GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari 12

Formes diferencials

Exercici 12.1. Recordeu les següents propietats elementals del producte exterior i la diferencial exterior:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta),$$

$$d(d\alpha) = 0,$$

on p és el grau de α i q és el grau de β.

a) Comproveu que si ω és una $2n+1$-forma diferencial, aleshores $\omega \wedge \omega = 0$. Doneu un exemple de 2-forma diferencial ω tal que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

a) Per ser ω de grau senar $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ llavors $\omega \wedge \omega = 0$. Considerem a $\mathbb{R}^4$ la 2-forma $\omega = dx \wedge dz + dy \wedge dt$, el producte és dues vegades l'element de volum canònic.

b) Proveu que si α i β són formes tancades aleshores $\alpha \wedge \beta$ també ho és.

Es inmmediat a partir de la segona fórmula.

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

---

c) Proveu que si α és tancada i β exacta llavors $\alpha \wedge \beta$ és exacta (recordeu que ω és *tancada* si $d\omega = 0$ i *exacta* si existeix η tal que $d\eta = \omega$).

Si $\beta = d\eta$ llavors $d(\alpha \wedge \eta) = \pm\alpha \wedge \beta$ triant bé el signe hem acabat.

---

d) Si f és una funció tal que $df = 0$, què podem dir de f?

f serà contant en cada component connexa del domini.

Exercici 12.2. Si $\omega = x\,dy - dz$, $\eta = 2z^2\,dx$, $\mu = dx - yz\,dy$,

a) Calculeu $x\,\omega + \eta$, $z\,\eta - z\,\mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

b) Donats els camps $X = z^2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$ i $Y = y\frac{\partial}{\partial x} + e^x\frac{\partial}{\partial z}$ calculeu $\omega(X)$ i $\omega \wedge \mu(X, X - Y)$.

$omega = x\mathrm{dy} - \mathrm{dz}$

$nu = 2\,z^2\mathrm{dx}$

$mu = \mathrm{dx} - yz\mathrm{dy}$

a)

$2\,z^2\mathrm{dx} + x^2\mathrm{dy} - x\mathrm{dz}$

$\left(2\,z^3 - z\right)\mathrm{dx} + yz^2\mathrm{dy}$

$omega \wedge nu = -2\,xz^2\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dy} + 2\,z^2\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dz}$

$\left(-2\,y^2z^3 - 4\,xz^2\right)\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dy} + 4\,z^2\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dz}$

$omega \wedge nu \wedge mu = 2\,yz^3\mathrm{dx} \wedge \mathrm{dy} \wedge \mathrm{dz}$

b)

```
(x, y, z) |--> -x
```

$-yze^x - z^2e^x + xy$

Exercici 12.3. Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial ω per l'aplicació T en els següents casos:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, e^s)$, $\omega = dx + xdz$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t) = (t, s, st)$, $\omega = zdx \wedge dz$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(s,t,u) = (st, tu, us, s+t+u)$, $\omega = x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

a)

$\omega = dx + x\,dz$

$T^*\omega = T^*dx + T^*(x\,dz) = d(x\circ T) + (x\circ T)\,d(z\circ T)$
$= ds + s\cdot d(e^s) = ds + se^s ds = (1+se^s)ds$

o bé $T^*\omega = \lambda ds$ i $(T^*\omega)(\frac{\partial}{\partial s}) = \lambda$.

$(T^*\omega)(\frac{\partial}{\partial s}) = \omega(dT.\frac{\partial}{\partial s}) = \omega(\frac{\partial T}{\partial s}) =$
$= \omega(1, 2s, e^s) = 1 + se^s$ ✓

b)

$T^*\omega = st\,(dt \wedge d(st)) = st^2 \cdot dt \wedge ds$

c)

$2(x+y+z)^2 xyz\,dx \wedge dy \wedge dz$

Exercici 12.4. Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

a) $\omega = xdy + ydx$.

b) $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$.

c) $\omega = f(x,y)dx \wedge dy$.

d) $\omega = f(x)dy$.

e) $\omega = \cos(xy^2)dx \wedge dz$.

f) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

a) $d\omega = 0$

b) $-xy\, dx\wedge dy + (z+3x)dy\wedge dz + x^2y\, dx\wedge dz$

c) $d\omega = 0$

d) $d\omega = f'\, dx \wedge dy$

e) $d\omega = -2y\cdot\sin(xy^2)\, dy\wedge dx\wedge dz$

$= 2y\sin(xy^2)\, dx\wedge dy\wedge dz$

f) $3\, dx\wedge dy\wedge dz$

Exercici 12.5. A $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ considerem ω tal que $\omega(X,Y) = \langle iX, Y\rangle$ per $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n})$.

a) Proveu que ω és una 2-forma diferencial.

b) Donar l'expressió de ω en coordenades cartesianes.

c) Provar que ω és tancada.

d) Calculeu $\omega \wedge \omega \wedge \overset{n}{\cdots} \wedge \omega$.

e) Provar que $|\omega_p(X,Y)| \leq a(X,Y)$ on $a(X,Y)$ és l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors X, Y tangents a $\mathbb{R}^{2n}$ en el punt p. La igualtat es dona si i només si X, Y generen una recta complexa.

a) ω és clarament bilineal. Vegem que és alternada:

$$\omega(Y,X) = \langle iY, X\rangle = \langle i^2 Y, iX\rangle = -\langle iX, Y\rangle = -\omega(X,Y)$$

b) Si $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ són les coordenades de $\mathbb{C}^n$, llavors

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$$
$$\omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}) = 1$$
$$\omega(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

Per tant

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots dx_n + \wedge dy_n$$

c) Els coeficients són constants, per tant $d\omega = 0$.

d)

$$\omega^n = (dx_1 \wedge dy_1 + \cdots dx_n + \wedge dy_n)^n = n! dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

e) Tant $\omega(X,Y)$ com $a(X,Y)$ no canviem si sumem un múltiple de X a Y. Per tant, podem suposar que X, Y són ortogonals i $a(X,Y) = |X||Y|$. D'altra banda, $|\omega(X,Y)| = |\langle iX, Y\rangle| \leq |iX||Y| = |X||Y|$. La igualtat es dona només quan iX és paral.lel a Y i en aquest cas $X\mathbb{R} + Y\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$-subespai vectorial.

Exercici 12.6. Sigui α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = ydx + xdy + zdz$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$ i per $d(f^*\alpha)$.

$$f^*\alpha = \sin u\, d(\cos u) + \cos u \cdot d(\sin u) + v\,dv$$

$$= -\sin^2 u\, du + \cos^2 u\, du + v\,dv$$

$$= \cos 2u\, du + v\,dv$$

$$d\alpha = dy \wedge dx + dx \wedge dy + dz \wedge dz = 0$$

$$f^* d\alpha = d(f^*\alpha) = 0$$

Exercici 12.7. Per una funció f es defineix el gradient de f com el camp

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Per un camp vectorial $X = (X_1, X_2, X_3)$ de $\mathbb{R}^3$ es defineixen la funció divergencia i el camp rotacional com

$$\mathrm{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}, \quad \mathrm{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y}\right)$$

Es defineixen també les formes diferencials

$$\begin{aligned} \omega^1_X &= X^1\, dx + X^2\, dy + X^3\, dz \\ \omega^2_X &= X^1\, dy \wedge dz + X^2\, dz \wedge dx + X^3\, dx \wedge dy \\ \omega^3_f &= f\, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

a) Comproveu que es compleix

$$\begin{aligned} df &= \omega^1_{\mathrm{grad}\, f} \\ d(\omega^1_X) &= \omega^2_{\mathrm{rot}\, X} \\ d(\omega^2_X) &= \omega^3_{\mathrm{div}\, X} \end{aligned}$$

b) Deduïu de l'apartat anterior que es compleixen les igualtats: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X$

a) $\mathrm{grad}(f) = (f_x, f_y, f_z)$

$$\left.\begin{aligned} \omega^1_{\mathrm{grad}(f)} &= f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz \\ df &= f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz \end{aligned}\right\} =$$

b) $d(X^1 dx + X^2 dy + X^3 dz) = dX^1 \wedge dx + \cdots =$

$= (X^1_y\, dy + X^1_z\, dz) \wedge dx + (X^2_x\, dx + X^2_z\, dz) \wedge dy + \cdots =$

$= (-X^1_y + X^2_x)\, dx \wedge dy + (-X^1_z + X^3_x)\, dx \wedge dz + (-X^2_z + X^3_y)\, dy \wedge dz$

$= \omega^2_{\mathrm{rot}\, X}$ ✓

c) Dem ...

Exercici 12.8. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i h és una funció, proveu que

$$f^*(h\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\ dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

on f' denota la matriu jacobiana de f.

Solució: *Recordem la definició:* $(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_r) = \omega_{f(x)}(df \cdot v_1, \ldots, df \cdot v_r)$ *per una* r*-forma* ω. *Recordem també que* $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(u_1, \ldots, u_n) = \det A$ *on* A *és la matriu quer te per columnes les components de* u_i *respecte la base* $\{v_j\}$. *A partir d'això és un calculet.*