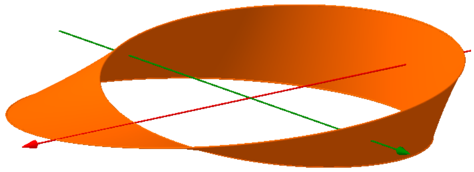
Geometria diferencial
Curs 2017–18

Superfícies: Curvatura. Línies de curvatura. . .

Exercici 1: (La banda de Möbius) La imatge següent



que s'obté considerant $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-1/4, 1/4)$ i definint la parametrització

$$\varphi(u, v) = \Big((1 + v\,\cos(u/2))\,\cos(u), (1 + v\,\cos(u/2))\,\sin(u), v\,\sin(u/2)\Big)$$

és el recorregut d'un segment de longitud 1/2 que es desplaça sobre la circumferència unitat al mateix temps que gira sobre si mateix, a una velocitat igual a la meitat de la velocitat que té sobre la circumferència, i determina una superfície homeomorfa a una banda de Möbius. (En particular, és una superfície reglada).

(a) Calculeu el vector normal a la superfície i comproveu que quan $u \to 0$ i quan $u \to 2\pi$ els vectors normals tendeixen a dos vectors diferents.

(b) Doneu una expressió en funció dels paràmetres (u, v) per a la curvatura de Gauss. Comproveu que no és 0 en cap punt (sempre és estrictament negativa).

(Podeu trobar instruccions per a construir bandes de Möbius amb curvatura nul·la a l'article de l'enllaç següent: `http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2013/v2013n07.pdf`. Aquestes superfícies seran les que millor s'adapten a la construcció d'una cinta de paper amb els extrems enganxats després de donar mitja volta a un dels dos).

Solució:

(a)

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,v\cos\left(u\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right) - \left(v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1\right)\sin\left(u\right) \\ -\frac{1}{2}\,v\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) + \left(v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1\right)\cos\left(u\right) \\ \frac{1}{2}\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\cos\left(u\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\,u\right) \end{pmatrix}$$

$$E = \left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1$$
$$F = 0$$
$$G = 1$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(2\,\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\cos\left(u\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right) - \sin\left(u\right)\right)v + \cos\left(u\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right) \\ \frac{1}{2}\left(2\,\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) + \cos\left(u\right)\right)v + \sin\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) \\ -v\cos^2\left(\frac{1}{2}\,u\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1}}\left(\varphi_u \wedge \varphi_v\right)$$

Ara queda clar que, quan $u \to 0$ i quan $u \to 2\,\pi$, la direcció de $\mathcal{N}$ tendirà en el primer cas a la direcció de $(0, v/2, -v-1)$ i en el segon cap a la del vector $(0, v/2, -v+1)$ (que si es mira sobre $v = 0$ són $(0,0,-1)$ i $(0,0,1)$).

(b) Tenint en compte que $F = 0$ i $G = 1$, el determinant de la primera forma fonamental coincideix amb el valor del coeficient E. Per un altre costat, és clar que $\varphi_{vv} = 0$ (això implica que $g = 0$) i, per tant, per a calcular la curvatura de la superfície ($K = (e\,g - f^2)/(E\,G - F^2)$) només es necessitarà calcular el valor del coeficient f de la segona forma fonamental.

Si es calcula la derivada segona corresponent

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\cos\left(u\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\,u\right)\cos\left(u\right) - \frac{1}{2}\,\sin\left(\frac{1}{2}\,u\right)\sin\left(u\right) \\ \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) \end{pmatrix}$$

de forma que

$$f = \langle \mathcal{N}, \varphi_{uv} \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1}}$$

i la curvatura serà

$$K = \frac{-f^2}{E} = \frac{-\frac{1}{4\left(\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1\right)}}{\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1} = \frac{-1}{4\,\left(\left(\frac{5}{4} - \sin^2\left(\frac{1}{2}\,u\right)\right)v^2 + 2\,v\cos\left(\frac{1}{2}\,u\right) + 1\right)^2}$$

Que resulta estrictament negativa en tots els punts del recorregut (i amb valor $-1/4$ sobre la corba $v = 0$).

Exercici 2: Recordeu que una línia de curvatura d'una superfície és una corba tal que el seu vector tangent és una direcció principal en cada punt.

(a) Demostreu que una corba $\alpha : I \to S$ és línia de curvatura de S si i només si $(\mathcal{N} \circ \alpha)'(t)$ és múltiple de $\alpha'(t)$ $\forall t \in I$, on $\mathcal{N}$ és el normal a S.

(b) Suposem que dues superfícies S_1 i S_2 es tallen en una corba C, que és línia de curvatura de S_1. Demostreu que C és línia de curvatura de S_2 si i només si l'angle entre S_1 i S_2 és constant al llarg de C.

Solució:

(a) Són línies de curvatura les corbes que tenen com a vector tangent un vector propi de $d\mathcal{N}$ en cada punt. La condició diu exactament això (Olinde).

(b) Sigui $\alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C i $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ els vectors normals a S_1 i S_2 respectivament. Si calculem la derivada del producte escalar dels normals al llarg de C (calculem el cosinus de l'angle entre les superfícies) es té

$$\frac{d}{ds}\langle \mathcal{N}_1(\alpha(s)), \mathcal{N}_2(\alpha(s)) \rangle = \langle d\mathcal{N}_1(\alpha'(s)), \mathcal{N}_2(\alpha(s)) \rangle + \langle \mathcal{N}_1(\alpha(s)), d\mathcal{N}_2(\alpha'(s)) \rangle = \langle \mathcal{N}_1(\alpha(s)), d\mathcal{N}_2(\alpha'(s)) \rangle$$

ja que el primer sumand és 0 donat que $\alpha'(s)$ és tangent a les dues superfícies i si C és línia de curvatura en S_1 es compleix

$$d\mathcal{N}_1(\alpha'(s)) = \lambda(s)\,\alpha'(s)\,.$$

Així també és clar que, quan C també és línia de curvatura en S_2, $\langle \mathcal{N}_1(\alpha(s)), d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))\rangle$ també és 0 (val la mateixa observació) i l'angle entre els vectors normals a les superfícies és constant.

Recíprocament, si l'angle entre les superfícies és constant i diferent de 0 (les superfícies tenen vectors normals diferents), l'expressió anterior dirà que $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ és perpendicular a $\mathcal{N}_1$. Però com que els vectors $\mathcal{N}_i$ són unitaris també es compleix

$$\langle d\mathcal{N}_2(\alpha'(s)), \mathcal{N}_2(\alpha(s))\rangle = 0$$

de forma que $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ i $\alpha'(s)$ són dos vectors perpendiculars a $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ al mateix temps. Com que la dimensió és 3, això només pot passar si $d\mathcal{N}_2(\alpha'(s))$ és un múltiple de $\alpha'(s)$ (que se suposa que és un vector no nul ja que parametritzem per l'arc) i, per tant, $\alpha(s)$ també és una línia de curvatura en S_2. És clar que si les superfícies son tangents al llarg de C (els vectors normals coincideixen sobre la corba) no s'ha de demostrar res.

Exercici 3: Considereu un helicoide parametritzat per

$$\varphi(u,v) = (v\,\cos(u), v\,\sin(u), c\,u)$$

(on c és una constant qualsevol). Determineu les seves línies de curvatura.

Solució:

Tenint en compte que, respecte aquesta parametrització, es té:

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (-v\,\sin(u), v\,\cos(u), c)\\
\varphi_v &= (\cos(u), \sin(u), 0)\\
I &= \begin{pmatrix} c^2+v^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
\mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}(-c\,\sin(u), c\,\cos(u), -v)\\
\varphi_{uu} &= (-v\,\cos(u), -v\,\sin(u), 0)\\
\varphi_{uv} &= (-\sin(u), \cos(u), 0)\\
\varphi_{vv} &= (0,0,0)\\
II &= \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
W &= \frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c^2+v^2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es pot plantejar l'equació que han de complir les línies de curvatura com

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+v^2}}\begin{vmatrix} {v'}^2 & -u'\,v' & {u'}^2\\ c^2+v^2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

que correspon a

$$-{v'}^2 + (c^2+v^2){u'}^2 = 0$$

i, aïllant, a

$$u' = \pm\frac{v'}{\sqrt{c^2+v^2}}$$

S'obté, doncs, que una corba de la forma $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ serà línia de curvatura si, i només si

$$v = c\,\sinh(\pm u + \text{ct.}) = \pm c\,\sinh(u + \text{ct.})$$

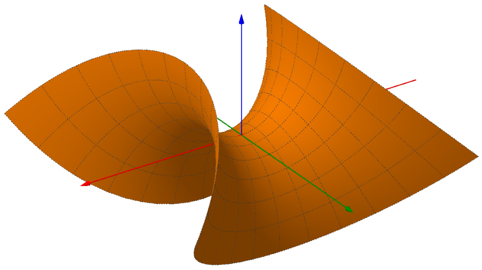
Es pot arribar al mateix resultat si es té en compte que, en cada punt de la superfície, els vectors propis de W són els mateixos que els de la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c^2+v^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Com que els valors propis de M són $\pm\frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}$, és clar que els vectors propis de la forma (u', v') d'aquesta matriu seran els que compleixin

$$u' \pm \frac{1}{\sqrt{c^2+v^2}}\, v' = 0$$

I aquesta és la mateixa equació que abans.

Exercici 4: (Superfície de Enneper) Sigui S la superfície parametritzada per

$$\varphi(u, v) = (u + u\, v^2 - u^3/3, v + u^2\, v - v^3/3, u^2 - v^2)\,.$$



(a) Calculeu els coeficients de la primera i la segona formes fonamentals.

(b) Comproveu que la curvatura mitjana és 0 (superfície minimal).

(c) Quines són les curvatures principals?

(d) Determineu les línies de curvatura.

Solució:

(a) Les derivades de primer i segon ordre de φ són:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1 - u^2 + v^2, 2\,u\,v, 2\,u) \\ \varphi_v &= (2\,u\,v, 1 + u^2 - v^2, -2\,v) \\ \varphi_{uu} &= (-2\,u, 2\,v, 2) \\ \varphi_{uv} &= (2\,v, 2\,u, 0) \\ \varphi_{vv} &= (2\,u, -2\,v, -2) \end{aligned}$$

Amb uns quants càlculs (fàcils) es veu que

$$I = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tampoc costa massa calcular

$$\mathcal{N} = \frac{1}{1+u^2+v^2}(-2\,u, 2\,v, 1 - u^2 - v^2)$$

i, aleshores,

$$II = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) A partir dels càlculs anteriors és immediat obtenir

$$W = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que té traça nul·la i, per tant, la curvatura mitjana de la superfície és 0.

(c)

(d) Les curvatures principals són $\pm 2/\left(1+u^2+v^2\right)^2$ i les línies de curvatura seran les línies coordenades ja que l'expressió de W ja és diagonal i, per tant, el seus vectors propis són φ_u i φ_v.

Exercici 5: Sigui S la superfície de revolució generada per la corba $\alpha(u) = (a(u), b(u))$ (parametritzada per l'arc i amb $a(u) > 0$) donada per

$$\varphi(u,v) = \big(a(u)\,\cos(v), a(u)\,\sin(v), b(u)\big)$$

Determineu les curvatures principals i les línies de curvatura.

Solució:

Per a una superfície de revolució amb aquesta parametrització els càlculs donen (tenint en compte que el paràmetre u és el paràmetre arc de la corba α)

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (a'(u)\,\cos(v), a'(u)\,\sin(v), b'(u))\\ \varphi_v &= (-a(u)\,\sin(v), a(u)\,\cos(v), 0)\\ \mathcal{N} &= (-b'(u)\,\cos(v), -b'(u)\,\sin(v), a'(u))\end{aligned}$$

De forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_u &= (-b''(u)\,\cos(v), -b''(u)\,\sin(v), a''(u))\\ \mathcal{N}_v &= (b'(u)\,\sin(v), -b'(u)\,\cos(v), 0)\end{aligned}$$

Sense haver de fer cap càlcul es veu de forma immediata que l'expressió de $\mathcal{N}_v$ també es pot escriure com

$$\mathcal{N}_v = -\frac{b'(u)}{a(u)}\,\varphi_v$$

mentre que, si tenim en compte que el vector normal (al pla) de la corba α és $(-b'(u), a'(u))$ i la curvatura es pot obtenir, doncs, de la igualtat $(a''(u), b''(u)) = k(u)\,(-b'(u), a'(u))$ de forma que $a''(u) = -k(u)\,b'(u)$, $b''(u) = k(u)\,a'(u)$, l'expressió de $\mathcal{N}_u$ serà equivalent a

$$\mathcal{N}_u = -k(u)\,\varphi_u = \frac{a''(u)}{b'(u)}\,\varphi_u = -\frac{b''(u)}{a'(u)}\,\varphi_u$$

Aquestes dues expressions mostren que φ_u i φ_v són els vectors propis de W i que els valors propis corresponents (curvatures principals) són k i $b'(u)/a(u)$. En resum, les línies de curvatura són les corbes coordenades i les línies de curvatura són les corresponents a $u = \text{ct.}$, $v = \text{ct.}$

Nota: Naturalment, calculant W com $I^{-1}\cdot II$ s'arriba al mateix resultat (o a alguna expressió equivalent). També queda demostrat, sense fer més càlculs ni simplificacions, que la curvatura de Gauss de la superfície serà $K = -\dfrac{a''(u)}{a(u)}$ (corresponent al producte de les dues curvatures principals).