GEOMETRIA DIFERENCIAL Primer parcial (12/4/16)

TEORIA Definiu la curvatura $k(s)$ i la torsió $\tau(s)$ d'una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. Demostreu que

$$\frac{dN(s)}{ds} = -k(s)T(s) - \tau(s)B(s)$$

on (T, N, B) és la referència de Frenet. 2 punts.

PROBLEMA 1. Sigui S una superfície parametritzada per $\varphi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2,\ u^2 - v^2\right)$

Proveu que:

a) $E = G = (1+u^2+v^2)^2$, $F = 0$ 0.5 punts

b) $e = 2$, $g = -2$, $f = 0$ 0.5 punts

c) La curvatura mitjana és zero 1 punt

d) Les corbes coordenades són línies de curvatura 1 punt

PROBLEMA 2. Sigui $\gamma(s) = (a(s), 0, b(s))$ una corba injectiva parametritzada per l'arc amb $(a(s) > 0$ i $s \in [0, L]$.

a) Trobeu una parametrització de la superfície de revolució S que s'obté en girar 360 graus $\gamma(s)$ al voltant de z. 0.5 punts

b) Demostreu que $A = 2\pi \int_0^L a(u)\,du$ (A és l'àrea de S), on L és la longitud de $\gamma(s)$. 2 punts

PROBLEMA 3. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc amb $k, \tau \neq 0$. Suposeu que hi ha una segona corba $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ tal que la recta normal a α en el punt $\alpha(s)$, $s \in I$ paràmetre arc de α, coincideix amb la recta normal a β al punt $\beta(s)$.

a) Proveu que $\exists\, r \neq 0$ tal que $\beta(s) = \alpha(s) + r N(s)$ on N és el vector normal principal a α en el punt $\alpha(s)$.