Segona convocatòria, 6 de juliol de 2009

1.– Considereu la corba parametritzada $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Trobeu-ne la curvatura $\kappa(t)$, la torsió $\tau(t)$, i el seu triedre de Frenet $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$.

2.– Recordeu que una corba parametritzada regular $\alpha(t)$ és una hèlix si el seu vector tangent forma un angle constant amb una direcció fixada. A més, es pot demostrar que si la curvatura de $\alpha(t)$ és diferent de zero, el fet de ser hèlix és equivalent a que el quocient entre la torsió i la curvatura és constant.

a) Suposem que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc i que té curvatura $\kappa(s) \neq 0$ i torsió $\tau(s)$. Proveu que la curvatura κ_β i la torsió τ_β de la seva indicatriu tangent $\beta(s) := \mathbf{t}(s)$ venen donades per les fórmules

$$\kappa_\beta = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2} \qquad \text{i} \qquad \tau_\beta = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)}{\kappa\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)}.$$

b) Demostreu que $\alpha(s)$ és hèlix si i només la imatge de la seva indicatriu tangent està continguda en una circumferència.

c) Proveu que la corba parametritzada per $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ és una hèlix. És la imatge de la seva indicatriu tangent una circumferència complerta? Trobeu el seu radi.

3.– Sigui $\alpha(u)$ una corba parametritzada per l'arc. Es considera la superfície S donada per la parametrització

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u), \qquad v > 0.$$

Demostreu que la curvatura de Gauss de S no depèn de la torsió de α.

4.– Sigui $\alpha(u)$ una corba regular continguda en un superfície Σ amb vector normal unitari $\mathbf{N}_\Sigma$.

a) Digueu quina condició ha de satisfer $\alpha'(u)$ per que α sigui una línia de curvatura de Σ.

b) Considerem la superfície S parametritzada per $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{N}_\Sigma(\alpha(u))$. Proveu que α és línia de curvatura de Σ si i només si la curvatura de Gauss de S és zero.

5.– Sigui $\mathcal{R}$ una regió del pla envoltada per una corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tancada i orientada positivament.

a) Proveu que l'àrea de $\mathcal{R}$ ve donada per

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma x dy - y dx = \int_\gamma x dy = -\int_\gamma y dx.$$

b) Dibuixeu $\mathcal{R}$ i calculeu el seu centre de masses (si te una densitat de massa uniforme) en el cas en què $x(t) = 1 + \cos t$ i $y(t) = \sin t$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$.

6.– Sigui A un obert de $\mathbb{R}^3$ i siguin g, h funcions C^∞ a A.

a) Si $\mathbf{F} = g\nabla h$, comproveu que $\nabla \cdot \mathbf{F} = g\nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h)$, on $\nabla^2 = \Delta$ és l'operador laplacià.

b) Si $\Omega \subset A$ és un tancat amb frontera orientada positivament, demostreu que

$$\int_{\Omega} (g\Delta h + \nabla g \cdot \nabla h)\, dV = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}\, dA,$$

on $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla h) \cdot \mathbf{n}$ i $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari exterior a $\partial\Omega$.

c) Deduïu la fórmula

$$\int_{\Omega} (g\Delta h - h\Delta g)\, dV = \int_{\partial\Omega} \left(g\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} - h\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dA.$$

d) Si h és harmònica en A, és a dir $\Delta h = 0$, proveu que $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}\, dA = 0$.

7.– Considereu la $(n-1)$-forma ω a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida per

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{x_j}{\|x\|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_n.$$

a) Calculeu la derivada exterior de ω.

b) Calculeu la integral de ω sobre l'el·lipsoide d'equació $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j - 2}{j}\right)^2 = 1$.

8.– Proveu que la 2-forma de $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (xz^2 - y)\, dy \wedge dz - yz^2\, dz \wedge dx + x\, dx \wedge dy$$

és exacta i trobeu una 1-forma η a $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega = d\eta$.