Notes de l'unitat 6

Exemple del cilindre

> # Els parl · lels —-, —-, —-,
>
> # Els meridians |, |, |,

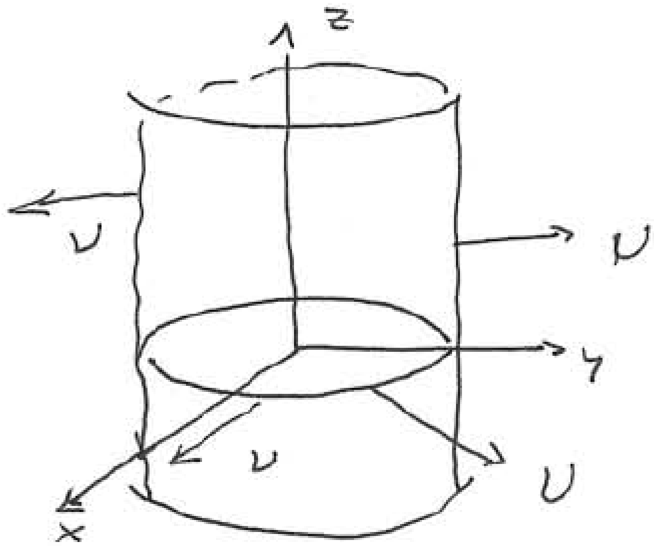

Figure 1: Diagrama cilindre amb vector normal apuntat cap a fora

El vector normal a $\varphi_u \wedge \varphi_v$ normalitzat (dividit pel modul), aquest vector exterior al cilindre (que apunta cap a fora) i és tangent a la superfície. La primera forma fonamental resulta que és la identitat.

```
      / E  F \
I=    |      |
      \ F  G /
```

```
#1 FORMA
E=du.dot_product(du); show(E.full_simplify())
F=du.dot_product(dv); show(F.full_simplify())
G=dv.dot_product(dv); show(G.full_simplify())
```

> # Això no es cap casualitat el que expressa és que aquesta superfície, la del cilindre, és localment isomètrica a un pla.(Això se suposa que es va veure en un dels seminaris anteriors).

Per calcular la segona forma fonamental, procedim com sempre, calculant les segones derivades.

```
      / e  f \
II=   |      |
      \ f  g /
```

```
#2 FORMA
```

```
e=V.dot_product(duu); show(e.full_simplify())
f=V.dot_product(duv); show(f.full_simplify())
g=V.dot_product(dvv); show(g.full_simplify())
```

Trobades la primera `I` i segona `II` fórmules fonamentals podem considerar l endomorfisme Weingarten.

```
# Endomorfisme de Weingarten
 W=I^(-1)*II
```

`#` I amb això ja podem veure que hi ha dos direccions pròpies que corresponen exactament als meridian i paral · lels. I els valors propis ja podem veure que són, els de la diagonal: -1 i 0.

`#` Si voleu a partir d'aquí, automàticament, ja podem veure que les línies de curvatura corresponen justament als paral · lels i als meridians, i a més a més, que els valors propis d'aquestes curvatures principals són:

`#` `zero` que correspondria a moure s verticalment per una d'aquestes generetarius, mentre que l altre és `-1`, que correspon a moure s per un d'aquest cercles que són els paral · lels.

`#` Aquí el signe `-` del `-1`, no és rellevant i indica que el vector normal apunta cap a l exterior mentre que el vector acceleració d'un d'aquest cercles, si ens movem amb acceleració constant, apunta cap a dins.De manera que el producte escalar surt negatiu, per això el signe negatiu.

`#` El que si es més rellevant és que el seu valor absolut és `1` i això és ja que el cercle és de radi `1`.

```
# Curvatura De Gauss K
K=(e*g-f^2)/(E*G-F^2)

# Curvatura mitjana H
H=(E*g-2*f*F+G*e)/(E*G-F^2)

#CURVATURA
K=(e*g-f^2)/(E*G-F^2); show(K.full_simplify()); #Curvatura de Gauss en p \in S.
H=(E*g-2*f*F+G*e)/(2*(E*G-F^2)); show(H.full_simplify()); #Curvatura mitjana en p \in S.
#Curvaturas principals k_1 i k_2
k_1=H+sqrt(H^2-K); show(k_1.full_simplify());
k_2=H-sqrt(H^2-K); show(k_2.full_simplify());
```

`#` Les curvatures principals `k_1`i `k_2` són les solucions del polinomi `lamb^2-2Hlamb+K=0` i per tant també ho podem pensar com:

```
# Curvaturas principals K_1 i k_2
k_i=H+-sqrt(H^2-K)
```

`#` Una altra cosa notable és el valor de la curvatura de Gauss que és el quocient dels determinants de la segona forma entre la primera.

`#` El signe de `H` (curvatura mitjana) no ha ser massa sorprenent i no és particularment rellevant ja que depén del vector normal que hagem agafat. **5:02**

`#` El que potser si es rellevant notar, és que és constant (no depèn del punt), no com en el exemple del ACME. Cosa que no ha de ser massa sorprenent ja que **les isometries, els moviments rígids de R^3, ens permeten passar d'un punt qualsevol a un altre en aquest cilindre, fent una rotació o un un desplaçament vertical. D'un punt qualsevol podem passar a un altre això vol dir que les propietats mètriques es mantindran iguals.** (¿¿¿ja que el cilindre és una superfície de revolució.???)

`#` Ens pot xocar una mica que la curvatura de Gauss sigui `zero`, ja que està clar, d'alguna forma que un cilindre està curvat.

`#` Fins ara em insistit que aquest invariants: les curvatures principals (`k_1`,`k_2`), la curvatura de Gauss (`K`),la curvatura mitjana (`H`). Expressa n no només invariants algebraics sinó també nocions de curvatura, geomètrics (invariants geomètrics). Però potser no està tan clar amb les Curvatures de Gauss (`K`) i curvatura mitjana (`H`).

6:30 min

En aquest cas això de que el cilindre tingui curvatura de Gauss (`K`) igual a zero, això ja veurem que té una explicació important que s'anomena ** Teorema Egregi de Gauss**, d'això en parlarem més endavant.** 6:35 min**

Exemple del Tor de revolució

Un altre exemple potser, ja més interessant és el tor de revolució, superfície que ja hem considerat més d'un cop.

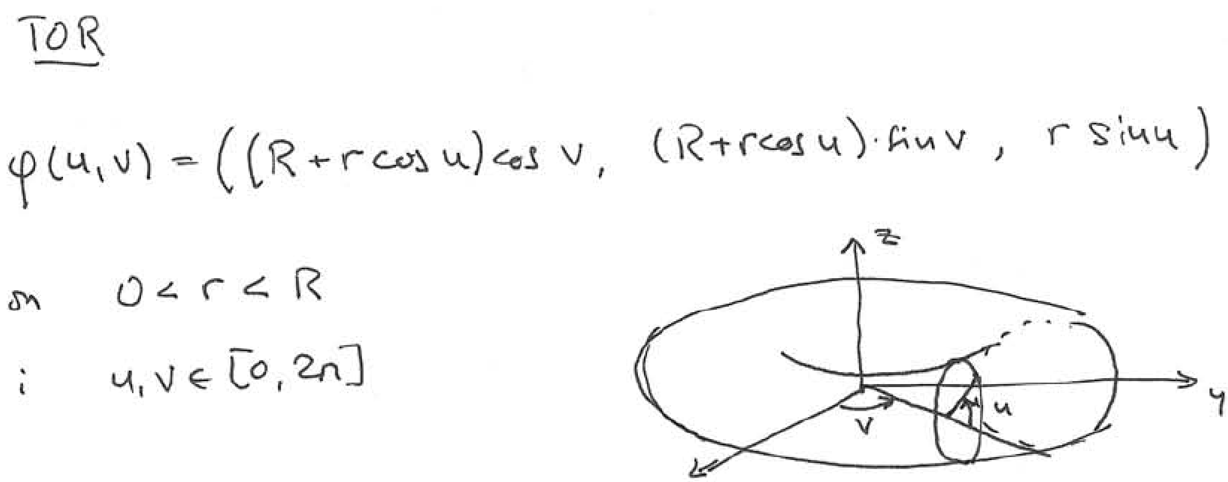

Figure 2: Diagrama i parametrització Tor

Aquí el paràmatre `u` serà l'angle que ens dóna la latitud (angle que surt del pla horitzontal que va giran en aquest sentit) i comencem a contar en `z=0`). L'altre paràmetre `v`, doncs, és girar en el pla `xy` com en altres ocasions.

```
#Tor de revolució
var('u' 'v');
phi(u,v)=( (R+r*cos(u))*cos(v),
           (R+r*cos(u))*sin(v),
           r*sin(u));
```

Podem tornar a fer els càlculs però cap sorpresa ja que com que els cercles dels paral · lels i els meridians son ortogonals doncs per això tenim una matriu diagonal.

No m'entretinc aquí comproveu vosaltres siusplau que és cert, amb llapis i paper.

Ui hi ha un error, perdoneu és

`p=(R+r,0,0)=\varphi(0,0)`

Tenim que el vector normal en p és `V_p` igual a `(-1,0,0)` per tant apunta a l'interior de `T^2` a diferencia del que passava abans.

Si pensem aquest Tor si voleu,com un donut, com un donut de xocolata si voleu, llavors és el vector que va de la xocolata cap a la pasta

Molt bé. Ara per variar una mica el tipus de càlculs que hem fet, permeteu-me fer els càlculs d'una manera una mica diferent.

Aquesta consisteix a derivar directament el vector normal i obtenim aquestes dues expressions ressaltades amb aquests claudàtors grans vermells. Si ens hi fixem resulta que el resultat , de la primera expressió és, és cassi el vector tangent als meridians, bé multiplicat per una constant, de fet, el producte de `-1` dividit per `r`, per `phi` sub `u`.

Això d'entrada ja té un significat i és que la direcció dels meridians serà una direcció propia del endomorfisme de Weingarten. El valor propi aquí serà aquest coeficient d'aquí (senyala a `-1/r`) canviat de signe, ja que el endomorfisme de Weingarten canvia la ...

La segona cosa un pelet més, tampoc és gaire difícil, que quan derivem aquest vector normal `V` respecte `v`, ens surt un múltiple de `phi` sub `v`. Ara no em fixo tant en la contant, perquè és una mica més complicada però això no és gens sorprenent, ja que acabem de veure que `phi` sub `u` ens dóna una direcció principal (`k_1`, ja que és de `u`) i la segona ha de ser ortogonal. I com ja sabem que `phi` sub `u` és ortogonal a `phi` sub `v`. Per tan el catxirulo `-cos(u)/(R+r*cos(u))` serà la segona principal (`k_2`).

Notem que per calcular ara els valors de la segona forma fonamental no és exactament el mateix, tot i que obtindriem el mateix alplicant el calculs amteriors des del principi. Anotem-ho per si un cas:

```
e=-<V_u,phi_u>=r
f=-<V_u,phi_v>=-<V_v,phi_u>=0
g=-<V_v,phi_v>=(R+rcos(u))*cos(u)
```

De manera que la segona forma fonamental és la que segueix que torna a ser una matriu diagonal, ja que com abans: com que els cercles dels paral · lels i els meridians son ortogonals doncs per això tenim una matriu diagonal.

De nou pel Endomorfisme de Weingarten fem el producte i observem que els valors propis que ja havíem obtingut per el càlculs anterior diferent al del exemple del cilindre **canviats de signe**

I a partir d'aquí no es gaire difícil calcular la curvatura de Gauss (`K`) ni la curvatura mitjana (`H`).

Fem alguns comentaris al respecte de `H`, ara si que és rellevant el signe, fixeu-vos que el denominador sempre és positiu però el numerador pot ser positiu i negatiu. Això geomètricament és pot veure al dibuix en vermell (u entre `pi/2` i `3*pi/2`).

De manera que ja tenim feta la classificaicó del punts del tor.

- **El · líptics** `K(p)>0` (llavors `k_1,k_2=!0` i tenen el mateix signe).*C.Gauss positiva*
- **Hiperbòlics** `K(p)<0` (llavors `k_1,k_2=!0` i tenen el diferent signe). *C.Gauss negativa i Weingarten no nul*
- **Parabolics** `K(P)==0` i `W_p=!0` (llavors `k_1==0` i `k_2=!0`). *C.Gauss nul · la*
- **Plans** si `W_p==0` (llavors `k_1=k_2=0`).

Tipus de punts	valors de `u`
El · líptics	`u \in (-pi/2,pi/2)`
Hiperbòlics	`u \in (pi/2, 3*pi/2)`
Parabolics	`u==pi/2==-pi/2`
Plans	Sembla que no n hi ha.

 # 15:25 min. Vaig malament de temps només apuntaré el més rellevant

Les línies de curvatura tornen a ser meridians i paral · lels.

Ens podríem preguntar que passa amb les líneas asimptomàtiques.

Les **líneas asimptomàtiques** recordem que són lineas que tenen la propietat que el seu **vector tangent** és una direcció asimptotica, és a dir, una direcció en que la **segona forma fonamental s'anul · la**

> # I en aquest cas, recordem la fórmula que ens donava aquestes lineas, era l'equació diferencial que s'escrivia aquí.

`e*(u')^2+2*f*(u')*(v')+g(v')^2==0`

En el cas del Tor això queda com, (`f=0`):

`r(u')^2+(R+r*cos(u))*cos(u)*(v')^2==0`

Que té solucions si `cos(u)<=0`

Fora de les regions en vermell del dibuix, doncs, no i haurà líneas asimptotiques.

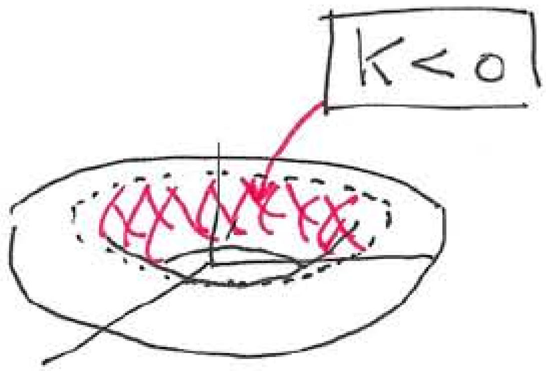

Figure 3: Curvatura de Gauss NEGATIVA de -u/2 a u/2

La linea asimptotica és la, també vermella, linea marcada del dibuix que es pot trobar a:

[https://mathcurve.com/courbes3d/lignes/asymptotictore.shtml]

Comentari 01: En les superficies de revolució els meridians (i.e. , les corbes generatrius) i els paral · les són líneas de curvatura.

> # En el cas d'un pla qualsevol linea es una linea de curvatura,com ja hem vist, i per Teorema de Joachimstal també ho serà de la superficie de la terrisa (bonic jerro). Això mostra que els meridians són lineas de curvatura. Però jo he dit més, he dit els meridians i els paral · lels. La següent qüestió és com que sabem que la segona ha de ser ortogonals , si ens creiem el teorema que veureu a problemes doncs, ja està.

Comentari 02: Donat un punt `p` de una superfície `S` hi ha tres casos:

1. `K(p)>0`, llavors no hi ha cap direcció asimptomàtica i per tant aquí no té cap sentit buscar lineas asimptòtiques. El perquè si voleu bé donat per aquesta formula d'Euler que teniu a sota.

   > # La fórmula de Euler recordeu ens donava les direccions que tenim en el **pla tangent** en termes de les **curvatures principals**. Si aquestes dues curvatures principals tenen en mateix signe, les dues positives o les dues negatives,... (**22:47min**).

2. `K(p)==0` llavors `T_pS`(que suposo que és deu llegir com el vector tangent a la superficie en el punt p) tè exactament:
   - una direcció assimptotica si `W_p=!0`
   - si totes les direccions són assimptotiques si `W_p==0`. >`#` Els *pols del tor* , els dos, són líneas assimptotiques de fet que corresponen a aquest punts Parabòlics però que no són punts plans.

   > # Ara el punt més interesant quan la curvatura és negativa.

3. `K(p)<0` Llavors `T_pS` té exactament **dues** direccions asimptomàtiques.

    `#` I això de nou és veu empleant la fórmula d'Euler i que si volem trobar el angle que correspon a aquestes direccions asimptòtiques les podem trobar d'aquest amanera:

```
tan^2(theta)=-k_1/k_2
```

`#` Observem que les dues solucions fan referencia a els dos angles positiu i negatiu del dibuix. Valors entre `pi/2`i `-pi/2`

26:01min

Exercici Proposta

`#` Segurament ja us ha sortit la corba de la catenaria per algún lloc, doncs en aquest exemple tractarem *la catenoide*

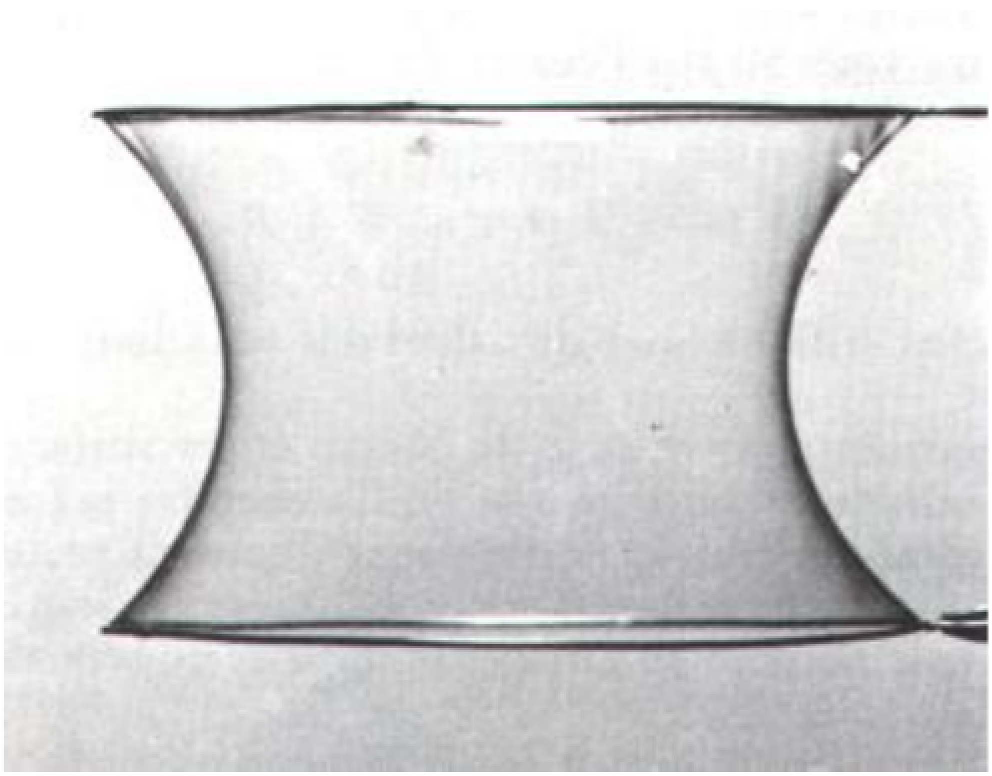

Figure 4: Fotografia **Catenoide** per dos cercles metàl · lics i el que els uneix, com ja podeu imaginar, és una pel · lícula de sabó

Es considera la **catenoide**, superfície parametritzada per

```
var('u' 'v');
phi(u,v)=(cosh(u)*cos(v),
          cosh(u)*sin(v),
          u);
```

Comproveu que en aquestes coordenades és té que:

```
I=matrix([[cosh(u)*cosh(u),0],
          [0,cosh(u)*cosh(u)]]);
```

```
II=matrix([[-1,0],[0,1]]);
# Curvatura de Gauss
K=-1/(cosh(u))^4;
# Curvatura mitjana
H=0; #Superficies minimals
```

> # Les **superfícies mínimals** resolen el problema de trobar de donada una curvatura trobar una superfície mínima que tenen aquesta corba com a bora.Aquestes estàn caracteritzades perquè la seva curvatura mitjana `H` és identicament zero.

Que podríem dir de les lineas asimptomàtiques d'aquesta superfície.

> # Us recoman-ho vivament que mireu aquest web

[https://mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml]

D'aquí hem tret el primer dibuix tant bonic de la catenoide. Les línies corresponen a unes cuantes lineas asimptomàtiques.

La segona imatge és un dibuix físic de la **catenoide**, que no ens ha d'estranyar pas ja que hem dit que aquestes superficies són aquelles que minimitzam l'àrea, i en aquest cas les dues corbes són dos circumferències. De fet són dos cercles metàl · lics i el que els uneix, com ja podeu imaginar, és una pel · lícula de sabó. Que uneix aquestes dues circumferències que minimitza la àrea entre els dos cercles metàl · lics complint aquesta condició.