Segon Lliurament

Geometria Diferencial
(3r curs, Grau en Matemàtiques)
Universitat Autònoma de Barcelona

Marc Graells

30 de abril de 2020

Problema 122

Sigui S una superfície reglada tal que les generatrius són rectes senceres. Suposem $K < 0$. Demostra que la curvatura total és igual a $-2L$ on L és la longitud de la indicatriu unitària de les generatrius.

Useu aquest resultat per calcular la curvatura total de la sella de muntar (hiperboloide) $z = xy$ i vegeu que coincideix amb l'àrea sobre l'esfera per aplicació de Gauss.

Solució:

Demostració:

Suposem que S és una **superfície reglada** de $\mathbb{R}^3$, és a dir, una superfície que es pot parametritzar com $\varphi(s,t) = \alpha(s) + t \cdot u(s)$, on $\alpha(s)$ i $u(s)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ i $\|u(s)\| = 1$. On $s \in I \subset \mathbb{R}$ o interval i $t \in \mathbb{R}$ és un nombre real.

Volem veure si podem reparmetritzatr $\varphi(s,t)$ com $\phi(s,t) = \beta(s) + t \cdot u(s)$ amb $\langle \beta'(s), u'(s) \rangle = 0$, on com abans $\|u(s)\| = 1$.

Fiquem $\beta(s)$ com $\alpha(s) + \gamma(s)u(s)$. Derivant respecte de s (aplicant *regla de la cadena*) tenim la següent igualtat: $\beta'(s) = \alpha'(s) + \gamma'(s)u(s) + \gamma(s)u'(s)$

D'on deduïm que:

$$\langle \beta'(s), u'(s) \rangle = \langle \alpha'(s), u'(s) \rangle + \gamma'(s)\langle u(s), u'(s) \rangle + \gamma\langle u'(s), u'(s) \rangle = 0.$$

On $\gamma'(s)\langle u(s), u'(s) \rangle = 0$. Per tant tenim per exigencia de igualar a zero:

$$\gamma(s) = \frac{-\langle \alpha'(s), u'(s) \rangle}{\langle u'(s), u'(s) \rangle}$$

I tenim així β:

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), u'(s) \rangle}{\|u'(s)\|^2} u(s)$$

Observem que el denominador és sempre positiu i per tant no s'anual mai.

Considerem ara $\phi(s,t) = \beta(s) + u(s)t$ amb β amb les propietats que volíem. Llavor com que $\|u(s)\| = 1$ per a tot s que pertany a I interval de $\mathbb{R}$, tenim $\langle u(s), u'(s) \rangle = 0$. També tenim, tal com hem escollit β, que $\langle \beta', u' \rangle = 0$ [1] cosa que implica que u, β pertanyen al subespai ortogonal al subespai vectorial generat per u'. Equivalentment, podem dir que existeix $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\beta'(s) \wedge u(s) = u'(s)\lambda(s)$, fet que ens servirà més endavant.

Recordem que la **curvatura total** *s'entén com la integral de la curvatura de Gauss K respecte l'element d'àrea* dA. Calculem primer les primeres derivades de $\phi(s,t)$ i els valors de la matriu de la primera forma fonamental E, F, G:

$$\begin{cases} \phi_s := \beta'(s) + u'(s) \cdot t \\ \phi_t := 0 \end{cases}$$

[1] Abús de notació, és clar, però que ens referim a $\langle \beta'(s), u'(s) \rangle$.

$$\begin{cases} E := \langle \phi_s, \phi_s \rangle = \|\beta'(s)\|^2 + t^2 \|u'(s)\| \\ F := \langle \phi_s, \phi_t \rangle = \langle \beta'(s), u(s) \rangle + \langle u'(s), u(s) \rangle t = 0 \\ G := \langle \phi_t, \phi_t \rangle = 1 \end{cases}$$

També calculem el vector normal a la superfície [2]:

$$\phi_s \wedge \phi_t = \beta' \wedge u + t \cdot (u' \wedge u)$$

$$\|\phi_s \wedge \phi_t\|^2 = \langle \beta' \wedge u, \beta' \wedge u \rangle + 2t \langle \beta' \wedge u, u' \wedge u \rangle$$
$$+ \langle u' \wedge u, u' \wedge u \rangle \cdot t^2$$

$$\overset{id.poltz}{=} \lambda^2 \|u'\|^2 + \|u'\|^2 t^2 = (\lambda^2 + t^2)\|u'\|^2.$$

Per tant tenim que el vector normal a la superfície és

$$\nu := \frac{\beta' \wedge u + t \cdot (u' \wedge u)}{\sqrt{\lambda^2 + t^2}\|u'\|}$$

Ara *anem* a per els coeficient de la segona (e, f, g) forma fonamental amb els càlculs previ de les derivades de segon ordre:

$$\begin{cases} \phi_{ss} := \beta'' + u'' \cdot t \\ \phi_{st} := u' \\ \phi_{tt} := 0 \end{cases}$$

De fet no calcularem $e := \langle \nu, \phi_{ss} \rangle$ ja que és un calcul que ens podem *estalviar*, g és zero.

$$\begin{cases} f := \langle \nu, \phi_{st} \rangle = (\lambda \|u'\|)/(\sqrt{t^2 + \lambda^2}) \\ g := \langle \nu, \phi_{tt} \rangle = 0 \end{cases}$$

Aplicant la fórmula per el càlcul de la curvatura de Gauss K:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2 \| u'\|^2}{(t^2 + \lambda^2)^2 \|u'\|^2} = \frac{-\lambda^2}{(t^2 + \lambda^2)^2}$$

[2] Eliminem el excés de notació, referint-nos a $\beta(s), u(s)$ simplement com a β, u, en el ben entès que pensem en $\beta(s), u(s)$.

Ara queda calcular la **curvatura total**, integrant la següent expressió:

$$KdA = \frac{-\lambda^2}{(t^2 + \lambda^2)^2} \cdot \sqrt{(\lambda^2 + t^2)}\|u'\| = \frac{-\lambda^2 \|u'\|}{(\lambda^2 + t^2)^{3/2}}$$

L'integral respecte t podem veure que és convergent aplicant *criteri de comparació per pas al límit* més endavant. Ara:

$$\int_{s \in I} \int_{-\infty}^{\infty} KdA = \int_{s \in I} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda^2 \|u'\|}{(\lambda^2 + t^2)^{3/2}} dt \right) ds$$

Per simetria de la recta real respecte zero, i treien de la *integral més profunda* $\|u'\|$ funció de s que no depèn de t, també *desplacem* el signe negatiu *cap a fora de l'integral*:

$$-2 \cdot \int_{s \in I} \|u'\| \cdot \left(\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + t^2)^{3/2}} dt \right) ds$$

Manipulant ara només la integral respecte de t:

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\sqrt{\lambda^2 + t^2})^3} dt \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + (t/\lambda)^2})^3} dt$$

Considerem ara la integral definida amb $G > 0$

$$\int_0^G \frac{1}{(\sqrt{1 + (t/\lambda)^2})^3} dt$$

I fem el canvi de variable següent:

$$\begin{cases} t = \lambda \tan(\theta) \\ dt = \frac{\lambda}{(cos(\theta))^2} \end{cases}$$

i simplificant, obtenim que la integral és equivalent a :

$$\int_0^{G(\theta)} \lambda \cdot \cos(\theta) d\theta = \lambda \cdot |\sin(\theta)|_0^{G(\theta)}$$

$$= \lambda \cdot |\sin(\arctan(t/\lambda))|_0^G =$$

$$\lambda \cdot (\sin(\arctan(G/\lambda)) - 0) \xrightarrow{G \to \infty} \lambda(1 - 0) = \lambda$$

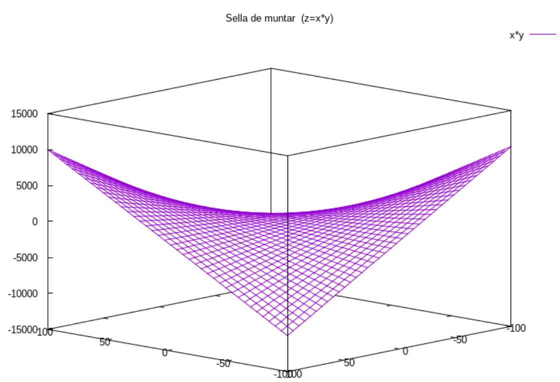
Retornant a la integral inicial i donat que L és la longitud de la corba és la indicatriu unitària de les generatrius.

$$\int_{s\in I}\int_{-\infty}^{\infty} K dA = -2\cdot\int_{s\in I}\|u'\|\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda)\,ds$$

$$= -2\cdot\int_{s\in I}\|u'\|ds = -2L$$

,com volíem veure.

Un cas concret:



Apliquem ara el resultat anterior al cas concret proposat de l'hiperboloide $xy = z$ (*sella de muntar*). A partir d'ara ens referirem a la superfície com S. Per poder aplicar la proposició demostrada. Abans però, ens hem de *conscienciar de que* S efectivament compleix les dos condicions que requereix la proposició, és a dir:

1. S és reglada, és a dir, existeix una funció φ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, tal que la imatge $\varphi(s,t)$ de (s,t) és de la forma $\alpha(s)+t\cdot\beta(s)$ on α i β són corbes a l'espai euclidià $(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle)$, i $\|\beta(s)\| = 1$.

2. La curvatura de Gauss K de la superfície ha de ser estrictament negativa, és a dir, $K < 0$.

Veiem **1.**. Per l'equació que defineix la superfície sabem que tot punt de la superfície és pot escriure de la forma (x, y, xy), si a més fixem $y = y_0 \in \mathbb{R}$, podem construir la següent parametrització de S:

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = xy\} = (0,y_0,0)+x\cdot(1,0,y_0)$$

Normalitzant el vector director, per seguir mateixa notació que en la demostració, tenim que S parametritzada com:

$$\varphi(s,t) = (0,s,0)+\frac{t}{\sqrt{1+s^2}}(1,0,s)$$

que ja *ens diu* que és una superfície reglada.

Per veure que la curvatura **2.**, és a dir que la curvatura és sempre negativa, en les condicions que estem és suficient recorda el següent *proposició* vist i demostrada al *curs*.

> **Proposició 7.1.2:**
> *La Curvatura de Gauss K d'una superfície reglada compleix que $K \le 0$. A més, $K = 0$ si i només si el vector normal unitari ν de S és constant al llarg de les generatrius.*

Ara podem aplicar la proposició demostrada per tal de coneixer la curvatura total a partir de la longitud de la indicatriu.

Recordem que: *La direcció de les* **rectes de la superfície reglada** *està donada per un vector unitari* $u(s)$. *La* **indicatriu** *és la corba que descriu aquest vector sobre l'esfera unitat centrada a l'origen.*

Calculem ara aquest vector:

$$u'(s) = \frac{1}{(\sqrt{1+s^2})^3}\cdot(-s,0,1)$$

i normalitzem-lo:

$$\|u'(s)\| = \frac{\sqrt{1+s^2}}{(\sqrt{1+s^2})^3} = \frac{1}{1+s^2}$$

Aleshores la longitud que busquem és

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s^2}ds = 2\cdot\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}ds$$

$$= 2\cdot\lim_{G\to\infty}|\arctan(s)|_0^G = 2\cdot(\pi/2-0) = \pi$$

Per tant, per proposició anterior, ja podem saber que la curvatura total de *la sella de muntar* és:

$$\iint_S KdA = -2\pi$$

Ara ens queda veure que aquest valor coincideix amb l'àrea sobre l'esfera per l'aplicaicó de Gauss $\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2$.

És a dir, estem cercant, $AreaSobre(\mathcal{N}(s))$ on el signe té un significat geomètric *de posició.* Com que l'aplicació de Gauss és una parametrització local de l'esfera unitat, de fet el que estem cercant és

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{N}_s \wedge \mathcal{N}_t\| dsdt$$

A més tenim que:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_s = d\mathcal{N}(\phi_s) \\ \mathcal{N}_t = d\mathcal{N}(\phi_t) \end{cases}$$

Amb $d\mathcal{N}$ isomorfisme. Aleshores podem veure que $\|\mathcal{N}_s \wedge \mathcal{N}_t\| = |det(d\mathcal{N})| \cdot \|\phi_s \wedge \phi_t\|$ i com la diferencial de l'aplicació de Gauss canviada de signe és equivalent al endomorfisme de Weingarten, és a dir, $d\mathcal{N} = -W$, a més tenim que podem expressar la curvatura de Gauss en valor absolut com el determinant del endomorfisme de Weingarten. En resum podem escriure $\|\mathcal{N}_s \wedge \mathcal{N}_t\|$ que *a priori* desconeixem com producte de la curvatura de Gauss K de la superfície S i $\|\phi_s \wedge \phi_t\|$ que ja sabem calcular fàcilment [3] En tot cas el resultat és $+2\pi$.Per tant:

$$AreaSobre(\mathcal{N}(\mathcal{S})) = \iint_S K \cdot |\phi_s \wedge \phi_t\| = \pm 2\pi$$

I com ja sabem que ha de ser necessàriament $K < 0$, també ha de ser necessàriament -2π.

[3] Sinó podríem buscar una parametritació que facilites els càlculs encara més.