Recull d'exàmens

Examen parcial, 17 d'abril de 2009

1.– Sigui $\theta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable, $s_0 \in I$ i $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a \neq 0$ i $a^2+b^2 = 1$. Proveu que la la corba

$$\alpha(s) = \left(a \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t))\, dt, a \int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t))\, dt, bs \right)$$

està parametritzada per l'arc i que el quocient de la torsió entre la curvatura és constant.

Solució: *Com que* $a^2 + b^2 = 1$ *resulta que* $\alpha'(s) = (a\sin(\theta(s)), a\cos(\theta(s)), b)$ *té norma* 1 *i per tant* $\alpha(s)$ *està parametritzada per l'arc.*

Com que $\langle \alpha'(s), (0,0,1) \rangle = b$ *és constant,* $\alpha(s)$ *forma un angle constant amb la direcció vertical i per tant és una hèlix. Podem concloure apel·lant a la caracterització de les hèlixs (que van veure a un seminari) pel fet que el quocient de la seves curvatura i torsió és constant.*

Una manera alternativa és calcular directament les seves curvatura i torsió. Com que $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ *resulta que* $\alpha''(s) = (a\cos(\theta(s)), -a\sin(\theta(s)), 0)\theta'(s) = \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ *i per tant* $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = |a\theta'(s)|$ *i* $\mathbf{n}(s) = (\cos(\theta(s)), -\sin(\theta(s)), 0)$*. D'altra banda,* $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = (b\sin(\theta(s)), b\cos(\theta(s)), -a)$ *i*

$$\mathbf{b}'(s) = (b\cos(\theta(s)), -b\sin(\theta(s)), 0)\theta'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s),$$

d'on resulta que $\tau(s) = b\theta'(s)$*. Així doncs* $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \pm\frac{b}{a}$ *és constant.*

També podríem haver calculat la curvatura i la torsió utilitzant les fórmules

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \qquad i \qquad \tau = -\frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

2.– Sigui $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una corba regular parametritzada per l'arc i amb curvatura κ mai nul.la. Sigui Π_u el pla normal a la corba en el punt $\alpha(u)$. Sobre Π_u considerem una circumferència C_u de centre $\alpha(u)$ i radi $r > 0$. La reunió $S = \cup_{u \in I} C_u$ d'aquestes circumferències s'anomena *superfície tubular* o *tub* al voltant de la corba α amb radi r.

a) Proveu que $\mathbf{x}(u,v) = \alpha(u) + r(\cos v\, \mathbf{n}(u) + \sin v\, \mathbf{b}(u))$ és una parametrització de S, on $\mathbf{n}(u)$ i $\mathbf{b}(u)$ denoten els vectors normal i binormal de la corba α.

b) Proveu que si $0 < r < \min\{\frac{1}{\kappa(u)}, u \in I\}$ aleshores $\mathbf{x}$ és una parametrització regular. A partir d'ara assumirem aquesta hipòtesi.

c) Trobeu els coeficients de la primera forma fonamental de S associada a $\mathbf{x}$.

d) Demostreu que l'àrea de S no depèn de la torsió τ de α i expresseu-la en funció de la longitud de α.

e) Trobeu la curvatura de Gauss de S i proveu que no depèn de la torsió de α.

f) Calculeu la curvatura mitjana de S i comproveu que les curvatures principals de S no depenen de la torsió de α.

g) Trobeu les línies de curvatura de S suposant que la corba α és plana.

Solució:

a) *Com que $\mathbf{n}(u)$ i $\mathbf{b}(u)$ formen una base ortonormal del pla Π_u resulta que $v \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ parametritza la circumferència C_u.*

b) *Calculem els vectors tangents a $\mathbf{x}$ utilitzant les fórmules de Frenet de la corba $\alpha(u)$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{t} + r\cos v(-\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) + r\sin v\tau\mathbf{n} = (1 - r\kappa\cos v)\mathbf{t} + r\tau\sin v\mathbf{n} - r\tau\cos v\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_v &= -r\sin v\mathbf{n} + r\cos v\mathbf{b} \end{aligned}$$

que són linealment independents si $r \neq 0$ i $1 - r\kappa(u)\cos v \neq 0$. Aquestes dues condicions es verifiquen sota l'hipòtesi $0 < r < \min\{\frac{1}{\kappa(u)},\ u \in I\}$ que assumim a partir d'ara.

c) *De les expressions anteriors resulta que $E(u,v) = (1 - r\kappa(u)\cos v)^2 + r^2\tau(u)^2$, $F(u,v) = -r^2\tau(u)$ i $G(u,v) = r^2$.*

d) *L'element d'àrea $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ no depèn de τ ja que*

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{((1 - r\kappa\cos v)^2 + r^2\tau^2)r^2 - r^4\tau^2} = r(1 - r\kappa\cos v).$$

L'àrea de S és la integral

$$A = \int_0^{2\pi}\int_I r(1 - r\kappa(u)\cos v)\, du\, dv = 2\pi r\int_I du - r\int_I \kappa(u)\, du\int_0^{2\pi}\cos v\, dv = 2\pi r\ell,$$

on ℓ és la longitud de α.

e) *Per trobar la curvatura de Gauss calcularem el determinant de la matriu del endormorfisme de Weingarten $-d\mathbf{N}$ en la base $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$. Per això, hem de calcular primer el vector normal $\mathbf{N} = -\cos v\, \mathbf{n} - \sin v\, \mathbf{b}$ normalitzant*

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ 1 - r\kappa\cos v & r\tau\sin v & -r\tau\cos v \\ 0 & -r\sin v & r\cos v \end{vmatrix} = -r(1 - r\kappa\cos v)(\cos v\, \mathbf{n} + \sin v\, \mathbf{b}).$$

En aquest cas, és més senzill (però igualment factible) calcular les derivades de $\mathbf{N}$ que les derivades segones de $\mathbf{x}$. En efecte,

$$\mathbf{N}_u = \kappa\cos v\, \mathbf{t} - \tau\sin v\, \mathbf{n} + \tau\cos v\, \mathbf{b} = \frac{\kappa\cos v}{1 - r\kappa\cos v}\mathbf{x}_u + (\star)\mathbf{x}_v$$

i $\mathbf{N}_v = \sin v\, \mathbf{n} - \cos v\, \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{x}_v}{r}$. Per tant, la curvatura de Gauss de S és

$$K = \det(-d\mathbf{N}) = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa\cos v}{1 - r\kappa\cos v} & 0 \\ -\star & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = \frac{-\kappa\cos v}{r(1 - r\kappa\cos v)}.$$

També podríem haver calculat $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ a partir dels coeficients de la segona forma fonamental de S:

$$\begin{aligned} e &= \langle -\mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu}\rangle = -\kappa\cos v(1 - r\kappa\cos v) + r\tau^2 \\ f &= \langle -\mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv}\rangle = -r\tau \\ g &= \langle -\mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv}\rangle = r \end{aligned}$$

f) *A partir de la matriu de l'endomorfisme de Weingarten en la base* $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ *que hem obtingut abans resulta que la seva traça és*

$$2H = \frac{-\kappa \cos v}{1 - r\kappa \cos v} + \frac{1}{r},$$

que no depèn de la torsió τ *de* α. *Les curvatures principals* k_1, k_2 *són les arrels del polinomi característic* $\lambda^2 - 2H\lambda + K$ *de* $-d\mathbf{N}$. *Com que ni* H *ni* K *depenen de* τ *resulta que* k_1 *i* k_2 *tampoc en depenen.*

g) *En qualsevol cas* $\mathbf{x}_v$ *és un vector propi de l'endormorfisme de Weingarten ja que hem vist que* $-d\mathbf{N}(\mathbf{x}_v) = -\mathbf{N}_v = \frac{1}{r}\mathbf{x}_v$. *Per tant, les corbes* $u = const$ *sempre són línies de curvatura de* S.

Si la corba α *és plana aleshores la seva torsió* τ *és zero i per tant* $\mathbf{x}_u = (1 - r\kappa \cos v)\mathbf{t}$ *també és un vector propi de l'endormofisme de Weingarten ja que en aquest cas* $-d\mathbf{N}(\mathbf{x}_u) = -\mathbf{N}_u = -\kappa \cos v\, \mathbf{t}$. *Per tant, les corbes* $v = const$ *també són línies de curvatura en aquest cas.*

Això també ho podríem haver obtingut a partir de l'equació de les línies de curvatura que vam veure a classe

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

En efecte, quan $\tau = 0$ *es té que* $F = f = 0$ *i l'equació de les línies de curvatura es redueix a* $u'v' = 0$ *que té per solucions* $u = const$ *i* $v = const$.