
GEOMETRIA DIFERENCIAL

Seminari 10
Geodèsiques

§1 Equacions d'Euler-Lagrange. Segons el *principi de mínima acció* la trajectòria $\alpha(t)$ que segueix una partícula en un sistema mecànic és un punt crític de l'acció $\mathcal{A}(\alpha) = \int_a^b L(\alpha, \alpha') dt$ on $L = T - V$ és la funció Lagrangiana (diferència entre energies cinètica i potencial). El càlcul de variacions mostra⁶ que aquestes trajectòries satisfan les equacions d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha'_i} \right) = 0. \quad (10.1)$$

Exercici 10.1. Considerem una partícula de massa unitat que es mou sobre una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ parametritzada localment per $\mathbf{x}(u, v)$. Descriuim la seva trajectòria $\alpha(t)$ en coordenades locals mitjançant $t \mapsto (u(t), v(t))$. Escriviu quina és la seva energia cinètica.

Solució: $E_c = \frac{1}{2} m \|\alpha'(t)\|^2 = E(u, v) \frac{(u')^2}{2} + F(u, v) u' v' + G(u, v) \frac{(v')^2}{2}.$

Si no hi ha cap força exterior aleshores l'energia potencial és zero i la funció de Lagrange associada és justament l'energia cinètica. Observeu que en aquest cas el principi de conservació de l'energia es tradueix en que la velocitat escalar és constant al llarg de les geodèsiques.

Exercici 10.2. Escriviu les equacions d'Euler-Lagrange del moviment

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \quad (10.2)$$

i comproveu que són equivalents a imposar que α'' ⁷ no té component tangent a S .

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{1}{2}m(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u'} &= m \frac{d}{dt} (Eu' + Fv') = m \frac{d}{dt} \langle \gamma', \varphi_u \rangle \\ &= m(\langle \gamma'', \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle (u')^2 + \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle u'v' + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle (v')^2) \\ &= m\langle \gamma'', \varphi_u \rangle + \frac{1}{2}m(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2). \end{aligned}$$

També

Si trobem les equacions d'Euler Lagrange obtenim $Eu'' + Fv'' = \dots$, $Fu'' + Gv'' = \dots$. Les equacions de les geodèsiques són $u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0$ i $v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0$. Comparem amb els sistemes que defineixen els Γ 's i hem acabat (tot i que llarg i pesat).

⁷Com s'ha fet a teoria, escriviu $\alpha'' = A\varphi_u + B\varphi_v + C\nu$.

Així doncs, les trajectòries d'una partícula que satisfan el principi de mínima acció per l'energia cinètica són aquelles sobre les quals l'acceleració és perpendicular a S . Aquestes corbes s'anomenen *geodèsiques parametritzades* de S . Observeu que les equacions d'Euler-Lagrange es poden fer servir per calcular fàcilment els símbols de Christoffel d'una superfície.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \{ \Gamma_{ij}^k \} \quad \left(\text{comparant amb } u'' + \sum \Gamma_{ij}^k u_i' u_j' = 0 \right)$$

§2 Superfícies de revolució. Es considera la superfície de revolució S obtinguda fent girar la corba regular $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ (amb $a(u) > 0$) al voltant de l'eix OZ . Recordeu que

$$\varphi(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v, b(u))$$

és una parametrització regular de S . Les corbes coordenades d'aquesta parametrització s'anomenen *paral·lels* si $u = u_0$ i *meridians* si $v = v_0$.

Recordeu que si la corba $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc aleshores els coeficients de la primera forma fonamental de S associada a la parametrització φ són $E = 1$, $F = 0$ i $G = a^2$.

Exercici 10.3. Fent servir (10.2), calculeu les equacions de les geodèsiques i deduiu-ne els símbols de Christoffel de S respecte la parametrització φ anterior (suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc).

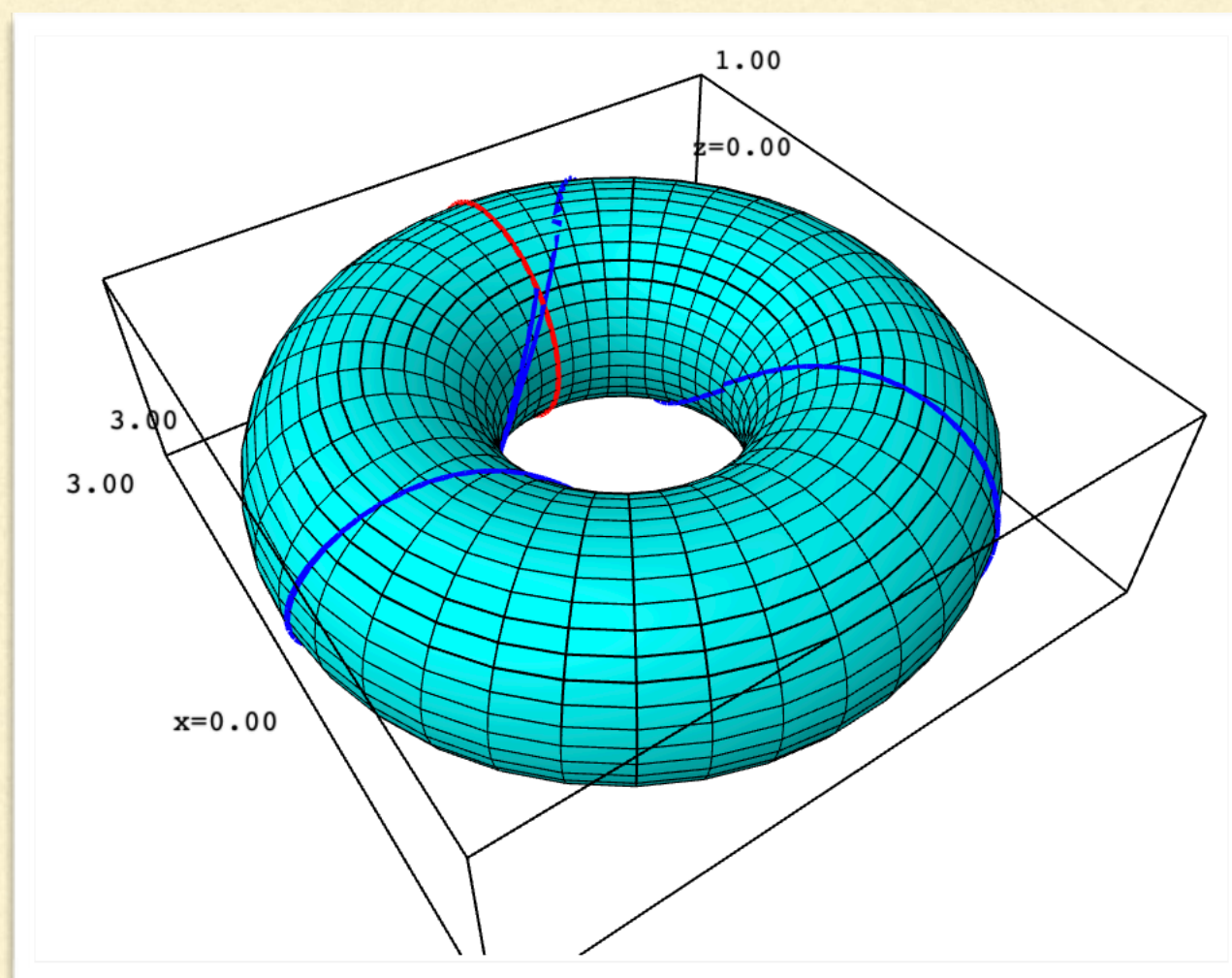
Solució: La funció Lagrangiana és un multiple de $u'^2 + a(u)^2 v'^2$. Les equacions d'Euler Lagrange són

$$u'' = aa'v'^2, \quad (a^2v')' = 0.$$

(compte que a' és derivada respecte u i les altres respecte t , el paràmetre de la corba.) Comparant amb l'equació de les geodèsiques veiem que $\Gamma_{22}^1 = -aa'$ i $\Gamma_{12}^2 = a'/a$ i els altres termes són nuls.

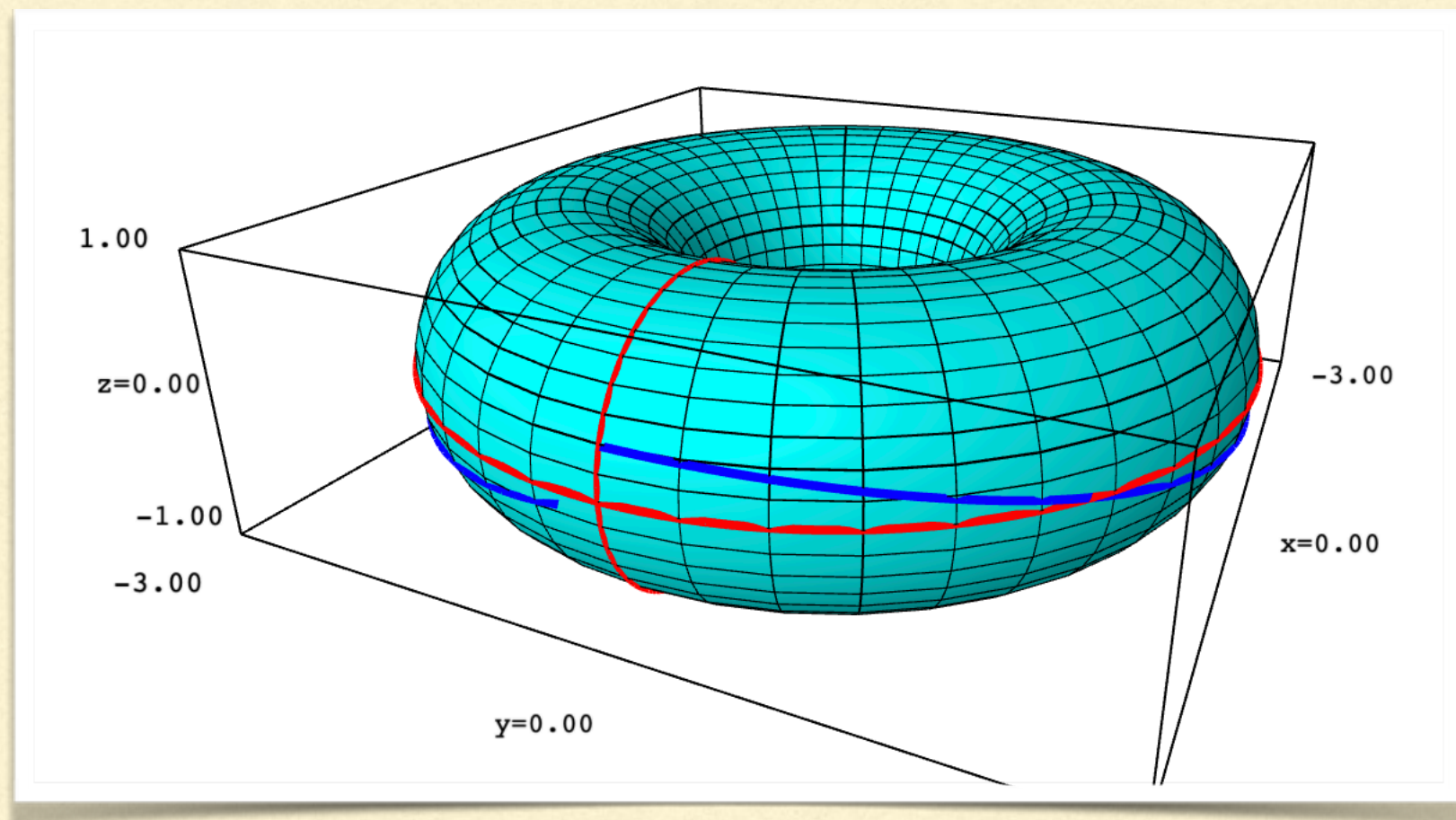
Exercici 10.4. Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució, parametritzats convenientment, són geodèsiques parametritzades.

Solució: *Substituïm $t \rightarrow (kt + r, v_0)$ amb $k, r \in \mathbb{R}$ i veiem que compleixen les equacions.*



Exercici 10.5. Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.

Solució: Són corbes $t \rightarrow (u_0, v(t))$. De la primera equació tenim que $a'(u_0) = 0$ ja que $a > 0$ i $v' \neq 0$ ja que no es tracta d'un punt. Llavors es compleix el que diu l'enunciat.



Recordeu que si γ és una corba unitaria ($|\gamma'| \equiv 1$) continguda a una superfície S aleshores podem descomposar el vector acceleració κN com a suma d'una component normal $k_n \nu$ i una component tangencial $k_g(\nu \times T)$ a la superfície, on T, N, B és el triedre de Frenet de γ i ν és el vector normal de S .

Exercici 10.6. Trobeu la curvatura geodèsica i la curvatura normal dels paral·lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$ i $a'(u)$ suposant que $\alpha(u)$ està parametritzada per l'arc.

Solució: Aquestes curvatures no varien al llarg del paral·lel, estudiem quan $y = 0$. En un d'aquests punts el normal unitari a la superfície és $\nu = (-b', 0, a')$ i com que el paral·lel és una circumferència de radi a la curvatura del paral·lel com a corba de l'espai és $1/a$. La direcció del normal de la corba és $N = (-1, 0, 0)$. Llavors, com que $\kappa N = k_g(\nu \times T) + k_n \nu$ i $T = (0, 1, 0)$, tenim

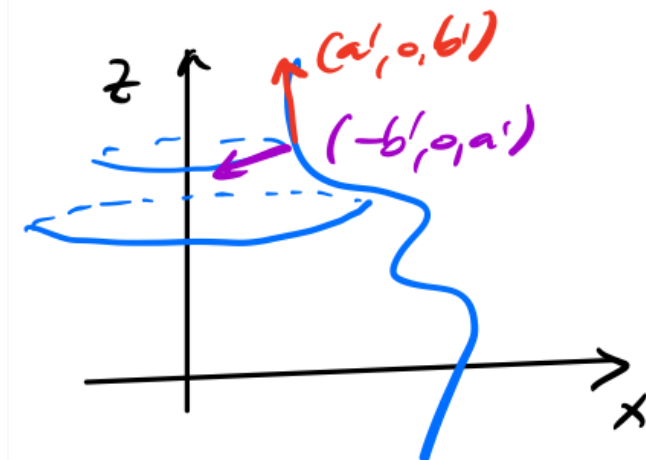
$$(-1/a, 0, 0) = k_g(-a', 0, -b') + k_n(-b', 0, a').$$

Llavors

$$k_n = \frac{b'}{a} \quad \text{i} \quad k_g = \frac{a'}{a}.$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(u) &= (a(u), 0, b(u)) & x &= a(u) \\ \varphi_u &= (a' \cos v, a' \sin v, b') & y &= 0 \\ \varphi_v &= (-a \sin v, a \cos v, 0) & z &= b(u) \end{aligned} \right\}$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a' \cos v & a' \sin v & b' \\ -a \sin v & a \cos v & 0 \end{vmatrix} \Big|_{v=0} \sim (-b', 0, a')$$

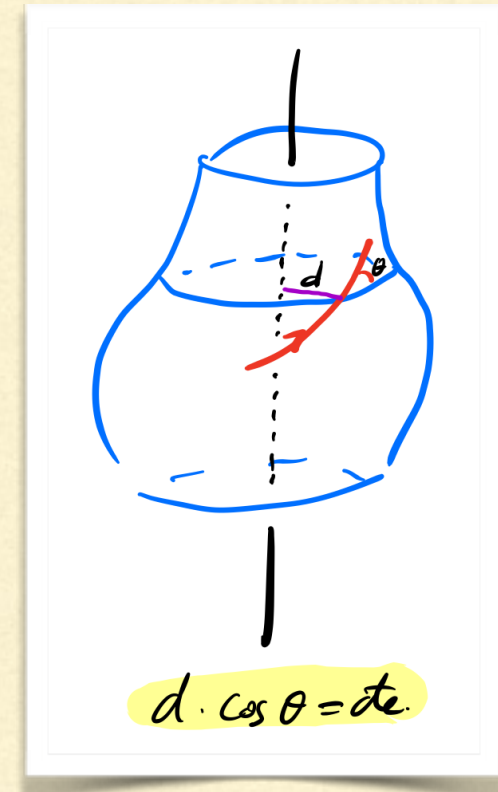


Exercici 10.7. Demostreu el *teorema de Clairaut*: si $\gamma(t)$ és una geodèsica (parametritzada) de S i $\theta(t)$ és l'angle que forma γ amb el paral·lel per $\gamma(t)$, aleshores el producte de la distància de $\gamma(t)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(t)$ és constant al llarg de la corba γ .

Solució: Calculem l'angle de la corba unitària γ amb un paral·lel:

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma', \mathbf{x}_v \rangle}{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle^{1/2}} = v' a(u).$$

Per ser geodèsica tenim que $a^2 v' = ct$, llavors $a \cos \theta = ct$. que és el que volíem provar.

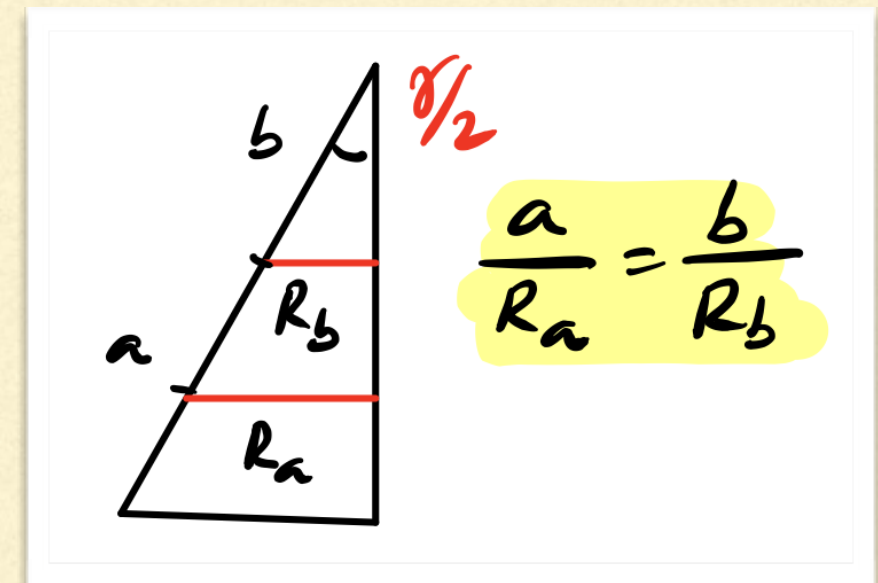
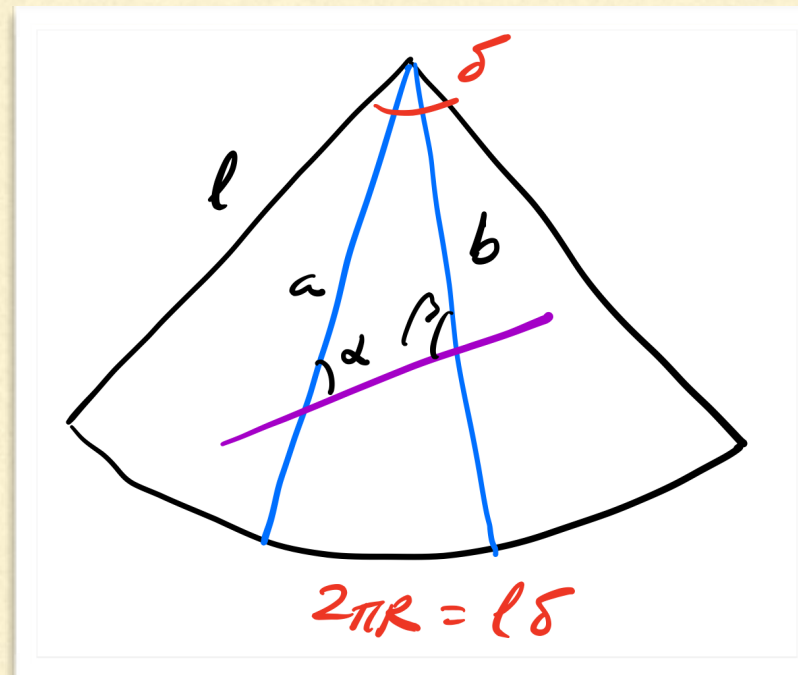
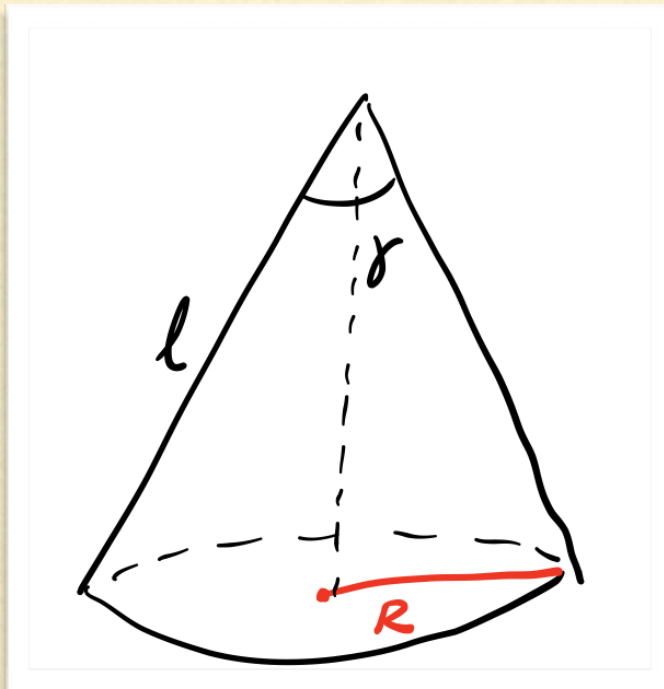


Exercici 10.8. Comproveu que la relació de Clairaut és equivalent a la constància de la component z del moment angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecte l'origen d'una partícula que es mou lliurement sobre la superfície de revolució (és a dir, que segueix el principi de mínima acció per l'energia).

Solució: Tenim $\mathbf{r}(t) = (a(u(t)) \cos(v(t)), a(u(t)) \sin(v(t)), b(u(t)))$ i $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{r}'(t)$. Fent un càlcul comprovem que la component z de $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ és $a^2 v'$ i hem acabat.

Exercici 10.9. Observeu que la relació de Clairaut sobre un con no és més que el teorema del sinus. *Indicació:* Desplegant el con sobre un pla les geodèsiques es transformen en rectes (per què?). Apliqueu llavors el teorema del sinus a un triangle adequat.

Solució: Un con C de base un cercle de radi R , generatriu de longitud l i angle central γ el podem desplegar isomètricament sobre un sector S d'una circumferència de radi l i angle $2\pi R/l$.

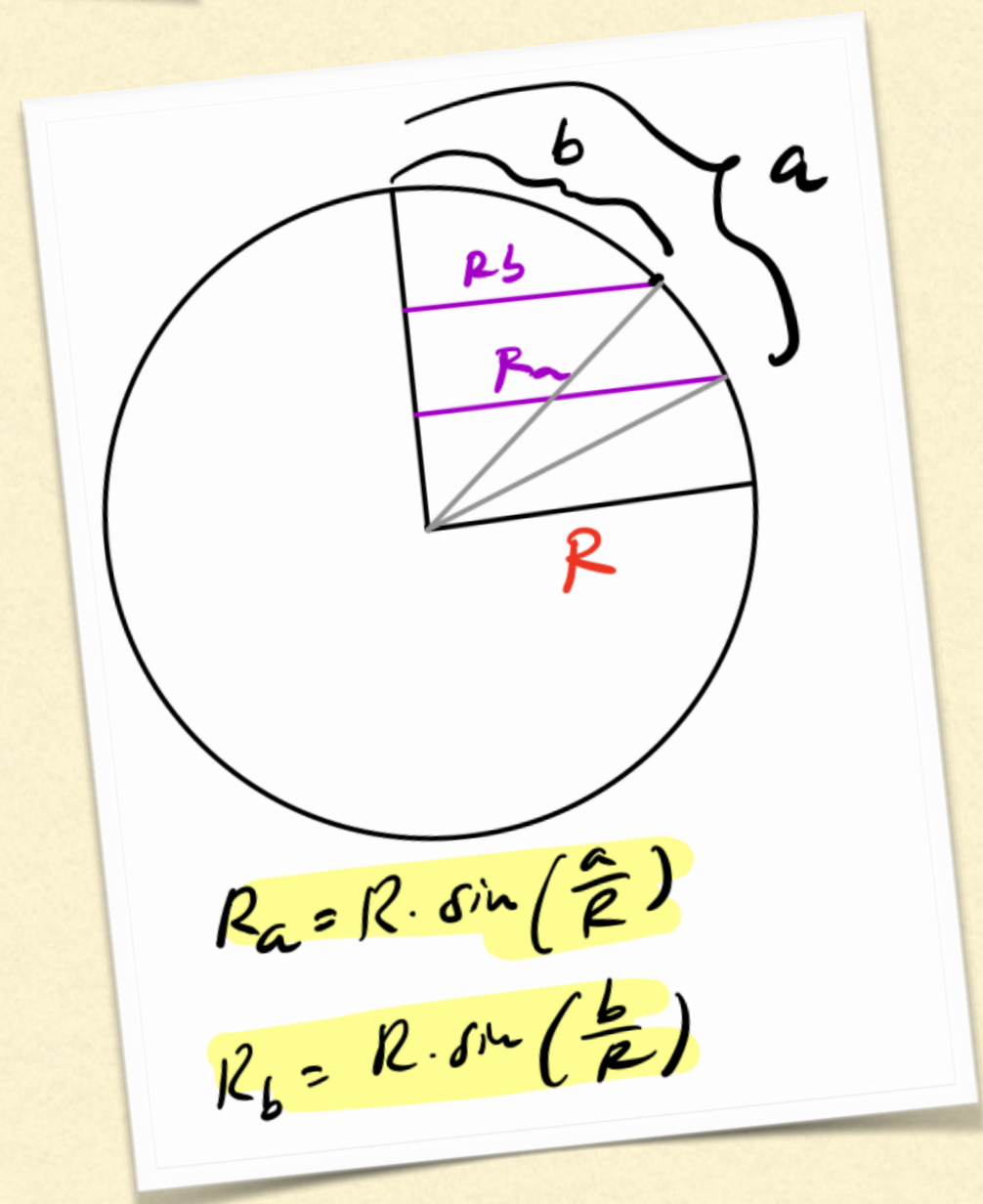
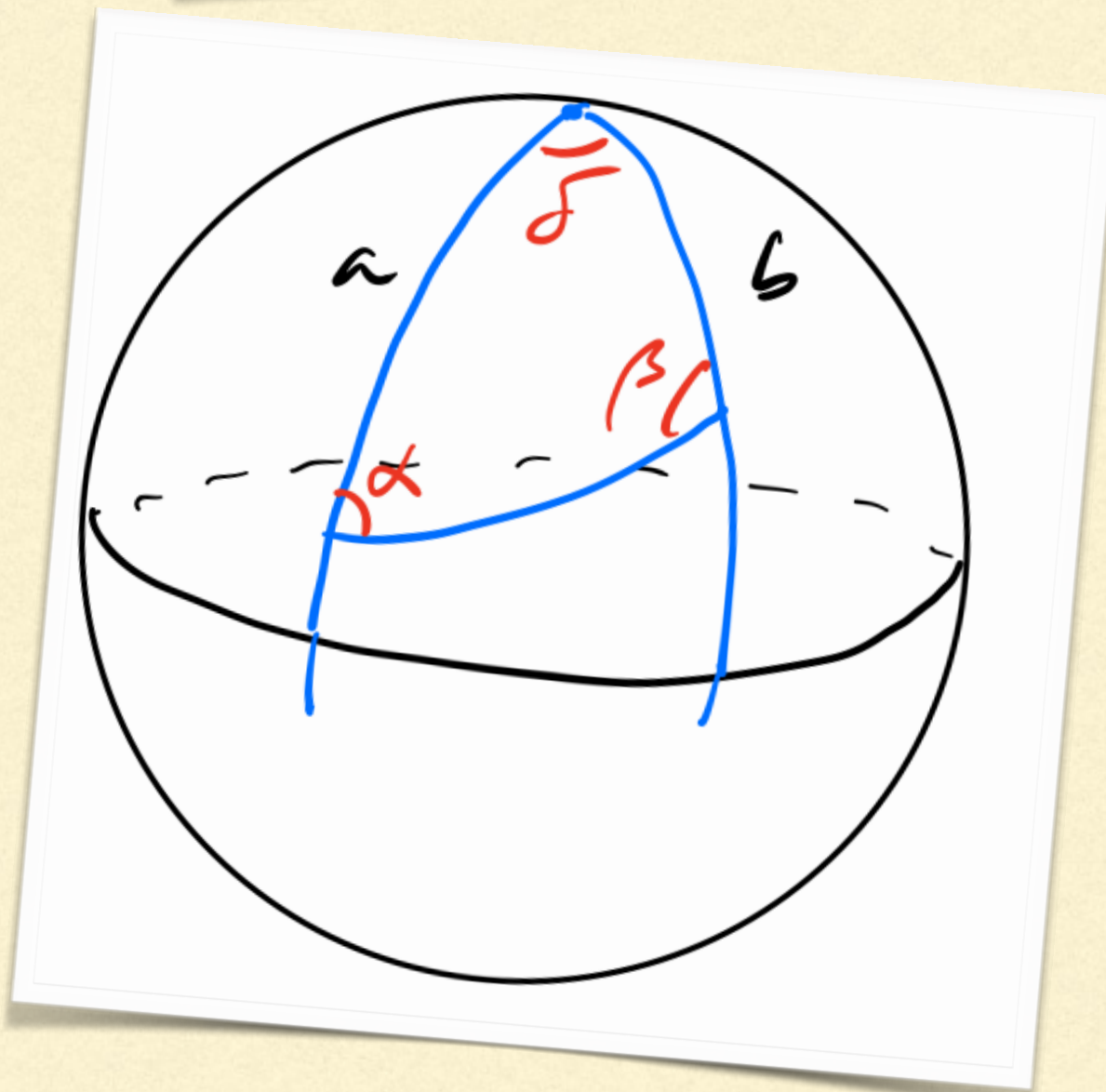


Considerem dos meridians a S , són dos radis de la circumferència i una geodèsica que els talla. Aquesta geodèsica és una recta al sector S . Considerem el triangle a S que té com a costats els meridians i la geodèsica. Si a i b són les longituds dels costats-meridians i α i β els angles interiors dels costats-meridians amb la geodèsica, pel teorema de Clairaut tenim que $R_a \sin \alpha = R_b \sin \beta$ on R_a i R_b són les distàncies a l'eix dels vèrtex corresponents, pensats ara al con. Com que $R_a/a = \sin(\gamma/2)$ i $R_b/b = \sin(\gamma/2)$ substituint resulta que

$$\frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{a}$$

Exercici 10.10. Observeu que la relació de Clairaut sobre l'esfera no és més que el teorema del sinus (esfèric). *Indicació:* Apliqueu el teorema del sinus esfèric a un triangle amb vèrtex al pol nord.

Solució: *Procedim de forma similar (veure dibuix).*

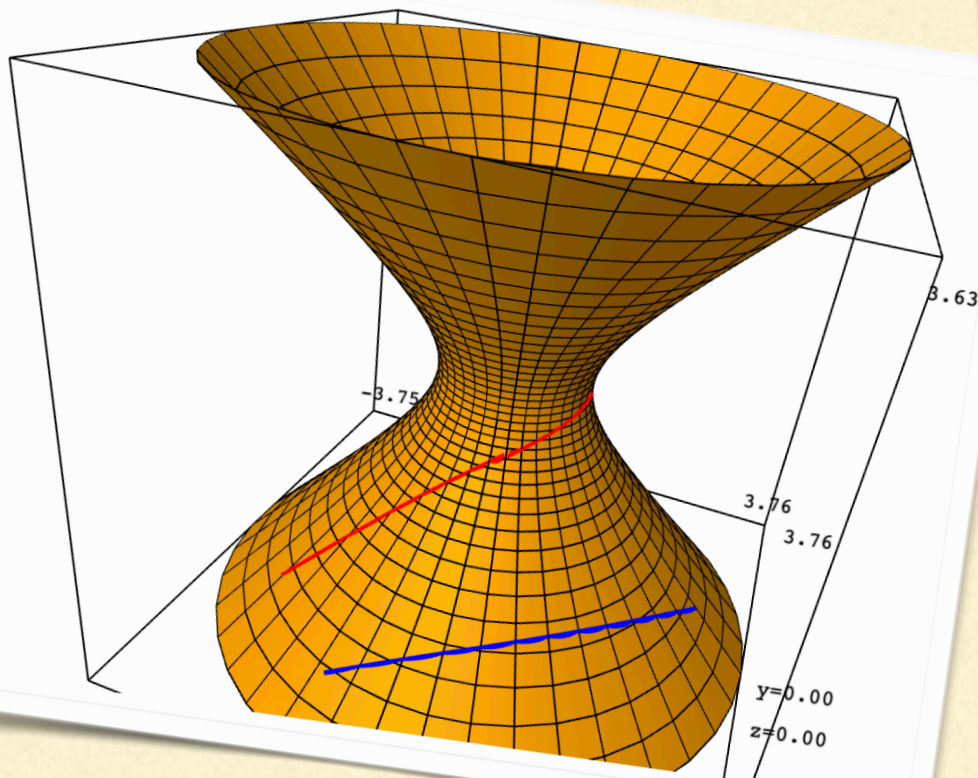


Exercici 10.11. Sigui S una superfície de revolució i $d : S \rightarrow (0, \infty)$ la funció distància a l'eix de gir. Pel teorema de Clairaut, cada corba geodèsica $\gamma \subset S$ té associat un nombre $c_\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(\gamma(t)) \cos \theta(t) = c_\gamma$. Proveu que $c_\gamma = 0$ si i només si γ és un meridià. Si γ és una geodèsica amb $c = c_\gamma > 0$ aleshores γ està inclosa en la regió $B_c := \{d \geq c\} \subset S$. Suposant que $B_c = \varphi([u_0, u_1] \times [0, 2\pi])$ per certs u_0, u_1 tals que $a'(u_0), a'(u_1) \neq 0$, proveu que γ és tangent als paral·lels $u = u_0$ i $u = u_1$ en algun punt.

Solució: Escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Suposem γ definida per a tot t (us recomanem seguir el curs de Geometria Riemanniana!). Observem $d(\gamma(t)) = a(u(t)) \geq c$. Si $u'(t_0) = 0$ llavors $\theta(t_0) = 0$ i $d(\gamma(t_0)) = \frac{c}{\cos(\theta(t_0))} = c$. Podem suposar, doncs, que $u(t)$ és monòtona i acotada entre u_0 i u_1 (definida per tot t). Si no assoleix mai els valors u_0, u_1 tindrem

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u'(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} v'(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u''(t) = 0$$

De la primera equació de les geodèsiques deduïm $\lim a' = 0$. Contradicció.



```
bulb = ParametrizedSurface3D(((1/(1+u^2))*cos(v), (1/(1+u^2))*sin(v), u), (u, v), 'Bulb');
bp=bulb.plot((-1.5,1.5), (0,2*pi), aspect_ratio=1, mesh=True, color='orange')
gh1 = [c[-1] for c in bulb.geodesics_numerical((0,pi/4), (0.25,1), (0,20,150))]
gh2 = [c[-1] for c in bulb.geodesics_numerical((.5,0), (0,1), (0,20,150))]
geobulb1=line3d(gh1,color='blue',thickness=5);
geobulb2=line3d(gh2,color='red',thickness=7);
bp+geobulb1+geobulb2
```

