11 Exercicis complementaris de Superfícies I

Exercici 116 (Exemple de Beltrami-Enneper)**:** Demostreu que les corbes coordenades de la superfície

$$\varphi(u,v) = (e^a \cos b, e^a \sin b, a), \qquad a = a(u,v) = \frac{u-v}{2}, b = b(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

són línies asimptòtiques. Comproveu que sobre la línia $v = 0$ tenim $\tau^2 = -K$.

Exercici 117: Sigui S la superfície de revolució parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

amb $a(u) > 0$ i $(a')^2 + (b')^2 = 1$.

1. Calculeu el símbols de Christoffel i les equacions de les geodèsiques de S.
2. Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució són geodèsiques.
3. Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.
4. Demostreu el **Teorema de Clairaut**: Si $\alpha(s)$ és una geodèsica (parametritzada) de S i $\theta(s)$ és l'angle que forma α amb el paral·lel per $\alpha(s)$, aleshores el producte de la distància de $\alpha(s)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(s)$ és constant al llarg de la corba α.
5. Trobeu la curvatura geodèsica dels paral·lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$.

Exercici 118: Teorema de Monge[13]. Demostreu que una corba d'una superfície S és línia de curvatura si i només si les rectes normals a S al llarg de la corba formen una superfície desenvolupable.

Exercici 119: Coordenades isotermes. Si $ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2)$ amb $\lambda(u,v)$ una funció diferenciable positiva (en aquest cas es diu que u, v són coordenades isotermes) proveu que la curvatura de Gauss K està donada per

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda$$

on $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ és el Laplacià de $\mathbb{R}^2$.

Calculeu la curvatura de Gauss d'una superfície en la qual $E = 1/(u^2+v^2+c^2)^2 = G$ i $F = 0$.

Exercici 120: Sigui $\varphi(u,v)$ una carta isoterma.

1. Demostreu que $\langle \Delta\varphi, \varphi_u \rangle = \langle \Delta\varphi, \varphi_v \rangle = 0$.
2. Demostreu que la superfície $\varphi(u,v)$ és minimal si i només si $\Delta\varphi(u,v) = 0$

[13]No és que Monge trobés aquest teorema com una propietat de les línies de curvatura sinó que Monge defineix les línies de curvatura com línies tals que les normals en punts pròxims es tallen.

Exercici 121: Calculeu, directament a partir de la definició de curvatura de Gauss com límit de quocient d'àrees, la curvatura de Gauss del tor

$$\varphi(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

en el punt $\varphi(0, 0)$.

Exercici 122: Sigui S una superfície reglada tal que les generatrius són rectes senceres. Suposem $K < 0$. Demostreu que la curvatura total és igual a $-2L$ on L és la longitud de la indicatriu unitària de les generatrius.

Useu aquest resultat per calcular la curvatura total de la sella de muntar (hiperboloide) $z = xy$ i vegeu que coincideix amb l'àrea sobre l'esfera per l'aplicació de Gauss.

Exercici 123: Demostreu que els plans osculadors d'una geodèsica sobre un con estan a distància constant del vèrtex.