# 1 Corbes Planes: Parametritzacions. Longitud.

**Exercici 1:** Es consideren les aplicacions $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definides per

$$\alpha(t) = (\cos(2\,t), \cos(t))$$
$$\beta(t) = (\sin(2\,t), \cos(t))\,.$$

Decidiu si són corbes regulars (derivada mai nul·la).

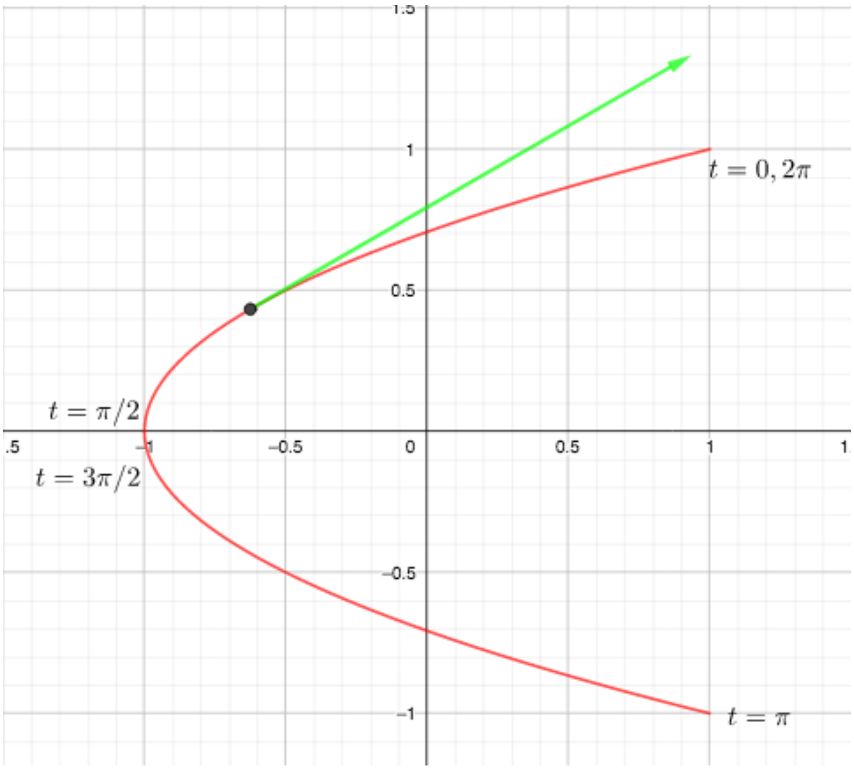
**Solució:** Cal veure si aquestes parametritzacions determinen un vector tangent a la corba que no s'anul·la en cap punt.

Com que

$$\alpha'(t) = (-2\,\sin(2\,t), -\sin(t)),$$

la primera component s'anul·la en tots els valors de $t$ que són múltiples enters de $\pi/2$ ($t = k\,\pi/2$) i la segona s'anul·la sempre que el valor de $t$ sigui un múltiple enter de $\pi$ ($t = k'\,\pi$). Això fa que les dues components s'anul·lin simultàniament en tots els múltiples enters de $\pi$, per tant la corba parametritzada $\alpha$ deixa de ser regular en els valors de $t$ múltiples enters de $\pi$.

Si es fa un gràfic del seu recorregut s'obté un esquema com el següent:



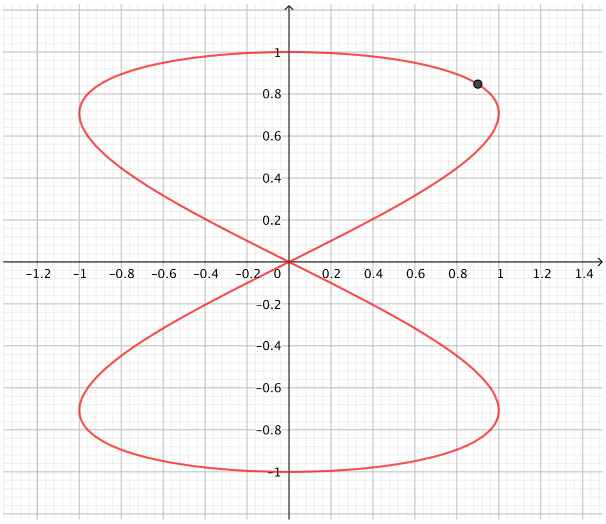

on es veu clarament que la corba correspon a un troç de paràbola. A l'enllaç[1] `https://ggbm.at/kkh3ePA9` (GeoGebra) hi ha una animació d'aquesta corba amb el seu vector tangent, on es pot comprovar com el vector tangent s'anul·la a les dues *puntes* de la dreta on el recorregut de la corba *ha de tornar enrere*.

Per a la corba $\beta$ es compleix

$$\beta'(t) = (2\,\cos(2\,t), -\sin(t)).$$

[1]Els enllaços a fitxers GeoGebra que aniran apareixent són obra de Gregori Guasp.

La segona component ($\sin(t)$) s'anul·la quan el valor del paràmetre $t$ és un múltiple enter de $\pi$ ($t = k\,\pi$), però en aquest cas la primera component és igual a $2\,\cos(2\,k\,\pi) = 1$ i, per tant, mai s'anul·len simultàniament les dues components del vector tangent a la corba $\beta$. Per tant, la corba parametritzada $\beta$ és regular en tot el seu recorregut. El gràfic d'aquesta corba serà com el següent:



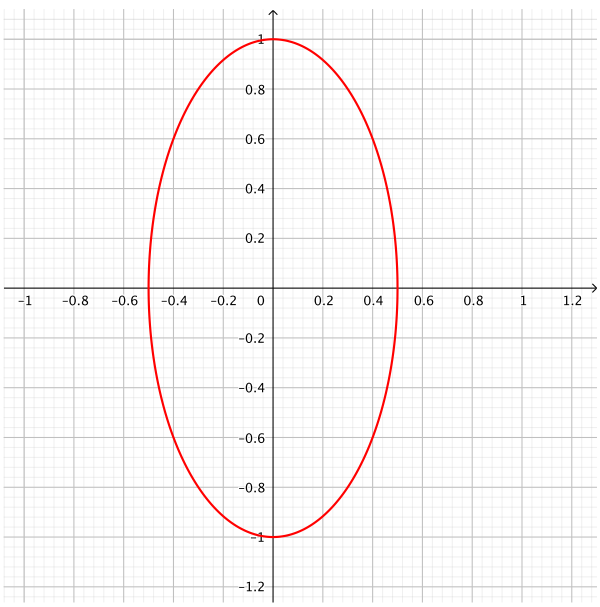

I podeu *jugar* amb una construcció dinàmica seguint l'enllaç `https://ggbm.at/UDsznsCt`.

**Exercici 2:** Parametritzeu les corbes de $\mathbb{R}^2$ definides implícitament per

1. $4\,x^2 + y^2 = 1$.
2. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (**Astroide**, Hipocicloide de 4 punxes).
3. $x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0$. (**Folium de Descartes**).
4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$. (**Lemniscata de Bernoulli**).

**Solució:**

1. $\boldsymbol{4\,x^2 + y^2 = 1}$



Observem que aquesta equació es pot escriure com

$$(2\,x)^2 + y^2 = 1,$$

que suggereix escriure

$$2\,x = \cos(t), \quad y = \sin(t),$$

per a un cert paràmetre $t$. Així, els punts $(x, y)$ que compleixen l'anterior equació és poden escriure com

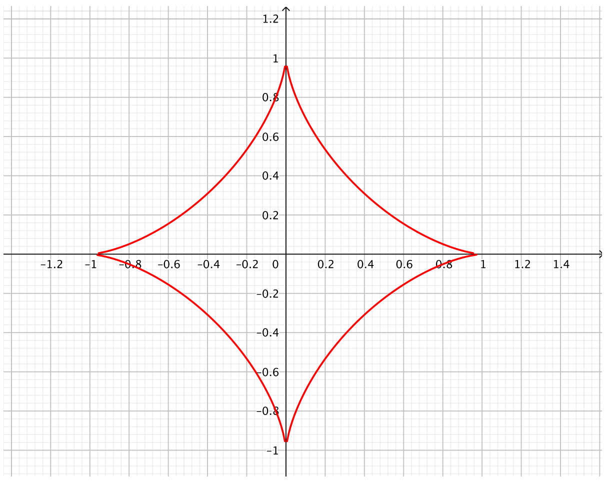
$$(x, y) = \Big(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t)\Big).$$

amb $t \in [0, 2\,\pi]$. Més formalment, tenim una parametrització $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

$$\gamma(t) = \Big(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t)\Big).$$

Obtindreu una il·lustració de la situació a l'enllaç `https://ggbm.at/WQrRAwuc`.

2. $\boldsymbol{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$




Serveix la mateixa estratègia que en el cas anterior. Concretament posem

$$x^{2/3} = \cos^2(t), \quad y^{2/3} = \sin^2(t)$$

de manera que tinguem

$$x^{2/3} + y^{2/3} = cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Per tant la corba s'obté per la parametrització $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

$$\gamma(t) = \Big((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\Big)$$

L'enllaç `https://ggbm.at/zF7QRe6h` mostra la situació.

Noteu, per la forma de la corba, que serà impossible parametritzar-la de forma regular i amb el vector tangent continu. La parametrització que es proposa té el vector tangent continu però anul·lant-se als punts on apareixen les *punxes*. No obstant, cada una de les quatre branques sí que acceptarà una parametrització regular (la que s'obté escrivint la coordenada $y$ en funció de la coordenada $x$). Segons el que es vulgui fer serà més útil una parametrització o l'altra.

*Envolvent.*

L'envolvent de la família de rectes $f(x, y, \lambda) = 0$ (una per a cada $\lambda$) es troba resolent el sistema

$$\begin{aligned} f(x,y,\lambda) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Això és degut a que els punts de l'envolvent (una corba que té en cada punt per tangent una recta de la família) es troben tallant cada recta amb una pròxima i passant al límit. Concretament, si denotem $(x_\epsilon, y_\epsilon)$ un punt solució de

$$\begin{aligned} f(x,y,\lambda) &= 0, \\ f(x,y,\lambda+\epsilon) &= 0, \end{aligned}$$

els punts de l'envolvent són els punts límit $\lim_{\epsilon\to 0}(x_\epsilon, y_\epsilon) = (x_0, y_0)$ suposant que existeix aquest límit. Així,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} f(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda) &= f(x_0, y_0, \lambda) = 0 \\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda) &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda+h) - f(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda+h) - f(x_\epsilon, y_\epsilon, \lambda)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0, \lambda+h) - f(x_0, y_0, \lambda)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

També podem raonar escrivint les rectes de la família com $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$. Per tallar amb una recta pròxima resolem el sistema

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a(t+\epsilon)x + b(t+\epsilon)y + c(t+\epsilon) &= 0 \end{aligned}$$

Restant i aplicant el teorema del valor mitjà

$$\epsilon a'(\eta_1)x + \epsilon b'(\eta_2)y + \epsilon c'(\eta_3) = 0, \quad t < \eta_i < t + \epsilon.$$

Simplificant $\epsilon$ i passant després al límit quan $\epsilon \to 0$ veiem que hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) &= 0 \end{aligned}$$

com aviem dit abans (però el mètode anterior funciona per a funcions $f(x, y, \lambda)$ encara que no siguin lineals).

L'astroide és l'envolvent d'una escala de longitud $a$ que s'aguanta en els eixos de coordenades i va lliscant. És la família de rectes

$$y + (\tan\alpha)x - a\sin\alpha = 0.$$

Derivant respecte $\alpha$

$$\frac{x}{\cos^2\alpha} - a\cos\alpha = 0,$$

per tant

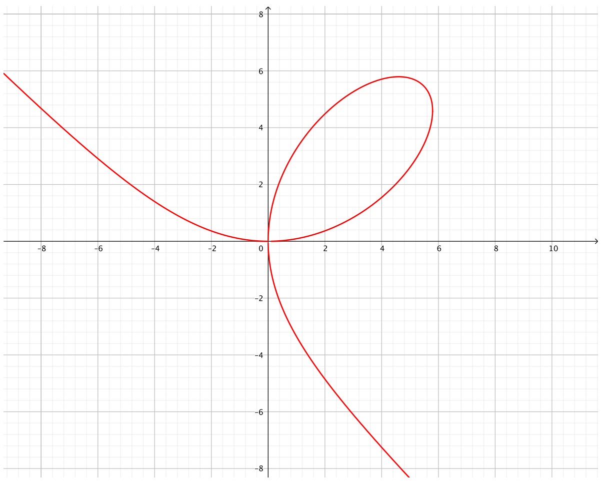
$$x = a\cos^3\alpha$$

d'on

$$y = -a\tan\alpha\cos^3\alpha + a\sin\alpha = a\sin^3\alpha,$$

que coincideix amb la parametrització abans obtinguda.

3. $\boldsymbol{x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0}$



Un cop més, pensar en coordenades polars dóna un camí clar per obtenir una solució raonable. Pensem els punts del pla determinats per les seves coordenades polars (posen $(r, t)$) i determinem en funció d'aquests paràmetres quins són els punts de la corba. Si $(x, y) = r\,(\cos(t), \sin(t))$ l'equació de la corba s'escriu com

$$r^3\,(\cos(t))^3 + r^3\,(\sin(t))^3 - 3\,a\,r^2\cos(t)\,\sin(t) = 0$$

Traient els factors comuns $r^2$ (que són els que diuen que la corba passa per l'origen) queda

$$r\left((\cos(t))^3 + (\sin(t))^3\right) - 3\,a\cos(t)\,\sin(t) = 0$$

i, per tant,

$$r = \frac{3\,a\cos(t)\,\sin(t)}{\cos^3(t) + \sin^3(t)}$$

Prenent, doncs,

$$(x, y) = \frac{3\,a\cos(t)\,\sin(t)}{\cos^3(t) + \sin^3(t)}\,(\cos(t), \sin(t))$$

s'obté una parametrització de la corba. En aquesta expressió cal notar uns quants fets importants:

- Des del punt de vista geomètric, aquesta construcció el que està mostrant és que en cada direcció del pla hi ha un únic punt de la corba i és d'aquesta manera que parametritzem la corba.
- Els punts apareixen associats a les *direccions* del pla no al raigs que surten de l'origen, això es manifesta en el fet que hi ha valors de $t$ per als quals la $r$ corresponent és negativa.
- En afegir mitja volta ($\pi$ radians) al paràmetre $t$ els sinus i cosinus canvien de signe i, per tant, apareix el mateix punt. Això significa que per descriure tota la corba n'hi ha prou amb un interval de $t$ que cobreixi només mitja volta. (Això no deixa de ser una altra manifestació del mateix que apareix als punts anteriors).
- Quan $t = -\pi/4$ o $t = 3\,\pi/4$ el denominador de $r$ es fa 0 i, per tant, l'expressió *tendeix a infinit*. Això significa que el millor interval per descriure la corba serà el que conté les $t$ entre $-\pi/4$ i $3\,\pi/4$.

Podeu experimentar la situació a l'enllaç `https://ggbm.at/G3ZkvjTu`.

*Estudi analític del signe de $r$.* Observem que el denominador és igual a $(\cos(t) + \sin(t))(1-\sin(t)\cos(t))$ (usar $y^3+x^3 = (y+x)(y^2-xy+x^2)$). Per tant, té el signe de $\cos(t)+\sin(t) = \sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$. Per tant, el denominador és positiu a $(-\pi/4, 3\pi/4)$.

El numerador és essencialment $\sin(2t)$ (suposo $a > 0$). Per tant és positiu a $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$.

D'aquí deduïm que $r$ és positiu a $(0, \pi/2) \cup (3\pi/4, \pi) \cup (3\pi/2, 7\pi/4)$, com ja havíem vist en el dibuix.

No obstant la parametrització

$$\gamma(t) = \frac{(3a/2)\sin(2t)}{\cos^3(t) + \sin^3(t)}(\cos(t), \sin(t)).$$

per $t \in [0, \pi]$ té perfecte sentit (encara que en alguns punts el signe de $r$ sigui negatiu) i ja parametritza tota la corba. Es pot pensar que 'unim' els tres intervals anteriors restant $\pi$ (que ja hem dit que no canvia els punts de la corba) al tercer interval $(3\pi/2, 7\pi/4)$.

*Recordatori sobre quart harmònic.* Recordem que donats quatre punts alineats $A, B, C, D$ es defineix la seva raó doble com el quocient de raons simples

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}.$$

Si fixem una referència afí (un punt i un vector) i prenem coordenades tenim que

$$(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

on $a, b, c, d$ són respectivament les coordenades dels punts $A, B, C, D$.

El *quart harmònic* dels punts $A, B, O$ és el punt $X$ tal que

$$(A, B, O, X) = -1.$$

L'ordre és molt important.

Si prenem la referència afí amb origen en $O$, la coordenada $x$ del quart harmònic $X$ compleix doncs

$$(A, B, O, X) = \frac{a}{b} : \frac{x-a}{x-b} = -1,$$

o equivalentment

$$x = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \tag{1}$$

és a dir, la coordenada del quart harmònic és la mitjana harmònica de les coordenades dels altres dos punts.

*Definició geomètrica del Folium.*

Considerem les paràboles $y = \frac{1}{a}x^2$, $x = \frac{1}{a}y^2$. Diem $A_u$ i $B_u$ respectivament els punts en que la recta $y = (\tan u)x$ talla aquestes dues paràboles i sigui $O$ l'origen de coordenades. El Folium de Descartes és el lloc geomètric de punts $X$ del pla tals que $(A_u, B_u, O, X) = -1$, és a dir, el lloc geomètric dels quarts harmònics de $A_u, B_u, O$.

Un càlcul fàcil ens diu que

$$A_u = am(1, m), \quad B_u = \frac{a}{m}(\frac{1}{m}, 1),$$

on $m = \tan(u)$.

Per tant, prenent sobre la recta $y = (\tan(u))x$ la referència afí $\{O; (\cos(u), \sin(u))\}$ les coordenades de $A_u$ i $B_u$ respectivament són

$$[A_u] = am\sqrt{1+m^2}, \quad [B_u] = \frac{a}{m^2}\sqrt{1+m^2}$$

Per tant, per la fórmula (1), la coordenada de $X$ sobre la recta $O, A_u, B_u$, respecte la referència afí $\{O; (\cos(u), \sin(u))\}$, és

$$t = \frac{2}{\frac{1}{[A_u]} + \frac{1}{[B_u]}} = \frac{2am\sqrt{1+m^2}}{1+m^3}.$$

Per tant les coordenades en el pla del punt $X$ són (recordem $\cos(u) = \pm 1/\sqrt{1+m^2}$, $\sin(u) = m \pm /\sqrt{1+m^2}$, on el signe es determina pel quadrant, de fet $|t| = t$ a $[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 7\pi/4]$, on $\cos(\alpha) \geq 0$ i $|t| = -t$ a $[3\pi/4, \pi]$, on $\cos(\alpha) \leq 0$)

$$X = (x_1, y_1) = (|t|\cos(u), |t|\sin(u)) = \left(\frac{2ma}{1+m^3}, \frac{2m^2a}{1+m^3}\right).$$

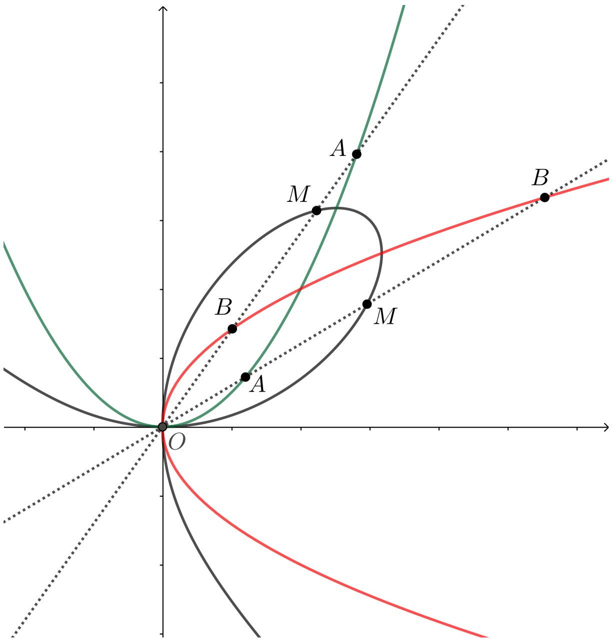
En funció de l'angle $u$,

$$X = (x_1, y_1) = \frac{a \sin 2u}{\cos^3 u + \sin^3 u}(\cos(u), \sin(u)) \tag{2}$$

Ara es veu fàcilment que

$$x_1^3 + y_1^3 = 2ax_1y_1,$$

que és l'equació del folium. (Així la constant $a$ és $3/2$ de la constant $a$ que apareixia a la fórmula inicial del folium).




*Una altra parametrització.* Posem $y = tx$ llavors

$$x^3 + t^3x^3 = 3atx^2$$

és a dir

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

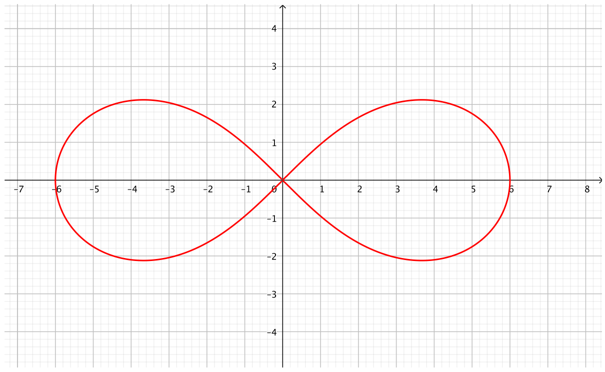
*Asímptota.* Una manera que trobo molt enginyosa de trobar l'asímptota és observar que un polinomi té l'arrel doble $z = 0$ si el terme independent i el coeficient de $z$ són zero. Per tant, posant $z = 1/x$, un polinomi té l'arrel $\infty$ doble si els dos coeficients de grau superior s'anul·len.

En tallar $x^3 + y^3 = 3xy$ amb una recta arbitrària $y = mx + n$ obtenim

$$(1+m^3)x^3 + 3m(mn-1)x^2 + 3k(mn-1)x + n^3 = 0.$$

Per tant $1 + m^3 = 0$ i $3m(mn-1) = 0$, és a dir, l'asímptota és $y = -x - 1$.

4. $\boldsymbol{(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)}$



Com en els altres casos semblants, pensant $(x, y) = r\,(\cos(t), \sin(t))$ l'equació que defineix la corba s'escriu en funció de $(r, t)$ com

$$r^4 = a^2\, r^2 \Big(\cos^2(t) - \sin^2(t)\Big)$$

que es transforma immediatament en

$$r = a\,\sqrt{\cos(2\,t)}$$

i genera la parametrització

$$(x, y) = a\,\sqrt{\cos(2\,t)}\;(\cos(t), \sin(t))$$

És clar que aquesta expressió només té sentit quan $\cos(2\,t) \geq 0$ i això no es produeix quan $t$ és a $(\pi/4, 3\,\pi/4)$ o a $(5\,\pi/4, 7\,\pi/4)$. Per tant, quan es pensa d'aquesta manera s'hauran de considerar per separat la parametrització del *llaç de la dreta* (per a $t \in [-\pi/4, \pi/4]$) i la del *llaç de l'esquerra* ($t \in [3\,\pi/4, 5\,\pi/4]$).

Es pot definir en un sol interval traslladant el segon; tindríem $\gamma : [-\pi/4, 3\pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

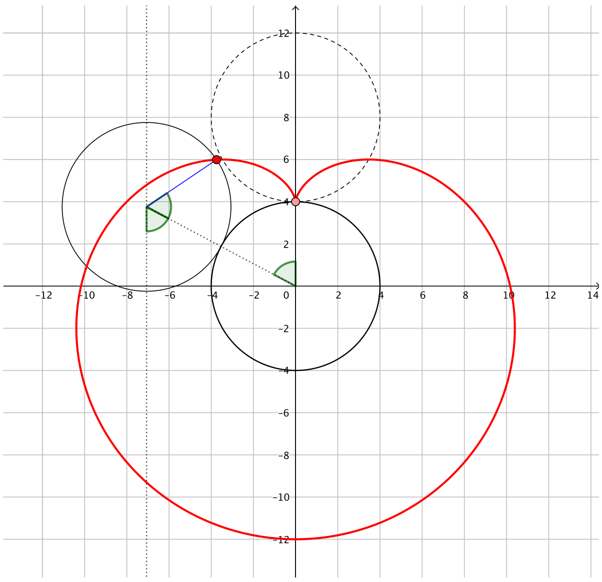
$$\gamma(t) = \begin{cases} \sqrt{\cos(2\,t)}\;(\cos(t), \sin(t)) & si \quad t \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \sqrt{-\cos(2\,t)}\;(-\sin(t), \cos(t)) & si \quad t \in [\pi/4, 3\pi/4] \end{cases}$$

*Definició geomètrica de la Lemniscata.*

Calculeu el lloc geomètric dels punts del pla tals que el producte de distàncies als punts $(1, 0)$ i $(-1, 0)$ respectivament és 1.

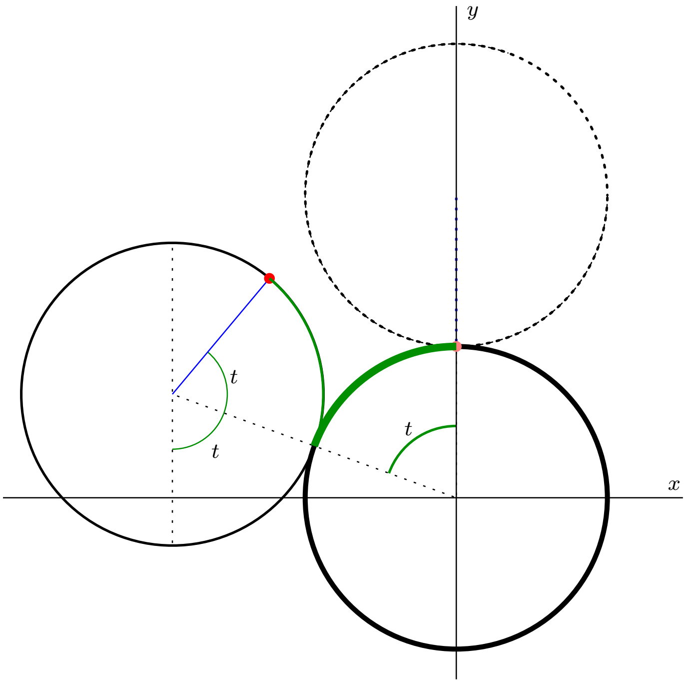
**Exercici 3:** Determineu una parametrització de la *cardioide*: corba caracteritzada per ser el lloc geomètric de l'òrbita d'un punt $P$ d'una circumferència de radi $a$ a mesura que gira sense lliscament sobre una altra circumferència fixada del mateix radi que l'anterior.

**Solució:** Podeu veure un document GeoGebra amb la construcció d'una cardioide amb l'enllaç següent (feu clic sobre el dibuix):




Podreu manipular els paràmetres i prendre mesures.

En qualsevol cas, si es considera, com en l'animació, que la circumferència que va rodant comença a la part de dalt de tot i es segueix el punt en el que coincideixen les dues circumferències, la situació després d'haver recorregut un arc d'angle $t$ sobre la circumferència fixada serà com a l'esquema següent




On, potser, l'únic que cal explicar és que l'angle entre la recta que uneix els centres de les circumferències i la direcció vertical també val $t$ ja que es tracta de l'angle que forma una secant entre dues paral·leles (angles alterns-interns).

Vist això, la posició del centre de la circumferència que roda, després del gir corresponent a l'arc $t$, serà

$$C = (2a\cos(t + \pi/2), 2a\sin(t + \pi/2)) = (-2\,a\ \sin(t), 2\,a\ \cos(t)),$$

i el *vector* que va des del centre fins al punt que s'està seguint serà

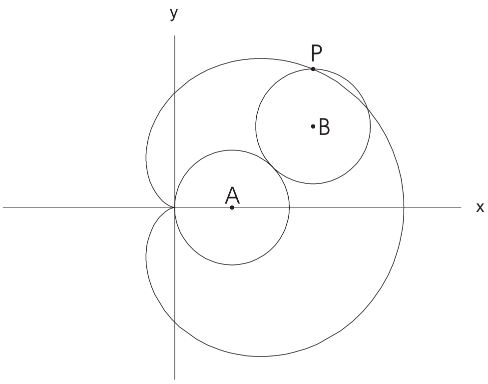
$$v = (a\cos(2t - \pi/2), a\sin(2t - \pi/2)) = (a\ \sin(2\,t), -a\ \cos(2\,t))$$

De forma que la posició del punt vermell és

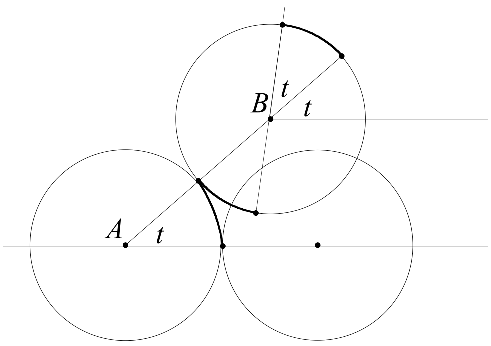
$$(x, y) = C + v = a(-2\,\sin(t) + \sin(2\,t), 2\,\cos(t) - \cos(2\,t)).$$

Naturalment hi ha altres opcions que difereixen d'aquesta per la posició de les circumferències respecte els eixos, la posició relativa del punt inicial, etc.

Per exemple, si passa per l'origen, com indica la figura




El centre $B$ de la circumferència exterior que gira ve parametritzat per l'expressió $\gamma(t) = (a + 2a\cos(t), 2a\sin(t))$, suposant un sentit de gir antihorari, on $t$ és l'angle entre la recta $AB$ i l'eix de les $x's$. Ara cal parametritzar el gir del punt $P$ respecte a $B$. El que cal observar és (mireu els tres arcs de cercle més gruixuts de la figura) que l'angle que forma la recta $PB$ amb l'eix de les $x's$ és el doble de $t$, per tant el moviment ve parametritzat, respecte d'uns eixos traslladats paral·lelament al nou origen $B$, per $\beta(t) = (a\cos(2t), a\sin(2t))$.




Així doncs, la parametrització de la cardioide és

$$\alpha(t) = (a + 2a\cos(t) + a\cos(2t), 2a\sin(t) + a\sin(2t)) = a(1 + 2e^{it} + e^{it}).$$

Equivalentment

$$\alpha(t) = (2a\cos t(1 + \cos t), 2a\sin t(1 + \cos t)).$$

La distància d'aquest punt a l'origen és

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = 2a(1 + \cos t).$$

La cardioide és un cas particular d'hipocicloide, vegeu l'exercici 34.

**Exercici 4:** Siguin $F_1$ i $F_2$ dos punts del pla a distància $2\,c$ i $a \in \mathbb{R}$, $a > c$. Posem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (semieix menor), $e = \dfrac{c}{a} < 1$ (excentricitat) i $p = \dfrac{b^2}{a}$ (paràmetre focal). L'el·lipse amb focus $F_1$ i $F_2$ i semieix major $a$ és el lloc geomètric dels punts $P$ del pla que verifiquen

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a$$

(a) Prenent el pol (origen de coordenades) en un dels dos focus i origen d'angles a la semirecta que l'uneix amb l'altre proveu que l'equació de l'el·lipse en coordenades polars és

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

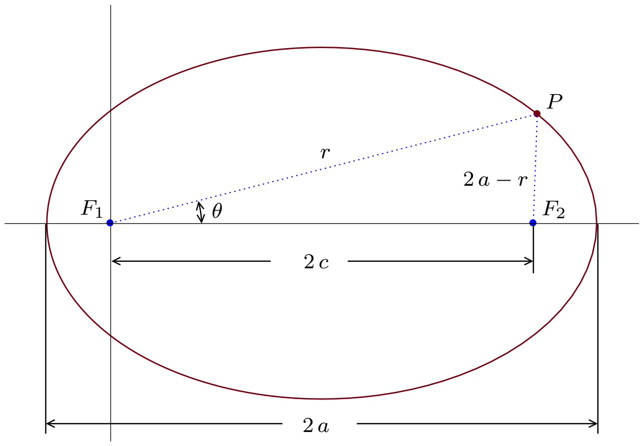
(b) Prenent coordenades cartesianes centrades en el punt mig de $F_1F_2$ (centre de l'el·lipse) i amb eix $Ox$ a la semirecta $OF_2$ proveu que l'equació de l'el·lipse és

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(c) Proveu que $\gamma(t) = (a\,\cos(t), b\,\sin(t))$ és una parametrització regular de l'el·lipse.

**Solució:**

(a) La situació correspon al l'esquema següent




Aleshores el Teorema del cosinus sobre el triangle $F_1F_2P$ dóna la igualtat

$$(2\,a - r)^2 = (2\,c)^2 + r^2 - 2\,(2\,c)\,r\,\cos(\theta)$$

que serà equivalent a

$$4\,a^2 - 4\,a\,r + \boxed{r^2} = 4\,c^2 + \boxed{r^2} - 4\,c\,r\,\cos(\theta)$$

(que és lineal respecte $r$) i permet escriure

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\,\cos(\theta)} = \frac{(a^2 - c^2)/a}{1 - (c/a)\,\cos(\theta)}$$

Tenint en compte les definicions de $b$, $p$ i $e$

$$r = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}.$$

(b) En el sistema de coordenades que es proposa, els focus són als punts $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ de forma que les distàncies $d_1$ i $d_2$ d'un punt $(x, y)$ qualsevol a cada un d'ells compliran ${d_1}^2 = (x+c)^2 + y^2$, ${d_2}^2 = (x-c)^2 + y^2$. Com que la condició que s'ha de verificar per tal que un punt sigui de la el·lipse és

$$d_1 + d_2 = 2\,a$$

això és equivalent a

$$(2\,a - d_1)^2 = {d_2}^2$$

que donaria

$$4\,a^2 - 4\,a\,d_1 + {d_1}^2 = {d_2}^2$$

substituint els quadrats

$$4\,a^2 - 4\,a\,d_1 + x^2 + c^2 + 2\,c\,x + y^2 = x^2 + c^2 - 2\,c\,x + y^2$$

eliminant els termes repetits

$$a\,d_1 = a^2 + c\,x$$

tornant a fer quadrats

$$\begin{gathered} a^2\,{d_1}^2 = (a^2 + c\,x)^2 = a^4 + c^2\,x^2 + 2\,a^2\,c\,x \\ a^2\,\left(x^2 + c^2 + 2\,c\,x + y^2\right) = a^4 + c^2\,x^2 + 2\,a^2\,c\,x \\ (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,c^2 = a^2\,\left(a^2 - c^2\right) \\ b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \end{gathered}$$

Naturalment, aquesta és l'opció que utilitza els càlculs més simples. Però es pot utilitzar la forma polar dels punts de l'el·lipse que s'ha obtingut en l'apartat anterior i tenir en compte que d'aquesta manera es pot dir que els punts de la corba tenen coordenades de la forma

$$(x, y) = (-c, 0) + \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}\,(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

i fer les comprovacions corresponents.

(c) El vector tangent a la corba respecte aquesta parametrització serà

$$\gamma'(t) = (-a\,\sin(t), b\,\cos(t))$$

i les funcions sinus i cosinus mai s'anul·len simultàniament. Així doncs la parametrització és regular.

**Exercici 5:** Determineu (si es pot) una parametrització per l'arc de les corbes definides per

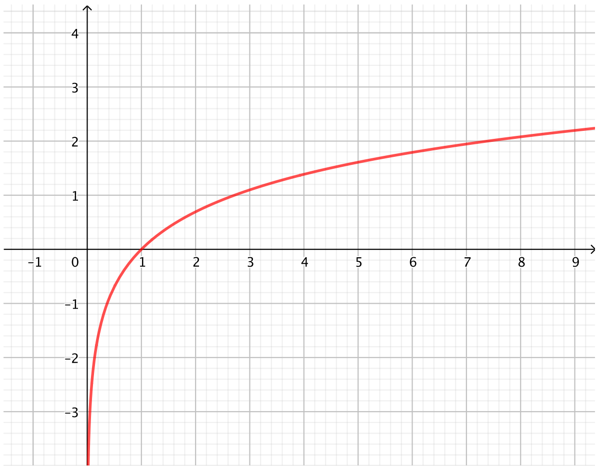
(a) $y = \log x$,

(b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$,

(c) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

**Solució:**

(a) $\boldsymbol{y = \log(x)}$




La longitud $s(x)$ de la corba des del punt $(1, 0)$ fins al punt de coordenades $(x, \log(x))$ serà

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt$$

ja que el vector tangent s'expressa com $(1, 1/x)$ per a un valor arbitrari $x$ del paràmetre. Amb una mica d'habilitat[2] es pot veure que el valor d'aquesta integral serà

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt = \sqrt{t^2 + 1} - \frac{1}{2} \log\left(\sqrt{t^2 + 1} + 1\right) + \frac{1}{2} \log\left(\sqrt{t^2 + 1} - 1\right)$$

(La part dels logaritmes també es pot escriure en termes de $\operatorname{artanh}(y) = \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$).

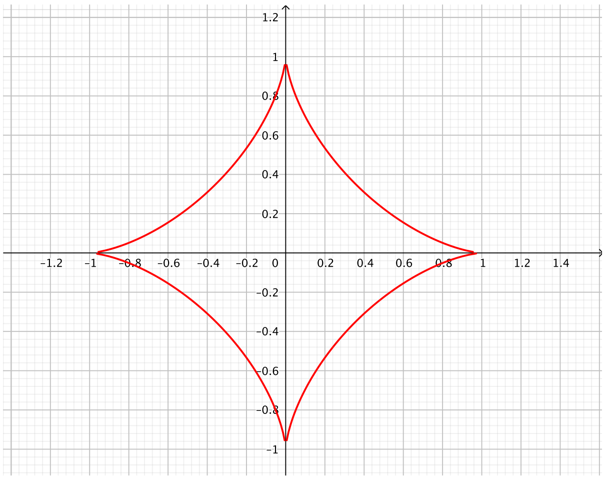
Això vol dir que la funció longitud $s(x)$ serà

$$s(x) = -\sqrt{2} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}\right).$$

No es podrà, doncs, donar una expressió de $x$ en funció de $s$, encara que sí que es pugui calcular de forma explícita la longitud.

(b) $\boldsymbol{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$

[2] Va be el canvi $1 + t^2 = u^2$. La integral de $1/\sin u$ és $\ln \tan(u/2)$ i $\tanh(u/2) = \frac{\sqrt{\cosh u - 1}}{\sqrt{\cosh u + 1}}$.




Si parametritzem la corba per $\alpha(t) = \big(a\,(\cos(t))^3, a\,(\sin(t))^3\big)$ el vector tangent serà

$$\alpha'(t) = \Big(-3\,a\,\sin(t)\,(\cos(t))^2, 3\,a\,\cos(t)\,(\sin(t))^2\Big)$$

i la seva norma (suposem $a > 0$)

$$\|\alpha'(t)\| = 3\,a\,|\sin(t)\,\cos(t)|$$

Per simetria, i per no tenir problemes amb el valor absolut, ens podem limitar a l'interval $[0, \pi/2]$ ja que la situació es va repetint en cadascuna dels quatre branques de l'astroide.

Per tant, la longitud $s(t)$ de l'astroide des del punt corresponent al valor 0 del paràmetre (punt $(1, 0)$) fins al punt corresponent al valor $t \leq \pi/2$ (punt $(0, 1)$) serà

$$s(t) = \int_0^t 3\,a\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \frac{3\,a}{2}\,(\sin(t))^2$$

que proporciona la relació inversa

$$t(s) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)$$

Això fa que es pugui parametritzar aquesta branca de l'astroide en funció de l'arc $s$ com

$$\alpha(s) = \left(a\,(\cos(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)))^3, a\,(\sin(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\,a}\,s}\right)))^3\right)$$

(De fet, s'hauria d'escriure $\alpha(t(s))$).

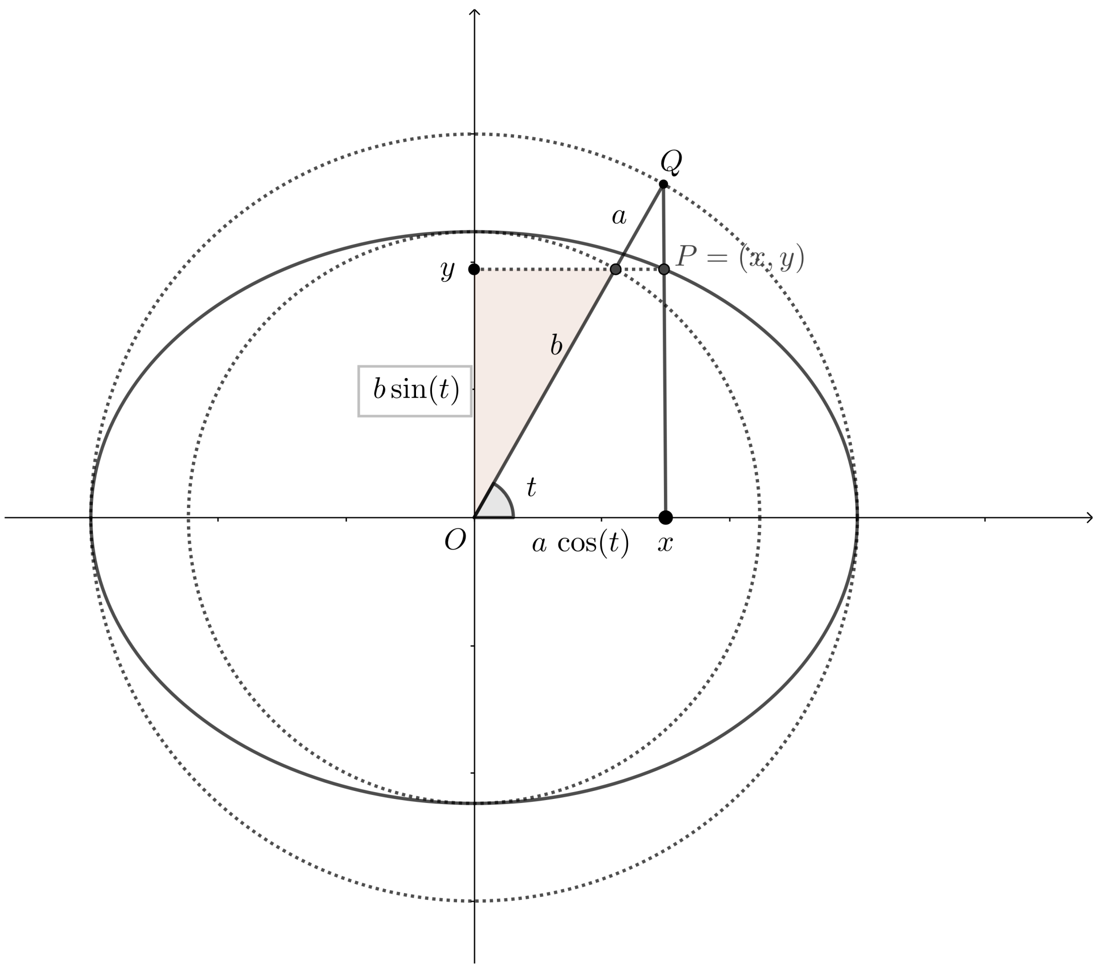
Tenint en compte les relacions entre sinus i cosinus

$$\alpha(s) = \left(a\,\left(1 - \frac{2}{3\,a}\,s\right)^{3/2}, a\,\left(\frac{2}{3\,a}\,s\right)^{3/2}\right)$$

La longitud de l'astroide és doncs

$$L = 4s(\pi/2) = 6a.$$

(c) $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$




Una parametrització òbvia de la corba és

$$\alpha(t) = (a\ \cos(t), b\ \sin(t)).$$

Observeu que $t$ no és la coordenada polar de $P$ sinó la d'un punt $Q$ situat a la mateixa vertical que $P$ sobre la circumferència de radi l'eix major $a$ i centre l'origen. I la horitzontal per $P$ talla la circumferència de radi l'eix menor $b$ i centre l'origen justament en el mateix punt en que aquesta circumferència talla la recta $OQ$.

El vector tangent serà

$$\alpha'(t) = (-a\ \sin(t), b\ \cos(t))$$

amb norma

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2\,(\sin(t))^2 + b^2\,(\cos(t))^2}$$

Per a calcular la longitud $s(t)$ fins a un cert valor del paràmetre caldrà fer la integral

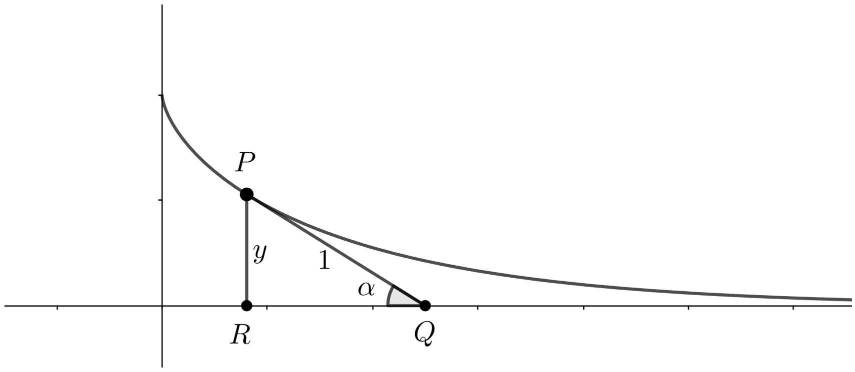
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\,(\sin(x))^2 + b^2\,(\cos(x))^2}\ dx$$

que tampoc és expressable en termes de funcions elementals si no s'està en el cas $a = b$ (circumferència). Per tant, ja no es pot fer res més.

**Exercici 6:** Parametritzeu la corba anomenada *tractriu*, caracteritzada geomètricament pel fet següent: per tot punt $P$ de la corba, la distància entre aquest punt i el punt $Q$, d'intersecció entre la recta tangent a la corba en $P$ amb l'eix d'abscisses, és constant i igual a 1. Es diu que és el camí que es veu obligat a fer un gos lligat a una corda, i que va tibant cap al nord, quan el seu amo es passeja cap a l'est. Doneu també una parametrització per l'arc de la *tractriu*.

**Solució:**

Si la corba ve donada de la forma $y = y(x)$ el pendent de la tangent a la corba en un punt $P$ de coordenada $x$ és $y'(x)$ i tenim la situació de la figura, on $R$ és la projecció de $P$ sobre l'eix de les $x$ i $Q$ és el punt d'intersecció de la tangent a la corba en $P$ amb l'eix de les $x$.




A partir de la figura es veyu directament que

$$y' = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha = -\frac{RP}{RQ} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Resolem aquesta equació diferencial pel mètode de separació de variables. És a dir, integrem els dos termes de

$$-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy = dx.$$

Per fer la integral de l'esquerra utilitzem el canvi de variable $y = \frac{1}{\cosh(t)}$, $dy = -\frac{\tanh(t)}{\cosh(t)}dt$. Aleshores

$$-\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy = \int \tanh^2(t)dt = t - \tanh(t) + C = \operatorname{argcosh}\frac{1}{y} - \sqrt{1-y^2} = x + C.$$

Si imposem que passi pel punt $(0,1)$ ha de ser $C = 0$.

Tenim doncs una primera parametrització de la tractriu en funció de l'altura $y$:

$$\boxed{x(y) = \operatorname{argcosh}\tfrac{1}{y} - \sqrt{1-y^2}}$$

amb $0 < y \leq 1$.

Aprofitant els càlculs anteriors també podem parametritzar la tractiu com

$$\boxed{\gamma(t) = \left(t - \tanh(t), \tfrac{1}{\cosh(t)}\right)}$$

amb $0 \leq t < \infty$.

Un altre canvi de variable que podríem haver utilitzat a la integral anterior és $y = \sin(t)$, amb $t \in (0, \pi/2]$. Aleshores

$$-\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy = \int \sin(t) - \frac{1}{\sin(t)}dt = -\cos(t) - \int \frac{1}{\sin(t)}dt = x + C.$$

Per resoldre la segona integral prenem $s = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Recordem que aleshores

$$t = \arctan(s), \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+s^2}, \qquad \sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}, \qquad \cos(t) = \frac{1-s^2}{1+s^2}.$$

Obtenim $x = -\cos(t) - \ln(\tan(t/2)) + C$, però $C = 0$ pel mateix motiu d'abans. De manera que obtenim la següent parametrització clàssica de la tractriu:

$$\boxed{\gamma(t) = (-\cos(t) - \ln(\tan(t/2)), \sin(t))}$$

(per $t = \pi/2$ passa pel punt $(0, 1)$).

Si volem començar en el punt $(0, 1)$ i acabar a $(\infty, 0)$ posem $T = -t + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi/2)$, i si abans $t$ variava de $\frac{\pi}{2}$ fins a 0 ara $T$ varia de 0 fins a $\pi/2$.

Canviant $t$ per $T$ obtenim una altra parametrització de la tractriu, amb $\gamma(0) = (0, 1)$:

$$\boxed{\gamma(T) = (-\sin(T) - \ln(\tfrac{1-\tan(T/2)}{1+\tan(T/2)}), \cos(T))}$$

*Paràmetre arc.* Tenim

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\frac{\sin^2(T)}{\cos(T)}, -\sin T), \\ \|\gamma'(t)\| &= |\tan(T)| = \tan(T), \quad \text{ja que } T \in [0, \pi/2). \end{aligned}$$

Aleshores el paràmetre arc, contat a partir del punt $(0, 1)$ (és a dir, $T = 0$), és

$$s(T) = \int_0^T \tan(x)\,dx = -\ln(\cos(T)) = \ln\frac{1}{\cos(T)}.$$

Si suposem que tenim una parametrització del tipus $\gamma(x) = (x, y(x))$ (que no hem sabut trobar) tindríem (denotant $s(x)$ la longitud de la tractriu entre $(0, 1)$ i $(x, y(x))$)

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{y(x)^2}{1 - y(x)^2}}\,dx = -\int_0^x \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \ln\frac{1}{y(x)}.$$

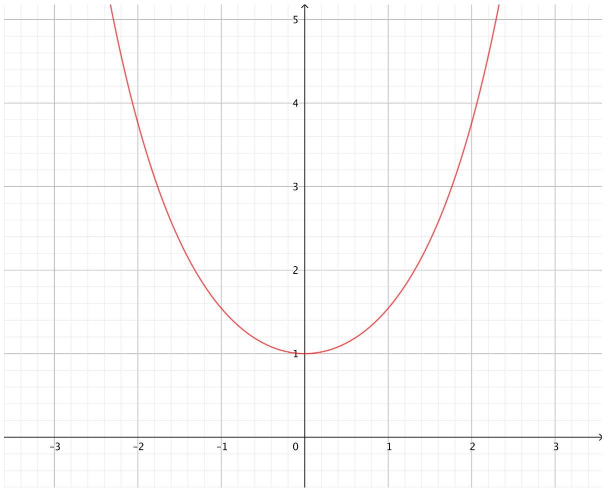
Això vol dir que l'expressió de la tractriu respecte del paràmetre arc $s$ és

$$\boxed{\gamma(s) = (\operatorname{argcosh} e^s - \sqrt{1 - e^{-2s}}, e^{-s})}$$

Observem que les dues expressions que acabem de trobar per al paràmetre arc, $s(T)$ i $s(x)$, diuen el mateix: la longitud d'arc és el logaritme neperià de l'invers de la segona component.

**Exercici 7:** La corba plana donada per la gràfica de la funció $y = \cosh(x)$ s'anomena *catenària*. Parametritzeu-la per l'arc.

**Solució:**




El vector tangent a una corba de la forma $(x, \cosh(x))$ serà $(1, \sinh(x))$ amb norma $\sqrt{1 + (\sinh(x))^2} = \cosh(x)$.

Per tant, la funció longitud $s(x)$ serà

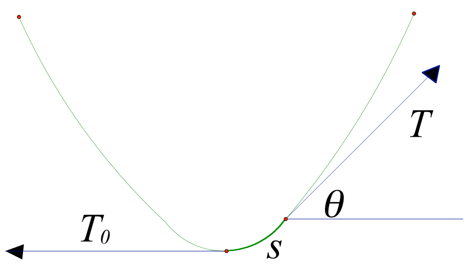
$$s(x) = \int_0^x \cosh(t)\, dt = \sinh(x)$$

de forma que la parametrització de l'arc s'obtindrà prenent $x = \operatorname{arsinh}(s)$ i serà de la forma

$$\alpha(s) = (\operatorname{arsinh}(s), \sqrt{1 + s^2}\,)$$

(ja que $\cosh(t) = \sqrt{1 + (\sinh(t))^2}\,$).

*Deducció de l'equació de la catenària.* Suposem una cadena amb extrems en els punts $(-a, b)$ i $(a, b)$, $a > 0$, que penja sota l'acció de la gravetat. Considerem un petit tros de cadena de longitud $s$ comptat a partir del punt més baix de la cadena i cap a la dreta. El pes d'aquest tros és "massa x gravetat". Suposem densitat 1 per no arrossegar constants, de manera que la massa és essencialment la longitud. Llavors el pes és $gs$, o vectorialment $\vec{F} = (0, -gs)$.




Aquesta força està compensada per les forces que actuen tangencialment en els extrems del nostre segment de cadena. Concretament per la força $T_0 = (-T_0, 0)$, amb $T_0 > 0$, que fa el cable en el punt més baix i per la força $T = (T\cos\theta, T\sin\theta)$, tangent al cable en el punt més alt del nostre segment de longitud $s$. L'angle $\theta$ és doncs l'angle que forma la tangent a la cadena en aquest punt. La condició d'equilibri es doncs

$$\begin{aligned} T_0 &= T\cos\theta, \\ gs &= T\sin\theta. \end{aligned}$$

Dividint tenim

$$\tan\theta = \frac{gs}{T_0}.$$

Però $\tan\theta = y'(x)$ on $x$ és l'abscissa del punt extrem superior del segment de corda que estem considerant. De manera que tenim

$$y'(x) = \lambda s(x), \quad \text{amb } \lambda = \frac{g}{T_0}.$$

i $s(x)$ la longitud del segment de corba entre els punt d'abscisses 0 i $x$.

Aquesta és l'equació diferencial de la catenària.

Derivant, tenim

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\frac{ds}{dx} = \lambda\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2},$$

la darrera igualtat per definició de paràmetre arc.

Equivalentment, posant $v(x) = \dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx} = \lambda\sqrt{1+v^2}$$

Aquesta equació diferencial de primer ordre és trivial i ens dóna

$$\operatorname{argsinh}(v) = \lambda x + C.$$

Com que $v(0) = 0$ (en el mínim la tangent és horitzontal) tenim

$$v(x) = \sinh(\lambda x),$$

que integrant ens dóna

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x) + C_1$$

i tenint en compte la condició inicial trobem $C_1$ i tenim

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x) + b - \frac{1}{\lambda}\cosh\lambda a.$$

Si $\lambda = 1$ i $b = \cosh a$ obtenim $y(x) = \cosh(x)$ que és l'expressió de la catenària donada en el problema.

*Nota.* L'equació diferencial de la catenària $y'(x) = \lambda s(x)$ també es pot deduir així:

Considerem el tros de corda o cadena que penja entre els punts $(-a, b)$ i $(a, b)$ però ens fixem només en el tros que està està entre els punts $(0, c)$ i $(x, y(x))$. Suposem que aquest tros té longitud $s$. La massa serà doncs proporcional a aquesta longitud, posarem $M = \rho s$, on $\rho$ és una constant (la densitat). Ara substituïm aquest tros de corda per un objecte ideal format per $N+1$ boles, totes elles de la mateixa massa $m_N$, unides entre si per un cable rígid de massa negligible i longitud $\delta_N$ de manera que $N \cdot \delta_N = s$, i $(N+1)m_N = M$.

Sobre cada bola $B_i$ actuen tres forces: el pes $m_N g$, la tensió del fil per la dreta $T_{i+1}$, i la tensió del fil per l'esquerra $T_i$. Denotem $T_i = |\vec{T_i}|$ i $\theta_i$ l'angle que forma $T_i$ amb l'horitzontal. Totes aquestes quantitats depenen de $N$ però no poso més subindexs per no recarregar més la notació. La condició d'equilibri (suma de forces igual a zero) s'escriu com

$$\begin{aligned} T_{i+1}\cos\theta_{i+1} &= T_i\cos\theta_i \\ T_{i+1}\sin\theta_{i+1} - T_i\sin\theta_i &= m_N g \end{aligned}$$

Diem $T$ al valor $T_i\cos\theta_i$, que hem vist que no depèn de $i$, és a dir $T = T_i\cos\theta_i$, i sumem, des de $i = 0$ fins a $i = N-1$ la segona igualtat. Els termes successius es van cancel·lant (suma telescòpica) i queda només el primer i l'últim:

$$T_N\sin\theta_N - T_0\sin\theta_0 = Nm_N g = (M - m_N)g = s\rho g - m_N g.$$

Si la bola $B_0$ ocupa el punt més baix de la cadena, com en el dibuix anterior, $\theta_0 = 0$, i l'anterior expressió, dividida per $T$, és

$$\tan\theta_N = s\frac{\rho g}{T} - \frac{m_N g}{T}.$$

Si ara prenem límits quan $N \to \infty$, i recordant que la bola $B_N$ està en el punt de coordenades $(x, y)$, obtenim ($\lim_\infty m_N = 0$)

$$y'(x) = \lambda s(x),$$

on $\lambda$ és una constant, que és l'equació diferencial de la catenària.

**Exercici 8:** Demostreu que una corba regular plana té curvatura constant si i només si està continguda en una circumferència.

**Solució:** Recordeu que una circumferència de radi $r$ parametritzada per l'arc $\alpha(s) = (r\,\cos(s/r), r\,\sin(s/r))$ tindrà com derivada segona

$$\alpha''(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))$$

i, per tant, la curvatura és $k = \dfrac{1}{r}$ (constant).

Tenint en compte l'anterior, donada una corba arbitrària parametritzada per l'arc $\gamma(s)$ i de curvatura constant $k$ (diferent de 0, és clar), considerem, per a cada punt de la corba, el *centre* $C(s)$ definit per

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}N(s)$$

Les fórmules de Frenet donen

$$C'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{k}N'(s) = T(s) + \frac{1}{k}(k\,T(s)) = \vec{0}$$

de forma que $C(s) = C_0$ (constant) i, en particular, $\|\gamma(s) - C_0\| = \dfrac{1}{k}$. Dit d'una altra manera, $\gamma(s)$ sempre és un punt de la circumferència de centre $C_0$ i radi $\dfrac{1}{k}$.

Naturalment, si la curvatura és nul·la els càlculs no tenen sentit. Però en aquest cas és clar que la corba és un segment de recta (que, si es vol mantenir l'enunciat sense afegir més detalls, es pot considerar una circumferència de radi infinit) ja que admet una parametrització amb derivada segona nul·la.

**Exercici 9: (Coordenades polars).**

Es diu que una corba plana $\gamma$ ve donada *en polars* quan s'expressa com:

$$\gamma(t) = \big(r(t)\,\cos(\theta(t)), r(t)\,\sin(\theta(t))\,\big)$$

on $r(t)$ i $\theta(t)$ són respectivament les expressions, en funció del paràmetre $t$, de la distància a l'origen de coordenades (pol) i de l' angle que forma el vector $\gamma(t)$ amb l'eix de les $x$ (origen d'angles). Quan es pren l'angle $\theta$ com a paràmetre, l'expressió en polars ve donada per la funció $r = r(t)$.

1. Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ centrada a l'origen.

2. Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ i centre $(R, 0)$.

3. Demostreu que la longitud $L$ de la corba $r = r(t)$, $t \in [a, b]$, està donada per

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,dt.$$

4. Demostreu que la curvatura de la corba $r = r(t)$ està donada per

$$k(t) = \frac{2\,r'^2 - r\,r'' + r^2}{\big(r'^2 + r^2\big)^{3/2}}.$$

5. Proveu que si la funció $r(t)$ té un màxim en $t = t_0$, aleshores la curvatura de la corba $r = r(t)$ en el punt $t = t_0$ és més gran o igual que $\dfrac{1}{r(t_0)}$.

6. Feu una representació gràfica aproximada de la corba definida per $r(t) = 1 - \sin(t)$.

**Solució:**

1. $r(t) = R$ ($t$ l'angle de les coordenades polars).

2. L'equació de les coordenades cartesianes d'aquesta circumferència és

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2.$$

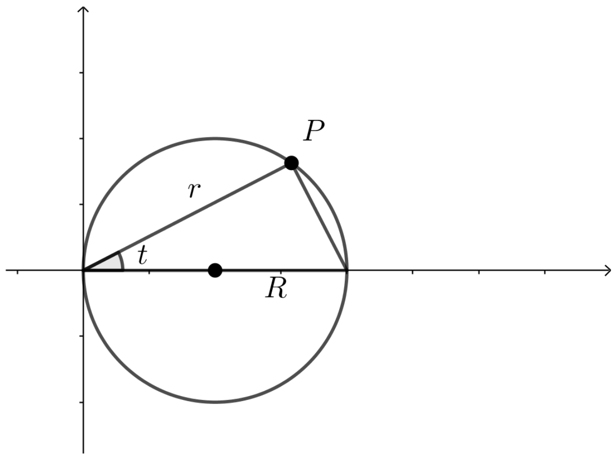
Desenvolupem $x^2 + y^2 - 2\,R\,x = 0$, fem la substitució $x = r\,\cos(t)$, $y = r\,\sin(t)$ i obtenim que $r^2 - 2\,R\,r\,\cos(t) = 0$, d'on

$$r\,(r - 2\,R\,\cos(t)) = 0.$$

Com que el cas $r = 0$ correspon únicament al punt $(0, 0)$, tenim que el recorregut de la circumferència es pot parametritzar com

$$r(t) = 2\,R\,\cos(t),\ \ -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Aquest càlcul no és necessari ja que el resultat es veu directament mirant la figura.



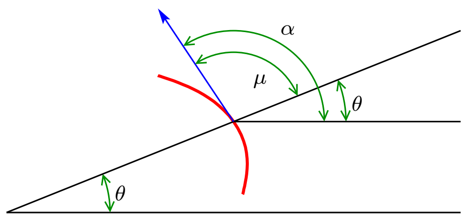

3. Si posem $\gamma(t) = (r(t)\,\cos(t), r(t)\,\sin(t))$ tenim
$$\gamma'(t) = (r'\,\cos(t) - r\,\sin(t), r'\,\sin(t) + r\,\cos(t))$$
on $r' = \dfrac{dr}{dt}$. Així
$$|\gamma'(s)| = \sqrt{r^2 + r'^2}$$
i per tant
$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,dt.$$
**Nota:** Observem que si denotem per $s = s(t)$ el paràmetre arc (és a dir, $s(t)$ és la longitud entre un valor fixat $a$ i $t$) llavors
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

4. Si $r = r(t)$, la corba en cartesianes és $\gamma(t) = (r()\,\cos(t), r(t)\,\sin(t))$. La curvatura d'una corba plana $\gamma(t)$ que no està parametritzada per l'arc es calcula amb la fórmula[3]
$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}.$$
En efecte, $\gamma' = v\,T$ i $\gamma'' = v'\,T + v\,T' = v'\,T + v^2\,k\,N$, d'on
$$\det(\gamma', \gamma'') = v^3\,k\,\det(T, N) = v^3\,k.$$
Si escrivim $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{i\,t}$ tenim que
$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= r'(t)\,\mathrm{e}^{it} + r(t)\,i\,\mathrm{e}^{it}\\ \gamma''(t) &= r''(t)\,\mathrm{e}^{it} + r'(t)\,i\,\mathrm{e}^{it} + r'(t)\,i\,\mathrm{e}^{it} - r(t)\,\mathrm{e}^{it} = (r''(t) - r(t))\,\mathrm{e}^{it} + 2\,r'(t)\,i\,\mathrm{e}^{it}.\end{aligned}$$
Per tant, $\det(\gamma', \gamma'') = \begin{vmatrix} r' & r \\ r'' - r & 2\,r' \end{vmatrix} = 2\,r'^2 - r\,r'' + r^2$ i
$$k(t) = \frac{2\,r'^2 - r\,r'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

[3] El determinant de dos vectors és el determinant de la matriu que té per columnes les coordenades d'aquests vectors respecte d'una base ortonormal. Noteu que això és essencialment el mateix que suposar que la corba està en el pla $xy$ de $\mathbb{R}^3$ i aplicar la fórmula de la curvatura per a les corbes de l'espai.

on, òbviament $r, r', r''$ denoten $r(t), r'(t), r''(t)$.

**Nota:** Puig-Adam[4] ho fa així: Considerem la corba $r = r(t)$ i denotem $\alpha = \alpha(t)$ l'angle de la tangent amb l'eix de les $x's$ i per $\mu = \mu(t)$ l'angle entre la tangent i el radi vector.




Fent el producte escalar del vector posició $\gamma(t) = (r(t)\,\cos(t), r(t)\,\sin(t))$ i del vector tangent $\gamma'(t)$ obtenim

$$\mu = \arctan\left(\frac{r}{r'}\right)$$

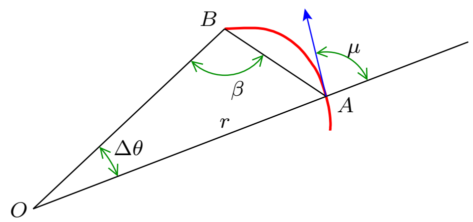
i per tant

$$\alpha = t + \mu = t + \arctan\left(\frac{r}{r'}\right).$$

Finalment

$$k(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = (1 + \frac{r'^2 - r\,r''}{r^2 + r'^2})\,\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

**Nota de la nota:** El càlcul de $\mu$ es pot fer a partir de la definició de derivada. Aplicant el teorema del sinus al triangle $OAB$ de la figura obtenim




$$\frac{\sin(\beta)}{r} = \frac{\sin(\Delta t)}{AB}.$$

Prenem límits quan $\Delta t \to 0$, i observem que $\beta$ tendeix a $\mu$ (angle entre la tangent i el radi vector). Tenim

$$\sin(\mu) = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(\Delta t)}{AB} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = r\,\frac{dt}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

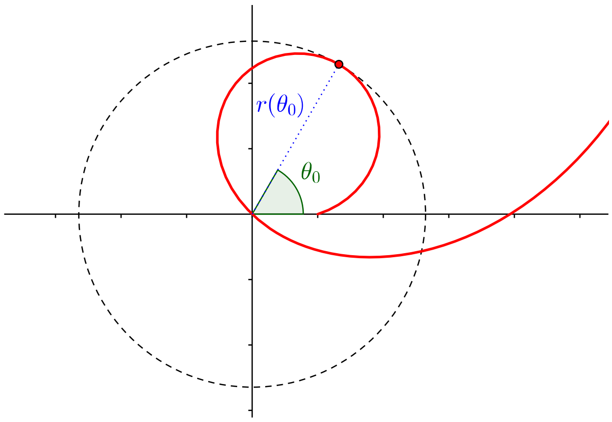
on $s$ és el paràmetre arc. Això ja ens diu que $\tan(\mu) = r/r'$.

5. Si $r(t)$ té un màxim en $t = t_0$ aleshores $r'(t_0) = 0$ i $r''(t_0) \leq 0$, d'on

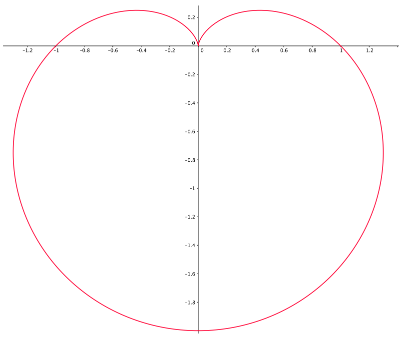
$$k(t_0) = \frac{-r(t_0)\,r''(t_0) + r(t_0)^2}{r(t_0)^3} \geq \frac{1}{r(t_0)}.$$

Observem també que en un dibuix l'acotació és clara: que $r(t)$ tingui un màxim local a $t_0$ implica que localment la corba $\gamma(t)$ passa per dins d'un circumferència de radi $r(t_0)$ i per tant la seva curvatura serà més gran que la d'aquesta circumferència, que és $1/r(t_0)$.

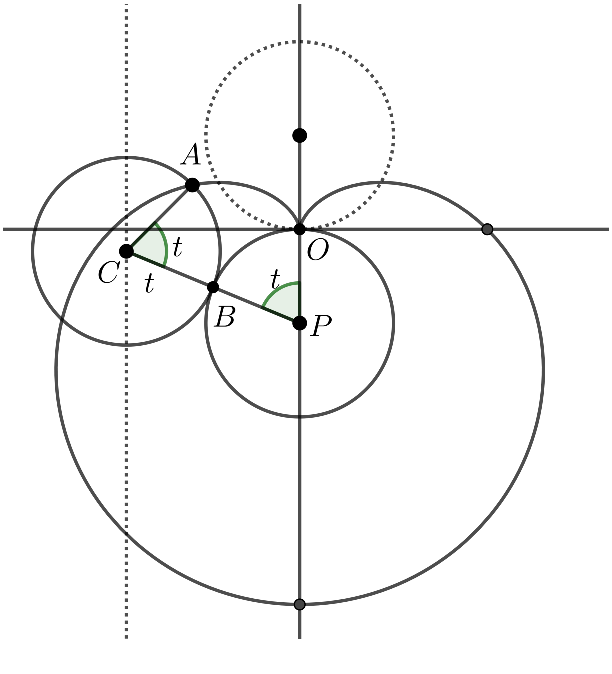
[4] Calculo Integral, p.291




6. Podem fer una representació gràfica i s'obtindrà un gràfic com el de la figura següent (clicant a sobre anireu a una construcció dinàmica de GeoGebra)



Sembla clar, doncs, que es tracta d'una cardioide obtinguda fent girar sobre la circumferència de radi $1/2$ i centre en $(0, -1/2)$ una altra circumferència del mateix radi.

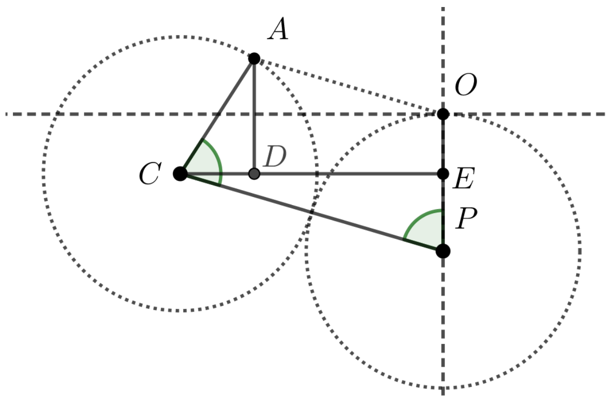


Observeu que aquesta cardioide es pot parametritzar, en funció de l'angle de gir $t$ com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ amb

$$x(t) = -\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2\,t)$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} + \cos(t) - \frac{1}{2}\cos(2\,t)$$

(només cal recordar que quan la circumferència gira un angle $t$ el punt es separa un angle $2\,t$ de la vertical). Observeu que només hem posat $a = 1/2$ i hem traslladat segons el vector $(0, -1/2)$ les fórmules de la cardioide (3).

Equivalentment, observeu que amb la notació anterior tenim la configuració




amb $\angle DCA = 2t - \pi/2$, $AC = OP = 1/2$, de manera que les coordenades $(x, y)$ del punt $A$ són

$$\begin{aligned} x &= -(EC - DC) = -\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(2t - \pi/2), \\ y &= AD - OE = \frac{1}{2}\sin(2t - \pi/2) - (1/2 - \cos(t)). \end{aligned}$$

Si s'aplica una mica de trigonometria es veu que aquestes fórmules es poden compactar a

$$x(t) = -\sin(t)\,(1 - \cos(t))$$
$$y(t) = \cos(t)\,(1 - \cos(t))$$

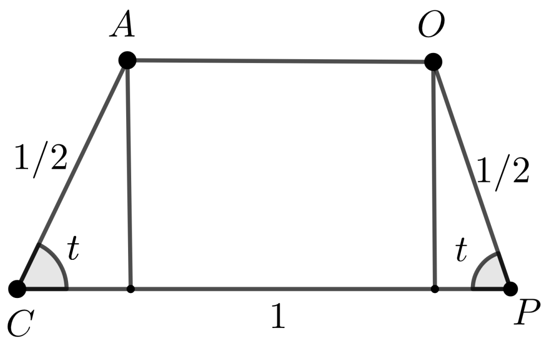
de forma que és ben clar que la distància a l'origen dels punts d'aquesta cardioide és

$$r(t) = 1 - \cos(t)$$

Pot semblar que no són les coordenades polars ja que l'angle no està mesurat des de l'origen de coordenades sinó des del centre de la circumferència fixa.

Però a partir de la darrera figura es pot calcular directament $OA$.

En efecte, tenim un trapezi $OPCA$ amb $OP{=}AC$, ja que tots segments dos coincideixen amb el radi de la circumferència, i $\angle OPC = \angle ACP$ ja que tots dos valen $t$.




Directament es veu doncs que la base menor d'aquest trapezi és $OA = 1-(1/2)\cos(t)-(1/2)\cos(t) = 1-\cos(t)$.

De manera que agafant com és habitual l'origen d'angles sobre la part positiva de l'eix $x$ i com que les rectes $PC$ i $OA$ són paral·leles, el punt $A$ que genera la cardioide s'escriu

$$\begin{aligned} x &= OA\cos(t+\pi/2) \\ y &= OA\sin(t+\pi/2) \end{aligned}$$

equacions que coincideixen amb les obtingudes anteriorment.

**Exercici 10:** Calculeu la curvatura d'una el·lipse determinada per l'expressió en coordenades polars

$$r(\theta) = \frac{p}{1-e\,\cos(\theta)}$$

(on $p$ és el paràmetre focal i $e$ l'excentricitat).

**Solució:** Recordem que si es té una corba parametritzada en polars com $r = r(\theta)$ el valor de la curvatura és

$$k(\theta) = \frac{2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2}{\left((r')^2 + r^2\right)^{(3/2)}}$$

Tenint en compte com s'expressa $r$ en el cas de l'el·lipse, les derivades primera i segona seran

$$r' = -p\,e\,\frac{\sin(\theta)}{(1-e\,\cos(\theta))^2}$$

$$r'' = -p\,e\,\frac{\cos(\theta) + e\,\cos^2(\theta) - 2\,e}{(1-e\,\cos(\theta))^3}$$

(hi ha un $\sin^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta)$)

Els termes individuals del numerador de la fórmula seran

$$\begin{aligned} 2\,(r')^2 &= 2\,p^2\,e^2\,\frac{\sin^2(\theta)}{(1-e\,\cos(\theta))^4} = 2\,p^2\,e^2\,\frac{1-\cos^2(\theta)}{(1-e\,\cos(\theta))^4} \\ -r\,r'' &= p^2\,e\,\frac{\cos(\theta)+e\,\cos^2(\theta)-2\,e}{(1-e\,\cos(\theta))^4} \\ r^2 &= p^2\,\frac{1}{(1-e\,\cos(\theta))^2} = p^2\,\frac{(1-e\,\cos(\theta))^2}{(1-e\,\cos(\theta))^4} \end{aligned}$$

que sumats donaran

$$
\begin{aligned}
2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2 &= \frac{p^2}{(1-e\,\cos(\theta))^4}\begin{pmatrix} 2\,e^2 - 2\,e^2\,\cos^2(\theta) \\ +\,e\,(\cos(\theta)+e\,\cos^2(\theta)-2\,e) \\ +\,1 - 2\,e\,\cos(\theta) + e^2\,\cos^2(\theta)\end{pmatrix} \\
&= \frac{p^2}{(1-e\,\cos(\theta))^4}\,(1-e\,\cos(\theta)) \\
&= \frac{p^2}{(1-e\,\cos(\theta))^3}
\end{aligned}
$$

Mentre que en el denominador hi haurà

$$
\begin{aligned}
(r')^2 + r^2 &= \frac{p^2}{(1-e\,\cos(\theta))^4}\left(e^2 - e^2\,\cos^2(\theta) + 1 - 2\,e\,\cos(\theta) + e^2\,\cos^2(\theta)\right) \\
&= \frac{p^2}{(1-e\,\cos(\theta))^4}\left(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
\left((r')^2+r^2\right)^{3/2} = \frac{p^3}{(1-e\,\cos(\theta))^6}\left(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta)\right)^{3/2}
$$

Dividint, el resultat final serà

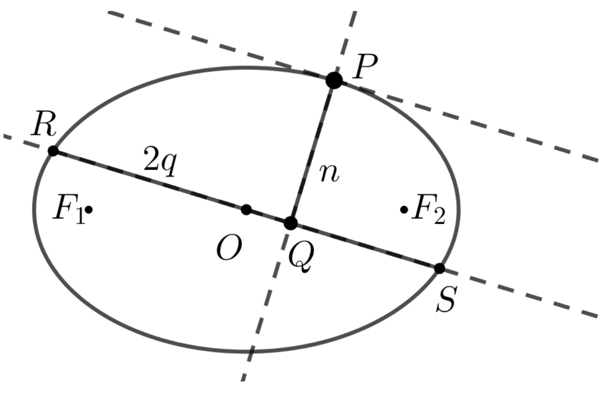
$$
k(\theta) = \frac{(1-e\,\cos(\theta))^3}{p\,(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta))^{3/2}}.
$$

Comproveu que amb tot això hem demostrat el resultat de Newton[5]:

**Teorema 1:** La curvatura de l'el·lipse en un punt $P$ està donada per

$$
k = \frac{n}{q^2},
$$

on $n$ és la distància entre la tangent per $P$ i el diàmetre paral·lel a ella, i $2q$ és la longitud d'aquest diàmetre.




[5] *Philosophie Naturalis Principia Mathematica.* Vegeu *Curvatura de les còniques seguint Newton*, http://mat.uab.es/ agusti/docencia.html

Només cal observar que l'equació en cartesianes de l'el·lipse anterior és

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

o

$$x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta), \quad y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta).$$

El pendent de la tangent en un punt $P$ de paràmetre $\theta$, és

$$m = m(\theta) = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{e - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

La distància de $P$ al diàmetre paral·lel a la tangent per $P$, que és doncs la recta $y = m(x-c)$ (observem que $(c, 0)$ és el centre de l'el·lipse) és

$$n = \frac{|mr(\theta)\cos(\theta) - r(\theta)\sin(\theta) - mc|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{a(1 - e\cos(\theta))}{\sqrt{1 + e^2 - 2e\cos(\theta)}}$$

Per calcular $q$ tallem l'el·lipse amb la recta $y = m(x - c)$ i obtenim que les abscises $x_1, x_2$ dels dos punts de tall són

$$x_i = c \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

i per tant les ordenades són $y_i = m(x_i - c)$ i així

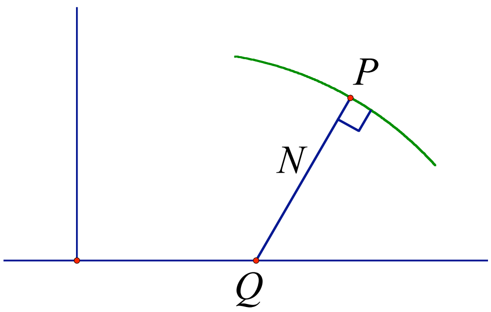
$$2q = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{2b\sqrt{1 + e^2 - 2e\cos(\theta)}}{1 - e\cos(\theta)}$$

Finalment doncs

$$\frac{n}{q^2} = \frac{(1 - e\,\cos(\theta))^3}{p\,(1 + e^2 - 2\,e\,\cos(\theta))^{3/2}}$$

com volíem veure.

Nota[6]: Aprofitant aquests càlculs es veu fàcilment que la normal a l'el·lipse en $P$ talla l'eix de les $x's$ en un punt $Q$ de coordenades $Q = (er, 0)$, amb $r = r(\theta)$.




Per tant, $N = d(P, Q) = r\sqrt{1 + e^2 - 2e\cos\theta}$, i així

$$k(\theta) = \frac{n}{q^2} = \frac{p^2}{N^3}.$$

[6]Vegeu Puig-Adam, *Calculo Integral*, p.290.

*Càlculs més simples sense polars.* A partir de la parametrització de la el·lipse donada per $x = a\cos(t),\ y = b\sin(t)$ tenim

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)), \quad \gamma''(t) = (-a\cos(t), -b\sin(t)).$$

Per tant

$$k(t) = \frac{ab}{\Delta^{3/2}},$$

on $\Delta = a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)$

Per calcular $n$ observem que $n$ és la distància del punt $(0,0)$ a la recta tangent

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

i per tant $(x_1 = a\cos(t), y_1 = b\sin(t))$

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{ab}{\Delta^{1/2}}$$

Per calcular $2q$, longitud de l'eix paral·lel a la tangent per $P$, només ens hem d'adonar que si denotem $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ els punts de tall de l'eix paral·lel a la tangent amb l'el·lipse, tenim

$$2q = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + m^2}$$

on $m$ és el pendent de la tangent i per tant

$$m = -\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}.$$

Per calcular $x_1, x_2$ resolem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} = 1$$

i obtenim

$$x_i = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}} = \pm a\sin(t).$$

Així, $|x_2 - x_1| = 2a|\sin(t)|$. i

$$2q = 2a|\sin(t)|\sqrt{1 + m^2} = 2\Delta^{1/2}.$$

Finalment

$$\frac{n}{q^2} = \frac{ab}{\Delta^{3/2}} = k.$$

També és veu molt fàcilment que la subnormal $N$ (longitud de la normal entre el punt de contacte i l'eix de les $x$) val

$$N = \frac{b}{a}\Delta^{1/2}$$

(l'equació de la normal és $y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2}(\frac{x}{x_0} - 1)$) i per tant també podem escriure la curvatura com

$$k = \frac{p^2}{N^3}.$$

*Geodèsia.* La mateixa expressió s'acostuma a escriure en geodèsia en funció de l'angle $\varphi$ que la normal per $P$ forma amb la part positiva de l'eix de les $x$, anomenat latitud geodèsica. Aquest angle és justament el complementari de l'angle que forma la tangent en $P$ també amb la part positiva de l'eix de les $x$. Si l'equació de l'el·lipse és

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la tangent per $P=(x_1,y_1)$ és

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

Per tant,

$$\tan\varphi=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$$

que permet escriure

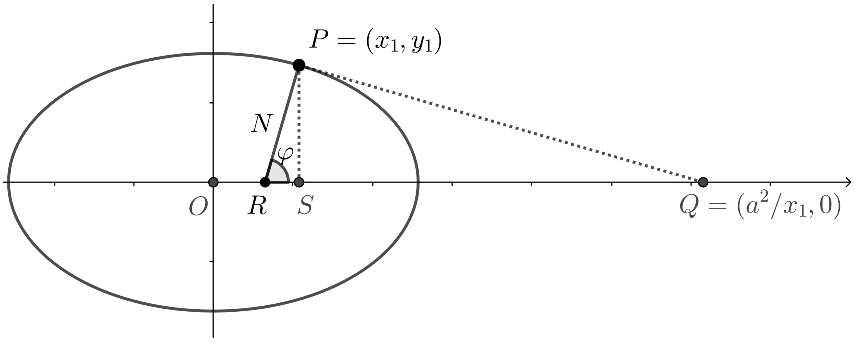
$$\cos\varphi=\frac{bx_1}{\sqrt{a^4-c^2x_1^2}},\qquad c^2=a^2-b^2,$$

d'on

$$x_1=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Per altra banda, la tangent talla l'eix de les $x$ en el punt $(\frac{a^2}{x_1},0)$ de manera que

$$\cos\varphi=\frac{N}{\frac{a^2}{x_1}-(x_1-N\cos\varphi)}$$




(amb la notació de la figura el denominador és $RQ=OQ-(OS-RS)$).
d'on

$$N=\frac{(a^2-x_1^2)\cos\varphi}{x_1\sin^2\varphi}$$

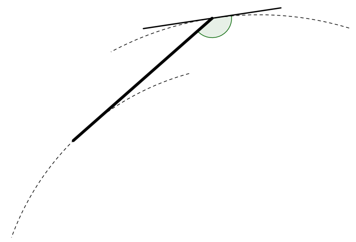
Substituint el valor de $x_1$
obtenim

$$N=\frac{p}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\qquad e=c/a, p=b^2/a.$$

Per tant tenim una altra expressió per a la curvatura de la el·lipse en $P$:

$$k=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{p}$$

**Exercici 11:** Demostreu que el recorregut que fan les dues rodes d'una bicicleta (sobre un terra pla) que manté el manillar en un angle constant són dues circumferències concèntriques. (Fixeu-vos que en el cas extrem que l'angle del manillar sigui recte, és clar que la roda davantera descriu una circumferència de radi igual a la distància entre els centes de les dues rodes mentre la posterior gira, sense avançar, sobre un punt fix. Mentre que en l'altre extrem, quan la roda del davant està alineada amb el cos de la bicicleta, el recorregut de les dues rodes és una línia recta).



**Solució:** Sigui $\alpha(s)$ la corba descrita per la roda posterior i $\beta(s)$ la que descriu la roda davantera. Suposem que $s$ és el paràmetre arc de $\alpha(s)$. Sigui $L$ la distància constant entre $\alpha(s)$ i $\beta(s)$. Observem que el vector velocitat de la roda del darrera tindrà la mateixa direcció que $\alpha(s) - \beta(s)$. Això permet escriure $\beta(s) = \alpha(s) + L\alpha'(s)$ ja que $|\beta(s) - \alpha(s)| = L$.

Derivant tenim $\beta'(s) = \alpha'(s) + Lk(s)N(s)$ on $k(s)$ és la curvatura de $\alpha(s)$ i $N(s)$ la seva normal principal. Multiplicant oper $\alpha'(s)$ tenim

$$\langle \beta'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$$

i per tant

$$|\beta'(s)| \cos(\theta(s)) = 1$$

on $\theta(s)$ és l'angle entre $\alpha'(s)$ i $\beta'(s)$. Però per hipòtesis, en coincidir aquest angle amb l'angle entre el quadre i el manillar de la bicicleta, aquest angle és constant $\theta(s) = \theta$.

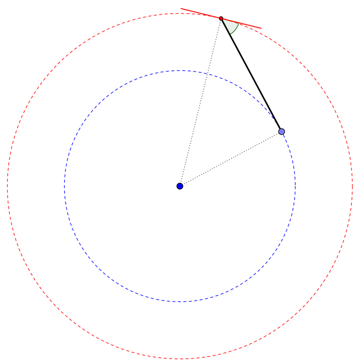
Però clarament

$$|\beta'(s)| = \sqrt{1 + L^2 k^2(s)}$$

així

$$\sqrt{1 + L^2 k^2(s)} \cos\theta = 1$$

i per tant $k(s)$ és constant i $\alpha(s)$ és una circumferència (de radi $r = L\cot(\theta)$). A partir d'aquí és immediat comprovar que el recorregut de $\beta(s)$ estarà sobre la circumferència concèntrica a l'anterior i de radi $R = \sqrt{r^2 + \ell^2}$. (Clicant sobre l'esquema accedireu a una construcció dinàmica on podreu modificar els paràmetres).



Observem finalmen que l'àrea entre les dues circunmferències és

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + L^2) - \pi r^2 = \pi L^2,$$

que no depèn de l'angle!!

**Exercici 12:** Demostreu que el signe de la curvatura d'una corba del pla $\mathbb{R}^2$ està donat per $\det(\gamma'(t), \gamma''(t))$ encara que $t$ no sigui paràmetre arc.

**Solució:** Les corbes planes es poden considerar com corbes de $\mathbb{R}^3$ contingudes en un pla, però el seu tractament és lleugerament diferent quan les considerem com corbes del pla $\mathbb{R}^2$. El motiu fonamental és que hi ha corbes que es poden fer coincidir per un moviment directe de l'espai però no per un moviment directa del pla que les conté.

Per exemple les corbes $(x(t), y(t), 0)$ i $(x(t), -y(t), 0)$ es poden fer coincidir per un gir (moviment directe) al voltant de l'eix de les $x$ però l'únic moviment del pla $z = 0$ que les fa coincidir és la simetria (moviment invers) respecte l'eix de les $x$.

Per a les corbes del pla $\mathbb{R}^2$ definirem dues normals, una involucrant la derivada segona i l'altre no. Donada $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametritzada per l'arc definim

$$\begin{aligned} \widehat{N}(s) &= iT(s) \\ N(s) &= \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \end{aligned}$$

Observem que no cal introduir la notació complexa, només és una manera ràpida de dir que $\widehat{N}(s)$ és l'únic vector que fa que $(T(s), \widehat{N}(s))$ sigui una base ortonormal positiva (respecte l'orientació canònica de $\mathbb{R}^2$).

Clarament si canviem $s$ per $-s$, $\widehat{N}(s)$ canvia també de signe.

Per definició de curvatura $k(s)$ i *curvatura amb signe* $\kappa(s)$ tenim

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ T'(s) &= \kappa(s)\widehat{N}(s) \end{aligned}$$

Equivalentment

$$\kappa(s) = \det(T(s), T'(s)).$$

Per exemple si recorrem la circumferència en contra de les agulles del rellotge $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s))$, $0 \leq s \leq 2\pi$, $\kappa(s)$ és positiva, però si recorrem la mateixa circumferència seguint les agulles del rellotge $(\cos(s), -\sin(s))$ tindrem $\kappa(s)$ negativa.

Resumint, donada $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, sigui $s$ paràmetre arc o no, sempre tindrem

$$\widehat{N}(s) = \frac{1}{\|\gamma'(s)\|}(-y'(s), x'(s))$$

i

$$\begin{aligned} N(s) &= \widehat{N}(s) \text{ si i només si } \kappa(s) \geq 0, \\ N(s) &= -\widehat{N}(s) \text{ si i només si } \kappa(s) \leq 0. \end{aligned}$$

I es compleixen el que podríem anomenar fórmules de Frenet per a la curvatura amb signe:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)\widehat{N}(s) \\ \widehat{N}'(s) &= -\kappa(s)T(s). \end{aligned}$$

Les fórmules de Frenet

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s). \end{aligned}$$

són igualment certes.

Per decidir el signe de $\kappa(s)$ quan $s$ no és el paràmetre arc observem que

$$\det(T(s), T'(s)) = \det(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\right)') = \frac{1}{\|\gamma'\|^2}\det(\gamma', \gamma'')$$

i el signe queda determinat doncs pel $\det(\gamma', \gamma'')$, encara que no sigui arc.

Finalment, a l'exercici 35 es veu que

$$\kappa(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

(sense valors absoluts) on $s$ és el paràmetre arc de $\gamma(s)$ i $\alpha(s)$ és l'angle entre la tangent $\gamma'(s)$ i l'eix de les $x$ (de fet, una direcció fixada qualsevol).