Geometria Diferencial

Segon parcial, 16 Juny 2017

G. Guasp, D. Marín, M. Nicolau, A. Reventós

NOM: ....

NIU: ....

Teoria

Elegiu una i només una de les preguntes següents. **[2 punts]**

1) Suposant conegut el teorema de Gauss-Bonnet per a triangles

$$\int_T K dS + \int_{\partial T} k_g(s) ds = A + B + C - \pi$$

demostreu el teorema de Gauss-Bonnet per a regions amb vora

$$\int_R K dS + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_i^k \alpha_i = 2\pi\chi(S)$$

2) Teorema egregi.

Problema 1.

Considerem la superfície S parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$$

1. Calculeu els símbols de Christoffel de S respecte φ. **[0.5 punts]**
2. Comproveu que una de les equacions diferencials de les geodèsiques es pot escriure com
$$u'(s) \cdot \cosh^2 v(s) = constant,$$
on la geodèica està donada per $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$. **[1 punt]**
3. Calculeu el cosinus de angle $\theta(s)$ entre una geodèsica $\gamma(s) = \varphi(u(s), v(s))$ i el paral·lel determinat per la condició $v = a$, amb a una constant. **[0.5 punts]**
4. Demostreu la relació de Clairaut, és a dir, demostreu que la funció que assigna a cada punt de paràmetre s d'una geodèsica $\gamma(s)$ el producte $r(s) \cdot \cos\theta(s)$ on $r(s)$ és la distància del punt $\gamma(s)$ a l'eix z, ($r(s) = \cosh v(s)$) és constant, i.e.
$$r(s) \cdot \cos\theta(s) = constant$$
[1 punt]

Problema 2.

Sigui $\gamma(u)$ una corba continguda en una superfície S.

1) Digueu quina condició ha de satisfer $\gamma'(u)$ per tal de que $\gamma(u)$ sigui línia de curvatura de S.

[0.5 punts]

2) Considerem la superfície Σ parametritzada per

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + vN(u)$$

on $N(u)$ és la normal principal de $\gamma(u)$. Proveu que $\gamma(u)$ és línia de curvatura de S si i només si la curvatura de Gauss de Σ és zero.

[2.5 punts]

Problema 3.

Comproveu el teorema de Stokes per a la 2-forma

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dz + x^2 dz \wedge dx$$

i el recinte delimitat per les condicions $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $y^2 + z^2 \leq 9$.

Indicació: Atenció a les orientacions. **[2 punts]**