inversa que enunciem a continuació.

Proposició 2.6.11. *Sigui $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicació diferenciable entre superfícies i suposem que l'aplicació lineal df_p, on $p \in S_1$, és un isomorfisme. Aleshores f és un difeomorfisme d'un entorn de p en S_1 sobre un entorn de $f(p)$ en S_2.*

Capítol 3

Primera forma fonamental

3.1 Primera forma fonamental

Considerem una superfície regular S de $\mathbb{R}^3$ i sigui $p \in S$. El producte escalar de $\mathbb{R}^3$ indueix, per restricció, un producte escalar en T_pS que denotarem per $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$.

Definició 3.1.1. La forma quadràtica I_p de T_pS definida per

$$\mathrm{I}_p(\vec{w}) = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle_p = \|\vec{w}\|^2 \geq 0 \tag{3.1}$$

s'anomena **primera forma fonamental** de S en p.

Comentari 3.1.2. En virtut de la identitat de polarització, el producte escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ i la forma quadràtica I_p de T_pS es determinen l'un a l'altre.

Nota 3.1.3. Si no hi ha perill de confusió, sovint ometrem l'index p en la notació del producte escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$.

Expressió en coordenades. Sigui $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ una parametrització local de S. Donat $p \in \varphi(\Omega)$, els vectors $\varphi_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \varphi_v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ formen una base de T_pS. L'expressió en aquesta base de I_p i de $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ està donada, en la notació introduïda per Gauss, per la matriu

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle_p & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

És a dir que, si $\vec{w} = a\,\varphi_u + b\,\varphi_v$ i $\vec{z} = c\,\varphi_u + d\,\varphi_v$, llavors

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle_p = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

i

$$\mathrm{I}_p(\vec{w}) = a^2\,E + 2\,a\,b\,F + b^2\,G. \tag{3.4}$$

Nota 3.1.4. Si $F \equiv 0$ diem que la parametrització $\varphi = \varphi(u,v)$ és **ortogonal** (o que les coordenades (u,v) són ortogonals).

Exemples 3.1.5. 1. Sigui S l'**esfera** de radi R centrada a l'origen parametritzada per la colatitud θ i la longitud φ, i.e.

$$\psi(\theta,\varphi) = \big(\sin\theta\cos\varphi\,,\, \sin\theta\sin\varphi\,,\, \cos\theta\big),$$

llavors

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

2. Sigui C el **cilindre** parametritzat per $\varphi(u,v) = \big(\cos u, \sin u, v\big)$. Llavors

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sigui H l'**helicoide** parametritzat per $\varphi(u,v) = \big(v\cos u, v\sin u, bu\big)$. Llavors

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} v^2+a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Longitud de corbes. Sigui $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ una parametrització local de S i sigui $\alpha = \alpha(t)$ corba de S amb imatge continguda a $\varphi(\Omega)$. Podem escriure $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ i $\alpha'(0) = u'(0)\cdot\varphi_u + v'(0)\cdot\varphi_v$. Llavors es compleix

$$\|\,\alpha'(t)\,\| = \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(0)}(\alpha'(0))} = \sqrt{E\,(u')^2 + 2F\,u'v' + G\,(v')^2} \tag{3.5}$$

i la funció longitud d'arc de α està donada per

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\,\alpha'(\xi)\,\|\,d\xi = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\,(u')^2 + 2F\,u'v' + G\,(v')^2}\,d\xi. \tag{3.6}$$

Exemple 3.1.6. Seguint amb l'esfera de radi R descrita a l'exemple 1) de (3.1.5), considerem el paral·lel $\theta = \theta_0$ que podem parametritzar per $\alpha(t) = \psi(\theta_0, t)$ amb $t \in [0, 2\pi]$. La seva longitud serà

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E\,(\theta')^2 + 2F\,\theta'\varphi' + G\,(\varphi')^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2\theta_0}\,dt = 2\pi\,R\,\sin\theta_0. \end{aligned}$$

Observem que si θ_0 és petit, llavors $L(\alpha) = 2\pi R\sin\theta_0 \cong 2\pi R\,\theta_0$ però que aquest valor és sempre inferior a $2\pi R\,\theta_0$, que és la longitud d'un cercle de radi $R\,\theta_0$ en un pla.

Comentari 3.1.7. L'angle format per dos vectors de T_pS, o per dues corbes de S que es tallen, està donat per la fórmula de la geometria euclidiana que hem recordat a la Definició 1.1.3. En particular, l'angle β format per les línies coordenades d'una parametrització local $\varphi = \varphi(u,v)$ està donat per

$$\cos\beta = \frac{\langle\,\varphi_u\,,\,\varphi_v\,\rangle}{\|\varphi_u\|\;\|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{E\,G}}. \tag{3.7}$$

3.2 Àrea

Definició 3.2.1. Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$. Un subconjunt D de S s'anomena **domini regular** (o simplement **domini**) si D és obert i connex i si la vora ∂D de D en S és la imatge d'una corba tancada i diferenciable a troços. Una **regió** R de S és la unió d'un domini amb la seva vora, i.e. $R = D \cup \partial D$.

Recordem que l'àrea del paral·lelogram determinat per dos vectors $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ està donada per

$$\text{Àrea} = |\det(\vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|.$$

Podem doncs pensar que, si $\varphi = \varphi(u, v)$ és una parametrització de S, l'àrea del paral·lelogram infinitesimal determinat per φ_u i φ_v és

$$\|\varphi_u \, du \wedge \varphi_v \, dv\| = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv = \sqrt{E\,G - F^2} \, du \, dv,$$

on hem utilitzat que $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \; \| \vec{v} \|^2 - \langle \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle^2$. Aquestes consideracions motiven la següent definició

Definició 3.2.2. Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i sigui R una regió compacta de S que suposarem continguda en la imatge d'una parametrització local $\big(\Omega, \varphi = \varphi(u, v)\big)$ de S. Denotem $Q = \varphi^{-1}(R) \subset \mathbb{R}^2$. Es defineix l'**àrea** $A(R)$ de R com

$$A(R) = \int_Q \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv = \int_Q \sqrt{E\,G - F^2} \, du \, dv \tag{3.8}$$

Proposició 3.2.3. *L'anterior definició d'àrea no depèn de l'elecció de la parametrització.*

Demostració. Sigui $\big(\bar{\Omega}, \psi = \psi(\bar{u}, \bar{v})\big)$ una segona parametrització de S amb $R \subset \psi(\bar{\Omega})$. Sigui $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ i posem $\bar{u} = h_1(u, v)$ i $\bar{v} = h_2(u, v)$. Llavors

$$\varphi(u, v) = \psi\big(h(u, v)\big) = \psi\big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$$

i per tant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & = & \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h \cdot \dfrac{\partial h_1}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \cdot \dfrac{\partial h_2}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & = & \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \circ h \cdot \dfrac{\partial h_1}{\partial v} + \dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \circ h \cdot \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{cases}$$

és a dir que la matriu de canvi de base entre les bases (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$ és la matriu jacobiana de h, és a dir la matriu

$$J_h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

D'altra banda, si I_φ i I_ψ són les matrius que representen la forma fonamental de T_pS en les bases (φ_u, φ_v) i $(\psi_{\bar{u}}, \psi_{\bar{v}})$ respectivament, llavors

$$\mathrm{I}_\varphi = J_h^t \cdot \mathrm{I}_\psi \cdot J_h,$$

i per tant

$$\det \mathrm{I}_\varphi = \det \mathrm{I}_\psi \cdot (\det J_h)^2.$$

D'aquí resulta

$$\sqrt{E\,G - F^2} = \sqrt{\bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2} \circ h \cdot |\det J_h|.$$

Si posem $\bar{Q} = \psi^{-1}(R) = h(Q)$ llavors el teorema del canvi de variables dona

$$\begin{aligned}\int_{\bar{Q}} \sqrt{\bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2}\, d\bar{u}\, d\bar{v} &= \int_Q \sqrt{\bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2} \circ h \cdot |\det J_h|\, du\, dv \\ &= \int_Q \sqrt{E\,G - F^2}\, du\, dv,\end{aligned}$$

igualtat que prova la proposició. □

Exemple 3.2.4. Considerem de nou l'esfera S de radi R parametritzada per la colatitud i la longitud com en l'exemple 1) de (3.1.5). En aquestes coordenades la primera forma fonamental és

$$\mathrm{I}_p = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\sqrt{E\,G - F^2} = R^2 \sin\theta \qquad (\text{ja que } 0 \le \theta \le \pi).$$

Sigui R la regió de S determinada per $\theta \le \theta_0$. La seva àrea és

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\theta_0} R^2 \sin\theta\, d\theta \Big)\, d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta_0).$$

Observem que si θ_0 és petit llavors $(1 - \cos\theta_0) \approx \theta_0^2/2$ i per tant $A(R) \approx \pi (R\,\theta_0)^2$. Notem però que $A(R)$ és sempre inferior a l'àrea d'un disc euclidià de radi $R\,\theta_0$. Observem també que, fent $\theta_0 = \pi$, s'obté $A(S) = 4\pi R^2$.

Exercici 3.2.5. Considereu el tor de revolució T parametritzat per

$$\psi(\theta, \varphi) = \big((R + r\cos\theta)\cos\varphi\,,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi\,,\ r\sin\theta\big), \qquad \text{on} \quad 0 \le \theta, \varphi \le 2\pi.$$

Comproveu que en aquestes coordenades la seva primera forma fonamental és

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

i comproveu que $A(T) = 4\pi^2 r\, R$.

Comentari 3.2.6. Sigui $f\colon S \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable sobre la superfície S, $(\omega, \varphi = \varphi(u, v))$ una parametrització local de S i $R = \varphi(Q)$ una regió compacta. El mateix raonament de la Proposició 3.2.3 mostra que la integral

$$\int_R f\, dS := \int_Q (f \circ \varphi) \sqrt{E\,G - F^2}\, du\, dv \tag{3.9}$$

no depèn de la parametrització φ. Aquest fet justifica al següent definició.

Definició 3.2.7. El valor de $\displaystyle\int_R f\, dS$, definit per (3.9), s'anomena **integral de f sobre R**.

3.3 Isometries

Definició 3.3.1. Diem que una aplicació diferenciable entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ és una **isometria local** si la diferencial $df_p\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ és isometria per a cada punt $p \in S_1$. És a dir si es compleix

$$\langle \vec{v}\,,\, \vec{w}\,\rangle_1 = \langle\, df_p(\vec{v})\,,\, df_p(\vec{w})\,\rangle_2 \qquad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in T_pS_1. \tag{3.10}$$

(Aquí $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_i$ denota la primera forma fonamental de S_i.) Diem que f és una **isometria** si és una isometria local i invertible.

Comentaris 3.3.2. 1. Si $f\colon S_1 \to S_2$ és una **isometria local** llavors df_p és un isomorfisme. Això implica que f és localment invertible i, de fet, un difeomorfisme local.

2. La inversa d'una isometria és també isometria (en el seu domini).

Proposició 3.3.3. *Una aplicació diferenciable entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ és una isometria local si i només si preserva longituds, i.e. si per a tota corba $\alpha\colon I \to S_1$ es compleix que $L(\alpha) = L(f \circ \alpha)$.*

Demostració. Si f és una isometria local llavors es compleix

$$\left\|\alpha'(t)\right\|_1 = \left\|\, df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\,\right\|_2 = \left\|(f \circ \alpha)'(t)\right\|_2$$

i per tant

$$L(\alpha) = \int_a^b \left\|\alpha'(t)\right\|_1 dt = \int_a^b \left\|(f \circ \alpha)'(t)\right\|_2 dt = L(f \circ \alpha).$$

Recíprocament, si f conserva longituds, aleshores

$$\int_t^{t+\epsilon} \left\|\alpha'(u)\right\|_1 du = \int_t^{t+\epsilon} \left\|(f \circ \alpha)'(u)\right\|_2 du \qquad \forall\, t, t+\epsilon \in I,$$

d'on resulta, derivant respecte ϵ, que

$$\left\|\alpha'(t)\right\|_1 = \left\|(f \circ \alpha)'(t)\right\|_2 = \left\|\, df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\,\right\|_2.$$

Això implica que df_p conserva normes i, per la identitat de polarització, que df_p conserva el producte escalar. □

Comentari 3.3.4. Sigui $f\colon S_1 \to S_2$ una isometria local i sigui (Ω, φ) una parametrització local de S_1. Suposem que la restricció $f|_{\varphi(\Omega)}$ de f a $\varphi(\Omega)$ és injectiva. Llavors $(\Omega, \psi = f \circ \varphi)$ és una parametrització de S_2. Aleshores es compleix

$$E_\psi = E_\varphi, \qquad F_\psi = F_\varphi, \qquad G_\psi = G_\varphi. \tag{3.11}$$

En efecte, utilitzant la regla de la cadena tenim

$$\psi = f \circ \varphi \quad \Longrightarrow \quad \psi_u = df(\varphi_u) \quad \text{i} \quad \psi_v = df(\varphi_v),$$

llavors, el fet que f sigui isometria local dona les identitats (3.11). Recíprocament, si un difeomorfisme local entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ té la propietat que es compleixen les identitats (3.11) aleshores f és una isometria local. D'aquestes consideracions resulta en particular la proposició següent.

Proposició 3.3.5. *Una isometria entre superfícies $f\colon S_1 \to S_2$ conserva àrees.*

Exercicis 3.3.6.

1. Siguin S i $\bar{S}$ superfícies de $\mathbb{R}^3$ i suposem que hi ha parametritzacions respectives $\varphi\colon \Omega \to S$ i $\psi\colon \Omega \to \bar{S}$ (amb el mateix domini Ω) tals que es compleix

$$E_\psi = E_\varphi, \qquad F_\psi = F_\varphi, \qquad G_\psi = G_\varphi.$$

   Demostreu que la composició $\psi \circ \varphi^{-1}$ és una isometria local.
2. Decidiu si existeixen isometries, o isometries locals, entre les superfícies següents
   a) Un pla.
   b) El cilindre definit per $x^2 + y^2 = 1$.
   c) La superfície "uralita" definida per $z = \sin y$.