Geometria diferencial
Curs 2017–18

Formes diferencials. Diferencial exterior

Exercici 1: *(Per a repassar si no ha quedat clar a les classes de teoria)*

Siguin $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ les funcions que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ li fan correspondre la seva component i-èsima. Comproveu que les 1-formes dx_i donen, en cada punt, la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^n$

Solució:

El vector $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de la base canònica, que té el coeficient 1 en la posició i, en el punt $p = (x_1, \ldots, x_n)$ és el vector tangent a la corba $\gamma_i(t) = (x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n)$. En general, si f és una funció definida en un entorn de p i v un vector tangent en aquest punt, el valor $df(v)$ es calcularà prenent una corba $\alpha(t)$ tal que $\alpha'(0) = v$ i fent la derivada $\left.\dfrac{d(f(\alpha(t)))}{dt}\right|_{t=0}$. A partir d'aquí és clar que

$$dx_j(e_i) = \begin{cases} \left.\dfrac{d(x_i + t)}{dt}\right|_{t=0} = 1 & \text{quan } i = j \\[2ex] \left.\dfrac{dx_j}{dt}\right|_{t=0} = 0 & \text{quan } i \neq j \end{cases}$$

que correspon al que s'havia de demostrar.

Exercici 2: Determineu quines són les formes diferencials ω a $\mathbb{R}^4$ compleixen

$$\omega \wedge (dx \wedge dy + dz \wedge dt) = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

i les que compleixen

$$\omega \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

Solució:

Posant coeficients indeterminats a una 2-forma ω

$$\omega = a_1\, dx \wedge dy + a_2\, dx \wedge dz + a_3\, dx \wedge dt + a_4\, dy \wedge dz + a_5\, dy \wedge dz + a_6\, dz \wedge dt$$

la primera condició serà

$$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt = (a_1 + a_6)\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

de forma que en aquest cas l'única restricció és $a_1 + a_6 = 1$.

En el segon cas l'equació s'escriurà

$$dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt = 2\,(a_1\, a_6 - a_2\, a_5 + a_3\, a_4)\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

i la restricció correspondrà a $a_1\, a_6 - a_2\, a_5 + a_3\, a_4 = 1/2$.

Exercici 3: Si en $\mathbb{R}^3$ es consideren les coordenades cilíndriques (r, θ, z), quina és l'expressió de l'element de volum usual $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ en funció de dr, $d\theta$, dz? (Recordeu que, respecte les coordenades cilíndriques, $x = r\, \cos(\theta)$, $y = r\, \sin(\theta)$ i la coordenada z és la mateixa en els dos casos).

I si en comptes de les coordenades cilíndriques es consideren les esfèriques?

Solució:

Tenint en compte les expressions de (x, y, z) en funció de (r, θ, z) els càlculs es resumeixen en les manipulacions següents:

$$\begin{aligned}\eta = dx \wedge dy \wedge dz &= d(r\,\cos(\theta)) \wedge d(r\,\sin(\theta)) \wedge dz \\ &= (\cos(\theta)\,dr - r\,\sin(\theta)\,d\theta) \wedge (\sin(\theta)\,dr + r\,\cos(\theta)\,d\theta) \wedge dz \\ &= r\,dr \wedge d\theta \wedge dz\end{aligned}$$

En el cas de les coordenades esfèriques les relacions són

$$\begin{aligned}x &= r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ y &= r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\ z &= r\,\cos(\varphi)\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\eta = dx \wedge dy \wedge dz = &\,(\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,dr - r\,\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,d\theta + r\,\cos(\theta)\,\cos(\varphi)\,d\varphi) \\ &\wedge (\sin(\theta)\,\sin(\varphi)\,dr + r\,\cos(\theta)\,\sin(\varphi)\,d\theta + r\,\sin(\theta)\,\cos(\varphi)\,d\varphi) \\ &\wedge (\cos(\varphi)\,dr - r\,\sin(\varphi)\,d\varphi) \\ = &-r^2\,\sin(\varphi)\,dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ = &\,r^2\,\sin(\varphi)\,dr \wedge d\varphi \wedge d\theta\end{aligned}$$

Exercici 4: Es considera a $\mathbb{R}^3$ una forma del tipus $\omega = x\,dy \wedge dz - 2\,z\,f(y)\,dx \wedge dy + y\,f(y)\,dz \wedge dx$ amb f diferenciable tal que $f(1) = 1$. Determineu la funció f si

(a) $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$,

(b) $d\omega = 0$.

Solució:

Com que la diferencial de ω s'escriu com

$$d\omega = (1 - f(y) + y\,f'(y))\;dx \wedge dy \wedge dz$$

(a) S'ha de complir

$$1 - f + y\,f' = 1$$

i no costa gaire veure que les solucions d'aquesta equació diferencial són totes de la forma $f(y) = k\,y$ (k constant). Si ha de ser $f(1) = 1$ la funció és $f(y) = y$.

(b) En aquest cas l'equació diferencial és

$$1 - f + y\,f' = 0$$

i tampoc costa gaire veure que la solució amb $f(1) = 1$ ha de ser la funció constant $f(y) = 1$.