Geometria Diferencial. **10 d'abril de 2015.**

Justifiqueu les respostes de forma detallada explicant a cada pas els resultats que utilitzeu.

1. Sigui $\alpha : I \to M$ una corba parametritzada amb imatge continguda en una superfície orientada M. Demostreu que

$$\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}M \;\Leftrightarrow\; \mathrm{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$$

on II denota la segona forma fonamental de M. Si les condicions anteriors es compleixen per tot $t \in I$, quina mena de corba diem que és α respecte M? *(2 punts)*

2.

a) Considerem la corba parametritzada $c(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

i) Calculeu-ne la curvatura $\kappa(t)$. *(1 punt)*

ii) Trobeu el triedre de Frenet de c en el punt de paràmetre $t = 0$. *(1 punt)*

b) Siguin $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ dues corbes regulars (no necessàriament parametritzades per l'arc) amb curvatura i torsió no nul·les enlloc. Suposem que el pla generat per $\alpha'(t), \alpha''(t)$ coincideix amb el pla generat per $\beta'(t), \beta''(t)$ per tot $t \in I$. Proveu que els respectius triedres de Frenet $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ i $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ coincideixien llevat de signe; i.e. $T_\alpha(t) = \pm T_\beta(t), N_\alpha(t) = \pm N_\beta(t), B_\alpha(t) = \pm B_\beta(t)$ per tot $t \in I$. *(1'5 punts)*

3. Considereu la superfície M parametritzada per

$$\psi(u, v) = (u + v, u - v, uv), \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

a) Calculeu la curvatura de Gauss de M en el punt $\psi(u, v)$. *(1 punt)*

b) Trobeu les direccions asimptòtiques de M en el punt $\psi(u, v)$. *(1 punt)*

4. Sigui $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrització local d'una superfície orientada M amb aplicació de Gauss ν. Suposem que per tot (u, v) el vector $\varphi_u(u, v)$ és direcció principal i la curvatura principal corresponent és $k(v) > 0$ (positiva i **independent de** u).

a) Sigui $\Sigma(u, v)$ l'esfera de radi $r(v) = \frac{1}{k(v)}$ i centre $c(u, v) = \varphi(u, v) + \frac{1}{k(v)}\nu(\varphi(u, v))$. Demostreu que $c(u, v)$ no depèn de u. *(1 punt)*

b) Considerem la corba $\beta(v) = c(u_0, v)$, que no depèn de u_0 per l'apartat anterior. Proveu que $\varphi_u(u, v) \perp \beta'(v)$ per tot (u, v). *(1'5 punts)*