7 Superfícies: Parametritzacions. Espai tangent.

Exercici 71:

1. Sigui S la superfície de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació $f(x, y, z) = 0$, on 0 és un valor regular de la funció f. Comproveu que el pla tangent a S en un punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ qualsevol es pot escriure com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\,(z - z_0) = 0 \tag{17}$$

2. Com serà l'equació del pla tangent a una superfície de $\mathbb{R}^3$ si és el gràfic d'una funció de dues variables ($z = h(x, y)$)?

Solució:

1. L'espai tangent a S en p_0, $T_{p_0}S$, és l'espai vectorial format per tots els vectors tangents en p_0 a corbes $\alpha(t)$ que, passant per p_0, estan contingudes a S. El pla de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ que passa pel punt p_0 i té espai vectorial director $T_{p_0}S$ es diu pla (afí) tangent a la superfície en p_0.

   Sigui, doncs, $\alpha(t)$ una d'aquestes corbes. Suposarem $\alpha(t_0) = p_0$ i t variant en un entorn obert de t_0. En aquest entorn tenim $f(\alpha(t)) = 0$ per estar la corba continguda a la superfície. Derivant i aplicant la regla de la cadena tenim (posem $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$)

$$(df)_{p_0}(\alpha'(t_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)z'(t_0) = 0,$$

   i aquesta expressió es pot escriure com

$$\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\rangle = \langle \nabla f(p_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0.$$

   Per tant $\nabla f(p_0)$ es el vector normal del pla tangent. Així, un punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertany al pla (afí) tangent a S en el punt p_0 si el vector $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ és ortogonal al gradient $\nabla f(p_0)$, és a dir,

$$\langle \nabla f(p_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\rangle = 0$$

   que és justament l'equació 17.

   De fet, l'observació anterior només demostraria que l'espai tangent està *contingut* en el pla que té com a vector normal *df* però, com que les dimensions dels dos espais coincideixen, la igualtat es dóna sense haver de fer més consideracions.

2. Si es pensa com en el cas anterior, la superfície definida com el gràfic de $h(x, y)$ també serà la que ve determinada per l'equació $f(x, y, z) = h(x, y) - z = 0$. Aleshores, com que

$$\nabla f = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, -1\right),$$

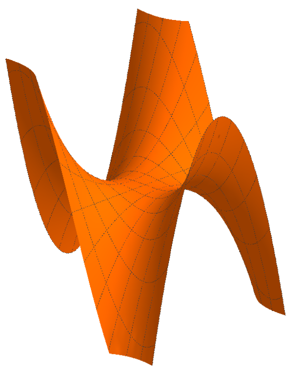
l'equació del pla tangent serà

$$\frac{\partial h}{\partial x}(p_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial h}{\partial y}(p_0)\,(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

(tenint en compte que $z_0 = h(x_0, y_0)$).

Naturalment, s'arriba al mateix resultat si es considera la superfície parametritzada per $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$. Com el pla tangent té per direcció l'espai vectorial generat pels vectors $\varphi_x = (1, 0, h_x)$ i $\varphi_y = (0, 1, h_y)$, el seu vector normal és $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-h_x, -h_y, 1)$ i obtenim el mateix resultat.

Exercici 72: Demostreu que el subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ determinat per la condició $x^3 - 3\,x\,y^2 = z$ és una superfície regular i determineu l'equació que té el seu pla tangent en un punt qualsevol $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.



Solució: Utilitzem el resultat que diu que si $f : W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable sobre un obert W, i $a \in \mathbb{R}$ és tal que $df_P \neq 0$ per a tot $P \in f^{-1}(a)$, llavors $S = f^{-1}(a)$ és una superfície.

En el nostre cas prenem $f(x, y, z) = x^3 - 3\,x\,y^2 - z$ i hem de veure que $f^{-1}(0)$ és una superfície. Només cal veure doncs que $df_P \neq 0$ per a tot $P \in f^{-1}(0)$, però

$$df = (3\,x^2 - 3\,y^2, -6\,x\,y, -1)$$

que sempre és diferent de 0, perquè la tercera component és -1.

Per altra banda, el vector normal al pla tangent (i a la superfície) serà aquest $\nabla f = (3\,x^2 - 3\,y^2, -6\,x\,y, -1)$, i per tant el pla tangent és

$$(3x_0^2 - 3y_0^2)(x - x_0) + (-6x_0y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Alternativament, S és el gràfic de la funció $h(x, y) = x^3 - 3\,x\,y^2$. Podem prendre, doncs, la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$, de manera que la base de la direcció del pla tangent serà la donada en cada punt $(x, y, h(x, y))$ pels vectors $\varphi_x(x, y) = (1, 0, 3\,x^2 - 3\,y^2)$ i $\varphi_y(x, y) = (0, 1, -6\,x\,y)$. Podem escriure l'equació vectorial d'aquest pla com

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(1, 0, 3\,x_0^2 - 3\,y_0^2) + \mu(0, 1, -6\,x_0\,y_0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercici 73: Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^3$ determinat per l'equació $x + y = z^3 + 1$.

1. Comproveu que S és una superfície regular.

2. Doneu una parametrització de S.

3. Determineu per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ el vector $v = (a, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ és tangent a S en el punt $P = (1, 1, 1)$.

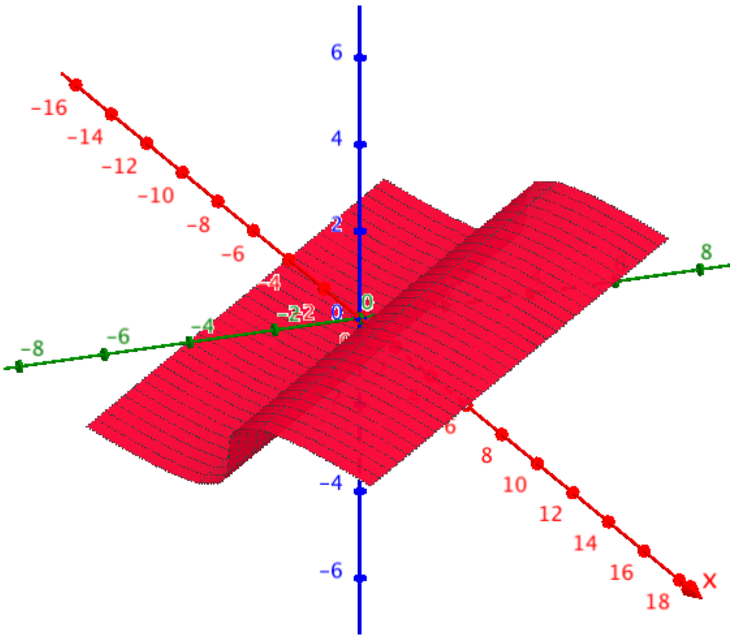
Solució:

1. Com que es pot aïllar x o y en funció de les altres dues variables, es té un gràfic i, per tant, una superfície regular de forma automàtica.

2. N'hi ha prou posant
$$\varphi(y, z) = (z^3 - y + 1, y, z),$$
parametrització definida a tot $\mathbb{R}^2$. Recordem que $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ha de ser homeomorfisme quan posem a $\varphi(\mathbb{R}^2)$ la topologia induïda per S (ha de ser contínua, bijectiva i oberta, és a dir, per cada obert $U \subseteq \mathbb{R}^2$, ha de ser $\varphi(U) = S \cap W$ amb W obert de $\mathbb{R}^3$), i la diferencial de φ ha de ser, en cada punt injectiva.[25]

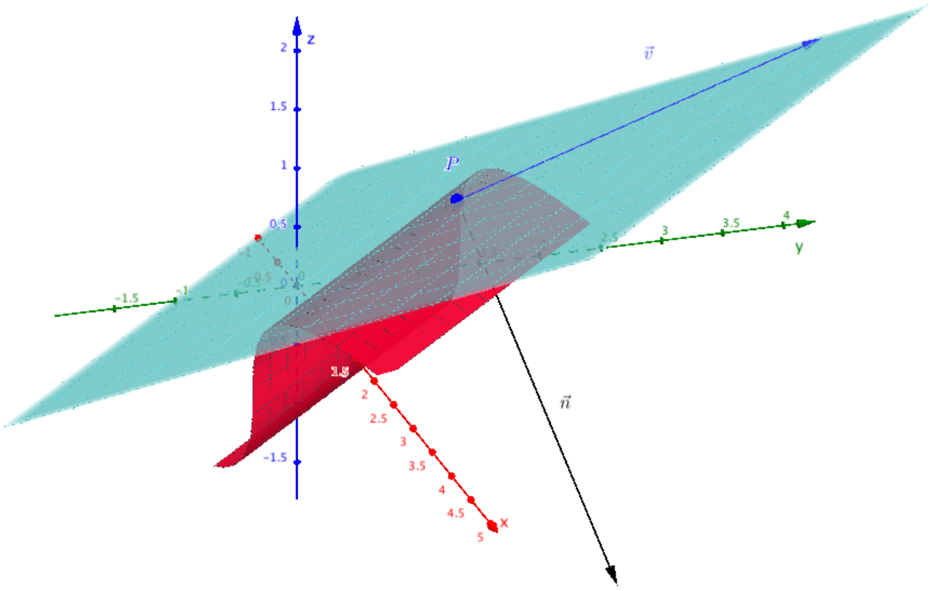
   Aquesta segona condició és fàcil de comprovar ja que el rang de la matriu associada a $(d\varphi)_P$, $P = (y, z)$,
$$\begin{pmatrix} -1 & 3z^2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
és 2, i per tant $(d\varphi)_P$ és injectiva.

   Respecte la primera condició observem que φ és clarament contínua i injectiva. Per demostra que també és oberta observem que per tot obert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tenim $\varphi(U) = S \cap (\mathbb{R} \times U)$.



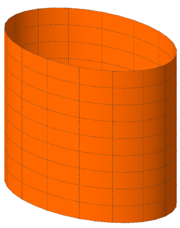
[25]Si sabem que S és una superfície no cal comprovar que la candidata a parametrització és oberta. Tenim el resultat següent: Sigui S una superfície. Sigui $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, amb U obert de $\mathbb{R}^2$, una aplicació 'candidata' a carta local, de la qual sabem que és diferenciable, injectiva, amb diferencial injectiva en tot punt de U. Llavors (U, φ) és carta local, és a dir, que φ és oberta (única condició que ens faltava). Vegeu *Notes sobre corbes i superfícies*, A. Reventós, 2018.

3. El vector perpendicular al pla tangent a S en el punt $X = (x, y, z)$ és el gradient de $f(x, y, z) = x + y - z^3 - 1$ en aquest punt, és a dir, $\nabla f(X) = (1, 1, -3\,z^2)$. En $P = (1, 1, 1)$ (que pertany a S ja que $1 + 1 = 1^3 + 1$) serà $\nabla f(P) = (1, 1, -3)$, de forma que imposant $\langle(1, 1, -3), (a, 3, 1)\rangle = 0$ obtenim $a + 3 - 3 = 0$ i per tant $a = 0$.



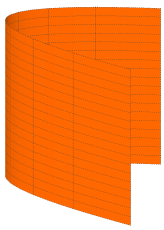
Exercici 74: Doneu parametritzacions regulars (definides en algun obert prou significatiu) de les quàdriques:

1. Cilindres:



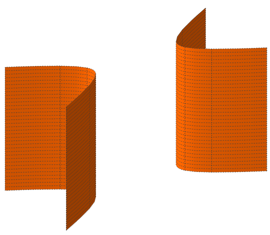
Cilindre el·líptic

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Cilindre parabòlic

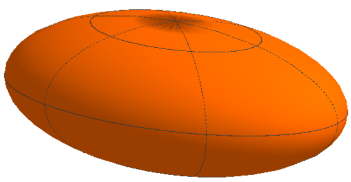
$$y = c\,x^2$$



Cilindre hiperbòlic

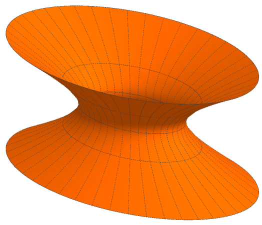
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

2. El·lipsoides:

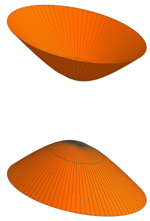


$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

3. Hiperboloides:

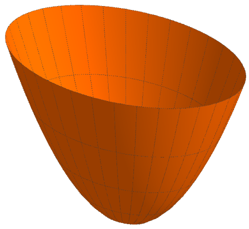


Hiperboloide d'un full
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

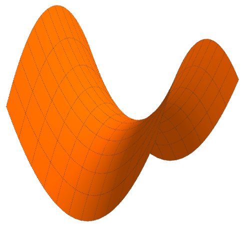


Hiperboloide de dos fulls
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=-1$$

4. Paraboloides:



Paraboloide el·líptic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$$



Paraboloide hiperbòlic
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=c\,z$$

Solució: És fàcil veure, pel teorema del valor regular, que totes aquestes quàdriques són superfícies. Això fa que per veure si una aplicació $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una parametrització d'una d'aquestes quàdriques només hem de veure que és contínua, injectiva amb diferencial injectiva (no cal veure que és oberta). En els casos que segueixen les aplicacions considerades són clarament contínies i injectives i només estudiarem la seva diferencial.

Com φ^{-1} es contínua i la imatge contínua d'un compacte és un compacte no podem aspirar a cobrir amb una sola carta les quàdriques compactes considerades a continuació. Donarem una carta que les cobreix quasi totalment (excepte un conjunt de mesura zero) cosa que acostuma a ser suficient per als problemes d'integració, etc. No obstant, es poden tapar totes elles amb dues o tres cartes[26]. En el que segueix suposarem sempre $a>0, b>0, c>0$.

1. **Cilindre el·líptic:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$**.**

   Definim $\varphi : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per $\varphi(u,v)=(a\,\cos(u), b\,\sin(u), v)$. La diferencial d'aquesta parametrització és:
$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u) & 0 \\ b\,\cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   que, clarament, és de rang 2 per a tots els valors dels paràmetres (u,v).

   Observem que els punts del cilindre amb $x=a$ no pertanyen a la imatge d'aquesta carta.

[26] Es pot provar que si una superfície compacta de $\mathbb{R}^3$ es pot recobrir amb dues cartes definides sobre oberts connexos i simplement connexos llavors és una esfera.

[27]

Cilindre parabòlic: $y = c\,x^2$**.**

Definim $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per $\varphi(u,v) = (u, c\,u^2, v)$. La diferencial d'aquesta parametrització és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\,c\,u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que, clarament, és de rang 2 per a tots els valors dels paràmetres (u,v).

Cilindre hiperbòlic: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$**.**

Definim $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per $\varphi(u,v) = (a\,\cosh(u), b\,\sinh(u), v)$.

Com que $\cosh(u) \geq 1$, amb aquesta parametrització només obtenim punts amb $x \geq a$, que corresponen a una de les branques de la hipèrbola. Per obtenir l'altra branca $x \leq -a$ hem de posar $\varphi(u,v) = (-a\,\cosh(u), b\,\sinh(u), v)$ i parametritzar per separat les dues branques.

Les diferencials corresponents a cada una de les branques s'escriuran com:

$$\begin{pmatrix} \pm a\,\sinh(u) & 0 \\ b\,\cosh(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I, tenint en compte que el $\cosh(u)$ sempre és més gran que 1, queda clar que el rang és 2.

2. **El·lipsoide:** $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$.

   Es pot pensar *en coordenades esfèriques*. Posant $(x/a)^2 + (y/b)^2 = w^2$, l'equació de l'el·lipsoide és $w^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$ que suggereix posar $w = \sin(\varphi)$ i $z = c\,\cos(\varphi)$. Aquesta φ correspon a la col·latitud que usem en l'esfera.

   De la primera igualtat deduïm $(x/a) = w\,\cos(\theta)$, $(y/b) = w\,\sin(\theta)$, que permet definir $\Psi : (0,\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

$$\Psi(\varphi, \theta) = (a\,\sin(\varphi)\,\cos(\theta), b\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta), c\,\cos(\varphi)).$$

   El paràmetre θ correspon a la longitud que usem en l'esfera.

   La necessitat de fer variar φ en $(0,\pi)$ apareix en voler demostrar la injectivitat de Ψ. Aleshores la diferencial s'escriu com:

$$\begin{pmatrix} -a\,\cos(\varphi)\,\cos(\theta) & -a\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ b\,\cos(\varphi)\,\sin(\theta) & b\,\sin(\varphi)\,\cos(\theta) \\ -c\,\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

[27] El cilindre el·líptic no és compacte. Es pot recobrir amb una sola carta? Si U es simplement connex, no. Però podíem agafar com U la corona circular oberta formada per dues circumferències concèntriques de radis 1 i 2 respectivament. És fàcil construir una bijecció diferenciable f entre $(1,2)$ i $\mathbb{R}$. Llavors podem recobrir el cilindre el·líptic per la carta definida a U per $\varphi(x,y) = (\frac{x}{||(x,y||}, \frac{y}{||(x,y||}, f(||(x,y||))$.

Com que el determinant de les dues primeres files és $a\,b\,\cos(\varphi)\,\sin(\varphi) = \frac{1}{2}a\,b\,\sin(2\,\varphi)$, només s'anul·la quan $2\varphi = k\pi$, però com $\varphi \in (0,\pi)$ només s'anul·la quan $\varphi = \pi/2$. En tots aquests casos, doncs, ja tenim rang 2. Si $\varphi = \pi/2$ la diferencial és

$$\begin{pmatrix} 0 & -a\,\sin(\theta) \\ 0 & b\,\cos(\theta) \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

que té també rang 2.

Els punts de l'el·lipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$, del pla $y = 0$, amb $x \geq 0$, no pertanyen a $\Psi(U)$.

Naturalment, també es podria *aïllar una de les coordenades en funció de les altres dues* i considerar, per exemple,

$$(u,v) \longrightarrow \left(u, v, \pm c\,\sqrt{1-(u/a)^2-(v/b)^2}\right)$$

Aquesta parametrització dóna una diferencial de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

(gràfic d'una funció) i, per tant, sempre serà regular. (Noteu, però, que quan $(u/a)^2 + (v/b)^2 \to 1$ l'arrel quadrada perd la diferenciabilitat i també cal restringit el rang dels paràmetres a l'interval obert $(u/a)^2 + (v/b)^2 < 1$).

3. **Hiperboloide d'un full:** $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$.

Raonant de la mateixa forma que en el cas anterior, però amb funcions hiperbòliques, podem definir $\varphi : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

$$\varphi(u,v) = (a\,\cos(u)\,\cosh(v), b\,\sin(u)\,\cosh(v), c\,\sinh(v)).$$

Com en el cas anterior, la diferencial és de la forma

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u)\,\cosh(v) & a\,\cos(u)\,\sinh(v) \\ b\,\cos(u)\,\cosh(v) & b\,\sin(u)\,\sinh(v) \\ 0 & c\,\cosh(v) \end{pmatrix}$$

El determinat de les dues primeres files, que val $-a\,b\,\cosh(v)\,\sinh(v) = -\frac{1}{2}a\,b\,\sinh(2v)$, només s'anul·la quan $v = 0$ i llavors la diferencial sería de la forma

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u) & 0 \\ b\,\cos(u) & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

que també és de rang 2.

Els punts de l'hipèrbola $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$, del pla $y = 0$, amb $x \geq 0$, no pertanyen a $\Psi(U)$.

Hiperboloide de dos fulls: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1$**.**

Com cap punt amb $z = 0$ és solució d'aquesta equació tenim un full amb $z > 0$ i un altre amb $z < 0$. Podem fer, en cadascun d'aquests fulls, el mateix raonament que en el cas anterior i definir $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

$$\varphi(u, v) = (a\,\cos(u)\,\sinh(v), b\,\sin(u)\,\sinh(v), \pm c\,\cosh(v)).$$

Restringir v als reals positius és necessari per a la injectivitat de φ (recordem $\cosh(v) = \cosh(-v)$). La diferencial d'aquesta parametrització serà:

$$\begin{pmatrix} -a\,\sin(u)\,\sinh(v) & a\,\cos(u)\,\cosh(v) \\ b\,\cos(u)\,\sinh(v) & b\,\sin(u)\,\cosh(v) \\ 0 & c\,\sinh(v) \end{pmatrix}$$

I es veu ràpidament, fent càlculs similars als anteriors, que el rang d'aquesta matriu és 2 excepte si $v = 0$ cas exclòs ja que prenem $v > 0$.

Observem que els punts $(0, 0, \pm c)$ no pertanyen a la imatge d'aquesta parametrització. Podem construir, però, fàcilment una parametrització que sí que els contingui, per exemple aïllant z en funció de x, y tenim una aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$\varphi(u, v) = \left(u, v, \pm c\sqrt{(u/a)^2 + (v/b)^2 + 1}\right).$$

La diferencial és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{c\,u}{a^2\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1}} & \frac{cv}{b^2\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+1}} \end{pmatrix},$$

que està ben definida per a qualsevol valor de (u, v) i sempre té rang 2.

4. **Paraboloide el·líptic:** $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c\,z$**.**

   Prenent coordenades polars en el pla xy tenim $\varphi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

   $$\varphi(u, v) = (a\,u\,\cos(v), b\,u\,\sin(v), u^2/c).$$

   La diferencial

   $$\begin{pmatrix} a\cos(v) & -au\sin(v) \\ b\sin(v) & bu\cos(v) \\ 2u/c & 0 \end{pmatrix}$$

   té rang 2 ja que el menor definit per les dues primeres files és igual a abu que només s'anul·la si $u = 0$ cas que hem exclòs. El punt $(0, 0, 0)$, que pertany al paraboloide, no queda cobert per aquesta carta.

   Alternativament, podem definir $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

   $$\varphi(u, v) = \left(u, v, \frac{(u/a)^2 + (v/b)^2}{c}\right),$$

   que també té diferencial de rang 2 ja que el menor definit per les dues primeres files és igual a abu que només s'anul·la si $u = 0$ cas que hem exclòs.

Paraboloide hiperbòlic: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = c\,z$**.**

Utilitzant funcions hiperbòliques podem definir $\varphi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

$$\varphi(u, v) = (a\,u\,\cosh(v), b\,u\,\sinh(v), u^2/c).$$

que té diferencial

$$\begin{pmatrix} a\cosh(v) & au\sinh(v) \\ b\sinh(v) & bu\cosh(v) \\ 2u/c & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 2 ja que el menor definit per les dues primeres files és igual a abu que només s'anul·la si $u = 0$ cas que hem exclòs.

Però d'aquesta manera només obtenim punts amb $z > 0$ (suposem $c > 0$). Per tal d'obtenir la part amb $z < 0$ caldrà intercanviar el paper del sinus i el cosinus hiperbòlics i obtindrem

$$\varphi(u, v) = (a\,u\,\sinh(v), b\,u\,\cosh(v), -u^2/c).$$

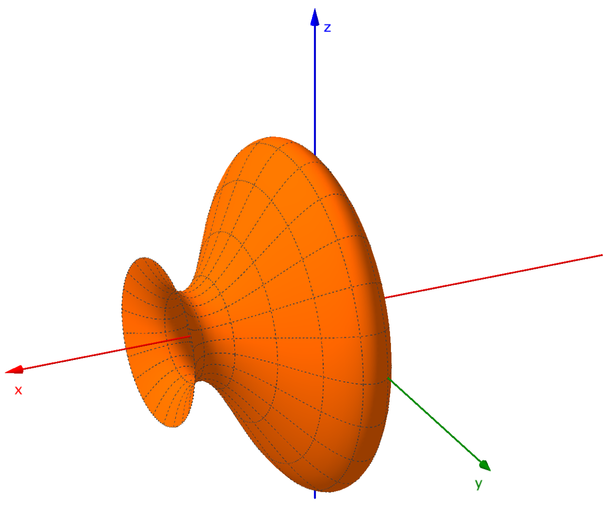
El punts del paraboloide amb $z = 0$ no queden coberts per aquestes cartes.

Utilitzant x, y com a paràmetres (en aquest cas és, potser, més natural) podem definir $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per

$$\varphi(u, v) = \left(u, v, \frac{(u/a)^2 - (v/b)^2}{c}\right),$$

que també té diferencial de rang 2, i no té problemes en $z = 0$ (recobrim el paraboloide hiperbòlic amb una sola carta).

Exercici 75: Considereu una corba de la forma $y = f(x)$ en el pla xy (pensat dins $\mathbb{R}^3$ com els punts amb $z = 0$), on f és una funció diferenciable amb $f(x) > 0$ per a tots els x. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ obtingut en fer girar la corba anterior al voltant de l'eix de les x ($y = z = 0$).



1. Demostreu que S és una superfície regular veient que $S = \Phi^{-1}(0)$ per a una submersió $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

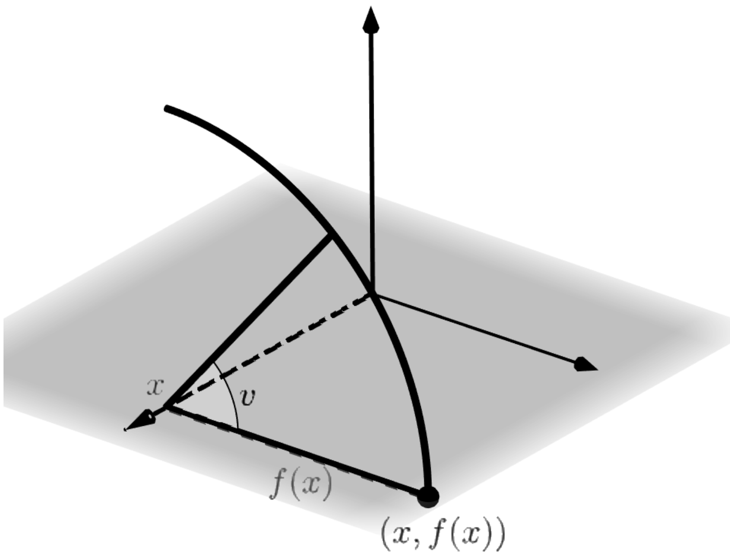
2. Doneu una parametrització (regular) de S.

3. Comproveu que, per a cada punt $p = (x, y, z)$ de S, el pla tangent és perpendicular al vector $N = (f(x)\, f'(x), -y, -z)$.

Solució:

1. Observem que, per a cada x fix, els punts (x, y, z) de la superfície corresponen a una circumferència de centre $(x, 0, 0)$ i radi $f(x)$ i per tant compleixen que $y^2 + z^2 = (f(x))^2$. Per tant, només cal considerar

$$\Phi(x, y, z) = y^2 + z^2 - (f(x))^2$$



Com que $f(x) > 0$, les coordenades y i z sobre S no es poden anular simultàniament, per tant la diferencial (gradient) de Φ donada per

$$d\Phi = (-2\, f(x)\, f'(x), 2\, y, 2\, z)$$

sempre és diferent de 0 sobre $\Phi^{-1}(0)$ i, per tant, exhaustiva.

2. Prenent coordenades polars en cada un dels plans $x =$ ct. es pot parametritzar S posant

$$\varphi(u, v) = (u, f(u)\, \cos(v), f(u)\, \sin(v))$$

Com que

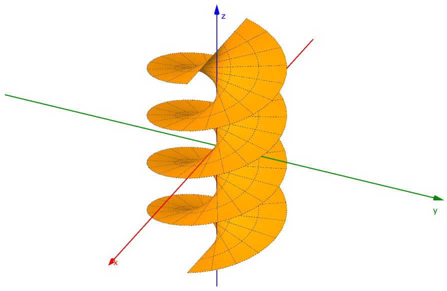
$$\varphi_u = (1, f'(u)\, \cos(v), f'(u)\, \sin(v))$$
$$\varphi_v = (0, -f(u)\, \sin(v), f(u)\, \cos(v))$$

són sempre linealment independents ja que $\varphi_u \wedge \varphi_v = f(u)(f'(u), -\cos(u), -\sin(u))$ ($f(u) > 0$ i el sinus i el cosinus mai s'anul·len simultàniament) no cal fer més càlculs.

3. El càlcul de $d\Phi$ ja dóna el resultat.

Exercici 76: (L'helicoide)

1. Comproveu que
$$\varphi(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\sin(v), a\,v)$$
és una parametrització regular de la superfície S de $\mathbb{R}^3$ determinada per l'equació
$$y\,\cos(z/a) - x\,\sin(z/a) = 0$$



2. Determineu el pla tangent (i la direcció normal) a S per a un punt arbitrari de la superfície.

Solució:

1. Noteu en primer lloc que la funció $f(x,y,z) = y\,\cos(z/a) - x\,\sin(z/a)$ té la diferencial de la forma
$$df = (-\sin(z/a), \cos(z/a), -(y\,\sin(z/a) + x\,\cos(z/a))/a)$$
i, per tant, sempre diferent de 0. Això assegura que S és regular.

   A més, la parametrització φ cobreix S i es pot observar que totes dues aproximacions descriuen el recorregut d'una recta *que va girant* al mateix temps que *puja sobre l'eix de les z.*

   En efecte, només cal escriure les anteriors equacions com
$$\begin{aligned}&(0,0,av) + u(\cos(v), \sin(v), 0)\\ &y = x\tan(z/a)\end{aligned}$$
que ens diuen directament que per cada v tenim la recta de vector director $(\cos(v), \sin(v), 0)$ i per cada z tenim una recta de pendent $\tan(z/a)$, que és la mateixa evidentment.

2. Si es pren un punt p_0 en S corresponent a les *coordenades* (u_0, v_0) (és a dir $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$) el pla tangent en aquest punt serà el que té la direcció generada per $\varphi_u = (\cos(v_0), \sin(v_0), 0)$ i $\varphi_v = (-u_0\,\sin(v_0), u_0\,\cos(v_0), a)$ de forma que el seu vector normal serà $(a\,\sin(v_0), -a\,\cos(v_0), u_0)$.

   Això coincideix (llevat de múltiples) amb el que apareix si es considera $(df)_{p_0}$ com a vector normal a la superfície (només hem de posar $x = u_0\cos(v_0), y = u_0\sin(v_0), z = av_0$ a l'expressió de df obtinguda a l'apartat anterior).

   El pla tangent pel punt (x_0, y_0, z_0) de l'helicoide és doncs
$$a\,\sin(v_0)(x - x_0) - a\,\cos(v_0)(y - y_0) + u_0(z - z_0) = 0.$$

Exercici 77: El conjunt de punts descrit per una corba plana regular $C \subset \Pi$ al girar sobre un eix contingut en el pla Π i que no talla a la corba C és una superfície regular anomenada *superfície de revolució* generada per la corba C.

1. Proveu que si $C = \{(x, 0, z) \in \Pi = \{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3,\ f(x, z) = 0\}$ i es pren com a eix de gir Oz aleshores la superfície de revolució generada per C ve donada per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$. Apliqueu-ho al cas particular en que C és una circumferència que no conté en el seu interior l'origen de coordenades.

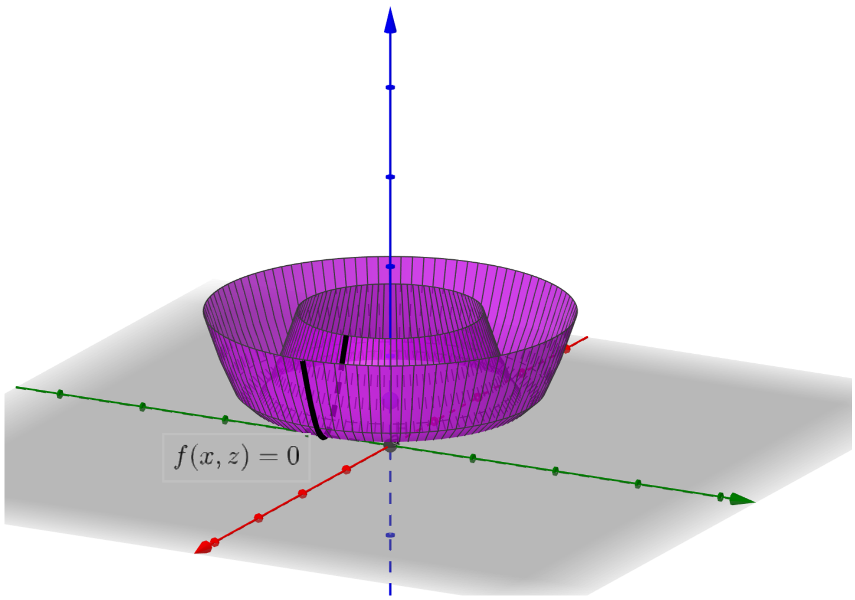
2. Demostreu que si $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ és una parametrització regular de C aleshores
$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$
és una parametrització regular de S. Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen paral·lels si $u = u_0$ i meridians si $v = v_0$. Trobeu una parametrització regular del tor de revolució.

3. Trobeu la primera forma fonamental d'una superfície de revolució utilitzant la parametrització de l'apartat anterior (podeu suposar que $u \in [0, l]$ és el paràmetre arc de C).

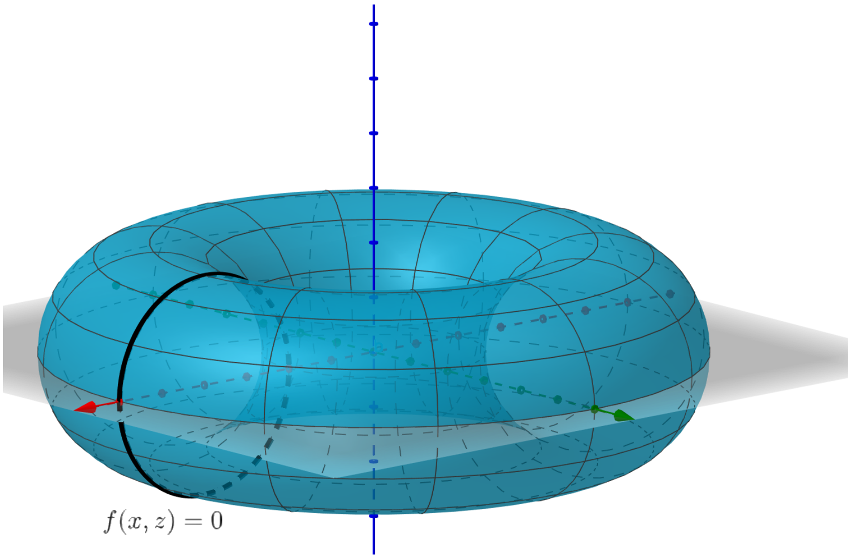
4. **Teorema de Pappus.** Amb les mateixes notacions dels apartats (b) i (c), comproveu que l'àrea de S està donada per
$$2\pi \int_0^l a(u) du.$$

Solució:

1. En coordenades cilíndriques (ρ, θ, z) de $\mathbb{R}^3$, C té equacions $\theta = 0$ i $f(\rho, z) = 0$. Quan C gira ρ es manté constant i com que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, tenim que en coordenades cartesianes S té per equació $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, amb θ arbitrària.



Siguin $0 < r < R$ i considerem la circumferència del pla $y = 0$ de radi r amb centre $(R, 0, 0)$. Aquesta circumferència té equació en el pla $y = 0$ donada per $f(x, z) = (x - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$, per tant, pel que acabem de veure (només hem de substituir x per ρ) la superfície de revolució corresponent (tor) té per equació $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$.



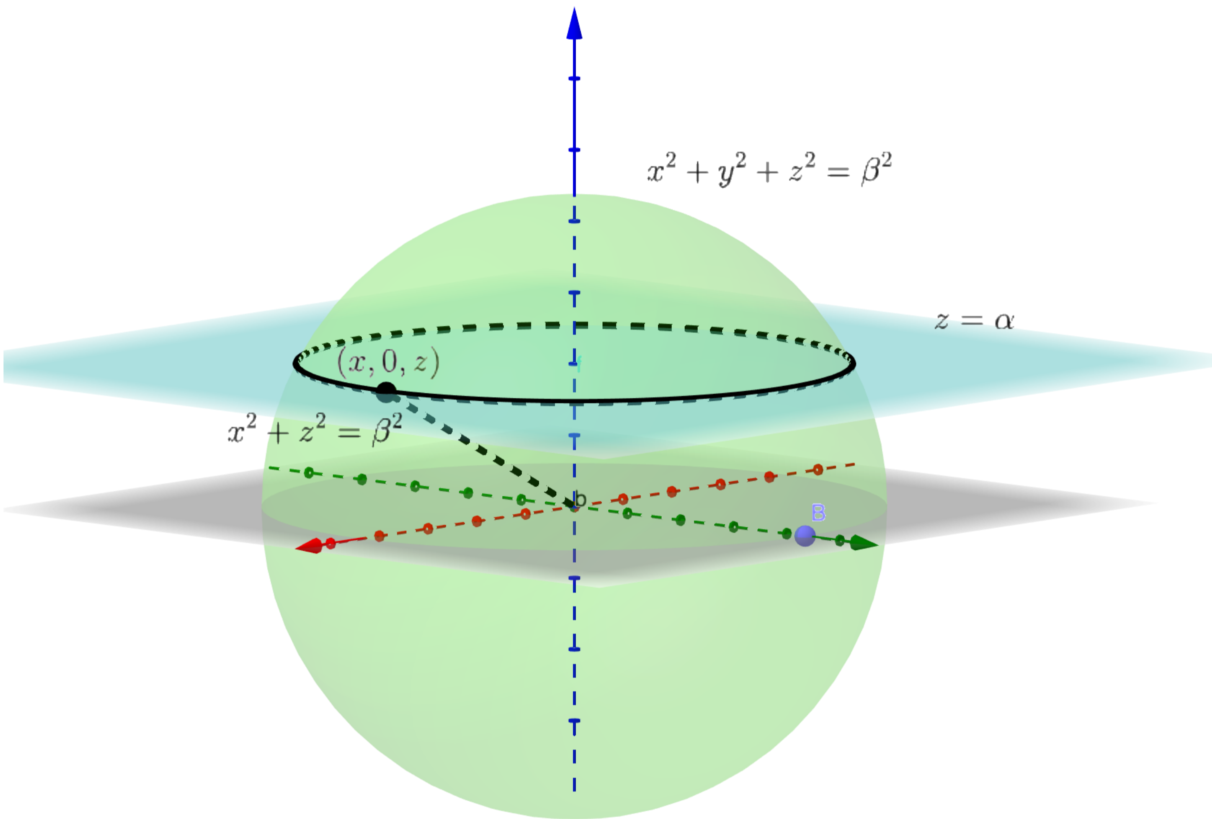
Segona manera de pensar: com a l'exercici 178. La superfície de revolució al voltant de l'eix de les z, es pot pensar formada per circumferències de diferents radis situades en els plans $z = cte$.

Equivalentment, com fem a l'exercici 178, considerem la família biparamètrica de superfícies

$$\begin{aligned} z &= \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \beta^2 \end{aligned}$$

i transformem aquesta família biparamètrica en una uniparamètrica (que dóna així lloc a una superfície) donant una relació entre α i β. Aquesta relació ve donada per la relació entre l'altura sobre $z = 0$ i el radi de gir, i aquesta relació està donada justament per la corba del pla $y = 0$ que fem girar.

La corba que fem girar és la corba $f(x, z) = 0$ del pla $y = 0$ i com β és la distància a l'origen, en el pla $y = 0$ tenim $x^2 + z^2 = \beta^2$. De manera que l'equació de la corba dóna la relació $f(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, \alpha) = 0$ entre α i β.



Finalment, substituint α i β pel seu valor, l'equació buscada és

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

En el cas del tor, la relació entre α i β ve donada per l'equació $(x - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$. Com β és la distància a l'origen $\beta = \sqrt{x^2 + z^2}$, d'on $x^2 = \beta^2 - z^2 = \beta^2 - \alpha^2$ que dóna $(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - R)^2 + \alpha^2 = r^2$, que substituint α i β pel seu valor dóna

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

2. Per construcció està clar que la imatge de φ està continguda en la superfície de revolució generada per la corba C. Observem que, com girem al voltat de l'eix z, la tercera component $b(u)$ dels punts de $\alpha(u)$ no varia. I $a(u)$ és el radi de gir. Vegem que aquesta parametrització és regular. Calculem els vectors tangents

$$\begin{aligned} \varphi_u(u, v) &= (a'(u)\cos v, a'(u)\sin v, b'(u)) \\ \varphi_v(u, v) &= (-a(u)\sin v, a(u)\cos v, 0) \end{aligned}$$

Per veure que el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} a'(u)\cos(v) & -a(u)\sin(v) \\ a'(u)\sin(v) & a(u)\cos(v) \\ b'(u) & 0 \end{pmatrix}$$

és dos només cal observar que els tres menors 2×2 són aa', $-ab'\sin(v)$, $-ab'\cos(v)$ que no es poden anul·lar tots tres a la vegada, ja que per ser $\alpha(u)$ regular $a'(u)^2 +$

$b'(u)^2 \neq 0$, és a dir $a'(u)$ i $b'(u)$ no es poden anul·lar a la vegada. Per tant, la parametrització és regular.

En el cas del tor podem prendre $\alpha(u) = (R + r\cos u, 0, r\sin u)$ amb la qual cosa

$$\varphi(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u), \qquad (u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$$

és una parametrització regular del tor.

3. A partir del càlculs de φ_u, φ_v de l'apartat anterior veiem que la primera forma fonamental ve donada per $E(u,v) = a'(u)^2 + b'(u)^2 = \|\alpha'(u)\|^2 \neq 0$, $F(u,v) = 0$ i $G(u,v) = a(u)^2 > 0$ ja que C no pot tallar a l'eix Oz. Matricialment,

$$I = \begin{pmatrix} a'^2 + b'^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

El seu determinat és $EG - F^2 = a^2\|\alpha'\|^2 \neq 0$. Això demostra també que la parametrització es regular.

Si u és el paràmetre arc de α aleshores la primera forma fonamental de S té per matriu

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

4. L'element d'àrea és doncs $dA = a(u)\sqrt{a'^2 + b'^2}\,du\,dv$ i l'àrea de S (del troç de S generat per $\alpha(s)$ amb $u_1 \leq s \leq u_2$) és igual a

$$A = \int_0^{2\pi} dv \int_{u_1}^{u_2} a\sqrt{a'^2 + b'^2}du = 2\pi \int_0^l a(s)ds,$$

on s és el paràmetre arc de α (hem fet el canvi de variable $u = u(s), du = u'(s)ds$ recordant que $ds/du = \|\alpha'(u)\| = \sqrt{a'^2 + b'^2}$).

Observem que la coordenada x del centre de gravetat de $\alpha(u)$ (u paràmetre arc) és

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l a(u)du}{l}$$

per tant l'àrea generada per rotació d'una corba de longitud l està donada per [**Teorema de Pappus**]

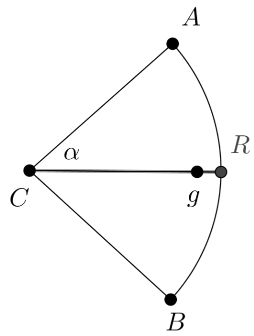
$A = 2\pi l\bar{x} =$ **longitud de la corba** $\times$ **longitud trajectòria centre de masses**.

En particular, l'àrea del tor (el tor s'obté girant una circumferència de radi r situada al pla $y = 0$ amb centre el punt $(R, 0, 0)$ al voltant de l'eix z; el centre de masses és el centre de la circumferència) és igual a

$$2\pi R(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

La fórmula estàtica de Meusnier. Per trobar el centre de masses d'un arc de cercle, i poder així calcular l'àrea d'un troç de tor, podem usar la fórmula estàtica de Meusnier[28].

[28] *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires de savants étrangers, París, 1785.



Amb la notació de la figura en la que AB és un arc de cercle de la circumferència de centre C es compleix que

$$\text{Longitud de l'arc } AB \cdot gC = AB \cdot CR$$

on g és el centre de gravetat de l'arc AB.

En efecte, l'abscissa $\bar{x}$ de g és

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x\, ds}{\int_{-\alpha}^{\alpha} ds}$$

on $(x, y) = (r\cos t, r\sin t)$ és una parametrització de l'arc AB $(r = CA)$.

Com $ds = r\, dt$ tenim

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos(t) r dt}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\, dt} = \frac{r\sin(\alpha)}{\alpha}.$$

Així,

$$\text{Longitud de l'arc } AB \cdot gC = r2\alpha \cdot \frac{r\sin(\alpha)}{\alpha} = 2r\sin(\alpha) \cdot r = AB \cdot CR. \quad \square$$

Calculeu l'àrea interior i exterior del tor.

8 Superfícies: Primera forma fonamental.

Exercici 78: Determineu els coeficients de la primera forma fonamental del pla xy de $\mathbb{R}^3$ quan es considera aquest pla parametritzat per les coordenades polars.

Solució: Tenint en compte que la parametrització en polars del pla $z = 0$ vindrà determinada per

$$\varphi(r, \theta) = \big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta), 0\big)$$

la base de l'espai tangent serà

$$\varphi_r = \big(\cos(\theta), \sin(\theta), 0\big), \quad \varphi_\theta = \big(-r\,\sin(\theta), r\,\cos(\theta), 0\big)$$

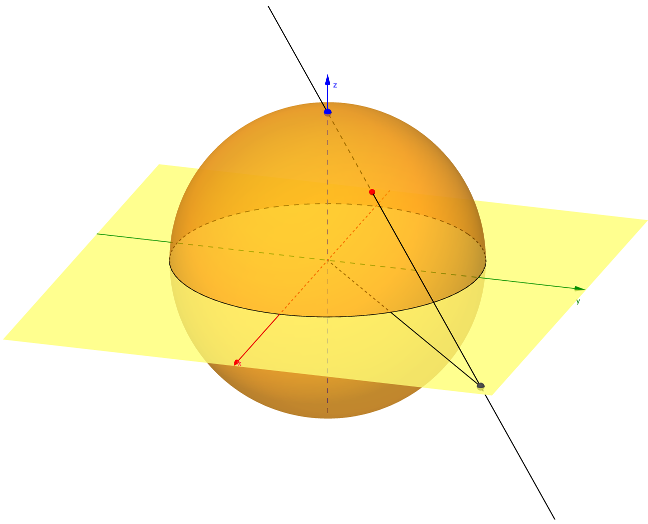
Fent els productes escalars corresponents

$$E = 1$$
$$G = r^2$$
$$F = 0$$

I posat en forma de matriu simètrica

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 79: Considerem l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ del pla a l'esfera unitat de centre l'origen de $\mathbb{R}^3$, donada per $\varphi(u, v) = p \in S^2$, on p és el punt d'intersecció amb l'esfera de la recta que passa per $(u, v, 0)$ i el *pol nord* $(0, 0, 1)$ *de l'esfera unitat* tal i com es representa en l'esquema següent



És clar que φ és una bijecció entre el pla $\mathbb{R}^2$ i S^2 menys el pol nord. L'aplicació inversa φ^{-1}, que va doncs de l'esfera unitat menys el pol nord al pla, es diu *projecció estereogràfica de l'esfera sobre el pla.*

1. Demostreu que la inversa de la projecció estereogràfica és una parametrització regular de l'esfera.

2. Calculeu els coeficients de la primera forma fonamental de l'esfera respecte aquesta parametrització.

3. Comproveu que aquesta parametrització conserva els angles (l'angle entre dues corbes, o vectors, de $\mathbb{R}^2$ és el mateix que hi ha entre les seves imatges sobre l'esfera).

Solució: Per tal de fer els càlculs de l'exercici caldrà explicitar, en primer lloc, l'expressió de φ. Considerem, doncs, un punt qualsevol $(u, v, 0)$ del pla $z = 0$. La recta que passa per aquest punt i el pol nord de l'esfera $(0, 0, 1)$ es pot parametritzar com

$$(0,0,1) + \lambda\,(u, v, -1)$$

i els punts sobre l'esfera seran aquells que compleixin

$$(\lambda\, u)^2 + (\lambda\, v)^2 + (1-\lambda)^2 = 1$$

Com que l'equació anterior es pot posar com

$$\lambda^2\,(u^2+v^2+1) - 2\,\lambda = 0\,,$$

si es descarta la solució $\lambda = 0$ que correspon al pol nord, el punt $\varphi(u, v)$ haurà de ser el que correspongui a $\lambda = \dfrac{2}{u^2+v^2+1}$. Resumint, l'expressió de φ serà

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{2\,u}{u^2+v^2+1}, \frac{2\,v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

(Noteu que φ està definida en tot el pla i que quan (u, v) va cap ∞ és quan els seus valors tendeixen al pol nord $(0, 0, 1)$. En particular, φ parametritza l'esfera menys el pol nord).

1. Un càlcul directa mostra que:

$$\varphi_u = \left(\frac{2\,(-u^2+v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2}, \frac{-4\,u\,v}{(u^2+v^2+1)^2}, \frac{4\,u}{(u^2+v^2+1)^2}\right)$$

$$\varphi_v = \left(\frac{-4\,u\,v}{(u^2+v^2+1)^2}, \frac{2\,(u^2-v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2}, \frac{4\,v}{(u^2+v^2+1)^2}\right)$$

Veurem a l'apartat següent que la primera forma fonamental és no degenerada i, per tant, φ és regular.[29]

2. Fent els productes escalars corresponents (i més càlculs):

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2},$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0,$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2},$$

i en forma matricial

$$I = \begin{pmatrix} \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} \end{pmatrix} = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que, clarament, és no degenerada.

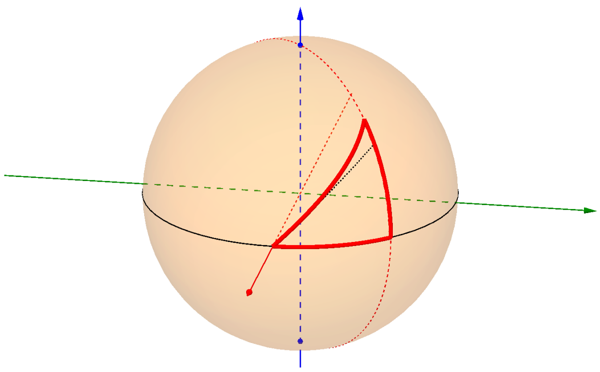
[29] Recordem que $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$.

3. L'expressió de la primera forma fonamental deixa clar que les mesures d'angles coincideixen.

Exercici 80: Considereu la parametrització de l'esfera (llevat dels dos pols i un meridià) donada per la longitud u i la latitud v:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \big(\cos(u)\,\cos(v), \sin(u)\,\cos(v), \sin(v)\big) \end{array}$$

1. Comproveu que és una parametrització regular i determineu els coeficients de la primera forma fonamental respecte aquesta parametrització.
2. Donades les corbes $\alpha_1(t) = \varphi(t,0)$, $\alpha_2(t) = \varphi(\pi/4,t)$ i $\alpha_3(t) = \varphi(t,t)$ (en tots tres casos $t \in [0,\pi/4]$), calculeu (aproximant, si cal) l'àrea del triangle que determinen, les llargades de cada un dels segments i els angles que formen.



3. Feu els mateixos càlculs que abans substituint la corba α_3 per l'arc de circumferència que s'obté tallant l'esfera amb el pla $y = z$ (que també apareix a l'esquema anterior), determinant prèviament els nous punts de tall entre les corbes (en aquest cas, la tercera corba talla el meridià en un punt de latitud més baixa que abans).

Solució:

1. Calculant les derivades

$$\varphi_u = (-\sin(u)\,\cos(v), \cos(u)\,\cos(v), 0)$$
$$\varphi_v = (-\cos(u)\,\sin(v), -\sin(u)\,\sin(v), \cos(v))$$

Fent els productes escalars corresponents:

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \cos^2(v)$$
$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$$
$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1$$

Com que el domini per a les v no conté els valors $\pm\pi/2$ (que són els que anul·larien el determinant) la primera forma fonamental és no degenerada i la parametrització és regular.

2. L'element d'àrea de l'esfera, respecte aquesta parametrització, serà

$$\cos(v)\, du\, dv$$

(Noteu que $\cos(v) > 0$ en el domini que s'està considerant). Així, l'àrea T del *triangle* es pot calcular amb la integral

$$T = \int_0^{\pi/4}\int_0^u \cos(v)\, dv\, du$$

Aquesta integració és immediata i dóna

$$T = \int_0^{\pi/4} \sin(u)\, dv = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.292893218813452$$

Per a calcular les longituds notem, en primer lloc, que es compleix

$$\begin{aligned} {\alpha_1}' &= \varphi_u \ (= (1,0)) \\ {\alpha_2}' &= \varphi_v \ (= (0,1)) \\ {\alpha_3}' &= \varphi_u + \varphi_v \ (= (1,1)) \end{aligned}$$

al llarg del seu recorregut. De forma que les *velocitats* d'aquestes tres corbes seran

$$|{\alpha_1}'| = \cos(0) = 1$$

(recordeu que α_1 correspon a $v = 0$)

$$\begin{aligned} |{\alpha_2}'| &= 1 \\ |{\alpha_3}'| &= \sqrt{\cos^2(t) + 1} \end{aligned}$$

A partir d'aquí les llargades respectives ℓ_1, ℓ_2 i ℓ_3 seran

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \Delta t = \frac{\pi}{4} \\ \ell_2 &= \Delta t = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(α_1 i α_2 estan parametritzades per l'arc).

$$\ell_3 = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2(t) + 1}\, dt \approx 1.058095501392563$$

(No hi ha expressió *elemental* per a la integral corresponent a ℓ_3).

Siguin θ_{12}, θ_{23} i θ_{13} els angles que formen, respectivament, α_1 i α_2, α_2 i α_3, i α_1 i α_3. Aleshores

$$\cos(\theta_{12}) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \Longrightarrow \theta_{12} = \frac{\pi}{2}$$

(${\alpha_1}'$ i ${\alpha_2}'$ són unitaris)

$$\cos(\theta_{13}) = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_u + \varphi_v \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta_{13} = \frac{\pi}{4}$$

(recordeu que en aquest cas la intersecció es produeix en el punt amb $0 = t = u = v$)

$$\cos(\theta_{23}) = \frac{\langle \varphi_v, \varphi_u + \varphi_v \rangle}{\sqrt{3/2}} = \sqrt{2/3} \Longrightarrow \theta_{23} \approx 0.615479708670387$$

(el punt de tall correspon a $\pi/4 = t = u = v$, per tant $|\alpha_3{}'| = \sqrt{\cos^2(\pi/4) + 1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$)

3. El recorregut del pla $y = z$ sobre l'esfera es pot parametritzar com

$$\alpha_4(t) = \left(\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t) \right)$$

però d'aquesta forma el paràmetre t no té *relació directa* amb les coordenades (u, v) de l'esfera corresponents a la longitud i latitud. Si interessa relacionar la corba amb la parametrització de l'esfera serà millor considerar

$$\alpha_4(u) = \varphi(u, v), \text{ amb } v = \arctan(\sin(u))$$

(que és el resultat d'imposar $y = z$ en l'expressió de $\varphi(u, v)$).

En qualsevol cas, és clar que el punt de tall de α_1 amb α_4 és $(1, 0, 0)$ i el de α_2 amb α_4 és $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ (ja que el *meridià* $u = \pi/4$ està sobre el pla $x = y$).

Tenint en compte la parametrització de α_4 en termes de la longitud u, l'àrea T_2 del triangle que delimiten α_1, α_2 i α_4 es calcularà amb la integral

$$T_2 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\arctan(\sin(u))} \cos(v) \, dv \, du$$

que no és tan difícil com sembla ja que es pot deixar com

$$T_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(u)}{\sqrt{1 + \sin^2(u)}} \, du$$

(l'únic truc que hi ha aquí és recordar que $\sin(\arctan(a)) = \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ per a qualsevol valor a) i aquesta integral és gairebé immediata (teniu en compte que $1 + \sin^2(u) = 2 - \cos^2(u)$). S'obté, finalment,

$$T_2 = [\arcsin(\frac{\cos u}{\sqrt{2}})]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{12}$$

Respecte la llargada dels segments corresponents a aquest segon triangle es té:

- El segment corresponent a α_1 és el mateix que abans i té llargada $\pi/4$
- El segment corresponent a α_2 arribarà fins un valor $t = v$ del paràmetre (arc) que correspon a $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = z = \sin(t)$ de forma que la llargada serà $\arcsin(1/\sqrt{3}) \approx 0.615479708670387$.

- Com que la parametrització de α_4 donada per $\alpha_4(t) = \left(\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)\right)$ compleix

$$\alpha_4{}'(t) = \left(-\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)\right)$$

és clar que $|\alpha_4{}'| = 1$ i, per tant, el paràmetre t correspon a la llargada d'aquesta corba. Com que el punt inicial correspon a $t = 0$ i el punt final correspon a $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = x = \cos(t)$ la llargada d'aquest segment serà $\arccos(1/\sqrt{3}\,) \approx 0.955316618124509$.

Finalment, per a calcular els angles entre aquestes tres corbes caldrà tenir en compte:

- L'angle θ_{12} entre α_1 i α_2 és el mateix que abans ($\pi/2$).
- El punt de tall entre α_1 i α_4 és $(1,0,0)$ i els vectors tangents són, respectivament, $\alpha_1{}' = (0,1,0)$ i $\alpha_4{}' = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (tots dos unitaris) de forma que l'angle θ_{14} entre aquestes dues corbes complirà $\cos(\theta_{14}) = \sqrt{2}/2$ i, per tant, $\theta_{14} = \pi/4$.
- El punt de tall entre α_2 i α_4 és $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Això determina que els vectors tangents siguin

$$\alpha_2{}' = \varphi_v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(v), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(v), \cos(v)\right)$$

(però estem en un punt on $1/\sqrt{3} = z = \sin(v)$)

$$= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\alpha_4{}' = \left(-\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)\right)$$

(i estem en un punt on $1/\sqrt{3} = x = \cos(t)$)

$$= \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Com que els vectors són unitaris,

$$\cos(\theta_{24}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

I per tant $\theta_{24} = \pi/3$.

Com observació final, noteu que la suma dels tres angles del triangle val $13\pi/12$ i aquest valor supera π en $\pi/12$ que (per casualitat?) és exactament el valor de l'àrea T_2.

Càlcul alternatiu de θ_{24}. Les corbes $\alpha_4(u) = \varphi(u, \arctan(\sin u))$ i $\alpha_2(t) = \varphi(\pi/4, t)$ es tallen en $u = \pi/4$.

Les components dels vectors tangents de α_4' són $(1, \frac{\cos u}{1+\sin^2 u}_{|u=\pi/4}) = (1, \frac{\sqrt{2}}{3})$, i les components dels vectors tangents de α_2' són $(0, 1)$. Així

$$\cos\theta_{24} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 v_{\cos v = \sqrt{2/3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}}} = 1/2.$$

Exercici 81: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc tal que $|\alpha(v)| = 1, \forall v \in I$ (el recorregut d'α està sobre l'esfera unitat). Considereu la superfície parametritzada per

$$\varphi(u, v) = u\,\alpha(v)\,,$$

$u > 0$, $v \in I$.

1. Calculeu-ne la primera forma fonamental.
2. Demostreu que és localment isomètrica al pla.

Solució:

1. Tenint en compte la definició de φ i posant $\varphi_u = \varphi_u(u, v)$, $\varphi_v = \varphi_v(u, v)$ per simplificar la notació tenim

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \alpha(v) \\ \varphi_v &= u\,\alpha'(v) \end{aligned}$$

Per a calcular els coeficients de la primera forma fonamental caldrà tenir en compte que

(1) $\langle \alpha(v), \alpha(v) \rangle = |\alpha(v)|^2 = 1\,,$

(2) i que, derivant l'anterior igualtat, $\langle \alpha'(v), \alpha(v) \rangle = 0\,.$

Aleshores,

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \alpha(v), u\,\alpha'(v) \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle u\,\alpha'(v), u\,\alpha'(v) \rangle = u^2 \end{aligned}$$

2. Si es recorda l'expressió de la primera forma fonamental del pla *en coordenades polars* es veu que és equivalent a la d'aquesta superfície, on el paper del mòdul el fa la coordenada u i el de l'argument la coordenada v.

Dit d'una altra manera, la transformació que fa correspondre al punt $p = u\,\alpha(v)$ (de paràmetres (u, v)) el punt del pla donat per $(u\,\cos(v), u\,\sin(v), 0)$ és una isometria local.

Si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per $f(\varphi(u, v)) = (u \cos v, u \sin v)$ i prenem com nova carta local del pla $\psi = f \circ \varphi$ és clar que $I_\varphi = I_\psi$ (primeres formes fonamentals coincideixen).

Exercici 82: Calculeu l'expressió de la primera forma fonamental de les superfícies parametritzades per:

1. $\varphi(u,v) = \big(u\,\cos(v), u\,\sin(v), u^2\big)$
2. $\varphi(u,v) = \big(u\,\cosh(v), u\,\sinh(v), u^2\big)$
3. $\varphi(u,v) = \big(a\,\sinh(u)\,\cos(v), b\,\sinh(u)\,\sin(v), c\,\cosh(u)\big)$ (on a, b i c són constants).

Solució:

1. $$\begin{aligned}\varphi_u &= (\cos(v), \sin(v), 2\,u)\\ \varphi_v &= (-u\,\sin(v), u\,\cos(v), 0)\end{aligned}$$

   de forma que

   $$\begin{aligned}E &= 1 + 4\,u^2\\ F &= 0\\ G &= u^2\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\varphi_u &= (\cosh(v), \sinh(v), 2\,u)\\ \varphi_v &= (u\,\sinh(v), u\,\cosh(v), 0)\end{aligned}$$

   de forma que

   $$\begin{aligned}E &= \cosh^2(v) + \sinh^2(v) + 4\,u^2 = \cosh(2\,v) + 4\,u^2\\ F &= 2\,u\,\cosh(v)\,\sinh(v) = u\,\sinh(2\,v)\\ G &= u^2\,(\sinh^2(v) + \cosh^2(v)) = u^2\,\cosh(2\,v)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\varphi_u &= \big(a\,\cosh(u)\,\cos(v), b\,\cosh(u)\,\sin(v), c\,\sinh(u)\big)\\ \varphi_v &= \big(-a\,\sinh(u)\,\sin(v), b\,\sinh(u)\,\cos(v), 0\big)\end{aligned}$$

   de forma que

   $$\begin{aligned}E &= a^2\,\cosh^2(u)\,\cos^2(v) + b^2\,\cosh^2(u)\,\sin^2(v) + c^2\,\sinh^2(u)\\ F &= (b^2 - a^2)\,\cosh(u)\,\sinh(u)\,\sin(v)\,\cos(v)\\ G &= a^2\,\sinh^2(u)\,\sin^2(v) + b^2\,\sinh^2(u)\,\cos^2(v)\end{aligned}$$

Exercici 83: Calculeu la primera forma fonamental de la superfície de revolució

$$\begin{aligned} x &= r\cos v \\ y &= r\sin v \\ z &= \phi(r) \end{aligned}$$

Veieu que existeixen coordenades isotermals. Concretament trobeu coordenades (u, v) (v la mateixa que anteriorment) tals que

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

amb $\lambda = \lambda(u)$.[30]

Solució: Escrivint la superfície com $\varphi(r, v) = (r\cos(v), r\sin(v), \phi(r))$ veiem que

$$\begin{aligned} \varphi_r &= (\cos(v), \sin(v), \phi'(r)) \\ \varphi_v &= (-r\sin(v), r\cos(v), 0) \end{aligned}$$

i per tant $ds^2 = (1 + \phi'^2)dr^2 + r^2dv^2$.

Busquem una funció $u = u(r)$ tal que

$$ds^2 = (1 + \phi'^2)dr^2 + r^2dv^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

Necessitem doncs ($du = u'dr$) que

$$(1 + \phi'^2) = r^2u'^2.$$

Només hem de prendre

$$u = \int \frac{\sqrt{1 + \phi'^2}}{r}\,dr.$$

Prenem ara com nova carta $\psi(u, v) = \varphi(r(u), v)$ on $r(u)$ queda definida per l'anterior expressió de u pel teorema de la funció inversa. Tenim

$$\begin{aligned} \psi_u(u, v) &= \varphi_u(r(u), v)r'(u) \\ \psi_v(u, v) &= \varphi_v \end{aligned}$$

i per tant, usant que $r'(u) = \frac{1}{u'(r)} = \frac{r}{\sqrt{1+\phi'^2}}$, tenim que

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} 1 + \phi'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad I_\psi = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{1+\phi'^2}(1 + \phi'^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

[30] La notació ds^2 prové de que el paràmetre arc $s(t)$ està donat per

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt$$

que derivant i elevant al quadrat

$$(\frac{ds}{dt})^2 = E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2$$

que, per simplificar la notació, escriurem ometent els denominadors com

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2.$$

Observem que l'aplicació que envia el punt de la superfície de coordenades (u, v) al punt del pla $(x, y) = (u, v)$ és conforme (la primera forma fonamental de la superfície respecte la carta isotermal $\varphi(u, v)$ i la primera forma fonamental del pla respecte la carta $f \circ \varphi$ són múltiples una de l'altra).

Segon mètode.

La fórmula del canvi de base per a aplicacions bilineals ens diu que

$$I_\varphi = M^t I_\psi M,$$

on I_φ és la matriu de la primera forma fonamental respecte la base $(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v})$, I_ψ és la matriu de la primera forma fonamental respecte la base $(\frac{\partial \psi}{\partial x} \circ h, \frac{\partial \psi}{\partial y} \circ h)$, i M és la matriu del canvi de base, que en el nostre cas és

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h^1}{\partial u} & \dfrac{\partial h^1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial h^2}{\partial u} & \dfrac{\partial h^2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Observem que h és l'aplicació del canvi de coordenades, és a dir, $\varphi = \psi \circ h$. Habitualment escrivim $h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ amb $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ i $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$. D'aquesta manera

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

En el cas que ens ocupa podem aplicar aquesta fórmula amb $\bar{u} = \bar{u}(r)$, $\bar{v} = v$ de manera que

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial r} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tindrem

$$\begin{pmatrix} 1 + \phi'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial r} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I_\psi \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial r} & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'on

$$I_\psi = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \phi'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

és a dir

$$I_\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \phi'^2}{\bar{u}_r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Hem d'imposar doncs

$$1 + \phi'^2 = r^2 \bar{u}_r^2$$

com abans.

Exercici 84: Demostreu que les superfícies

$$\begin{aligned} \varphi(t,s) &= (t\cos s, t\sin s, s) && \textit{Helicoide} \\ \psi(t,s) &= (t\sin s, t\cos s, \log t) && \textit{Logaritmoide} \end{aligned}$$

tenen, en punts corresponents [mateixes coordenades (t,s)], la mateixa curvatura de Gauss, però l'aplicació que porta el punt de coordenades (t,s) de l'helicoide al punt de coordenades (t,s) del logaritmoide no és una isometria. [*La curvatura no determina la mètrica*].

Solució: Calculem la curvatura de Gauss.

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (\cos s, \sin s, 0) \\ \varphi_s &= (-t\sin s, t\cos s, 1) \\ E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= 1+t^2 \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, -\cos s, t) \\ \varphi_{tt} &= (0,0,0) \\ \varphi_{ts} &= (-\sin s, \cos s, 0) \\ \varphi_{ss} &= (-t\cos s, -t\sin s, 0) \\ e &= 0 \\ f &= -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ g &= 0 \\ K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Anàlogament

$$\begin{aligned} \psi_t &= (\sin s, \cos s, \frac{1}{t}) \\ \psi_s &= (t\cos s, -t\sin s, 0) \\ E &= 1+\frac{1}{t^2} \\ F &= 0 \\ G &= t^2 \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(\sin s, \cos s, -t) \\ \psi_{tt} &= (0,0,-\frac{1}{t^2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{ts} &= (\cos s, -\sin s, 0)\\
\psi_{ss} &= (-t\sin s, -t\cos s, 0)\\
e &= \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\\
f &= 0\\
g &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\
K &= -\frac{1}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}
$$

Per veure que l'aplicació f : helicoide $\longrightarrow$ logaritmoide donada per $f(\varphi(t,s) = \psi(t,s)$ no és isometria hem de veure si la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base (φ_t, φ_s) coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base $(f_*\varphi_t, f_*\varphi_s)$.

Però

$$
f_*\varphi_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi(t,s_0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi(t,s_0) = \psi_t.
$$

Anàlogament $f_*\varphi_v = \psi_v$. Però en els càlculs anteriors es veu que la matriu de la primera forma fonamental de l'helicoide respecte de la base (φ_t, φ_s) no coincideix amb la matriu de la primera forma fonamental del logaritmoide respecte de la base (ψ_t, ψ_s).

Però podem veure fàcilment, no únicament que f no és isometria, sinó que no hi ha cap isometria entre l'helicoide H i el logaritmoide L. En efecte, qualsevol isometria F entre H i L ha de portar el punt de coordenades (t,s) al punt de coordenades $(\pm t, u(t,s))$, on $u = u(t,s)$ és una funció desconeguda que ens determina F. Això és degut a que F conserva la curvatura de Gauss, la qual, com hem vist, només depèn de t^2.

Així, doncs, tenim $F(\varphi(t,s)) = \psi(\pm t, u(t,s))$. En particular,

$$
dF(\varphi_t) = \pm\psi_t + \psi_s\frac{\partial u}{\partial t}.
$$

Per ser F isometria

$$
\langle dF(\varphi_t), dF(\varphi_t)\rangle = \langle \varphi_t, \varphi_t\rangle = 1,
$$

però

$$
\langle dF(\varphi_t), dF(\varphi_t)\rangle = \langle \pm\psi_t + \psi_s\frac{\partial u}{\partial t}, \pm\psi_t + \psi_s\frac{\partial u}{\partial t}\rangle = 1 + \frac{1}{t^2} + (\frac{\partial u}{\partial t})^2 t^2.
$$

Igualant les dues darreres igualtats obtenim una contradicció.

9 Superfícies: Segona forma fonamental. Curvatura

Exercici 85: Determineu la primera i segona formes fonamentals, i les curvatures de Gauss i mitjana, de la superfície parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (u+v, u\,v, v)$$

Solució: Si[31] es comença calculant els vectors tangents a les corbes coordenades s'obté:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, v, 0) \\ \varphi_v &= (1, u, 1) \end{aligned}$$

Els productes escalars que determinen la primera forma fonamental seran:

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + v^2 \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 1 + u\,v \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2 + u^2 \end{aligned}$$

Agrupat matricialment

$$I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1+u\,v \\ 1+u\,v & 2+u^2 \end{pmatrix}$$

Per tal de determinar la segona forma fonamental caldrà calcular el vector normal a la superfície i les derivades segones de la parametrització. La direcció del vector normal és la del producte vectorial $\varphi_u \wedge \varphi_v = (v, -1, u-v)$ de forma que el vector normal serà

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{v^2+1+(u-v)^2}}\,(v,-1,u-v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v}}(v,-1,u-v)$$

Els coeficients de la segona forma fonamental es poden calcular fent el producte escalar de les derivades segones de la parametrització

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= (0,0,0) \\ \varphi_{uv} &= (0,1,0) \\ \varphi_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

amb aquest vector normal, així s'obtindrà:

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathcal{N}, \varphi_{uu} \rangle = 0 \\ f &= \langle \mathcal{N}, \varphi_{uv} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v}} \\ g &= \langle \mathcal{N}, \varphi_{vv} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Expressat en forma de matriu:

$$II = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[31] Noteu que es tracta de la quàdrica $y = z\,(x-z)$ i, per tant, els càlculs es podran fer tamé utilitzant les fórmules corresponents al gràfic d'una funció que es donen a l'exercici següent).

Amb les dades dels càlculs que s'han fet fins ara, es pot calcular immediatament la curvatura de Gauss com:

$$K = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} = \frac{-1/(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)}{1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v} = \frac{-1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^2}$$

Finalment, per tal d'obtenir la curvatura mitjana H caldrà calcular la traça de $W = -d\mathcal{N} = I^{-1}\cdot II$. Fent unes quantes operacions

$$W = \frac{1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^{3/2}} \begin{pmatrix} u\,v+1 & -(u^2+2) \\ -(v^2+1) & u\,v+1 \end{pmatrix}$$

De forma que la curvatura mitjana serà

$$H = \frac{1}{2}\ \text{traça}(W) = \frac{u\,v+1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^{3/2}}$$

Alternativament es pot usar la fórmula que dóna la curvatura mitjana directament a partir dels coeficients de la primera i segona formes fonamentals

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2}\frac{-2(1+uv)\frac{-1}{\sqrt{1+u^2+2v^2-2uv}}}{1+u^2+2v^2-2uv} = \frac{u\,v+1}{(1+u^2+2\,v^2-2\,u\,v)^{3/2}}.$$

Exercici 86: Donada una funció de dues variables $h(x,y)$, doneu en funció de les derivades parcials de h, les expressions del vector normal, l'aplicació de Weingarten i la curvatura de Gauss per a la superfície S que s'obté considerant el gràfic de h.

Solució: Quan es defineix una superfície S prenent el gràfic d'una funció de dues variables $h(x,y)$, la parametrització natural consisteix a prendre

$$\varphi(x,y) = (x, y, h(x,y))$$

de forma que els vectors tangents corresponents seran

$$\varphi_x = (1, 0, h_x)$$
$$\varphi_y = (0, 1, h_y)$$

(on els subíndex denoten, com és habitual en aquests casos, derivades parcials respecte les variables). Aleshores la direcció del vector normal és la del producte vectorial $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-h_x, -h_y, 1)$ i el vector normal unitari serà

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1+(h_x)^2+(h_y)^2}}(-h_x, -h_y, 1)$$

Per tal d'obtenir la curvatura de Gauss i l'expressió de W, el més pràctic serà considerar

$$I = \begin{pmatrix} 1+(h_x)^2 & h_x\,h_y \\ h_x\,h_y & 1+(h_y)^2 \end{pmatrix}$$

(que té determinant donat per $1+(h_x)^2+(h_y)^2$) i calcular la segona forma fonamental a partir de les derivades segones

$$\varphi_{xx} = (0, 0, h_{xx})$$
$$\varphi_{xy} = (0, 0, h_{xy})$$
$$\varphi_{yy} = (0, 0, h_{yy})$$

de forma que s'obtenen els coeficients

$$e = \langle \mathcal{N}, \varphi_{xx} \rangle = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2}}$$
$$f = \langle \mathcal{N}, \varphi_{xy} \rangle = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2}}$$
$$g = \langle \mathcal{N}, \varphi_{yy} \rangle = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2}}$$

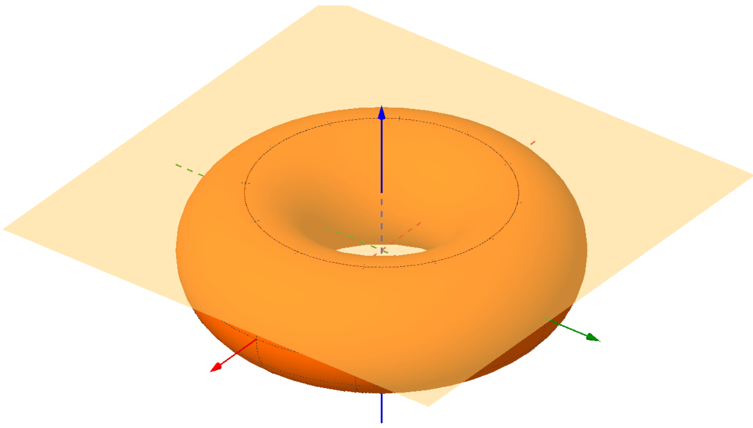
i la matriu de W serà

$$\begin{aligned} W = I^{-1} \cdot II &= \frac{1}{(1 + (h_x)^2 + (h_y)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + (h_y)^2 & -h_x\, h_y \\ -h_x\, h_y & 1 + (h_x)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + (h_x)^2 + (h_y)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} h_{xx}\,(1 + (h_y)^2) - h_{xy}\, h_x\, h_y & h_{xy}\,(1 + (h_y)^2) - h_{yy}\, h_x\, h_y \\ h_{xy}\,(1 + (h_x)^2) - h_{xx}\, h_x\, h_y & h_{yy}\,(1 + (h_x)^2) - h_{xy}\, h_x\, h_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per un altre costat, la fórmula per a la curvatura de Gauss serà

$$K = \frac{e\, g - f^2}{E\, G - F^2} = \frac{(h_{xx}\, h_{yy} - (h_{xy})^2)/(1 + (h_x)^2 + (h_y)^2)}{1 + (h_x)^2 + (h_y)^2} = \frac{h_{xx}\, h_{yy} - (h_{xy})^2}{(1 + (h_x)^2 + (h_y)^2)^2}$$

Exercici 87: Sigui S una superfície regular que és tangent a un pla fix per a tots els punts d'una certa corba (regular). Què es pot dir de la curvatura de Gauss de S en els punts d'questa corba? Preneu com exemple un tor de revolució com el de l'esquema següent



Solució: Sigui p un punt qualsevol de la corba en S on la superfície és tangent al pla fix. Si la corba és regular, el seu vector tangent $\vec{v}$ en p serà un vector tangent a la superfície i diferent de $\vec{0}$. Com que el vector normal a la superfície serà constant al llarg de la corba (ja que coincideix amb el vector normal al pla amb el que es produeix la tangència) es compleix, per la definició general de diferencial d'una aplicació,

$$d\mathcal{N}(\vec{v}) = \vec{0}$$

(es restringeix l'aplicació a una corba tangent qualsevol al vector i es busca el vector tangent a aquesta restricció, que és una corba en el espai imatge de l'aplicació).

Tenint en compte que la curvatura de Gauss K d'una superfície és el determinant de $W = -d\mathcal{N}$ i que s'acaba de trobar un vector no nul en el nucli de W ($W(\vec{v}) = \vec{0}$), és clar que s'acaba de veure que $K = 0$ en p.

Exercici 88: Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Suposeu que S es connexa. Demostreu que són equivalents:

(1) La segona forma fonamental de S és constant igual a zero.

(2) L'aplicació de Gauss de S és constant.

(3) S està continguda en un pla.

Solució:

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

Tenint en compte les definicions, el valor de la segona forma fonamental II actuant sobre un parell de vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ s'obté amb

$$II(\vec{u}, \vec{v}) = \langle -d\mathcal{N}(\vec{u}), \vec{v} \rangle$$

Aleshores, dir que aquesta segona forma fonamental és nul·la és equivalent a dir que la diferencial de l'aplicació de Gauss $d\mathcal{N}$ és 0 en tots els punts i, per tant, que $\mathcal{N}$ és una aplicació constant.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3)

És clar que quan la superfície està continguda en un pla el seu vector normal serà constant.

Recíprocament, si $\mathcal{N}$ és constant, es considera un punt qualsevol p_0 en S i una parametrització $\varphi(u, v)$ al voltant de p_0, es complirà

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi(u, v) - p_0, \mathcal{N} \rangle = \langle \varphi_u, \mathcal{N} \rangle + \langle \varphi - p_0, \mathcal{N}_u \rangle = 0$$

(i el mateix respecte v) ja que φ_u és un vector tangent a la superfície (perpendicular a $\mathcal{N}$) i $\mathcal{N}$ és constant. Així es té que $\langle \varphi(u, v) - p_0, \mathcal{N} \rangle = 0$ i, per tant, el recorregut de φ és al pla pla que passa per p_0 i té $\mathcal{N}$ com a vector perpendicular. Com que s'ha suposat des del principi que S és connexa, tots els seus punts compleixen aquesta propietat. (L'argument mostra que el conjunt de punts de S i en aquest pla és obert).

Exercici 89: Sigui S una superfície regular i connexa. Suposeu que totes les rectes normals a la superfície passen pel mateix punt. Demostreu que S està continguda en una esfera.

Solució: Sigui φ una parametrització de S (no cal que el seu recorregut sigui tota la superfície). La condició que s'ha imposat diu que existeix un punt c_0 tal que $\varphi(u, v) - c_0$ és normal a la superfície. En particular

$$\langle \varphi - c_0, \varphi_u \rangle = \langle \varphi - c_0, \varphi_v \rangle = 0$$

Però això diu que la funció de (u, v) donada per

$$r(u, v) = \langle \varphi(u, v) - c_0, \varphi(u, v) - c_0 \rangle$$

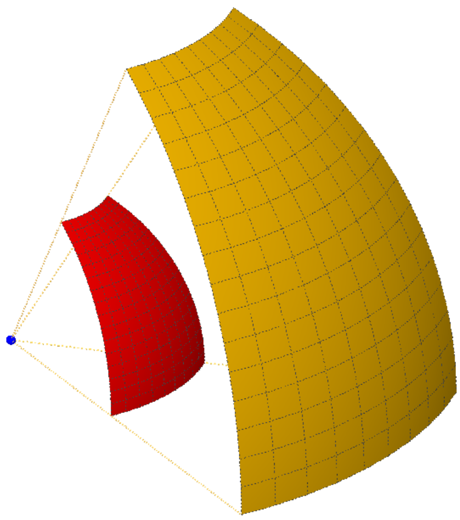
té les dues derivades parcials r_u i r_v iguals a 0 i, per tant, que és una funció constant r_0. Com que S és connexa, això demostra que la superfície està continguda en l'esfera de centre c_0 i radi r_0. (L'argument mostra que el conjunt de punts a una distància fixada de c_0 és obert ja que inclou el recorregut d'una parametrització al voltant de qualsevol del seus punts).

Exercici 90: Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una homotècia de raó positiva λ i centre arbitrari. Comproveu que $\bar{S} = F(S)$ és també una superfície i expresseu la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de $\bar{S}$ en termes de les de S.

Solució: Com que les homotècies F són difeomorfismes de $\mathbb{R}^3$, cada parametrització $\varphi(u, v)$ de S dóna, fent la composició, una parametrització de $\bar{S} = F(S)$ que es podrà escriure com

$$\bar{\varphi}(u, v) = P + \lambda(\varphi(u, v) - P),$$

on P és el centre de l'homotècia.



Aleshores les derivades parcial d'aquesta parametrització que generen l'espai tangent seran

$$\bar{\varphi}_u = \lambda\, \varphi_u, \quad \bar{\varphi}_v = \lambda\, \varphi_v$$

de forma que el vector normal $\bar{\mathcal{N}}$ de $\bar{S}$ coincidirà amb el vector normal $\mathcal{N}$ de S (en els punts corresponents) ja que $\bar{\varphi}_u \wedge \bar{\varphi}_v = \lambda^2\, \varphi_u \wedge \varphi_v$.

A partir d'aquí s'obté de forma immediata que les primeres formes fonamentals I i $\bar{I}$ de S i $\bar{S}$ respectivament s'obtenen una a partir de l'altre per la relació

$$\bar{I} = \lambda^2\, I$$

mentre que la relació entre les segones formes fonamentals II i $\bar{II}$ vindrà donada per (productes escalars de les derivades segones amb el mateix vector normal)

$$\bar{II} = \lambda\, II$$

D'aquí es dedueix que la relació entre curvatures de Gauss serà (quocient de determinants)

$$\bar{K} = \frac{\lambda^2 \det(II)}{\lambda^4 \det(I)} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4} K = \frac{1}{\lambda^2} K$$

i la relació entre curvatures mitjanes (traça del producte $I^{-1} \cdot II$)

$$\bar{H} = \frac{1}{\lambda} H$$

($\bar{I}^{-1} = (1/\lambda^2)\, I^{-1}$ i els escalars *surten fora* en els productes de matrius i en el càlcul de les traces).

Exercici 91: Considereu un helicoide

$$\varphi(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\sin(v), a\,v)$$

Calculeu-ne la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana.

Solució: Per a aquesta parametrització de la superfície

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\cos(v), \sin(v), 0)\\
\varphi_v &= (-u\,\sin(v), u\,\cos(v), a)\\
\varphi_u \wedge \varphi_v &= (a\,\sin(v), -a\,\cos(v), u)\\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\,(a\,\sin(v), -a\,\cos(v), u)\\
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}\\
\varphi_{uu} &= (0,0,0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin(v), \cos(v), 0)\\
\varphi_{vv} &= (-u\,\cos(v), -u\,\sin(v), 0)\\
II &= \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\\
K &= \frac{-a^2/(u^2+a^2)}{u^2+a^2} = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2} = -\left(\frac{a}{u^2+a^2}\right)^2\\
I^{-1}\cdot II &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2+a^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a/\sqrt{u^2+a^2} \\ -a/\sqrt{u^2+a^2} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a/\sqrt{u^2+a^2} \\ -a/(u^2+a^2)^{3/2} & 0 \end{pmatrix}\\
H &= 0
\end{aligned}$$

Exercici 92: (Superfícies paral·leles o semitubs).

Donada una parametrització $\varphi(u,v)$, d'una superfície S, es defineix la superfície paral·lela o semitub a distància t, S_t, com la superfície donada per

$$\varphi^t(u,v) = \varphi(u,v) + t\,\nu(u,v),$$

on $\nu = \nu(u,v)$ és el vector normal unitari de S (escollim un dels dos).

1. Trobeu, respecte de les coordenades u, v, l'expressió de l'element d'àrea de S_t.
2. Proveu que la curvatura de Gauss $K^t = K^t(u,v)$ està donada per
$$K^t = \frac{K}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,,$$
on $K = K(u,v)$ i $H = H(u,v)$ són les curvatures de Gauss i mitjana de la superfície inicial en el punt corresponent.
3. Proveu que la curvatura mitjana $H^t = H^t(u,v)$ de S_t està donada per
$$H^t = \frac{H - K\,t}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,.$$
4. Si S és una superfície amb curvatura mitjana constant $c \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{2\,c}$ té curvatura de Gauss constant $K = 4\,c^2$.
5. Si S és una superfície amb curvatura de Gauss constant $a^2 \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{a}$ té curvatura mitjana constant $H = -a/2$.

Solució:

1. Tenint en compte que les relacions entre els vectors tangents a les dues superfícies corresponents a les parametritzacions respectives són
$$\begin{aligned}(\varphi^t)_u &= \varphi_u + t\,\nu_u\\ (\varphi^t)_v &= \varphi_v + t\,\nu_v\end{aligned}$$
escriurem (aplicació de Weingarten canviada de signe)
$$\begin{aligned}\nu_u &= a_{11}\,\varphi_u + a_{12}\,\varphi_v\\ \nu_v &= a_{21}\,\varphi_u + a_{22}\,\varphi_v\end{aligned}$$
de forma que
$$\begin{aligned}\varphi_u \wedge \nu_v &= a_{22}\,\varphi_u \wedge \varphi_v\\ \nu_u \wedge \varphi_v &= a_{11}\,\varphi_u \wedge \varphi_v\\ \nu_u \wedge \nu_v &= K\,\varphi_u \wedge \varphi_v \quad (K \text{ és el determinant})\end{aligned}$$
i aleshores
$$(\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v = (1 - 2\,H\,t + K\,t^2)\,\varphi_u \wedge \varphi_v$$
$(a_{11} + a_{22} = -2\,H)$.
Aquest càlcul mostra que, si dS és l'element d'àrea de la superfície original, es complirà
$$dS^t = \left|1 - 2\,H\,t + K\,t^2\right|\,dS$$

Noteu que, com a propina, també es veu que els vectors normals ν i ν^t coincideixen en els punts corresponents als mateixos paràmetres (u, v) de les dues superfícies. Com $1 - 2Ht + Kt^2 = K(t - \rho_1)(t - \rho_2)$ queda clar que quan t estigui entre ρ_1 i ρ_2 la normal del tub serà de direcció oposada a la normal de la superfície. En general pensem tubs pròxims a la superfície donada (t petit) i en aquest cas $1 - 2Ht + Kt^2$ és pròxim a 1 i per tant positiu, i.e. per a valors petits de t les normals coincideixen.

2. Per tal d'establir la relació entre les curvatures de Gauss K i K^t es pot partir del fet general (que ja ha aparegut en els càlculs anterior) donat per les igualtats

$$\nu_u \wedge \nu_v = K\,\varphi_u \wedge \varphi_v, \quad (\nu^t)_u \wedge (\nu^t)_v = K^t\,(\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v$$

tenint en compte que els vectors normals de les dues superfícies coincideixen. Així s'obtindrà:

$$K\,\varphi_u \wedge \varphi_v = \nu_u \wedge \nu_v = (\nu^t)_u \wedge (\nu^t)_v = K^t\,(\varphi^t)_u \wedge (\varphi^t)_v = K^t\,(1 - 2\,H\,t + K\,t^2)\,\varphi_u \wedge \varphi_v\,.$$

De forma que

$$K^t = \frac{K}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}$$

tal i com diu l'enunciat.

3. Partint de les relacions

$$\begin{aligned}(\varphi^t)_u &= \varphi_u + t\,\nu_u \\ (\varphi^t)_v &= \varphi_v + t\,\nu_v\end{aligned}$$

i tenint en compte

$$\begin{aligned}\nu_u &= a_{11}\,\varphi_u + a_{12}\,\varphi_v \\ \nu_v &= a_{21}\,\varphi_u + a_{22}\,\varphi_v\end{aligned}$$

s'obtenen *les equacions del canvi de base* (els plans tangents a S i S^t són paral·lels)

$$\begin{aligned}(\varphi^t)_u &= (1 + t\,a_{11})\,\varphi_u + t\,a_{12}\,\varphi_v \\ (\varphi^t)_v &= t\,a_{21}\,\varphi_u + (1 + t\,a_{22})\,\varphi_v\,.\end{aligned}$$

Fent els càlculs de la matriu inversa corresponent, i incorporant $K = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ (determinant), $-2\,H = a_{11} + a_{22}$ (traça)

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \frac{1}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,\big((1 + t\,a_{22})\,(\varphi^t)_u - t\,a_{12}\,(\varphi^t)_v\big) \\ \varphi_v &= \frac{1}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,\big(-t\,a_{21}(\varphi^t)_u + (1 + t\,a_{11})\,(\varphi^t)_v\big)\end{aligned}$$

Com que els vectors normals coincideixen, les relacions anteriors permeten obtenir

$$\begin{aligned}(\nu^t)_u = \nu_u &= \frac{1}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,\big((a_{11} + t\,K)\,(\varphi^t)_u + a_{12}\,(\varphi^t)_v\big) \\ (\nu^t)_v = \nu_v &= \frac{1}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,\big(a_{21}\,(\varphi^t)_u + (a_{22} + t\,K)\,(\varphi^t)_v\big)\end{aligned}$$

Ara només cal tenir en compte que la curvatura mitjana de S^t serà igual a la meitat de la traça d'aquesta relació (matriu) canviada de signe. És a dir

$$H^t = \frac{H - K\,t}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}$$

Nota: L'argument també es pot fer utilitzant productes vectorials i les relacions entre els vectors tangents a les dues superfícies com en el cas anterior.

En el sentit contrari, la relació entre les curvatures de Gauss també surt amb els càlculs fets com en aquest apartat, encara que resulti una mica més carregòs que tal i com s'ha vist abans amb els productes vectorials.

4. Aplicar la fórmula anterior amb $H = c$ i $t = 1/(2\,c)$ serà

$$K^{1/(2c)} = \frac{K}{1 - 2\,c\,(1/(2\,c)) + K\,(1/(4\,c^2))} = 4\,c^2$$

5. Com en l'apartat anterior, aplicant la fórmula corresponent amb $K = a^2$ i $t = 1/a$ donarà

$$H^{1/a} = \frac{H - a^2\,(1/a)}{1 - 2\,H\,(1/a) + a^2\,(1/a^2)} = \frac{H - a}{2 - 2\,H/a} = -\frac{a}{2}\,.$$

Nota: El signe de la curvatura mitjana depèn del *signe del vector normal*. Si es canvia ν^t per $-\nu^t$ el signe $-$ de la fórmula desapareix.

Nota final: La parametrització φ_t deixa de ser regular si t no és prou petit per tal que l'expressió $1 - 2\,H\,t + K\,t^2$ sigui diferent de 0. Es pot construir sempre alguna superfície paral·lela? Com hauria de ser una superfície sense cap superfície paral·lela?

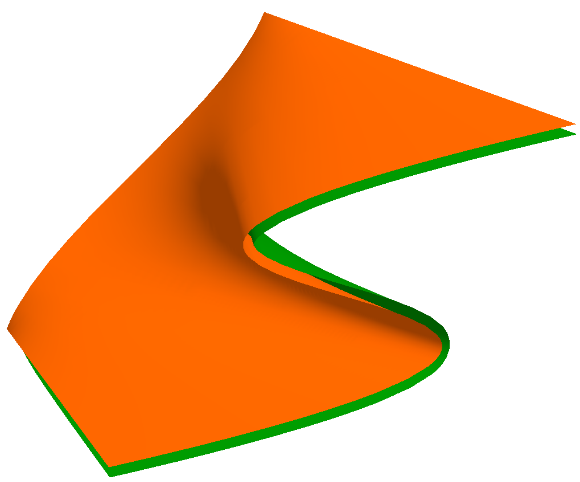


Figura 2: *

La superfície determinada per $\varphi(u,v) = (v, v\,u^3 + (1-v)\,u, u)$ i la seva paral·lela a distància $t = 0.08$. A distàncies més grans, la paral·lela degenera ràpidament.

Exercici 93: Demostreu que si l'aplicació de Gauss d'una superfície S és *conforme*, llavors S és una esfera o una superfície minimal (curvatura mitjana zero).

Solució: Prenem una parametrització $\varphi(u,v)$ i en un punt arbitrari P prenem la base ortonormal de T_PS formada pels vectors propis de l'endomorfisme de Weingarten, és a dir, vectors unitaris que donen les direccions principals.

Així, en P, tindrem

$$\begin{aligned} d\nu(e_1) &= -k_1 e_1 \\ d\nu(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned}$$

Per a tota $\eta \in \mathbb{R}$ considerem el vector $v \in T_PS$ donat per $v = e_1 + \eta e_2$.

El cosinus de l'angle entre e_1 i v està donat per

$$\frac{e_1 \cdot v}{|e_1||v|} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Per altra banda

$$d\nu(v) \quad = \quad -k_1 e_1 - \eta k_2 e_2$$

de manera que el cosinus de l'angle format entre $d\nu(e_1)$ i $d\nu(v)$ és

$$\frac{d\nu(e_1)\cdot d\nu(v)}{|d\nu(e_1)||d\nu(v)|} = \frac{k_1^2}{|k_1|\sqrt{k_1^2+k_2^2\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2(\frac{k_2}{k_1})^2}}.$$

Igualant els valors d'aquests cosinus obtenim

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = 1.$$

Si $k_1 = k_2$ estem en el cas d'una esfera i si $k_1 = -k_2$ en el cas d'una superfície minimal.