Geometria Diferencial

Marcel Nicolau

Notes de curs 2019-20

Capítol 1

Corbes diferenciables

1.1 El producte escalar.

Recordem que donats dos vectors $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\vec{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es defineix el seu **producte escalar** com

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i. \tag{1.1}$$

La **norma** d'un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ és

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}, \tag{1.2}$$

i la **distància** entre $\vec{v}$ i $\vec{w}$, entesos com punts de $\mathbb{R}^n$, es defineixen com

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \| \vec{v} - \vec{w} \|. \tag{1.3}$$

D'aquestes definicions es desprèn immediatament

Proposició 1.1.1. i) *L'aplicació* $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *és* $\mathbb{R}$*-bilineal i simètrica.*

ii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ *amb igualtat si i només si* $\vec{v} = 0$.

iii) $\|\lambda \, \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \| \vec{v} \|$ *per a tot* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recordem també les següents propietats

Proposició 1.1.2. i) (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)

$$\big| \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \big| \leq \| \vec{v} \| \cdot \| \vec{w} \|. \tag{1.4}$$

ii) (Desigualtat triangular)

$$\| \vec{v} + \vec{w} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{w} \|. \tag{1.5}$$

iii) (Identitat de polarització)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} \big(\| \vec{v} + \vec{w} \|^2 - \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{w} \|^2 \big). \tag{1.6}$$

La desigualtat de Cauchy-Schwarz ens permet donar la següent definició

Definició 1.1.3. Es defineix l'**angle** entre dos vectors $v, w \in \mathbb{R}^n$ com l'únic nombre real $\theta \in [0, \pi]$ que compleix

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\| \vec{v} \| \cdot \| \vec{w} \|}. \tag{1.7}$$

1.2 Corbes parametritzades.

Recordem que una funció $f\colon U \to \mathbb{R}$, on U és un obert de $\mathbb{R}^n$, es diu de classe C^k si les derivades parcials

$$(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(y_1, \ldots, y_n) \qquad (y_1, \ldots, y_n) \in U$$

fins l'órdre k (i.e. $\forall \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$) existeixen i són contínues. La funció f es diu de classe C^∞ si és de classe C^k per a tot $k \in \mathbb{N}$. La funció f es diu analítica (o de classe C^ω) si és de classe C^∞ i, en cada punt del domini, el seu desenvolupament de Taylor convergeix a la funció en un entorn del punt.

Exemple 1.2.1. La següent funció és de classe C^∞ però no és analítica

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Una funció vectorial $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ es diu de classe C^k, C^∞ o C^ω si les seves components són de classe C^k, C^∞ o C^ω respectivament.

Comentari 1.2.2. Excepte menció explícita, totes les funcions considerades en aquestes notes seran diferenciables de classe C^∞.

Definició 1.2.3. Una aplicació diferenciable $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, on $U \subset \mathbb{R}^n$ és obert, es diu **difeomorfisme** (sobre la seva imatge) si es compleix

i) $f(U)$ és un obert de $\mathbb{R}^n$,

ii) $f\colon U \to f(U)$ és bijectiva,

iii) $f^{-1}\colon f(U) \to U$ és diferenciable.

Recordarem aquí també, per a la seva utilització posterior, el teorema de la funció inversa.

Teorema 1.2.4 (Teorema de la funció inversa)**.** *Sigui U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ i $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ una funció diferenciable. Suposem que la diferencial df_p de f en un punt $p \in U$ és un isomorfisme. Aleshores hi ha un entorn obert $U' \subset U$ de p tal que la restricció $f|_{U'}$ de f a U' és un difeomorfisme sobre la seva imatge.*

Comentari 1.2.5. Encara que la diferencial df_p sigui isomorfisme per a tot punt $p \in U$, l'aplicació f pot no ser globalment injectiva i per tant f no ha de ser, necessàriament, un difeomorfisme global. Un exemple d'això està donat per l'aplicació exponencial complexa que, en coordenades reals, s'escriu

$$f(x, y) = (e^x \cos y \,,\, e^x \sin y).$$

Aquest exemple ens porta a introduir la següent definició que serà útil més endavant.

Definició 1.2.6. Sigui U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$. Es diu que una funció diferenciable $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ és un **difeomorfisme local** si $\forall p \in U$ i ha un entorn obert $V_p \subset U$ de p tal que $f|_{V_p}$ és un difeomorfisme sobre la seva imatge.

El cas $n = 1$ és especial tal i com posa de manifest el següent resultat.

Proposició 1.2.7. *Sigui I un interval obert de $\mathbb{R}$ i sigui $f\colon I \to \mathbb{R}$ una aplicació diferenciable. Si $f'(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$ llavors $J := f(I)$ és un interval obert i f és un difeomorfisme de I sobre J.*

Demostració. El teorem de Rolle implica que f és necessàriament injectiva. L'enunciat és llavors corol·lari del teorema de la funció inversa. □

Sigui I un interval obert de $\mathbb{R}$ i $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una funció diferenciable. Escriurem $\alpha(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$ i denotarem per α' i α'' les funcions vectorials

$$\alpha'(t) = (a_1'(t), \ldots, a_n'(t)) \qquad \text{i} \qquad \alpha''(t) = (a_1''(t), \ldots, a_n''(t)).$$

Proposició 1.2.8. *Siguin $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}^n$ funcions diferenciables. Aleshores es compleix*

a) $\dfrac{d}{dt}\big\langle \alpha(t), \beta(t) \big\rangle = \big\langle \alpha'(t), \beta(t) \big\rangle + \big\langle \alpha(t), \beta'(t) \big\rangle$

b) *Si $t \mapsto \|\alpha(t)\|$ és constant, llavors $\alpha \perp \alpha'$ (i.e. $\langle \alpha, \alpha' \rangle \equiv 0$).*

Definició 1.2.9. Diem **corba parametritzada** de $\mathbb{R}^n$ a tota aplicació diferenciable $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, on I és un interval obert de $\mathbb{R}$. La imatge $\alpha(I)$ s'anomena **traça** de α.

Diem **vector tangent** (o vector velocitat) de α en $t_0 \in \mathbb{R}$ al vector $\alpha'(t_0)$. Es diu que la corba és **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot $t_0 \in I$. En aquest cas es defineix la **recta tangent** de α en $\alpha(t_0)$ com la recta de $\mathbb{R}^n$ parametritzada per

$$s \longmapsto \alpha(t_0) + s\,\alpha'(t_0).$$

Exemples 1.2.10. 1. La recta de $\mathbb{R}^n$ que passa per dos punts $\vec{p}$ i $\vec{q}$ es pot parametritzar per

$$t \longmapsto \vec{p} + t\,(\vec{q} - \vec{p}).$$

2. La circumferència de $\mathbb{R}^2$ de centre (x_0, y_0) i radi R es pot parametritzar per

$$t \longmapsto (x_0 + R\,\cos t\,,\ y_0 + R\,\sin t).$$

3. La corba $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ de $\mathbb{R}^3$ és una **hèlix** de pas $2\pi b$ que està enrotllada sobre el cilindre d'equació $x^2 + y^2 = a^2$.

4. La corba $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ de $\mathbb{R}^2$ és diferenciable però no és regular.

5. Les corbes parametritzades de $\mathbb{R}^3$ següents són diferents però tenen la mateixa traça

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t) && t \in \mathbb{R} \\ \beta(t) &= (\cos t, \sin t) && t \in (-1, 2\pi) \\ \gamma(t) &= (\cos 2t, \sin 2t) && t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6. La corba $\alpha(t) = \big(ae^{-bt}\cos t\,,\ ae^{-bt}\sin t\big)$ s'anomena **espiral logarítmica**.

7. La corba $\alpha(t) = (t, |t|)$ de $\mathbb{R}^2$ és contínua però no és diferenciable.

Exercici 1.2.11. Construïu una corba parametritzada diferenciable (encara que no regular) que tingui la mateixa traça que la corba 7 de la llista anterior.

Comentari 1.2.12. En aquests capítol estudiarem la geometria de les corbes parametritzades que són regulars. Sovint ometrem els adjectius parametritzada i regular i parlarem simplement de corbes o de corbes parametritzades, quedant aquells qualificatius sobreentesos.

Definició 1.2.13. Siguin $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ corba regular, J un altre interval i $h\colon J \to I$ funció diferenciable amb $h(J) = I$ i tal que $h'(s) \neq 0, \forall s \in J$. Aleshores h és un difeomorfisme de J en I i la corba $\beta\colon J \to \mathbb{R}^n$, definida per $\beta = \alpha \circ h$, compleix

$$\beta'(s) = h'(s) \cdot \alpha'(h(s)) \qquad \forall s \in J$$

i per tant és regular. Diem que β és una **reparametrització** de α i que h és el canvi de paràmetre. La reparametrització es diu positiva si $h' > 0$ i negativa si $h' < 0$.

Exercici 1.2.14. Decidiu si les corbes α, β, γ de l'exemple 5 anterior són reparametritzacions les unes de les altres.

Comentari 1.2.15. Observem que la relació entre corbes regulars "β és reparametrització de α" és una relació d'equivalència. El principal objectiu d'aquest capítol és classificar les corbes regulars de $\mathbb{R}^3$, mòdul reparametritzacions.

1.3 Longitud de corbes. El paràmetre arc.

Definició 1.3.1. Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ corba diferenciable i sigui $[a, b] \subset I$. Anomenem **longitud de α entre a i b** al nombre

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt. \tag{1.8}$$

Proposició 1.3.2. *Sigui $\beta = \alpha \circ h$ preparametrització de α i sigui $[c, d] = h^{-1}([a, b])$. Llavors*

$$\int_c^d \|\beta'(u)\|\, du = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

És a dir que la longitud d'una corba no depèn de la parametrització.

Demostració. Suposem per exemple que h és una reparametrització negativa. Llavors $h(d) = a$ i $h(c) = b$ i es compleix

$$\begin{aligned}
\int_c^d \|\beta'(u)\|\, du &= \int_c^d \|\alpha'(h(u))\| \cdot |h'(u)|\, du = -\int_c^d \|\alpha'(h(u))\| \cdot h'(u)\, du \\
&= \int_d^c \|\alpha'(h(u))\| \cdot h'(u)\, du = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.
\end{aligned}$$

□

Comentari 1.3.3 (**Corbes rectificables**). Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba cotínua i sigui $[a, b] \subset I$. Donada una partició $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ de $[a, b]$ (i.e. $a = t_0, < t_1 < \cdots < t_k = b$) es defineix la **variació de α relativa a π** com

$$V_\pi(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

i la **norma de** π com $\|\pi\| = \max\{t_1 - t_0, \ldots, t_k - t_{k-1}\}$. S'anomena **variació de** α (en $[a,b]$) a la quantitat

$$V(\alpha) = \sup_{\pi} V_\pi(\alpha) \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Si $V(\alpha)$ és finit es diu que α **és rectificable** i que $V(\alpha)$ és la seva longitud (en $[a,b]$).

Proposició 1.3.4. *Si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ és de classe C^1 i $[a,b] \subset I$ llavors α és rectificable i $V(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$.*

Demostració. La funció $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida per $f(t) = \|\alpha'(t)\|$ és contínua i per tant integrable en $[a,b]$. Llavors la integral $\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$ es pot aproximar per sumes de Riemann:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ de forma que $\forall \pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ partició de $[a,b]$ amb $\|\pi\| < \delta_1$ i $\forall \xi$ **elecció de** π (i.e. $\xi = (t'_1, \ldots, t'_k)$ amb $t'_i \in [t_{i-1}, t_i]$) es compleix

$$\left| S(f,\pi,\xi) - \int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{on} \qquad S(f,\pi,\xi) = \sum_{i=1}^k f(t'_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Posem $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. La funció $F\colon [a,b]^n \to \mathbb{R}$ definida per

$$F(s_1, \ldots, s_n) = \sqrt{x'_1(s_1)^2 + \cdots + x'_n(s_n)^2}$$

és contínua i per tant uniformement contínua en el seu domini $[a,b]^n$. Aleshores $\exists \delta_2 > 0$ tal que la condicó $|s'_i - s_i| < \delta_2$ per $i = 1, \ldots, n$ implica

$$\left| F(s_1, \ldots, s_n) - F(s'_1, \ldots, s'_n) \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Posem $\eta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $\|\pi\| < \eta$, el teorema del valor mitjà implica

$$\begin{aligned}
V_\pi(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2} \\
&= \sum_{i=1}^k \sqrt{x'_1(\tau_i^1)^2 (t_i - t_{i-1})^2 + \cdots + x'_n(\tau_i^n)^2 (t_i - t_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^k F(\tau_i^1, \ldots, \tau_i^n)\,(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

per a nombres $\tau_i^j \in (t_{i-1}, t_i)$ convenients. Escollint ara $\xi = (t_1, \ldots, t_k)$ com elecció de π tindrem

$$S(f,\pi,\xi) = \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_i)\|\,(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^k F(t_i, \ldots, t_i)(t_i - t_{i-1})$$

i com que $|\tau_i^j - t_i| < \eta$, $\forall i = 1, \ldots, k$, $\forall j = 1, \ldots, n$, resulta

$$\begin{aligned}
\left| S(f,\pi,\xi) - V_\pi(\alpha) \right| &= \left| \sum_{i=1}^k \left(F(t_i, \ldots, t_i) - F(\tau_i^1, \ldots, \tau_i^n) \right) \right| \\
&\le \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{2(b-a)}\,(t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Per tant $\left| V_\pi(\alpha) - \int_a^b \|\alpha'\| \right| \le \epsilon$ i com que això és cert $\forall \pi$ amb $\|\pi\| < \eta$ tenim $V_\pi(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'\|$. □

Exemple 1.3.5. La corba $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} \big(t, t\sin(\frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{2})\big) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

és contínua però no rectificable.

Exemples 1.3.6. 1. $\alpha(t) = (R\cos t\,,\, R\sin t)$ és una parametrització de la circumferència de $\mathbb{R}^2$ de centre l'órigen i radi R. La seva longitud és

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

2. Considerem l'espiral logarítmica $\alpha(t) = \big(ae^{-bt}\cos t\,,\, ae^{-bt}\sin t\big)$ amb $a, b > 0$. La seva longitud en $[0,\infty)$ és

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\infty} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{\infty} ae^{-bt}\sqrt{b^2+1}\, dt \\ &= a\sqrt{b^2+1}\left[-\frac{1}{b}e^{-bt}\right]_0^{\infty} = a\sqrt{1+\frac{1}{b^2}} < \infty \end{aligned}$$

Definició 1.3.7. Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ corba diferenciable i sigui $a \in I$. Anomenem funció **longitud d'arc** de α, amb origen a, a la funció $s_a\colon I \to \mathbb{R}$ definida per

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du. \tag{1.9}$$

Proposició 1.3.8. *Siguin $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ corba diferenciable i $a \in I$. Aleshores*

a) *La funció s_a és diferenciable i es compleix $\dfrac{ds_a}{dt}(t_0) = \|\alpha'(t_0)\| \geq 0$.*

b) *Si α és regular llavors $J = s_a(I)$ és un interval obert de $\mathbb{R}$ i $s_a\colon I \to J$ és un difeomorfisme.*

c) *Si α és regular hi ha una reparametrització $\beta = \alpha \circ h$ de α amb velocitat unitària (i.e. $\|\beta\| \equiv 1$).*

Demostració. Demostrem la part c). Sigui $t = t(s)$ la funció inversa de s_a. Llavors, si definim $\beta(s) = \alpha(t(s))$, tindrem

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

i com que es compleix $\dfrac{dt}{ds}(s) = \dfrac{1}{\frac{ds_a}{dt}(t(s))}$ resulta

$$\|\beta'(s)\| = \frac{dt}{ds}(s) \cdot \|\alpha'(t(s))\| = \frac{dt}{ds}(s) \cdot \frac{ds_a}{dt}(t(s)) \equiv 1.$$

□

Definició 1.3.9. Si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ és una corba de velocitat unitària (i.e. $\|\alpha\| \equiv 1$) direm que α està **parametritzada per l'arc** (o per la longitud d'arc).

Aquesta notació està justificada per la següent observació. Si α té velocitat unitària llavors

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du = \int_a^t du \;=\; t - a. \tag{1.10}$$

El següent resultat mostra que el paràmetre arc d'una corba regular està unívocament determinat llevat de reparametritzacions afins.

Proposició 1.3.10. *Sigui $\beta = \alpha \circ h$ una reparametrització d'una corba regular α. Si α i β tenen velocitat unitària llavors*

$$\beta(u) = \alpha(\pm u + u_0)$$

per a un cert $u_0 \in \mathbb{R}$.

Demostració. Tenim $1 \equiv \|\beta'(u)\| = \|h'(u) \cdot \alpha'(h(u))\| = |h'(u)|$. Aleshores, o bé $h' \equiv 1$ i per tant $h(u) = u + u_0$, o bé $h' \equiv -1$ i llavors $h(u) = -u + u_0$. □

Exercicis 1.3.11. 1. Parametritzeu per l'arc una circumferència de radi R.

2. Parametritzeu per l'arc una espiral logarítmica $\alpha(t) = \big(ae^{-bt}\cos t\,,\, ae^{-bt}\sin t\big)$ on $a, b > 0$.

Finalitzem aquest apartat introduint la noció d'ordre de contacte entre corbes.

Definició 1.3.12. Siguin α i β corbes *parametritzades per l'arc* i definides en un entorn I de $t_0 \in \mathbb{R}$. Diem que α i β tenen un **ordre contacte** $\geq r$ en el punt t_0 si es compleix

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{(t - t_0)^r} = 0$$

o, equivalentment, si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ i les r primeres derivades de α i β coincideixen en t_0. Diem que tenen **ordre de contacte** $= r$ si tenen ordre de contacte $\geq r$ però no $\geq r + 1$.

Comentari 1.3.13. A l'anterior definició és essencial demanar que les corbes estigui parametritzades per l'arc. En cas contrari l'ordre de contacte dependria de la paramentrització. Per exemple les corbes

$$\alpha(t) = (1 + t\,,\, 1 + t + t^{10}) \qquad \text{i} \qquad \gamma(t) = (e^t\,,\, e^t)$$

tenen ordre de contacte $r = 1$ en $t = 0$. En canvi la corba γ i la corba

$$\beta(t) = \big(1 + (t + t^2/2)\,,\, 1 + (t + t^2/2) + (t + t^2/2)^{10}\big),$$

que és una reparametrització de α, tenen ordre de contacte $r = 2$.

1.4 Orientació. Producte vectorial a $\mathbb{R}^3$.

Sigui E un espai vectorial de dimensió n. Diem que dues **bases ordenades** $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ i $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ de E estan relacionades si es compleix $\det(a_i^j) > 0$, on (a_i^j) és la matriu del canvi de base (i.e. $\vec{u}_i = \sum a_i^j\, \vec{v}_j$). Aquesta relació, dins del conjunt de les bases ordenades de E, és una relació d'equivalència amb exactament dues classes. L'elecció d'una d'aquestes classes s'anomena **orientació** de E. Una base ordenada de E que pertany a l'orientació triada s'anomena **base positiva**.

Sigui $f\colon E \to E$ una aplicació lineal. Fixada una base $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, l'aplicació lineal f està determinada per la matriu (a_i^j) on $f(\vec{u}_i) = \sum a_i^j\, \vec{u}_j$. El determinant d'aquesta matriu no depèn de l'elecció de la base i per tant podem definir el determinant de f per

$$\det f = \det(a_i^j).$$

Si f és un isomorfisme tindrem $\det f \neq 0$. Direm que f **conserva orientacions** si $\det f > 0$ i que f **inverteix orientacions** si $\det f < 0$. Observem que aquesta noció no depèn de la particular orientació de E que haguem triat.

Exemples 1.4.1.

1. Sigui $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^n$ pensada com a base orientada. Aquesta base determina una orientació de $\mathbb{R}^n$ que anomenarem **orientació canònica** de $\mathbb{R}^n$. Respecte d'aquest conveni la base ordenada $(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^3$ és positiva mentre que la base $(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ és negativa.
2. Considerem les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^2$ següents, determinades per les seves expressions matricials en la base canònica $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Les aplicacions f_1 i g_1 conserven orientacions mentre que f_2 i g_2 les inverteixen.

Considerem ara l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. Suposem fixada la base canònica $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ així com l'orientació canònica determinada per aquesta base. Donats n vectors ordenats de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}_i = \sum u_i^j \vec{e}_j$, es defineix el seu **determinant** com

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

Llavors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ és una base positiva de $\mathbb{R}^n$ si i només si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) > 0$.

Des d'un punt de vista geomètric, el determinant és un volum amb signe tal i com posa de manifest la següent proposició.

Proposició 1.4.2. *Siguin $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ vectors de $\mathbb{R}^n$ i denotem per P el paral·lelepípede que determinen. Es compleix*

$$Vol(P) = \big|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)\big| \tag{1.12}$$

Demostració. Provem-ho primer pel cas $n = 2$. Si $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment dependents els dos termes de (1.12) són zero. Suposem doncs que són linealment independents. Podem posar

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_2^* + \lambda \vec{u}_1$$

amb $\vec{u}_2^*$ ortogonal a $\vec{u}_1$ i aleshores es compleix

$$Vol(P) = \big|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2^*)\big| = \big|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\big|.$$

El cas general es demostra de manera similar, raonant per inducció sobre n i aplicant el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt. □

Per finalitzar aquest repàs de la noció de determinant, recordem la següent propietat

Proposició 1.4.3. *Sigui $A \in M_{n\times n}$. Llavors es compleix*

$$\det(A\,\vec{u}_1, \dots, A\,\vec{u}_n) = \det A \cdot \det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n). \tag{1.13}$$

L'objectiu principal d'aquest capítol és l'estudi de les corbes parametritzades a l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$. Per aquest motiu a partir d'ara ens situarem en aquest espai vectorial. Recordem la noció de producte vectorial a $\mathbb{R}^3$, que és específica d'aquesta dimensió.

Definició 1.4.4. Donats dos vectors ordenats $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ es defineix el seu **producte vectorial** com el vector, denotat per $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (o bé $\vec{u} \times \vec{v}$), unívocament determinat per la condició

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \tag{1.14}$$

Exercici 1.4.5. Comproveu que aquesta definició coincideix amb la definició tradicional, és a dir que si $\vec{u} = \sum u^j \vec{e}_j$ i $\vec{v} = \sum v^j \vec{e}_j$ llavors es compleix la següent identitat formal:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}.$$

Proposició 1.4.6. *Siguin $\vec{u}, \vec{v}$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Aleshores es compleix*

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ *si i només si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents.*

c) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *és ortogonal a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.*

d) *Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents llavors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ és una base positiva de $\mathbb{R}^3$.*

e) *Si $\vec{x}, \vec{y}$ són vectors de $\mathbb{R}^3$ llavors*

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}\,,\, \vec{x} \wedge \vec{y} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{u}\,,\, \vec{x} \rangle & \langle \vec{v}\,,\, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{u}\,,\, \vec{y} \rangle & \langle \vec{v}\,,\, \vec{y} \rangle \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

f) *Sigui $\theta \in [0, \pi]$ l'angle format per $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Aleshores*

$$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \sin \theta. \tag{1.16}$$

Demostració. Les tres primeres afirmacions es dedueixen immediatament de la definició (1.14). Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents llavors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$ i es compleix

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle > 0,$$

la qual cosa prova d). Per a demostrar e), observem primer que cada un dels dos termes de la igualtat (1.15) és 4-lineal, i.e. lineal en cada un dels arguments $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$. Per tant és suficient comprovar que es compleix (1.15) pels vectors de la base canònica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i això és una comprovació rutinària. Finalment f) es dedueix de e). En efecte

$$\begin{aligned} \| \vec{u} \wedge \vec{v} \|^2 &= \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = \| \vec{u} \|^2 \, \| \vec{v} \|^2 - \langle \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle^2 \\ &= \| \vec{u} \|^2 \, \| \vec{v} \|^2 \left(1 - \cos^2 \theta\right) = \| \vec{u} \|^2 \, \| \vec{v} \|^2 \, \sin^2 \theta \end{aligned}$$

i la identitat (1.16) resulta llavors de que $\sin \theta \geq 0$. □

Exercicis 1.4.7. 1. Demostreu que donats tres vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ es compleix

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u}.$$

2. Deduïu de l'anterior igualtat que es compleix la **identitat de Jacobi**:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}\,) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}\,) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}\,) \wedge \vec{v} = 0. \tag{1.17}$$

   Es diu que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ és una **àlgebra de Lie**, és a dir que el producte vectorial $\wedge$ té les propietats següents: és bilineal, és antisimètric i compleix la identitat de Jacobi (1.17).

3. (V.I. Arnold) Deduïu de la identitat de Jacobi que les altures d'un triangle es tallen en un punt.

Proposició 1.4.8. *Siguin $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ funcions vectorials diferenciables. Aleshores es compleix*

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha(t) \wedge \beta(t)\big) \;=\; \frac{d\alpha}{dt}(t) \wedge \beta(t) \;+\; \alpha(t) \wedge \frac{d\beta}{dt}(t).$$

1.5 Fórmules de Frenet I.

A partir d'aquest punt considerarem només corbes a l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$. En aquest apartat suposarem que les corbes considerades estan parametritzades per l'arc. Introduirem, per a les corbes d'aquesta classe, les nocions fonamentals d'aquest capítol: el triedre de Frenet, la curvatura i la torsió; així mateix demostrarem les fórmules de Frenet que les relacionen.

Per tal de motivar la definició de curvatura d'una corba, considerem el cas d'una circumferència plana de radi R i parametritzada per l'arc, per exemple

$$\beta(s) = \Big(R\,\cos\frac{t}{R}\,,\, R\,\sin\frac{t}{R}\Big).$$

Sembla raonable definir la curvatura k de β (en un punt $\beta(s)$) com el nombre $k = \frac{1}{R}$. Observem que es compleix

$$k = \frac{1}{R} = \|\beta''(s)\|.$$

Si adoptem un punt de vista cinemàtic, aquesta relació suggereix definir la curvatura d'una corba parametritzada per l'arc com la norma del seu vector acceleració. Però podríem optar per definir-la com la curvatura de la circumferència que millor aproxima la corba en el punt considerat. Veurem que els dos punts de vista coincideixen.

Definició 1.5.1. Sigui $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ una corba de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per l'arc. Denotem per $T = \alpha'$ el **vector tangent** a α. Llavors $\|T\| \equiv 1$ i $\alpha'' = T'$ és ortogonal a T. Donat $s_0 \in I$, definim la **curvatura** de la corba α en el punt $\alpha(s_0)$ com el nombre

$$k(s_0) := \|\alpha''(s_0)\| = \|T'(s_0)\|. \tag{1.18}$$

Notem que $k(s_0) \geq 0$. Si $k(s_0) \neq 0$, el vector

$$N(s_0) := \frac{T'(s_0)}{k(s_0)} = \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|} \tag{1.19}$$

està ben definit, i és unitari i perpendicular a $T(s_0)$. Diem que N és el **vector normal** de α. Es compleix

$$T' = k\,N. \tag{1.20}$$

Exercicis 1.5.2. Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc.

1. Comproveu que es compleix $k \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha'' \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha$ és una recta.
2. Sigui $s_0 \in I$ tal que $\alpha''(s_0) \neq 0$. Demostreu que la recta tangent a α en $\alpha(t_0)$ està determinada unívocament per tenir ordre de contacte 1 amb α.

Proposició 1.5.3. *Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una corba parametritzada per l'arc i suposem que $k(s_0) \neq 0$. Hi ha una única circumferència β de $\mathbb{R}^3$ que té amb α un contacte d'ordre ≥ 2 en $\alpha(s_0)$. El seu radi és $R = \frac{1}{k(s_0)}$.*

Demostració. Suposem, per simplicitat de notació, que $s_0 = 0$. Una circumferència β, parametritzada per l'arc que tingui contacte d'ordre ≥ 2 amb α ha de complir $\beta(0) = \alpha(0)$, $\beta'(0) = \alpha'(0)$ i $\beta''(0) = \alpha''(0)$, és a dir que α i β compartiran el vector tangent T i el vector normal N en $s = 0$. La circumferència β tindrà el seu centre en la recta $\alpha(0) + \lambda N(0)$ i tindrà una expressió

$$\beta(u) = Q + R\Big(\cos\frac{u}{R}\,\vec{v}_1 + \sin\frac{u}{R}\,\vec{v}_2\Big) \tag{1.21}$$

on Q és el cente del cercle i $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ és una base ortonormal del pla que la conté. Derivant (1.21) s'obté

$$\begin{aligned} \beta(0) &= Q + R\,\vec{v}_1 \\ \beta'(0) &= \vec{v}_2 = T(0) \\ \beta''(0) &= -\tfrac{1}{R}\,\vec{v}_1 = \alpha''(0) = k(0)\,N(0). \end{aligned}$$

Per tant ha de ser $\vec{v}_1 = -N(0)$ i $R = \dfrac{1}{k(0)}$. Ara és clar que la circumferència definida per

$$\beta(s) = \alpha(0) + \frac{1}{k(0)}\,N(0) + \frac{1}{k(0)}\big(-\cos(k(0)u)\,N(0) + \sin(k(0)u)\,T(0)\big) \tag{1.22}$$

compleix les condicions requerides. □

Definició 1.5.4. La circumferència donada per la proposició anterior s'anomena **circumferència osculadora** de la corba α al punt $\alpha(s_0)$. El seu radi es denota

$$\rho(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} \tag{1.23}$$

i s'anomena **radi de curvatura** de α al punt $\alpha(s_0)$. Amb aquesta notació la circumferència osculadora té centre $Q = \alpha(s_0) + \rho(s_0)\,N(s_0)$ i la seva parametrització per l'arc és

$$u \longmapsto \alpha(s_0) + \rho(s_0)\,N(s_0) + \rho(s_0)\Big(-\cos\big(\frac{u}{\rho(s_0)}\big)\,N(s_0) + \sin\big(\frac{u}{\rho(s_0)}\big)\,T(s_0)\Big) \tag{1.24}$$

Nota 1.5.5. A partir d'aquí suposarem que les corbes $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ considerades estan parametritzades per l'arc, són regulars i, a més, compleixen $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Notem que llavors el vector normal $N(s)$ està definit per a tot $s \in I$.

Definició 1.5.6. Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba regular, parametritzada per l'arc i tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Hi ha un únic vector $B(s)$ tal que $\big(T(s), N(s), B(s)\big)$ és una base ortonormal positiva que s'anomena el **triedre de Frenet** de la corba. El vector $B(t)$ està donat per

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \tag{1.25}$$

i s'anomena el **vector binormal** de la corba en $\alpha(s)$.

Proposició 1.5.7. *B' és un múltiple de N. Denotem*

$$B' = \tau N. \tag{1.26}$$

Direm que la funció coeficient τ és la **torsió** *de la corba α.*

Demostració. Es compleix $B' = \langle B', T\rangle T + \langle B', N\rangle N + \langle B', B\rangle B$. Com que $\|B\| \equiv 1$ tenim $\langle B', B\rangle = 0$ i com que $\langle B, T\rangle = 0$ tenim

$$0 = \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle = \langle B', T\rangle + k\langle B, N\rangle = \langle B', T\rangle$$

i això conclou la demostració. □

Comentari 1.5.8. Remarquem que, a diferència de la curvatura, la torsió τ no és necessàriament positiva. Veurem més endavant que el signe de τ està determinat pel caràcter dextrogir o levogir de la corba.

Exercicis 1.5.9. a) Parametritzeu per l'arc l'hèlix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ i determineu el seu triedre de Frenet així com la seva curvatura i la seva torsió.

b) Demostreu que les condicions següents són equivalents.

  i) La corba α és plana.

  ii) B és constant.

  iii) $\tau \equiv 0$.

  (*Indicació*: Comproveu que $\tau \equiv 0 \Rightarrow \big\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), B(s)\big\rangle \equiv 0$.)

Proposició 1.5.10 (Fórmules de Frenet)**.** *Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba regular, parametritzada per l'arc i tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Llavors*

$$\left\{\begin{array}{lclcc} T' & = & & kN & \\ N' & = & -kT & & -\tau B \\ B' & = & & \tau N & \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Demostració. De la relació $N = B \wedge T$ deduïm

$$N' = B' \wedge T + B \wedge T' = \tau N \wedge T + k B \wedge N = -kT - \tau B.$$

La primera equació es compleix per definició i la tercera ja ha estat provada. □

Comentari 1.5.11. Si canviem l'orientació de α llavors T i B canvien de signe mentre que N, k i τ són invariants per canvis d'orientació.

Definició 1.5.12. Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba regular, parametritzada per l'arc i tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Donat $s_0 \in I$ es denota

- **Pla oculador :** pla que passa per $\alpha(s_0)$ i està generat per $T(s_0)$ i $N(s_0)$.
- **Pla normal :** pla que passa per $\alpha(s_0)$ i està generat per $N(s_0)$ i $B(s_0)$.
- **Pla rectificant :** pla que passa per $\alpha(s_0)$ i està generat per $T(s_0)$ i $B(s_0)$.

1.6 Curvatura de corbes planes.

En aquest apartat considerem corbes planes $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ parametritzades per l'arc. En aquest context és possible associar un "diedre de Frenet"a la corba α encara que la seva derivada segona α'' es pugui anul·lar. Com a conseqüència és possible definir una curvatura amb signe que s'interpreta com la variació de l'angle de la recta tangent amb una direcció fixada.

Provem primer el següent resultat, que també serà útil més endavant, i que mostra la possibilitat de triar una determinació diferenciable de l'angle entre dos vectors del pla que depenen diferenciablement d'un paràmetre.

Lema 1.6.1. *Siguin $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ funcions diferenciables tals que $a^2+b^2 \equiv 1$. Donat $t_0 \in I$ sigui $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a(t_0) = \cos\theta_0$ i $b(t_0) = \sin\theta_0$. Aleshores la funció diferenciable*

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u)\, b'(u) - b(u)\, a'(u)\big)\, du \tag{1.28}$$

compleix $a(t) = \cos\theta(t)$, $b(t) = \sin\theta(t)$ i $\theta(t_0) = \theta_0$.

Demostració. És suficient provar que $(a-\cos\theta)^2 + (b-\sin\theta)^2 = 2 - 2(a\cos\theta + b\sin\theta)$ és idènticament zero o, el que és equivalent, que es compleix

$$A := a\cos\theta + b\sin\theta \equiv 1$$

Com que $a\, a' = -b\, b'$, de la definició de $\theta = \theta(t)$ resulta

$$\begin{aligned} A' &= -a\,\sin\theta\cdot\theta' + b\,\cos\theta\cdot\theta' + a'\,\cos\theta + b'\,\sin\theta \\ &= (-a\,\sin\theta + b\,\cos\theta)\,(a\,b' - b\,a') + a'\,\cos\theta + b'\,\sin\theta \\ &= (-a^2\,b' + a\,b\,a' + b')\sin\theta + (b\,a\,b' - b^2\,a' + a')\cos\theta \\ &= b'\,(1 - a^2 - b^2)\sin\theta + a'\,(-a^2 - b^2 + 1)\cos\theta \equiv 0 \end{aligned}$$

i com que $A(t_0) = 1$, el lema queda provat. □

Comentari 1.6.2. La definició de θ que es dona a (1.28) està motivada pel fet següent

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad\Longrightarrow\quad \theta = \arctan\frac{b}{a} \quad\text{i}\quad \frac{d\theta}{dt} = a\,b' - a'\,b.$$

Notem també que dues determinacions diferenciables diferents de l'angle difereixen en una constant.

Considerem una corba plana $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ parametritzada per l'arc. Hi ha un únic vector $\hat{N}$ tal que $(T, \hat{N})$ és una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$. Aleshores T' és un múltiple de $\hat{N}$ i aquest múltiple, que denotarem per κ, s'anomena la **curvatura amb signe** de la corba. Notem que $\hat{N} = \pm N$ i $\kappa = \pm k$. Observem també que es compleix

$$\kappa(s) = \det\big(T(s), T'(s)\big), \tag{1.29}$$

Posem $\vec{e}_1 = (1, 0)$ i sigui $\theta(s)$ una determinació diferenciable de l'angle que formen $\vec{e}_1$ i $T(s) = \alpha'(s)$, donada pel Lema 1.6.1. Aleshores es complirà

$$\begin{aligned} T(s) &= \cos\theta(s)\,\vec{e}_1 + \sin\theta(s)\,\vec{e}_2, \\ \hat{N}(s) &= \cos\Big(\theta(s) + \frac{\pi}{2}\Big)\,\vec{e}_1 + \sin\Big(\theta(s) + \frac{\pi}{2}\Big)\,\vec{e}_2 \\ &= -\sin\theta(s)\,\vec{e}_1 + \cos\theta(s)\,\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Derivant $T = T(s)$ veiem que $T'(s) = \theta(s)\hat{N}(s)$, d'on resulta

$$\kappa(s) = \theta'(s). \tag{1.30}$$

1.7 Fórmules de Frenet II (cas general).

Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular no necessàriament parametritzada per l'arc i posem $\alpha = \alpha(t)$. Podem definir el seu triedre de Frenet (T, N, B) i les seves funcions curvatura i torsió, k i τ, de la següent manera. Sigui $s\colon I \to J$ el paràmetre arc de α (a partir d'un punt $t_0 \in I$) i posem $h(t) = s(t)$. Observem que $h' > 0$. Definim

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha \circ h^{-1}(s).$$

Aleshores $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ és una reparametrització **positiva** de α parametritzada per l'arc i podem definir

$$T = \bar{T} \circ h, \quad N = \bar{N} \circ h, \quad B = \bar{B} \circ h, \quad k = \bar{k} \circ h, \quad \tau = \bar{\tau} \circ h, \tag{1.31}$$

on $(\bar{T}, \bar{N}, \bar{B})$ és el triedre de Frenet de $\bar{\alpha}$ i $\bar{k}, \bar{\tau}$ denoten respectivament la curvatura i la torsió de $\bar{\alpha}$. Recordem que cal suposar que $\bar{\alpha}''$ no s'anul·la.

Lema 1.7.1. $\bar{\alpha}'' \neq 0 \iff \alpha' \wedge \alpha'' \neq 0.$

Demostració. Derivant la relació $\alpha = \bar{\alpha} \circ h$ resulta

$$\begin{aligned} \alpha' &= h'\,(\bar{\alpha}' \circ h) \\ \alpha'' &= (h')^2\,(\bar{\alpha}'' \circ h) + h''\,(\bar{\alpha}' \circ h). \end{aligned}$$

Per tant $\alpha' \wedge \alpha'' = (h')^3\,(\bar{\alpha}' \circ h) \wedge (\bar{\alpha}'' \circ h)$. Ara l'enunciat resulta d'observar que h', α' i α'' no s'anul·len i que $\bar{\alpha}'$ i $\bar{\alpha}''$ són ortogonals. □

Nota 1.7.2. D'ara endavant suposarem que $\alpha' \wedge \alpha''$ no s'anull·la. Denotarem per v la **celeritat** de la corba α, és a dir

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = h'(t). \tag{1.32}$$

El següent resultat és conseqüència immediata de les fórmules de Frenet per a corbes parametritzades per l'arc i de les relacions (1.31).

Proposició 1.7.3 (Fórmules de Frenet. Cas general)**.** *Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba regular tal que $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$. Llavors*

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} T' &=& & k\,v\,N & \\ N' &=& -k\,v\,T & & -\tau\,v\,B \\ B' &=& & \tau\,v\,N & \end{array}\right. \tag{1.33}$$

D'aquí resulta

Lema 1.7.4. *Es compleixen les següents relacions*

a) $\alpha' = v\,T$.

b) $\alpha'' = v'\,T + kv^2 N$.

El següent resultat permet calcular el triedre de Frenet, la curvatura i la torsió d'una corba regular de manera directa, sense necessitat de reparametritzar-la per l'arc.

Proposició 1.7.5. *Sigui* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *corba regular tal que* $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$. *Es compleix*

$$\begin{cases} T = \dfrac{\alpha'}{v} = \dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\[2ex] N = B \wedge T \\[2ex] B = \dfrac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \end{cases} \tag{1.34}$$

$$\begin{cases} k = \dfrac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\[2ex] \tau = \dfrac{-\langle \alpha' \wedge \alpha''\,,\,\alpha'''\rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \end{cases} \tag{1.35}$$

Demostració. Les igualtats (1.34) són evidents. Del lema anterior deduïm

$$\alpha' \wedge \alpha'' = k\,v^3\,T \wedge N = k\,v^3\,B \quad \Rightarrow \quad \|\alpha' \wedge \alpha''\| = k\,v^3$$

i

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle &= k\,v^3\,\langle B, \alpha''' \rangle = \|\alpha' \wedge \alpha''\|\,\langle B, (v'T + k\,v^2\,N)' \rangle \\ &= \|\alpha' \wedge \alpha''\|\,k\,v^2\,\langle B, N' \rangle = -\|\alpha' \wedge \alpha''\|\,\tau\,k\,v^3 \\ &= -\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2\,\tau, \end{aligned}$$

igualtats que completen la demostració. □

1.8 La forma canònica local d'una corba.

Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba parametritzada per l'arc tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Considerem el desenvolupament de Taylor d'ordre 3 de α en un punt $s_0 \in I$ i suposarem, per simplificar la notació, que $s_0 = 0$. Tenim

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)\,s + \alpha''(0)\,\frac{s^2}{2!} + \alpha'''(0)\,\frac{s^3}{3!} + R$$

on $\lim_{s \mapsto 0} \dfrac{R}{s^3} = 0$. Com que $\alpha' = T$, $\alpha'' = k\,N$ i

$$\alpha''' = (k\,N)' = k'\,N + k\,N' = -k^2\,T + k'\,N - k\,\tau\,B$$

resulta

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \big(s - \frac{k(0)^2}{3!}s^3\big)\,T(0) + \big(\frac{k(0)}{2!}s^2 + \frac{k'(0)}{3!}s^3\big)\,N(0) - \frac{k(0)\tau(0)}{3!}s^3\,B(0) + R. \tag{1.36}$$

Escollim un sistema de referència de manera que $\alpha(0) = (0,0,0)$ i $T(0) = (1,0,0)$, $N(0) = (0,1,0)$, $B(0) = (0,0,1)$. En aquest sistema de coordenades la corba $\alpha = \big(x(s), y(s), z(s)\big)$ compleix

$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{k(0)^2}{6}s^3 + R_x \\[2ex] y(s) = \dfrac{k(0)}{2}s^2 + \dfrac{k'(0)}{6}s^3 + R_y \\[2ex] z(s) = -\dfrac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_z \end{cases} \tag{1.37}$$

on $R = (R_x, R_y, R_z)$. L'expressió (1.37) s'anomena **forma canònica local** de α en un entorn de $s = 0$. D'aquesta expressió es dedueixen les següents propietats

1. Anomenem costat positiu del pla osculador al costat al que apunta el vector binormal. Aleshores

   Si $\tau < 0$: En $s = 0$, la corba α travessa el pla osculador dirigint-se cap al costat positiu (sentit dextrogir).

   Si $\tau > 0$: En $s = 0$, la corba α travessa el pla osculador dirigint-se cap al costat negatiu (sentit levogir).

2. Com que $k(0) > 0$, en un entorn J de $0 \in I$ es compleix

$$y(s) = \frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + R_y \geq 0 \qquad \text{i} \qquad y(s) = 0 \iff s = 0.$$

   Per tant $\alpha(J)$ està totalment contingut en el costat del pla rectificant al que apunta el vector normal N.

3. El pla osculador en el punt $s = 0$ és la posició límit dels plans determinats per la recta tangent en $\alpha(0) = 0$ i el punt $\alpha(s)$ quan $s \to 0$. En efecte, tot pla que contingui $T(0)$ és de la forma $z = c\,y$ o $y = 0$. El cas $y = 0$ el podem excloure per la nota anterior. Posant $z(s) = c(s)\,y(s)$ tindrem

$$c(s) = \frac{z(s)}{y(s)} = \frac{-\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 + R_z(s)}{\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{k'(0)}{6}s^3 + R_y(s)}$$

   i $\lim_{s \mapsto 0} c(s) = 0$. Per tant el pla límit és $z = 0$.

4. La curvatura de α en $s = 0$ coincideix amb la curvatura en $s = 0$ de la corba obtinguda per projecció de α sobre el pla osculador, és a dir de la corba plana definida per

$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{k(0)^2}{6}s^3 + R_x \\[2ex] y(s) = \dfrac{k(0)}{2}s^2 + \dfrac{k'(0)}{6}s^3 + R_y \end{cases}$$

1.9 El grup ortogonal.

Definició 1.9.1. Es denota per $\mathrm{O}(n)$ el **grup ortogonal** o grup de les transformacions lineals de $\mathbb{R}^n$ que preserven el producte escalar, i.e.

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in M_{n\times n} \mid \langle A\,\vec{u}, A\,\vec{v}\,\rangle = \langle\,\vec{u}, \vec{v}\,\rangle,\ \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \rangle\} \\ &= \{A \in M_{n\times n} \mid A^t\,A = \mathrm{Id}\}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Notem que els elements de $\mathrm{O}(n)$ compleixen $A^{-1} = A^t$ i $\det A = \pm 1$. Es defineix el **grup ortogonal especial** $\mathrm{SO}(n)$ com

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}. \tag{1.39}$$

Comentari 1.9.2. A l'anterior definició hem identificat les aplicacions lineals amb les matrius que els representen en la base canònica $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Lema 1.9.3. *Si $A \in \mathrm{O}(n)$ els seus valors propis reals només poden ser ± 1. Si $n = 2m+1$ llavors A té, almenys, un valor propi real.*

Proposició 1.9.4. *Sigui* $A \in \mathrm{O}(2)$. *Llavors*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \qquad \textit{si} \quad \det A = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \qquad \textit{si} \quad \det A = -1$$

Demostració. Sigui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^2$ i posem $\vec{u}_i = A\vec{e}_i$. Per ser $\vec{u}_1$ un vector unitari podem escriure

$$\vec{u}_1 = \cos\omega\,\vec{e}_1 + \sin\omega\,\vec{e}_2$$

per a un cert $\omega \in \mathbb{R}$. Llavors, per ser $\vec{u}_2$ unitari i ortogonal a $\vec{u}_1$ serà

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_1 + \sin\left(\omega \pm \frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_2 \\ &= (\mp\sin\omega)\,\vec{e}_1 + (\pm\cos\omega)\,\vec{e}_2. \end{aligned}$$

D'aquí se segueix l'enunciat. □

Comentaris 1.9.5. a) $A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$ és la rotació d'angle ω mentre que $A = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}$ és la simetria que té per eix la recta $\cos\frac{\omega}{2}\,y = \sin\frac{\omega}{2}\,x$ (i.e. la recta que passa per l'origen i forma un angle $\omega/2$ amb l'eix Ox).

b) Els elements de $\mathrm{SO}(n)$ conserven orientacions mentre que els elements de $\mathrm{O}(n) - \mathrm{SO}(n)$ les inverteixen.

c) Sigui $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Hi ha $A \in \mathrm{SO}(2)$ tal que $\vec{v}_1 = A\vec{u}_1 = \lambda\,\vec{e}_1$ amb $\lambda > 0$. Posem $\vec{v}_2 = A\vec{u}_2 = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_1$. Com que A conserva orientacions tindrem

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \det(A\vec{u}_1, A\vec{u}_2) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = \lambda\, b.$$

i per tant el signe de $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ coincideix amb el signe de b. D'aquí resulta que la definició que hem donat de orientació definida per una base ordenada del pla coincideix amb la definició tradicional: "l'orientació definida per la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ és la del sentit de gir per anar de $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ pel camí més curt".

Proposició 1.9.6. *Donada* $A \in \mathrm{O}(3)$ *hi ha una base ortonormal positiva* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de manera que, si* B *és la matriu de canvi de base entre aquesta base i la canònica, llavors*

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \smash{A'} \end{pmatrix}$$

on $A' \in \mathrm{O}(2)$,

Proposició 1.9.7. *Sigui* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una aplicació que conserva distàncies, és a dir que compleix* $\|f(\vec{p}) - f(\vec{q})\| = \|\vec{p} - \vec{q}\|$. *Aleshores hi ha* $A \in \mathrm{O}(n)$ *i* $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ *tals que*

$$f(\vec{v}) = A\,\vec{v} + \vec{C}.$$

Demostració. Posem $\vec{C} = f(0)$ i sigui $\tilde{f} = f - \vec{C}$. Llavors $\tilde{f}$ conserva distàncies i fixa l'origen. A més conserva la norma, ja que

$$\|\tilde{f}(\vec{v})\| = \|\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(0)\| = \|\vec{v} - 0\| = \|\vec{v}\|,$$

i, per la identitat de polarització, també conserva el producte escalar. Veiem ara que $\tilde{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\tilde{f}(\vec{v})$. En efecte, es compleix

$$\begin{aligned}\|\lambda\tilde{f}(\vec{v}) - \tilde{f}(\lambda\vec{v})\|^2 &= \lambda^2\langle\tilde{f}(\vec{v}), \tilde{f}(\vec{v})\rangle - 2\lambda\langle\tilde{f}(\vec{v}), \tilde{f}(\lambda\vec{v})\rangle + \langle\tilde{f}(\lambda\vec{v}), \tilde{f}(\lambda\vec{v})\rangle \\ &= \lambda^2\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle - 2\lambda\langle\vec{v}, \lambda\vec{v}\rangle + \langle\lambda\vec{v}, \lambda\vec{v}\rangle = 0.\end{aligned}$$

De forma similar es comprova que $\tilde{f}(\vec{v} + \vec{w}) = \tilde{f}(\vec{v}) + \tilde{f}(\vec{w})$. És a dir que $\tilde{f}$ és lineal i preserva el producte escalar. Per tant $\tilde{f} = A \in \mathrm{O}(n)$. □

Proposició 1.9.8. a) *Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba de $\mathbb{R}^n$ i sigui $A \in M_{n\times n}$. Llavors*

$$\frac{d}{dt}\Big(A \cdot \alpha(t)\Big) = A \cdot \alpha'(t).$$

b) *Sigui $A \in \mathrm{SO}(3)$. Aleshores $A(\vec{u} \wedge \vec{v}\,) = (A\,\vec{u}\,) \wedge (A\,\vec{v}\,)$.*

Demostració. La part a) és conseqüència de la linealitat de la derivada. Demostrem b). Donat $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ qualsevol, es compleix

$$\begin{aligned}\langle A(\vec{u} \wedge \vec{v}\,),\, A\,\vec{w}\,\rangle &= \langle\,\vec{u} \wedge \vec{v}\,,\, \vec{w}\,\rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det A \cdot \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \det(A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}) = \langle A(\vec{u}) \wedge A(\vec{v}\,),\, A\,\vec{w}\,\rangle\end{aligned}$$

d'on resulta $A(\vec{u} \wedge \vec{v}\,) = (A\,\vec{u}\,) \wedge (A\,\vec{v}\,)$. □

Corol·lari 1.9.9. *Sigui $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ corba parametritzada per l'arc i definim $\beta = A \cdot \alpha + \vec{C}$, on $A \in \mathrm{SO}(3)$ i $\vec{C} \in \mathbb{R}^3$. Llavors β està parametritzada per l'arc i els triedres de Frenet, curvatura i torsió respectius de les corbes α i β compleixen*

$$T_\beta = A \cdot T_\alpha, \quad N_\beta = A \cdot N_\alpha, \quad B_\beta = A \cdot B_\alpha, \quad k_\beta = k_\alpha \quad \tau_\beta = \tau_\alpha.$$

Comentari 1.9.10. El conjunt de les transformacions de $\mathbb{R}^3$ que són composicions de transformacions ortogonals i de traslacions formen un grup anomenat **grup dels moviments rígids** de l'espai. Es pot comprovar que una tal transformació es pot escriure en la forma

$$\vec{u} \mapsto A\,\vec{u} + \vec{C}$$

amb $A \in \mathrm{O}(3)$ i $\vec{C} \in \mathbb{R}^3$. La transformació és positiva, i.e. conserva orientacions, si i només si $A \in \mathrm{SO}(3)$.

1.10 Teorema fonamental de la teoria local de corbes.

En aquesta secció demostrarem que una corba parametritzada per l'arc amb segona derivada no nul·la està determinada per les seves funcions curvatura i torsió, llevat de moviments rígids que conserven orientacions. Per tal de motivar els diferents passos de la demostració d'aquest resultat proposem resoldre abans el següent

Exercici 1.10.1. Determineu una corba $\alpha = \alpha(s)$ parametritzada per l'arc tal que $k(s) \equiv 1/2$, $\tau \equiv 1/2$, $\alpha(0) = (1,0,0)$, $T(0) = (0, -1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2})$, $N(0) = (-1,0,0)$ i $B(0) = (0, -1/\sqrt{2}\,, -1/\sqrt{2})$.

Indicació : Interpreteu les fórmules de Frenet com un sistema d'equacions diferencials i integreu-lo.

Teorema 1.10.2. *Donades funcions diferenciables $k, \tau \colon I \to \mathbb{R}$, amb $k(s) > 0\ \forall s \in I$, hi ha una corba parametritzada per l'arc $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ la curvatura i la torsió de la qual són k i τ respectivament.*

Si $\bar{\alpha}$ és una altra corba complint les mateixes condicions llavors α i $\bar{\alpha}$ difereixen en un moviment rígid positiu, és a dir que hi ha $A \in \mathrm{SO}(3)$ i $\vec{C} \in \mathbb{R}^3$ tals que $\alpha = A\bar{\alpha} + \vec{C}$.

Demostració. Demostrarem aquest resultat seguint 4 passos.

Pas 1 : Pensem les fórmules de Frenet

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} T' & = & & k\,N & \\ N' & = & -k\,T & & -\tau\,B \\ B' & = & & \tau\,N & \end{array} \right. \tag{1.40}$$

com un sistema d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre que és lineal. Per tant, si fixem una referència ortonormal positiva (T_0, N_0, B_0), hi ha funcions vectorials diferenciables $T = T(s)$, $N = N(s)$ i $B = B(s)$ definides a tot l'interval I i que compleixen les equacions del sistema (1.40) així com les condicions inicials $T(s_0) = T_0$, $N(s_0) = N_0$ i $B(s_0) = B_0$, on $s_0 \in I$ és un punt prefixat de I. El fet que les solucions estiguin definides a tot l'interval I es conseqüència de la linealitat del sistema. Notem també que les funcions així determinades són úniques.

Pas 2 : Provem ara que $(T(s), N(s), B(s))$ és una base ortonormal positiva per a tot $s \in I$. Si posem

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad G = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

llavors les fórmules de Frenet es poden escriure

$$G' = A\,G.$$

Volem comprovar que $G(s) \in \mathrm{O}(3)$ o, el que és equivalent, que $G(s)\,G^t(s) \equiv \mathrm{Id}$ per a tot $s \in I$. Sabem que aquesta relació es compleix per a $s = s_0$. Tenim

$$\begin{aligned} (G\,G^t)' &= G'\,G^t + G\,G'^t = A\,G\,G^t + G\,(A\,G)^t = A\,G\,G^t + G\,G^t\,A^t \\ &= A\,G\,G^t - G\,G^t\,A \end{aligned}$$

És a dir que tant la matriu producte $G\,G^t$ com la matriu constant identitat Id són solució de l'equació diferencial matricial $X' = A\,X - X\,A$ i compleixen les mateixes condicions inicials $X(s_0) = \mathrm{Id}$. Per la unicitat de solucions s'haurà de complir $G\,G^t \equiv \mathrm{Id}$. Finalment la base ortonormal $(T(s), N(s), B(s))$ ha de ser positiva per la continuïtat del determinant.

Pas 3 : Definim la corba buscada per

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} T(u)\,du.$$

Notem que $\alpha(s_0) = 0$ i que $\alpha'(s) = T(s)$. Això mostra en particular que α és una corba parametritzada per l'arc, ja que $\|T\| \equiv 1$, i que T és el seu vector tangent. Per construcció es compleix $T' = k\,N$. Com que N és unitari i $k > 0$ deduïm d'aquí que N és el vector normal de la corba i que k és la seva curvatura. Finalment, per les orientacions preses, es compleix $B = T \wedge N$ i per tant B és el vector binormal de la corba i τ la seva torsió.

Pas 4 : Suposem que la corba $\bar{\alpha}$ compleix també les condicions del teorema i que $(\bar{T}_0, \bar{N}_0, \bar{B}_0)$ és el seu triedere de Frenet en el punt s_0. Sigui $A \in \mathrm{SO}(3)$ l'únic element de $\mathrm{SO}(3)$ que compleix $A\,\bar{T}_0 = T_0$, $A\,\bar{N}_0 = N_0$, $A\,\bar{B}_0 = B_0$ i posem $\vec{C} = -A\,\bar{\alpha}(s_0)$. Llavors la corba

$$\beta(s) = A\,\bar{\alpha} + \vec{C}$$

té la mateixa curvatura i torsió que α i, a l'instant s_0, passa per l'origen amb triedre de Frenet (T_0, N_0, B_0). El teorema d'unicitat de solucions d'equacions diferencials ens diu llavors que $\alpha = \beta = A\,\bar{\alpha} + \vec{C}$. $\square$