14 Integració de formes diferencials: teorema de Stokes.

Exercici 14.1. Donat el camp $\mathbf{X} = X_1\partial/\partial x + X_2\partial/\partial y + X_3\partial/\partial z$ i una funció f suficientment derivables, definim $\omega^1_{\mathbf{X}} = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz, \omega^2_{\mathbf{X}} = X_1 dy\wedge dz + X_2 dz\wedge dx + X_3 dx\wedge dy, \omega^3_f = f\, dx\wedge dy\wedge dz$. Usant les identitats $d(\omega^1_{\mathbf{X}}) = \omega^2_{\mathrm{rot}\,\mathbf{X}}$ i $d(\omega^2_{\mathbf{X}}) = \omega^3_{\mathrm{div}\,\mathbf{X}}$, deduïu del teorema de Stokes les fórmules clàssiques: $\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{X}\cdot dS = \int_{\partial S}\mathbf{X}\cdot dL$ i $\int_U \mathrm{div}\,\mathbf{X}\, dV = \int_{\partial U}\mathbf{X}\cdot dS$, amb $dL = \vec{t}\, ds$, $dS = \vec{N}\, dA$ on $S\subset\mathbb{R}^3$ és una superfície amb vora i $U\subset\mathbb{R}^3$ és un domini acotat. Les orientacions donades per $\vec{t}$ i $\vec{N}$ són les orientacions compatibles. Recordeu que $\mathrm{div}\,\mathbf{X} = \nabla\cdot\mathbf{X}$ i que $\mathrm{rot}\,\mathbf{X} = \nabla\times\mathbf{X}$, on ∇ és l'operador diferencial vectorial $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Aquestes dues fórmules es coneixen com *teorema del rotacional* (o de Stokes) i *teorema de la divergència* (o de Gauss) respectivament.

Exercici 14.2. Calculeu la circulació del camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3-3xy^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-3x^2y)\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. al llarg de la trajectòria que va seguint les arestes del cub, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ i $0\le z\le 1$ sortint de l'origen, seguint després a $(0,0,1)$ a $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$ i que finalment torna a l'origen per la diagonal des de $(1,1,1)$. Calculeu el rotacional de $\mathbf{F}$ i deduïu-ne que existeix una funció f tal que $\mathbf{F} = \nabla f = \mathrm{grad} f$. Expliciteu-la.

Exercici 14.3. Trobeu la integral de superfície (o flux) del camp radial $\mathbf{X} = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ a través de la superfície amb vora donada per $S = \{(x,y,z), z = x^2+y^2-1, -1\le z\le 0\}$.

Exercici 14.4. Apliqueu el teorema de Gauss per calcular el flux del camp $\mathbf{F} = xy^2\dfrac{\partial}{\partial x} + x^2y\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$ a través de la superfície tancada delimitada pel cilindre $x^2+y^2=1$ i els plans $z=1$ i $z=-1$.

Exercici 14.5. Calcular el flux del camp $\mathbf{X} = r\dfrac{\partial}{\partial r} + r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta} - 3r\varphi\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ a través de la semiesfera superior de radi R i centrada a l'origen.

Exercici 14.6. Sigui $\mathbf{F} = ye^z\dfrac{\partial}{\partial x} + xe^z\dfrac{\partial}{\partial y} + xye^z\dfrac{\partial}{\partial z}$, demostreu que la circulació del camp $\mathbf{F}$ al llarg d'una corba tancada que és vora d'una superfície és zero.

Exercici 14.7. Considerem la superfície $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon 3x^2+2y^2+8z^2 = 1, z\ge 0\}$ i el camp $\mathbf{X}(x,y,z) = (4x+2, 2y+5, 5z-1)$. Calculeu el flux de $\mathbf{X}$ a través de S.

Exercici 14.8. Una partícula comença a moure's al punt $(-2,0)$ i es desplaça al llarg de l'eix d'abscisses fins al punt $(2,0)$. Després comença a moure's al llarg del semicercle $y = \sqrt{4-x^2}$ fins a tornar al començament. Determineu la circulació del camp $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (x^3+3xy^2)\mathbf{j}$ al llarg de la trajectòria que descriu la partícula.

Exercici 14.9. Avalueu $\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})$, on $\mathbf{F} = (x^2+y-4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz+z^2)\mathbf{k}$ i S és la superfície $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z\ge 0$.

Exercici 14.10. Calculeu el flux del camp $\mathbf{X} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ a través de la superfície limitada pels cilindres $x^2+y^2=4$ i $x^2+y^2=9$ i els plans $z=-1$ i $z=2$.

Exercici 14.11. Calculeu la circulació del camp $\mathbf{X}$ que en coordenades cilíndriques de $\mathbb{R}^3$ s'expressa com $\mathbf{X} = \rho\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \rho z\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \rho^3\dfrac{\partial}{\partial z}$ al llarg de la corba $L = \{\rho = \sin\theta, z = 0 : \theta\in[0,\pi]\}$.