
GEOMETRIA DIFERENCIAL

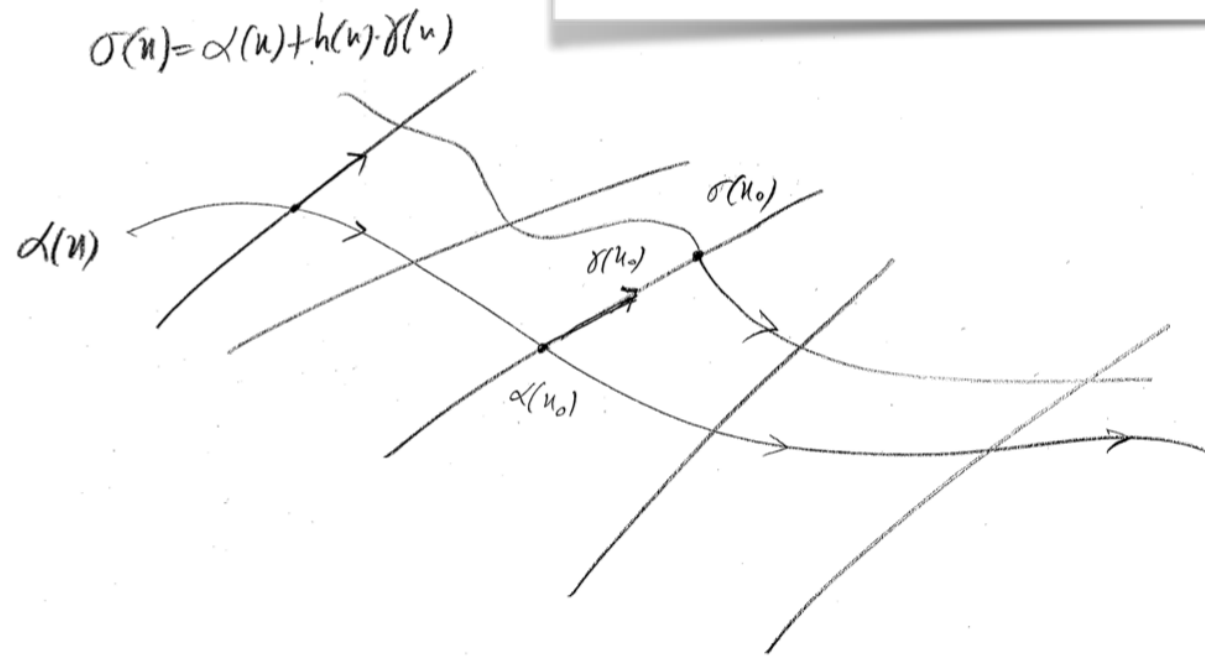
Seminari 6

Exercici 6.1. [Superfícies reglades] Una superfície S de \mathbb{R}^3 s'anomena *reglada*⁵ si es pot parametritzar de la forma

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

on $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ són corbes de \mathbb{R}^3 i $|\gamma(u)| = 1$.

- Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari N de S és constant al llarg de les rectes $u = ct$.
- Les superfícies reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas, i si $\gamma' \neq 0$, hi ha una corba $v = h(u)$ on $x(u, v)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $u = ct$ són tangents a l'eix de regressió.



$$K = \det W_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$\begin{cases} e = -\langle \nu_u, \varphi_u \rangle = \langle \nu, \varphi_{uu} \rangle \\ f = -\langle \nu_v, \varphi_u \rangle = \langle \nu, \varphi_{uv} \rangle = \langle \nu, \varphi_{vu} \rangle = -\langle \nu_u, \varphi_v \rangle \\ g = -\langle \nu_v, \varphi_v \rangle = \langle \nu, \varphi_{vv} \rangle \end{cases} \quad (4.21)$$

Solució: a) La curvatura de Gauss és múltiple positiu del determinant, $eg - f^2$, de la segona forma fonamental. $e = -\langle N_u, x_u \rangle$, $f = -\langle N_u, x_v \rangle$ i $g = -\langle N_v, x_v \rangle$. Com que $g = \langle N, x_{vv} \rangle = 0$ és clar que $K = -f^2/(EG - F^2) \leq 0$. Si la curvatura de Gauss és zero llavors $g = f = 0$ i per tant $N_v = 0$, això vol dir que N és constant sobre les rectes $u = ct$. Recíprocament, si $N_v = 0$ llavors $f = 0$ i com que $g = 0$ tenim $K = 0$.

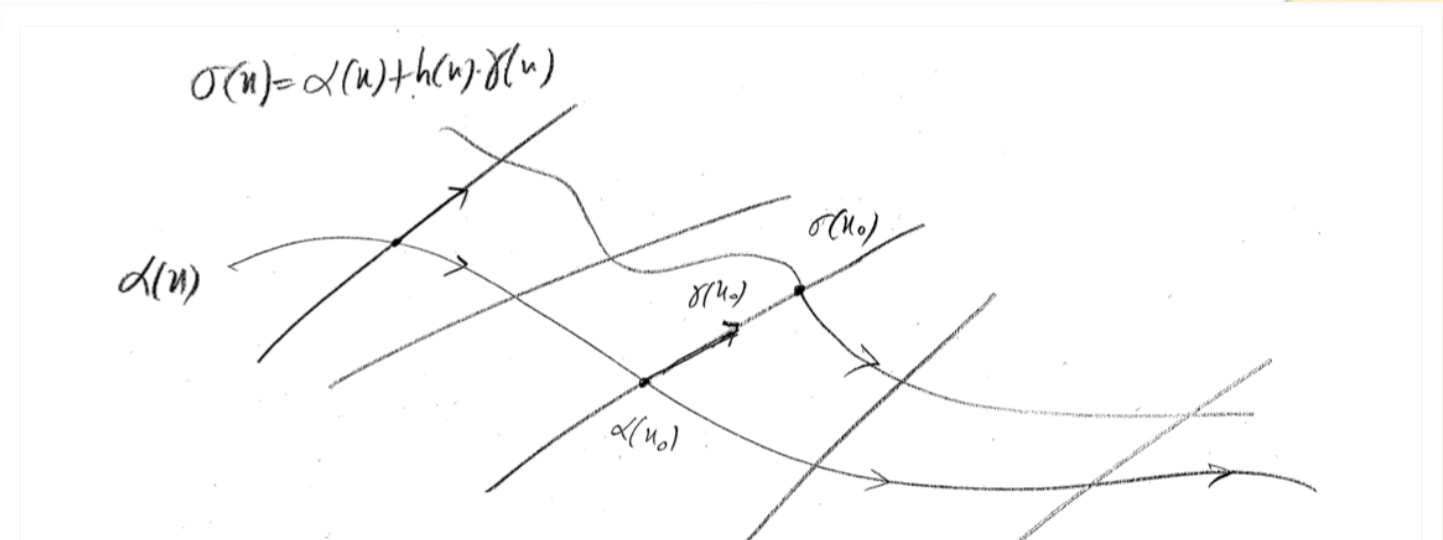
Exercici 6.1. [Superfícies reglades] Una superfície S de \mathbb{R}^3 s'anomena *reglada*⁵ si es pot parametritzar de la forma

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

on $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ són corbes de \mathbb{R}^3 i $|\gamma(u)| = 1$.

- Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari N de S és constant al llarg de les rectes $u = ct$.
- Les superfícies reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas, i si $\gamma' \neq 0$, hi ha una corba $v = h(u)$ on $x(u, v)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $u = ct$ són tangents a l'eix de regressió.

$$f = \langle N, x_{uv} \rangle = \langle N, \gamma' \rangle = \frac{\langle \alpha' \times \gamma, \gamma' \rangle}{|\alpha' \times \gamma|}$$



b) Si $K = 0$ hem vist que $f = 0$. Un càlcul simple mostra que $f = \langle \alpha' \times \gamma, \gamma' \rangle / |x_u \times x_v| = \det(\alpha', \gamma, \gamma') / |x_u \times x_v|$. Llavors α' és combinació lineal de γ i γ' : $\alpha' = \lambda\gamma + \mu\gamma'$. Per altra banda $x_u = \alpha' + v\gamma'$, $x_v = \gamma$, llavors $x_u \times x_v = \alpha' \times \gamma + v\gamma' \times \gamma$. Substituint resulta que $x_u \times x_v = \mu\gamma' \times \gamma + v\gamma' \times \gamma$. Si

$$v = -\mu = -\langle \alpha', \gamma' \rangle / \langle \gamma', \gamma' \rangle =: h(u)$$

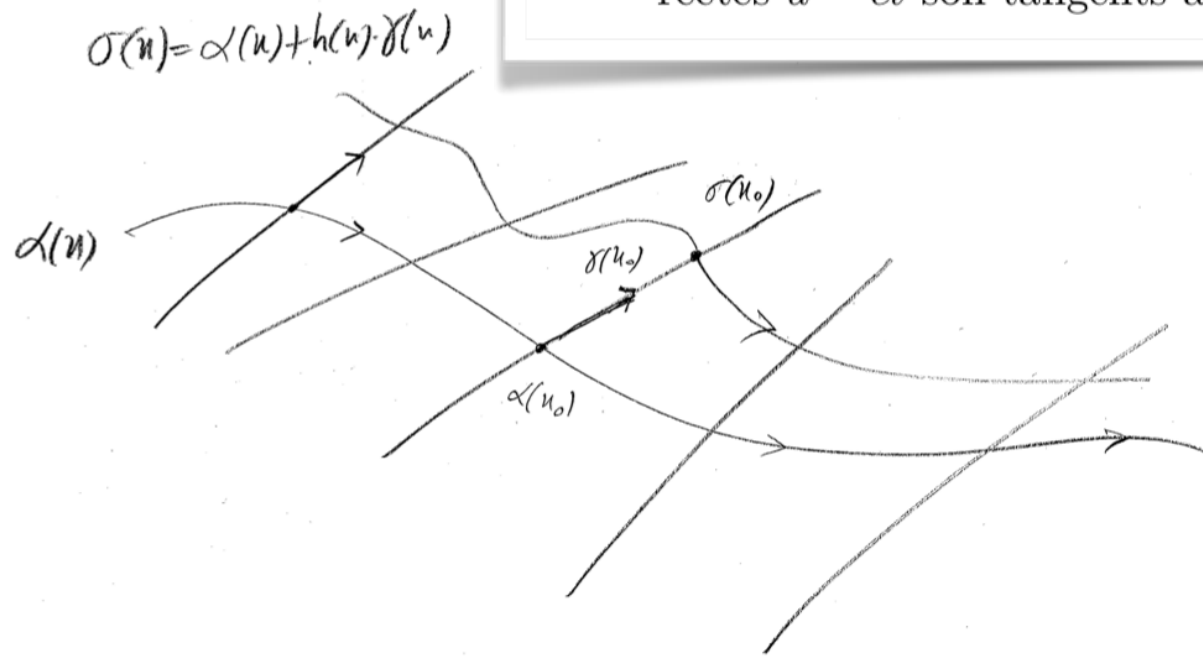
tenim que la superfície no és regular al llarg d'aquesta corba (la corba $x(u, h(u))$). Sigui $\sigma(u) = \alpha(u) + h(u)\gamma(u)$ aquesta corba. Observem que ens cal $\gamma' \neq 0$, sino es tracta d'un cilindre.

Exercici 6.1. [Superfícies reglades] Una superfície S de \mathbb{R}^3 s'anomena *reglada*⁵ si es pot parametritzar de la forma

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u),$$

on $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ són corbes de \mathbb{R}^3 i $|\gamma(u)| = 1$.

- Demostreu que una superfície reglada S té curvatura de Gauss $K \leq 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari N de S és constant al llarg de les rectes $u = ct$.
- Les superfícies reglades amb $K = 0$ s'anomenen *desenvolupables*. Proveu que en aquest cas, i si $\gamma' \neq 0$, hi ha una corba $v = h(u)$ on $x(u, v)$ deixa de ser regular. Aquesta corba s'anomena *eix de regressió* (no és pas una recta com podria suggerir la paraula 'eix'). Proveu que les rectes $u = ct$ són tangents a l'eix de regressió.



Notem també que $\sigma'(u) = \alpha'(u) + h'(u)\gamma(u) + h(u)\gamma'(u)$ però $\alpha' = \lambda\gamma + \mu\gamma'$, llavors $\sigma' = \lambda\gamma + h'\gamma$ i σ és tangent a la recta $t \mapsto \alpha(u) + t\gamma(u)$.

Aquesta propietat, que les rectes $u = ct$ són tangents a l'eix de regressió, ens permet escriure aquesta superfície com $\sigma(u) + v\sigma'(u)$ amb $v \neq 0$. És una superfície desenvolupable tangencial que veurem a l'exercici següent.

Exercici 6.2. [Desenvolupable tangencial] Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc de curvatura no nul·la en tot punt.

- a) Comproveu que $\Phi(t, s) = \alpha(t) + s \alpha'(t)$, amb $s \neq 0$, defineix una superfície.
- b) Demostreu que aquesta superfície és desenvolupable.
- c) Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental no depenen de la torsió de α .
- d) Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que α , dedueu que hi ha una isometria d'un obert de la superfície anterior amb una regió del pla.

Els apartats a), c) i d) són d'un seminari anterior.
Per fer b) només cal veure com és el normal unitari

resulta que és $-\vec{b}(t)$ (obtenint d' α') que és constant al llarg de les rectes \Rightarrow És desenvolupable

Exercici 6.3. [Envolvent de les normals] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de \mathbb{R}^3 parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ . Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{n}(s)$$

on \mathbf{n} és el vector normal de la corba α .

Solució: $x_s = (1 - \lambda\kappa)\vec{t} + \lambda\tau\vec{b}$ i $x_\lambda = \vec{n}$. Llavors la primera forma fonamental és

$$\begin{pmatrix} (1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La curvatura de Gauss serà $K = -f^2/((1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2)$. Com $f = \langle N, x_{s\lambda} \rangle = \langle ((1 - \lambda\kappa)\vec{t} + \lambda\tau\vec{b}) \times \vec{n}, -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b} \rangle / \sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2} = \tau / \sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2}$, obtenim

Això és un menys
(convenció)

$$K = -\frac{\tau^2}{((1 - \lambda\kappa)^2 + \lambda^2\tau^2)^2}.$$

Exercici 6.4. [Envolvent de les binormals] Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de \mathbb{R}^3 parametritzada per l'arc amb curvatura $k \neq 0$ i torsió τ . Calculeu la curvatura de Gauss de la superfície parametritzada per

$$\mathbf{x}(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbf{b}(s)$$

on \mathbf{b} és el vector binormal de la corba α .

Calcular i ser $K = - \frac{\tau^2}{(1 + \lambda^2 \tau^2)^2}$.

Exercici 6.5. [Superfície polar] Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de \mathbb{R}^3 parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + s\mathbf{b}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α . La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu *eix polar*.

- Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: *La superfície polar de α és l'envolvent dels plans normals*. Recordem que l'envolvent d'una família uniparamètrica de plans (la nostra família és uniparamètrica perquè tenim un pla per a cada valor del paràmetre t de la corba) és una superfície tangent en cada punt a un d'aquests plans. Aquesta superfície es troba fàcilment resolent el sistema format per l'equació dels plans (que depèn de t) i l'equació que s'obté derivant aquesta respecte del paràmetre t .
- Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatòries.

Solució: a) En general, si $F_t(x, y, z) = 0$ denota una família de superfícies la corba característica per $t = t_0$ és el límit de la intersecció $F_t(x, y, z) = 0 = F_{t_0}(x, y, z)$ quan t s'acosta a t_0 . Per tant, restant i dividint per $t - t_0$, aquesta corba serà solució de les equacions

$$F_t(x, y, z) = 0, \quad \partial_t F_t(x, y, z) = 0.$$

En el nostre cas tenim la família uniparamètrica

$$\langle X - \alpha(t), \vec{t}(t) \rangle = 0.$$

Derivant ens queda l'equació

$$\langle X - \alpha(t), \vec{n}(t) \rangle = \rho(t).$$

La recta característica per t és la intersecció del pla normal amb el pla perpendicular a \vec{n} que passa a distància $\rho(t)$ de $\alpha(t)$ és a dir

$$\alpha(t) + \rho(t)\vec{n}(t) + \langle \vec{b}(t) \rangle$$

que és el que es volia provar.

Exercici 6.5. [Superfície polar] Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba regular de \mathbb{R}^3 parametritzada per l'arc. La superfície polar de α és la superfície reglada formada per les rectes paral·leles a la binormal (en cada punt) que passen pel centre de curvatura (en aquest punt). Concretament

$$\varphi(t, s) = \alpha(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) + s\mathbf{b}(t)$$

on $\rho(t)$ és el radi de curvatura de α . La recta que obtenim en fixar t i variar s es diu *eix polar*.

- Demostreu que aquesta definició coincideix amb la clàssica: *La superfície polar de α és l'envolvent dels plans normals*. Recordem que l'envolvent d'una família uniparamètrica de plans (la nostra família és uniparamètrica perquè tenim un pla per a cada valor del paràmetre t de la corba) és una superfície tangent en cada punt a un d'aquests plans. Aquesta superfície es troba fàcilment resolent el sistema format per l'equació dels plans (que depèn de t) i l'equació que s'obté derivant aquesta respecte del paràmetre t .
- Comproveu que la superfície polar és desenvolupable, amb eix de regressió format pels centres de les esferes osculatòries.

Estudiem *l'esfera osculatòria*. La primera condició $S(\alpha(t_0))$ diu que l'esfera passa per $\alpha(t_0)$. Fem la primera derivada, tenim

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle = 0.$$

Això ens diu que el radi per $\alpha(t_0)$ és perpendicular a $\alpha'(t_0)$. Llavors $a = \alpha(t_0) + \lambda\vec{n}(t_0) + \mu\vec{b}(t_0)$. Fem la derivada segona. Tenim

$$\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle = -1 = \kappa \langle \vec{n}(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle$$

D'aquí deduïm que $\lambda = \rho$. Ens falta trobar la μ . Tornem a derivar, obtenim

$$\langle \alpha'''(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle + \langle \alpha''(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Desenvolupant i fent servir Frenet veiem que $\mu = \rho'/\tau$. Llavors el centre de l'esfera osculatòria és

$$\alpha + \rho\vec{n} + \frac{\rho'}{\tau}\vec{b}.$$

Passen per la superfície polar (per $s = \frac{\rho'}{\tau}$.)

Estudiem l'esfera osculatriu. La primera condició $S(\alpha(t_0))$ diu que l'esfera passa per $\alpha(t_0)$. Fem la primera derivada, tenim

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle = 0.$$

Això ens diu que el radi per $\alpha(t_0)$ és perpendicular a $\alpha'(t_0)$. Llavors $a = \alpha(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0) + \mu \vec{b}(t)$. Fem la derivada segona. Tenim

$$\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle = -1 = \kappa \langle \vec{n}(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle$$

D'aquí deduïm que $\lambda = \rho$. Ens falta trobar la μ . Tornem a derivar, obtenim

$$\langle \alpha'''(t_0), \alpha(t_0) - a \rangle + \langle \alpha''(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Desenvolupant i fent servir Frenet veiem que $\mu = \rho' / \tau$. Llavors el centre de l'esfera osculatriu és

$$\alpha + \rho \vec{n} + \frac{\rho'}{\tau} \vec{b}.$$

Passen per la superfície polar (per $s = \frac{\rho'}{\tau}$.)

Si el càlcul anterior l'aturèssim a la segona derivada arribem a que el centre caus sobre el punt

$$\alpha + \rho \vec{n} + \mu \vec{b}$$

que pertany a l'eix polar corresponent a α . Això respon a la segona qüestió de b).

El darrer apartat és un càlcul simple de $f = \langle N, \varphi_{ts} \rangle$ que es veu que dona zero.

L'eix de regressió ve donat per

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \rho(t) \vec{n}(t) + h(t) \vec{b}(t)$$

amb

$$h(t) = - \frac{\langle (\alpha(t) + \rho(t) \vec{n}(t))', \vec{b}' \rangle}{\langle \vec{b}', \vec{b}' \rangle} = \frac{-\rho'(t)}{\tau(t)}.$$

Properament deixarem el 'pdf'
d'aquest seminari al Campus Virtual

Gràcies per seguir
estudiant a casa!
