Nom complet:..**NIU:**................

Matemàtiques
Geometria Diferencial

Examen parcial. Abril de 2019

1. (*3 punts*) Es considera la corba parametritzada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donada per $\alpha(t) = (\sin t, 1-\cos t, e^t)$.

a) Comproveu que α és una corba regular amb imatge continguda en el cilindre $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

b) Calculeu la curvatura i la torsió de α en cada punt de la corba així com el seu triedre de Frenet en el punt $p = \alpha(0) = (0, 0, 1)$.

c) Es considera la parametrització $\varphi(u, v) = (\sin u, 1 - \cos u, v)$ de S. Calculeu la curvatura normal de S en el punt $p = \alpha(0)$ i en la direcció $\alpha'(0)$, prenent com camp normal unitari de S el determinat per la parametrització φ.

Nom:..

2. (*4 punts*) Es considera l'aplicació $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per $\varphi(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right)$ i es denota per S la seva imatge.

a) Demostreu, utilitzant un criteri adequat, que S és una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Proveu també que l'aplicació φ n'és una parametrització.

b) Calculeu la curvatura de Gauss $K(p)$ de S en cada punt $p \in S$ i determineu, si existeixen, el màxim i el mínim de la funció $K = K(p)$.

c) Determineu el conjunt de punts $p \in S$ pels que la curvatura mitjana $H(p)$ és zero. Comproveu que aquest conjunt està contingut en un pla.

d) Determineu el morfisme de Weingarten W_p de S en el punt $p = (0,0,0)$ i deduïu d'aquí quines són les direccions principals i les corresponents curvatures principal en aquest punt .

e) Determineu els punts de S en els que els vectors φ_u i φ_v formen un angle superior a $\pi/2$.

Nom:..

3. (3 punts) Considereu les tres afirmacions següents i decidiu raonadament si són correctes o no ho són:

a) Sigui $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz + 1$. El conjunt $S = F^{-1}(0)$ és una superfície regular de $\mathbb{R}^3$.

b) Sigui p un punt d'una superfície regular S. Si $K(p) < 0$ llavors hi ha exactament una direcció de T_pS amb curvatura normal nul·la.

c) Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba parametritzada amb imatge en una superficie regular S de $\mathbb{R}^3$ i sigui $p = \alpha(0)$. Aleshores $\alpha''(0) \in T_pS \Leftrightarrow II_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) = 0$, on II_p denota la segona forma fonamental de S en el punt p.