5 Superfícies i isometries

Exercici 5.1. Determineu quins dels següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$ són superfícies regulars:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + x^2y^2 - 2xyz = 0\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$ on $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$

e) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$

f) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \cos z = x \sin z\}$.

Exercici 5.2. Sigui $\alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc amb curvatura i torsió no nul·les en tot punt.

a) Considerem $\Phi(t, s) = \alpha(t) + s\,\alpha'(t)$. Proveu que tot (t, s) amb $s \neq 0$ té un entorn obert U tal que $\Phi(U)$ és superfície regular.

b) Proveu que els coeficients de la primera forma fonamental d'aquesta superfície no depenen de la torsió de α.

c) Considerant una corba plana amb la mateixa curvatura que α, deduïu que hi ha una isometria entre un obert de la superfície anterior i un obert del pla.

d) Calculeu els límits quan $h \to 0$ de

$$\frac{\Phi(t,h) - \Phi(t,0)}{|\Phi(t,h) - \Phi(t,0)|}, \quad \frac{\Phi(t-h,h) - \Phi(t,0)}{|(\Phi(t-h,h) - \Phi(t,0))|}, \quad \frac{\Phi(t+h,-h) - \Phi(t-h,h)}{|(\Phi(t+h,-h) - \Phi(t-h,h))|}$$

e) Donades dues successions $p_n, q_n \in S$ amb $p_n \neq q_n$ en una superfície regular S, proveu que si $p = \lim p_n = \lim q_n$, aleshores la successió $v_n = (p_n - q_n)/|p_n - q_n|$ admet una parcial convergent a un vector de T_pS. Deduïu que $\Phi((t_0, t_1) \times (-\epsilon, \epsilon))$ no és superfície regular per a cap t_0, t_1, ϵ.

Exercici 5.3. Decidiu entre quines de les següents superfícies de $\mathbb{R}^3$ existeix una isometria local:

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sin y\}$

Exercici 5.4. Sigui S^2 l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$. Volem demostrar que S^2 no és localment isomètrica a un pla.

a) Sigui $D_r = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq r\}$ el disc pla de radi r i sigui $\overline{D}_r = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq \cos r\}$ el casquet format pels punts de colatitud $\leq r$. Proveu que D_r (respectivament $\overline{D}_r$) està format pels punts de $\mathbb{R}^2$ (resp. S^2) que es poden unir a l'origen $(0, 0)$ (resp. al pol nord $(0, 0, 1)$) amb un arc de corba continguda a $\mathbb{R}^2$ (resp. a S^2) de longitud menor o igual que r.

b) Calculeu l'àrea de D_r i de $\overline{D}_r$.

c) Demostreu que no hi ha cap isometria entre un obert de $\mathbb{R}^2$ i un obert de S^2.

Exercici 5.5. Es consideren les parametritzacions respectives ψ i φ de la catenoide C i de l'helicoide H donades per

$$\psi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \qquad \text{on} \quad u \in (0, 2\pi),\ v \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(z, w) = (w \cos z, w \sin z, z) \qquad \text{on} \quad z \in (0, 2\pi),\ w \in \mathbb{R}$$

Comproveu que l'aplicació F determinada per $F(\psi(u, v)) = \varphi(u, \sinh v)$ és una isometria de la imatge de ψ en la catenoide C sobre un obert de l'helicoide H. Aquesta aplicació, es pot estendre a tot C? Es possible definir una isometria de H en C?