Geometria diferencial
Curs 2017–18

Corbes: Curvatura. Triedre de Frenet

Exercici 1: Sigui $\gamma(t)$ la parametrització d'una corba regular (no necessàriament per l'arc). Demostreu la fórmula següent per a la torsió $\tau(t)$ d'aquesta corba

$$\tau(t) = -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2}$$

Solució:

Considerem que la corba γ ve parametritzada pel paràmetre t i considerem el paràmetre arc $s = s(t)$. Quan derivem repecte t s'obté

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\gamma}{ds} = \frac{ds}{dt}\,T$$

de forma que

$$|\gamma'| = \frac{ds}{dt}$$

La fórmula per a la curvatura surt quan es fa la segona derivada (i s'aplica la fórmula de Frenet de la derivada del vector tangent):

$$\gamma''(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\,T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\,N = \frac{d^2 s}{dt^2}\,T + |\gamma'|^2\,k\,N$$

Fent producte vectorial amb γ' (que és múltiple de T) s'obté l'expressió per a la curvatura ja que

$$\gamma' \wedge \gamma'' = (|\gamma'|\;T) \wedge \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\,T + |\gamma'|^2\,k\,N\right) = |\gamma'|^3\,k\,B$$

d'on queda clar que

$$|\gamma' \wedge \gamma''| = |\gamma'|^3\,k$$

i en conseqüència

$$k = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

Quan es fa la tercera derivada (i no es va fent cas dels termes en T o N que no importaran per a més endavant)

$$\gamma'''(t) = \frac{d^3\gamma}{dt^3} = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N + |\gamma'|^2\,k\,\frac{ds}{dt}\,\frac{dN}{ds} = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N + |\gamma'|^3\,k\,(-k\,T - \tau B)$$

Finalment ens podem quedar amb

$$\gamma'''(t) = (\cdots)\,T + (\cdots)\,N - |\gamma'|^3\,k\,\tau\,B$$

Fent el producte escalar amb $\gamma' \wedge \gamma''$

$$\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle = -\,|\gamma' \wedge \gamma''|\;|\gamma'|^3\,k\,\tau$$

Però com que $|\gamma' \wedge \gamma''| = |\gamma'|^3\,k$ es pot dir que

$$\tau = -\frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma''' \rangle}{|\gamma' \wedge \gamma''|^2}$$

que és el que es volia veure.

Exercici 2: Trobeu la curvatura, la torsió i el triedre de Frenet de les corbes següents:

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

(b) $\alpha(t) = (t, \dfrac{1-t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t})$. Proveu a més que la corba és plana i determineu el pla que la conté.

(c) $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\, t)$.

(d) $\alpha(t) = (2\,t, \log(t), t^2)$.

(e) $\alpha(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)$. En aquest cas proveu que $k = \pm\tau$.

Solució:

Com que les parametritzacions d'aquestes corbes no seran per l'arc, convé tenir presents les fórmules per al càlcul d'aquests elements per a un paràmetre arbitrari.

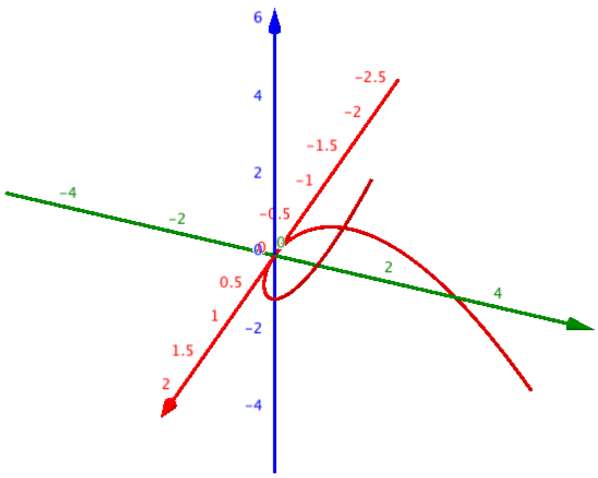
$$k = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$
$$\tau = -\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}$$

Encara que no ho sembli, aquestes fórmules també porten implícita la determinació del triedre de Frenet associat a la corba. Recordant els càlculs, es pot establir que

$$T = \frac{1}{|\alpha'|}\,\alpha'$$
$$B = \frac{1}{|\alpha' \wedge \alpha''|}\,(\alpha' \wedge \alpha'') = \frac{1}{|\alpha'|^3\,k}\,(\alpha' \wedge \alpha'')$$
$$N = B \wedge T = -T \wedge B$$

Això vol dir que tot el que s'haurà de fer en cada apartat serà calcular α', α'', $\alpha' \wedge \alpha''$, α''', el determinant de les tres derivades i les normes corresponents a les fórmules.

(a) $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, t^2, t^3)}$.



Si es van calculant els elements necessaris per aplicar les fórmules:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= (1, 2\,t, 3\,t^2)\\
\alpha'' &= (0, 2, 6\,t)\\
\alpha''' &= (0, 0, 6)\\
\alpha' \wedge \alpha'' &= (6\,t^2, -6\,t, 2)\\
|\alpha'| &= \sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}\\
|\alpha' \wedge \alpha''| &= \sqrt{36\,t^4 + 36\,t^2 + 4}\\
\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle &= 12
\end{aligned}$$

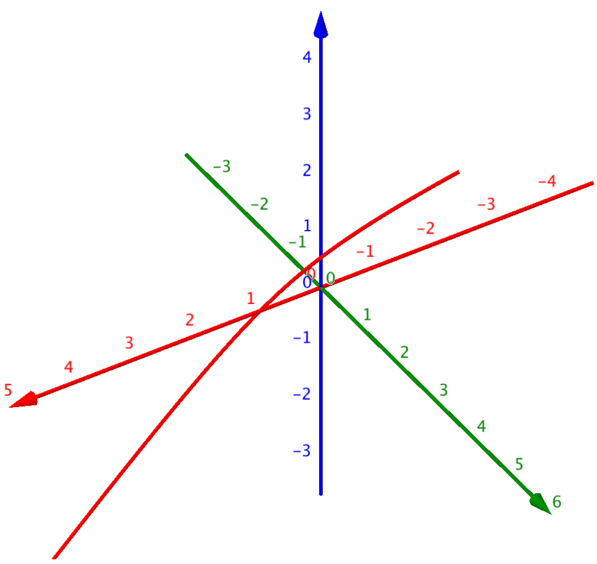
De forma que:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sqrt{36\,t^4 + 36\,t^2 + 4}}{(9\,t^4 + 4\,t^2 + 1)^{3/2}}\\
\tau &= -\frac{3}{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}
\end{aligned}$$

I el triedre de Frenet serà

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}}\,(1, 2\,t, 3\,t^2)\\
B &= \frac{1}{\sqrt{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}}\,(3\,t^4, -3\,t, 1)\\
N &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,t^2 + 9\,t^4}\,\sqrt{9\,t^4 + 9\,t^2 + 1}}\,(-9\,t^3 - 2\,t, -9\,t^4 + 1, 6\,t^3 + 3\,t)
\end{aligned}$$

(b) $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t})}$.



Amb una mica de vista es pot comprovar que la corba queda sobre el pla $x - y + z = 1$. (Per tant, el seu binormal hauria de ser múltiple de $(1, -1, 1)$).

Si es fan els càlculs per determinar curvatura, torsió i triedre de Frenet:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \left(1,\, -\frac{1}{t^2},\, -\frac{1}{t^2}-1\right)\\
\alpha'' &= \left(0,\, \frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right)\\
\alpha''' &= \left(0,\, -\frac{6}{t^4},\, -\frac{6}{t^4}\right)\\
\alpha'\wedge\alpha'' &= \left(\frac{2}{t^3},\, -\frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right)\\
|\alpha'| &= \sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t^4}+2} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{t^4+t^2+1}}{t^2}\\
|\alpha'\wedge\alpha''| &= \frac{2\sqrt{3}}{t^3}\\
\langle\alpha'\wedge\alpha'',\alpha'''\rangle &= 0
\end{aligned}$$

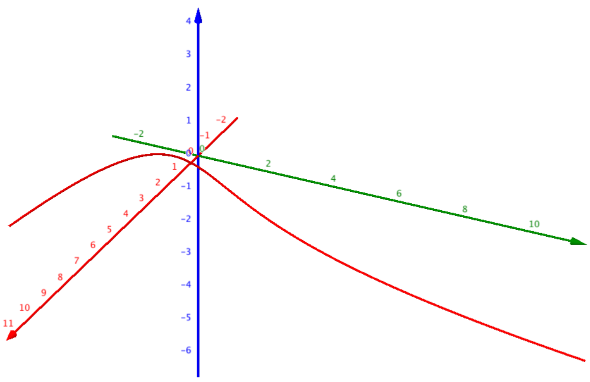
Que donaran

$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t^3}{(t^4+t^2+1)^{3/2}}$$
$$\tau = 0$$

Amb el triedre de Frenet

$$\begin{aligned}
T &= \frac{t^2}{\sqrt{2}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}\left(1,\, -\frac{1}{t^2},\, -\frac{1}{t^2}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}\,(t^2,-1,-1-t^2)\\
B &= \frac{t^3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2}{t^3},\, -\frac{2}{t^3},\, \frac{2}{t^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,-1,1)\\
N &= \frac{1}{\sqrt{6}\,\sqrt{t^4+t^2+1}}\,(t^2+2, 2\,t^2+1, t^2-1)
\end{aligned}$$

(c) $\boldsymbol{\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)}$.

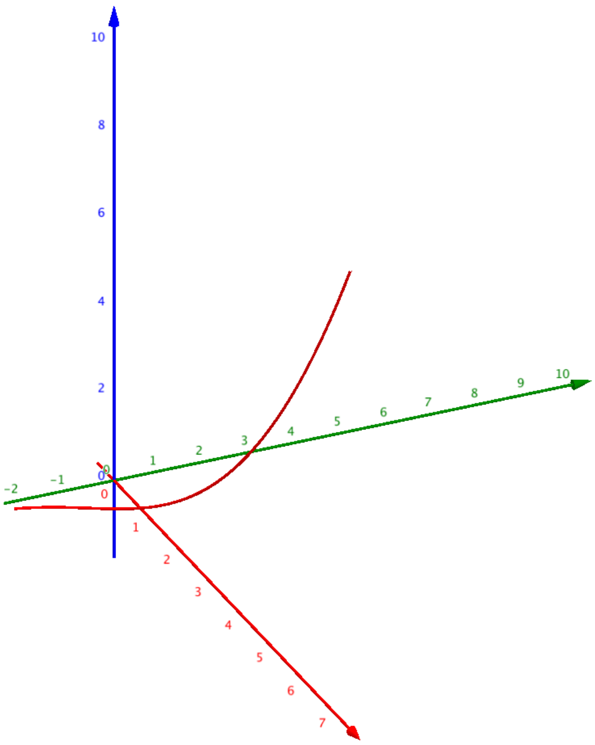


$$\begin{aligned}
\alpha' &= \left(e^t,\, -e^{-t},\, \sqrt{2}\right)\\
\alpha'' &= (e^t,\, e^{-t},\, 0)\\
\alpha''' &= (e^t,\, -e^{-t},\, 0)\\
\alpha'\wedge\alpha'' &= \left(-\sqrt{2}\,e^{-t}, \sqrt{2}\,e^t, 2\right)\\
|\alpha'| &= \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = (e^t+e^{-t})\\
|\alpha'\wedge\alpha''| &= \sqrt{2\,e^{2t}+2\,e^{-2t}+4} = \sqrt{2}\,\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = \sqrt{2}\,(e^t+e^{-t})\\
\langle\alpha'\wedge\alpha'',\alpha'''\rangle &= -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}\,e^{2t}}{e^{4t} + 2e^{2t} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{(e^{2t} + e^{-2t})^2}$$
$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{(e^{2t} + e^{-2t})^2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}} \left(e^{t},\, -e^{-t},\, \sqrt{2}\right)$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}} \left(e^{-t}, e^{t}, \sqrt{2}\right)$$
$$N = \frac{1}{1 + e^{2t}} \left(\sqrt{2}\,e^{2t}, \sqrt{2}\,e^{2t}, 1 - e^{2t}\right)$$

(d) $\boldsymbol{\alpha(t) = (2t, \log(t), t^2)}$.

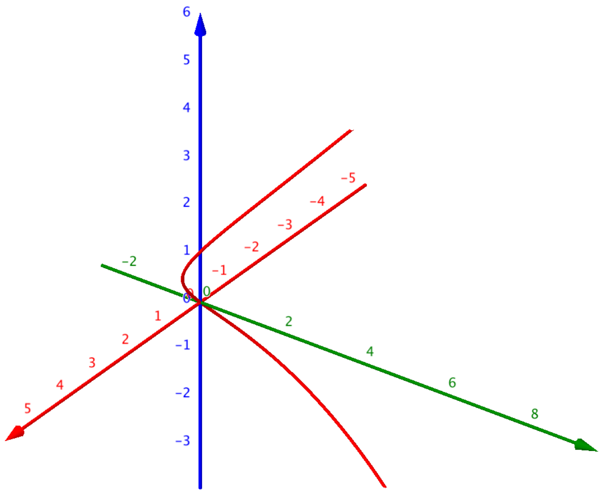


$$\alpha' = \left(2,\, \frac{1}{t},\, 2t\right)$$
$$\alpha'' = \left(0,\, -\frac{1}{t^2},\, 2\right)$$
$$\alpha''' = \left(0,\, \frac{2}{t^3},\, 0\right)$$
$$\alpha' \wedge \alpha'' = \left(\frac{4}{t},\, -4,\, -\frac{2}{t^2}\right)$$
$$|\alpha'| = \sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2} + 4} = \frac{2t^2 + 1}{t}$$
$$|\alpha' \wedge \alpha''| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + \frac{4}{t^4} + 16} = \frac{2\left(2t^2 + 1\right)}{t^2}$$
$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = -\frac{8}{t^3}$$

$$k = \frac{2\,t}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1} = \frac{2\,t}{(2\,t^2+1)^2}$$
$$\tau = \frac{2\,t}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1} = \frac{2\,t}{(2\,t^2+1)^2}$$

$$T = \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1}, \frac{1}{2\,t^2+1}, \frac{2\,t^2}{2\,t^2+1}\right)$$
$$B = \left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1}, -\frac{2\,t^2}{2\,t^2+1}, -\frac{1}{2\,t^2+1}\right)$$
$$N = \left(-\frac{2\,t^2-1}{2\,t^2+1}, -\frac{2\,t}{2\,t^2+1}, \frac{2\,t}{2\,t^2+1}\right)$$

(e) $\boldsymbol{\alpha(t) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 3\,t + t^3)}$.



$$\alpha' = \left(-3\,t^2 + 3,\, 6\,t,\, 3\,t^2 + 3\right) = 3\,(1 - t^2, 2\,t, t^2 + 1)$$
$$\alpha'' = (-6\,t,\, 6,\, 6\,t) = 6\,(-t, 1, t)$$
$$\alpha''' = (-6,\, 0,\, 6) = 6\,(-1, 0, 1)$$
$$\alpha' \wedge \alpha'' = \left(18\,t^2 - 18,\, -36\,t,\, 18\,t^2 + 18\right) = 18\,(t^2 - 1, -2\,t, t^2 + 1)$$
$$|\alpha'| = \sqrt{18\,t^4 + 36\,t^2 + 18} = 3\sqrt{2}\,\left(t^2 + 1\right)$$
$$|\alpha' \wedge \alpha''| = \sqrt{648\,t^4 + 1296\,t^2 + 648} = 18\sqrt{2}\,\left(t^2 + 1\right)$$
$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = 216$$

$$k = \frac{1}{3\,(t^2+1)^2}$$
$$\tau = -\frac{1}{3\,(t^2+1)^2}$$

$$T = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, \sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, -\sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$N = \left(-\frac{2\,t}{t^2+1}, -\frac{t^2-1}{t^2+1}, 0\right)$$

Exercici 3: Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba regular amb curvatura mai nul·la.

Demostreu que α és plana si i només si tots els plans osculadors són paral·lels a un pla fix.

Proveu també que α és plana si i només si la torsió de α és idènticament zero.

Solució:

Recordem primer que per poder parlar de pla osculador necessitem la condició de curvatura no nul·la.

Si la corba és plana, el pla que la conté és el pla osculador i hem acabat.

Recíprocament, suposem que tots els plans osculadors són paral·lels, és a dir, que el vector binormal $B(s)$ és constant $B(0)$ (suposem que s és el paràmetre arc) i definim $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(0) \rangle$. Tenim que $f(0) = 0$ i que, $f'(s) = \langle \alpha'(s), B(0) \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = 0$. De manera que $f \equiv 0$ i α està continguda en el pla osculador de α pel punt $\alpha(0)$.

La tercera equació de Frenet ens diu que $B(t)$ és constant si i només si $\tau(s) = 0$.

D'altra banda, la hipòtesi sobre la curvatura és necessària ja que existeixen exemples de corbes regulars que són localment planes sense estar contingudes en un únic pla, per exemple, dues corbes planes unides per un segment recte (observem que sobre aquest segment la curvatura és zero i que, en realitat, podria ser un únic punt).

Exercici 4: Demostreu que una corba regular plana té curvatura constant si, i només si, està continguda en una circumferència.

Solució:

Recordeu que una circumferència de radi r parametritzada per l'arc $\alpha(s) = (r\cos(s/r), r\sin(s/r))$ tindrà com derivada segona

$$\alpha''(s) = \frac{1}{r}(-\cos(s/r), -\sin(s/r))$$

i, per tant, la curvatura és $k = \dfrac{1}{r}$ (constant).

Tenint en compte l'anterior, donada una corba arbitrària parametritzada per l'arc $\gamma(s)$ i de curvatura constant k (diferent de 0, és clar), considerem, per a cada punt de la corba, el *centre* $C(s)$ definit per

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}N(s)$$

Com que la corba és plana, les fórmules de Frenet donen

$$C'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{k}N'(s) = T(s) + \frac{1}{k}(-k\,T(s)) = \vec{0}$$

de forma que $C(s) = C_0$ (constant) i, en particular, $\|\gamma(s) - C_0\| = \dfrac{1}{k}$. Dit d'una altra manera, $\gamma(s)$ sempre és un punt de la circumferència de centre C_0 i radi $\dfrac{1}{k}$.

Naturalment, si la curvatura és nul·la els càlculs no tenen sentit. Però en aquest cas és clar que la corba és un segment de recta (que, si es vol mantenir l'enunciat sense afegir més detalls, es pot considerar una circumferència de radi infinit) ja que admet una parametrització amb derivada segona nul·la.

Exercici 5: Demostreu que una corba regular $\alpha(s)$ té imatge continguda en una recta si i només si $\alpha''(s)$ és proporcional a $\alpha'(s)$.

Solució:

Suposem primerament que $\alpha(s)$ està continguda en una recta. Això vol dir que podem escriure

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + f(s)\,\vec{v}$$

on $f(s)$ és una certa funció i $\vec{v}$ és el vector director de la recta. Llavors $\alpha'(s) = f'(s)\,\vec{v}$, la qual cosa implica en particular $f'(s) \neq 0$ per a tot s. Tornant a derivar

$$\alpha''(s) = f''(s)\,\vec{v} = f''(s)\frac{\alpha'(s)}{f'(s)} = \frac{f''(s)}{f'(s)}\alpha'(s),$$

és a dir, la derivada segona és proporcional a la derivada primera, com volíem veure.

Recíprocament, si $\alpha''(s) = \lambda(s)\,\alpha'(s)$, per a una certa funció $\lambda(s)$, tenim $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = 0$ i per tant (utilitzant la fórmula de la curvatura $k(s)$ respecte una paràmetre arbitrari), $k(s) = 0$. Ara només cal tenir en compte que això significa que, reparametritzant per l'arc, la derivada segona de la corba és nul·la, aleshores la corba té una expressió lineal respecte l'arc i això ja dóna directament que el seu recorregut està sobre una recta.

Exercici 6: Considerem l'aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, \mathrm{e}^{-1/t^2}) & \text{per } t > 0 \\ (t, \mathrm{e}^{-1/t^2}, 0) & \text{per } t < 0 \\ (0,0,0) & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Comproveu que aquesta corba té torsió nul·la però no està continguda en un pla.

Nota: Teniu en compte que, fins i tot per a $t = 0$, es podria dir que $\tau(0) = 0$.

Solució:

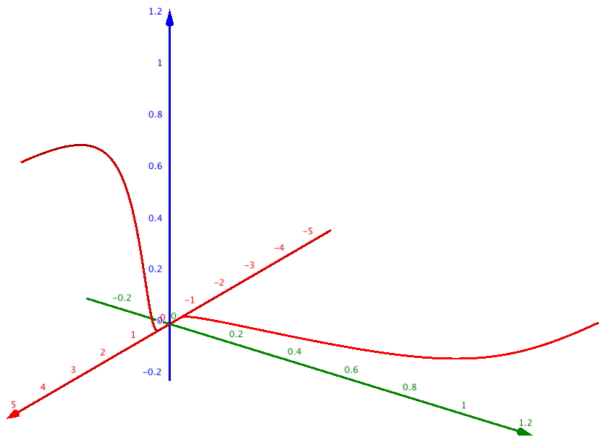
És fàcil veure que

$$\lim_{t \mapsto 0^+} \alpha'(t) = \lim_{t \mapsto 0^-} \alpha'(t) = (1, 0, 0).$$

Per tant, la corba és regular (i es pot afinar el raonament per veure que el grau de diferenciabilitat és infinit).

Per un altre costat, en tot el recorregut corresponent a $t > 0$ la corba està continguda en el pla xz (vector binormal constant $(0, 1, 0)$), mentre que en recorregut de $t < 0$ està dins el pla xy (vector binormal constant $(0, 0, 1)$) i, per tant, en tots els punts del recorregut $\tau = 0$.

Totes aquestes característiques es poden observar sense problemes al gràfic següent sense cap càlcul addicional



Exercici 7: (Coordenades polars).

Es diu que una corba plana γ ve donada *en polars* quan s'expressa com:

$$\gamma(t) = \big(r(t)\,\cos(\theta(t)), r(t)\,\sin(\theta(t))\big)$$

on $r(t)$ i $\theta(t)$ són respectivament les expressions, en funció del paràmetre t, de la distància a l'origen de coordenades (pol) i de l' angle que forma el vector $\gamma(t)$ amb l'eix de les x (origen d'angles). Quan es pren l'angle θ com a paràmetre, l'expressió en polars ve donada per la funció $r = r(\theta)$.

(a) Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ centrada a l'origen.

(b) Determineu l'equació en coordenades polars d'una circumferència de radi $R > 0$ i centre $(R, 0)$.

(c) Considereu l'angle $\theta \in [a,b]$ com a paràmetre. Demostreu que la longitud L de la corba $r = r(\theta)$ està donada per
$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

(d) Demostreu que la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ està donada per
$$k(\theta) = \frac{2\,r'^2 - r\,r'' + r^2}{\left(r'^2 + r^2\right)^{3/2}}.$$

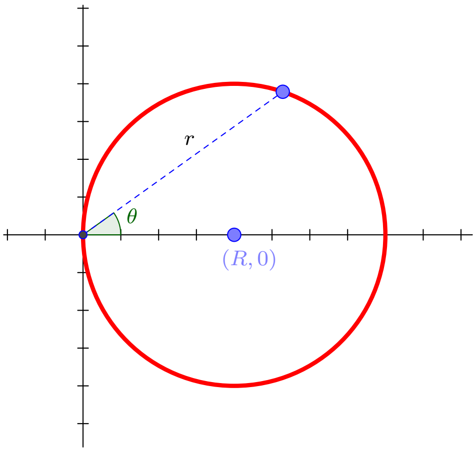
(e) Proveu que si la funció $r(\theta)$ té un màxim en $\theta = \theta_0$, aleshores la curvatura de la corba $r = r(\theta)$ en el punt $\theta = \theta_0$ és més gran o igual que $\dfrac{1}{r(\theta_0)}$.

(f) Feu una representació gràfica aproximada de la corba definida per $r(\theta) = 1 - \sin(\theta)$.

Solució:

(a) $r(t) = R$ i $\theta(t) = t$.

(b) L'equació de les coordenades cartesianes d'aquesta circumferència és
$$(x - R)^2 + y^2 = R^2.$$
Desenvolupem $x^2 + y^2 - 2\,R\,x = 0$, fem la substitució $x = r\,\cos(\theta)$, $y = r\,\sin(\theta)$ i obtenim que $r^2 - 2\,R\,r\,\cos(\theta) = 0$, d'on
$$r\,(r - 2\,R\,\cos(\theta)) = 0.$$
Com que el cas $r = 0$ correspon únicament al punt $(0,0)$, tenim que el recorregut de la circumferència es pot parametritzar com
$$r(\theta) = 2\,R\,\cos(\theta),\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$



(c) Si posem $\gamma(\theta) = (r(\theta)\,\cos(\theta), r(\theta)\,\sin(\theta))$ tenim
$$\gamma'(\theta) = (r'\,\cos(\theta) - r\,\sin(\theta), r'\,\sin(\theta) + r\,\cos(\theta))$$
on $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$. Així
$$|\gamma'(s)| = \sqrt{r^2 + r'^2}$$
i per tant
$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

Nota: Observem que si denotem per $s = s(\theta)$ el paràmetre arc (és a dir, $s(\theta)$ és la longitud entre un valor fixat a i θ) llavors
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

(d) Si $r = r(\theta)$, la corba en cartesianes és $\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$. La curvatura d'una corba plana $\gamma(t)$ que no està parametritzada per l'arc es calcula amb la fórmula[1]

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}.$$

En efecte, $\gamma' = v\,T$ i $\gamma'' = v'\,T + v\,T' = v'\,T + v^2\,k\,N$, d'on

$$\det(\gamma', \gamma'') = v^3\,k\,\det(T, N) = v^3\,k.$$

Si escrivim $\gamma(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ tenim que

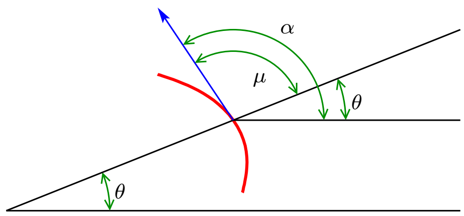
$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= r'(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta} + r(\theta)\,i\,\mathrm{e}^{i\theta}\\ \gamma''(\theta) &= r''(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta} + r'(\theta)\,i\,\mathrm{e}^{i\theta} + r'(\theta)\,i\,\mathrm{e}^{i\theta} - r(\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta} = (r''(\theta) - r(\theta))\,\mathrm{e}^{i\theta} + 2\,r'(\theta)\,i\,\mathrm{e}^{i\theta}.\end{aligned}$$

Per tant, $\det(\gamma', \gamma'') = \begin{vmatrix} r' & r \\ r'' - r & 2\,r' \end{vmatrix} = 2\,r'^2 - r\,r'' + r^2$ i

$$k(\theta) = \frac{2\,r'^2 - r\,r'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

on, òbviament r, r', r'' denoten $r(\theta), r'(\theta), r''(\theta)$.

Nota: Puig-Adam[2] ho fa així: Considerem la corba $r = r(\theta)$ i denotem $\alpha = \alpha(\theta)$ l'angle de la tangent amb l'eix de les $x's$ i per $\mu = \mu(\theta)$ l'angle entre la tangent i el radi vector.



Fent el producte escalar del vector posició $\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$ i del vector tangent $\gamma'(\theta)$ obtenim

$$\mu = \arctan\left(\frac{r}{r'}\right)$$

i per tant

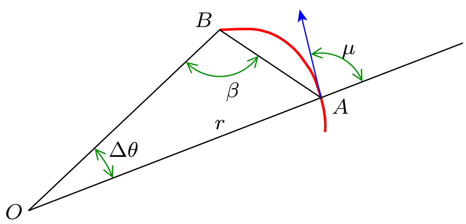
$$\alpha = \theta + \mu = \theta + \arctan\left(\frac{r}{r'}\right).$$

Finalment

$$k(\theta) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = (1 + \frac{r'^2 - r\,r''}{r^2 + r'^2})\,\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Nota de la nota: El càlcul de μ es pot fer a partir de la definició de derivada.

Aplicant el teorema del sinus al triangle OAB de la figura obtenim



[1] El determinant de dos vectors és el determinant de la matriu que té per columnes les coordenades d'aquests vectors respecte d'una base ortonormal. Noteu que això és essencialment el mateix que suposar que la corba està en el pla xy de $\mathbb{R}^3$ i aplicar la fórmula de la curvatura per a les corbes de l'espai.

[2] Calculo Integral, p.291

$$\frac{\sin(\beta)}{r} = \frac{\sin(\Delta\theta)}{AB}.$$

Prenem límits quan $\Delta\theta \to 0$, i observem que β tendeix a μ (angle entre la tangent i el radi vector). Tenim

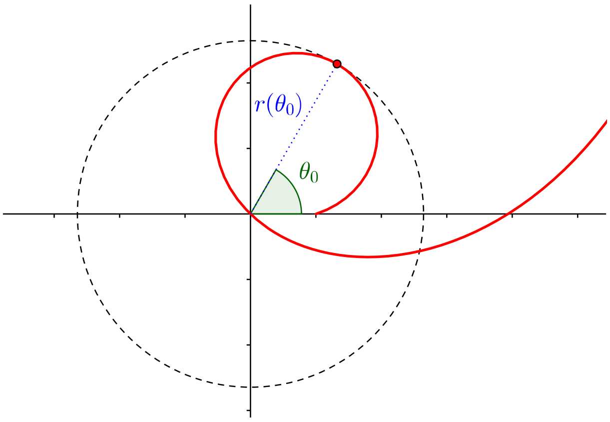
$$\sin(\mu) = r \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin(\Delta\theta)}{AB} = r \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = r\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

on s és el paràmetre arc. Això ja ens diu que $\tan(\mu) = r/r'$.

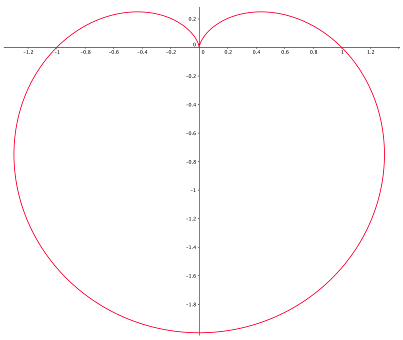
(e) Si $r(\theta)$ té un màxim en $\theta = \theta_0$ aleshores $r'(\theta_0) = 0$ i $r''(\theta_0) \leq 0$, d'on

$$k(\theta_0) = \frac{-r(\theta_0)\, r''(\theta_0) + r(\theta_0)^2}{r(\theta_0)^3} \geq \frac{1}{r(\theta_0)}.$$

Observem també que en un dibuix l'acotació és clara: que $r(\theta)$ tingui un màxim local a θ_0 implica que localment la corba $\gamma(\theta)$ passa per dins d'un circumferència de radi $r(\theta_0)$ i per tant la seva curvatura serà més gran que la d'aquesta circumferència, que és $1/r(\theta_0)$.



(f) Podem fer una representació gràfica i s'obtindrà un gràfic com el de la figura següent (clicant a sobre anireu a una construcció dinàmica de GeoGebra)



Sembla clar, doncs, que es tracta d'una cardioide obtinguda fent girar sobre la circumferència de radi $1/2$ i centre en $(0, -1/2)$ una altra circumferència del mateix radi. Observeu que aquesta cardioide es pot parametritzar, en funció de l'angle de gir t com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ amb

$$x(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2\,t)$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} - \cos(t) - \frac{1}{2}\cos(2\,t)$$

(només cal recordar que quan la circumferència gira un angle t el punt es separa un angle $2\,t$ de la vertical).

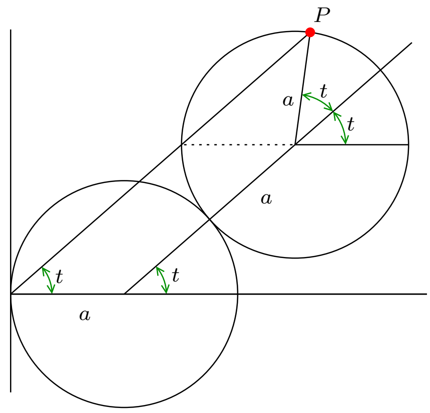
Si s'aplica una mica de trigonometria es veu que aquestes fórmules es poden compactar a

$$x(t) = \sin(t)\,(1 + \cos(t))$$
$$y(t) = -\cos(t)\,(1 + \cos(t))$$

de forma que és ben clar que la distància a l'origen dels punts d'aquesta cardioide és

$$r(t) = 1 + \cos(t)$$

Pot semblar que no són les coordenades polars ja que l'angle no està mesurat des de l'origen de coordenades sinó des del centre de la circumferència fixa i que en comptes d'un $-\sin$ surt un cos. Però resulta que tot quadra!! Fixeu-vos en primer lloc en l'esquema següent que mostra com l'angle de gir al voltant de la circumferència fixa coincideix amb l'increment de l'angle respecte l'origen



a continuació noteu que l'angle de les coordenades polars θ és igual a $t - \dfrac{\pi}{2}$ de forma que, *en polars*, l'expressió de la corba es converteix en

$$x(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\,(1 + \cos(\theta + \frac{\pi}{2})) = \cos(\theta)\,(1 - \sin(\theta))$$
$$y(\theta) = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,(1 + \cos(\theta + \frac{\pi}{2})) = \sin(\theta)\,(1 - \sin(\theta))$$

i això és justament el que teníem al principi expressat com

$$r(\theta) = 1 - \sin(\theta)$$

Exercici 8: Calculeu la curvatura d'una el·lipse determinada per l'expressió en coordenades polars

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\,\cos(\theta)}$$

(on p és el paràmetre focal i e l'excentricitat).

Solució:

Per tal de calcular la curvatura, només caldrà utilitzar les fórmules per al càlcul quan es té una parametrització regular qualsevol (no necessàriament per l'arc) d'una corba. En aquest cas es pot partir de la parametrització

$$\gamma(\theta) = (r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)) = \left(\frac{p\,\cos(\theta)}{1 - e\,\cos(\theta)}, \frac{p\,\sin(\theta)}{1 - e\,\cos(\theta)}\right)$$

Però és molt més pràctic fer els càlculs utilitzant l'expressió que s'obté quan es considera un parametrització en polars general. Ja que les cancel·lacions de sinus i cosinus ja venen incorporades a aquesta versió de la fórmula. En concret, si es té una corba parametritzada en polars com $r = r(\theta)$ el valor de la curvatura és

$$k(\theta) = \frac{2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2}{\left((r')^2 + r^2\right)^{(3/2)}}$$

Tenint en compte com s'expressa r en el cas de l'el·lipse, les derivades primera i segona seràn

$$r' = -p\,e\,\frac{\sin(\theta)}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^2}$$

$$r'' = -p\,e\,\frac{\cos(\theta)+e\,\cos^2(\theta)-2\,e}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^3}$$

(hi ha un $\sin^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta)$)

Els termes individuals del numerador de la fórmula seran

$$\begin{aligned}
2\,(r')^2 &= 2\,p^2\,e^2\,\frac{\sin^2(\theta)}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4} = 2\,p^2\,e^2\,\frac{1-\cos^2(\theta)}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\\
-r\,r'' &= p^2\,e\,\frac{\cos(\theta)+e\,\cos^2(\theta)-2\,e}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\\
r^2 &= p^2\,\frac{1}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^2} = p^2\,\frac{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}
\end{aligned}$$

que sumats donaran

$$\begin{aligned}
2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2 &= \frac{p^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\begin{pmatrix} 2\,e^2-2\,e^2\,\cos^2(\theta)\\ +\,e\,(\cos(\theta)+e\,\cos^2(\theta)-2\,e)\\ +\,1-2\,e\,\cos(\theta)+e^2\,\cos^2(\theta)\end{pmatrix}\\
&= \frac{p^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\left(1-e\,\cos(\theta)\right)\\
&= \frac{p^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^3}
\end{aligned}$$

Mentre que en el denominador hi haurà

$$\begin{aligned}
(r')^2 + r^2 &= \frac{p^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\left(e^2-e^2\,\cos^2(\theta)+1-2\,e\,\cos(\theta)+e^2\,\cos^2(\theta)\right)\\
&= \frac{p^2}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^4}\left(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta)\right)
\end{aligned}$$

de forma que

$$\left((r')^2+r^2\right)^{3/2} = \frac{p^3}{\left(1-e\,\cos(\theta)\right)^6}\left(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta)\right)^{3/2}$$

Dividint, el resultat final serà

$$k(\theta) = \frac{(1-e\,\cos(\theta))^3}{p\,(1+e^2-2\,e\,\cos(\theta))^{3/2}}.$$

Exercici 9: (Corbes de Bertrand).

Siguin $\alpha := \alpha(t)$ i $\beta := \beta(t)$ dues corbes diferents tals que per a cada $t \in (a,b)$ la recta normal a α en el punt $\alpha(t)$ coincideix amb la recta normal a β en el punt $\beta(t)$. La curvatura $k(t)$ i la torsió $\tau(t)$ de α en el punt $\alpha(t)$ són **no nul·les** en tot punt.

(a) Proveu que existeix una constant $r \neq 0$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + rN(t)$, $\forall t \in (a,b)$, on $N(t)$ és el vector normal a la corba α en el punt $\alpha(t)$. En particular la distància entre $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant.

(b) Proveu que l'angle entre els vectors tangents a α i β en els punts $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant.

(c) Proveu que hi ha una relació lineal entre la curvatura i la torsió de α (que es pot escriure de la forma $A\,k(t) + B\,\tau(t) = 1$, on A, B són constants).

Solució:

Suposem que t és el paràmetre arc de α. Això implicarà, en general que t *no és el paràmetre arc de* β.

(a) Per hipòtesi tenim $\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t) \cdot N(t)$. Cal veure doncs que $\lambda(t)$ és constant. Derivant

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \lambda'(t)\, N(t) + \lambda(t)\, N'(t) = (1 - k(t)\,\lambda(t))\, T(t) + \lambda'(t)\, N(t) - \lambda(t)\, \tau(t)\, B(t).$$

Observeu que $T(t), N(t), B(t)$ és la referència de Frenet de α en el punt $\alpha(t)$. Com que $\beta'(t)$ és ortogonal a la normal a β en el punt $\beta(t)$, és automàticament ortogonal a $N(t)$, vector normal a α en el punt $\alpha(t)$. Per tant, $\lambda'(t) = 0$, que implica $\lambda(t) = r \in \mathbb{R}$.

(b) Derivant respecte de t i denotant $s = s(t)$ el paràmetre arc de β tenim,

$$\langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle' = \langle T_\alpha(t)', T_\beta(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), T_\beta(t)'\rangle = \langle k_\alpha(t)\, N_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle + \langle T_\alpha(t), k_\beta(t)\, \frac{ds}{dt}\, N_\beta(t)\rangle = 0,$$

ja que els normals de α i β tenen la mateixa direcció (i per tant és diferencien com a molt en un signe). Així doncs $\langle T_\alpha, T_\beta\rangle$ és constant.

(c) Com que $T_\beta(t) = \dfrac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$ tenim

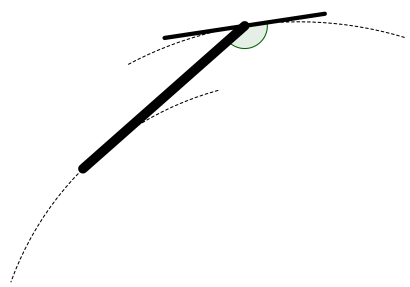
$$c = \langle T_\alpha(t), T_\beta(t)\rangle = \langle T_\alpha(t), \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}\rangle = \frac{1 - r\, k(t)}{\sqrt{(1 - r\, k(t))^2 + r^2\, \tau(t)^2}}$$

Aleshores $(1 - r\, k(t))^2\, (1 - c^2) = c^2\, r^2\, \tau(s)^2$ amb c, r constants. Com $\tau \neq 0$, $(1 - c^2)$ tampoc pot ser 0 ja que $(1 - c^2) = \dfrac{r^2\, \tau(t)^2}{(1 - r\, k(t))^2 + r^2\, \tau(s)^2}$. De manera que tenim

$$\frac{1 - r\, k(t)}{\tau(s)} = \frac{c\, r}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Com que $D = c\, r/\sqrt{1 - c^2}$ és constant, tenim $1 - r\, k(t) = D\, \tau(s)$ com volíem. Si $c = 0$, $D = 0$ i la torsió no apareix.

Exercici 10: Demostreu que el recorregut que fan les dues rodes d'una bicicleta que manté el manillar en un angle constant són dues circumferències concèntriques. (Fixeu-vos que en el cas extrem que l'angle del manillar sigui recte, és clar que la roda davantera descriu una circumferència de radi igual a la distància entre els centes de les dues rodes mentre la posterior gira, sense avançar, sobre un punt fix. Mentre que en l'altre extrem, quan la roda del davant està alineada amb el cos de la bicicleta, el recorregut de les dues rodes és una línia recta).



Indicació: Sigui $\alpha(s)$ la corba descrita per la roda posterior i $\beta(s)$ la que descriu la roda davantera. Sigui L la distància constant entre $\alpha(s)$ i $\beta(s)$. Utilitzeu el fet que el vector velocitat de la roda del darrera tindrà la mateixa direcció que $\alpha(s) - \beta(s)$ (el cos de la bicicleta) per a demostrar que la curvatura és constant.

Solució:

Posarem un subíndex per a distingir els vectors tangent i normal de α i β i designarem per t el paràmetre arc de β i per s al de α. Com que s'està parlant del moviment d'una bicicleta hi ha una relació de dependència recíproca entre els paràmetres t i s i, per tant, es pot pensar totes dues corbes parametritzades per s o t segons convingui.

Si es té en compte la rigidesa del quadre de la bicicleta, i suposant que no es *derrapa*, el vector T_α tindrà la direcció de la bicicleta. Per tant, la condició que imposa l'enunciat és equivalent a dir que el vector T_β formarà un angle constant θ amb T_α.

Si, per a cada s (paràmetre arc de α), es descompon T_β com

$$T_\beta = a\,T_\alpha + b\,N_\alpha$$

es complirà $a = \cos(\theta)$ i $b = \sin(\theta)$ (si es considera l'orientació adequada i es mesuren els angles d'acord amb aquesta orientació). Noteu que a i b són constants diferents de 0 i de 1 (sempre i quan l'angle entre el quadre i la roda davantera no sigui recte o aquests elements estiguin alineats).

Per un altre costat, si ℓ és la la distància entre els centres de les dues rodes, també és clar que

$$\beta(s) = \alpha(s) + \ell\,T_\alpha(s)$$

de forma que

$$T_\beta = \frac{d\beta}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\beta}{ds} = \frac{ds}{dt}\,(T_\alpha + \ell\,k_\alpha\,N_\alpha)$$

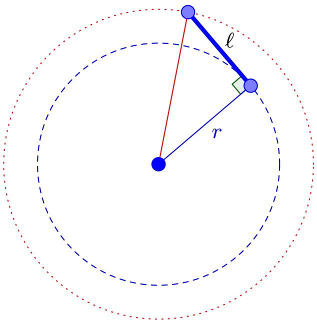
Igualant $a\,T_\alpha + b\,N_\alpha$ amb $\dfrac{ds}{dt}\,(T_\alpha + \ell\,k_\alpha\,N_\alpha)$ s'obté

$$\frac{ds}{dt} = a$$
$$\frac{ds}{dt}\,\ell\,k_\alpha = b$$

En resum, i pensant en $a \neq 0$,

$$k_\alpha = \frac{b}{a\,\ell}$$

És a dir, la curvatura de α és constant i, per tant, el recorregut de la roda del darrera està sobre una circumferència de radi $r = 1/k_\alpha = a\,\ell/b$. A partir d'aquí és immediat demostrar que el recorregut de β estarà sobre la circumferència concèntrica a l'anterior i de radi $R = \sqrt{r^2+\ell^2} = (\ell/b)\sqrt{a^2+b^2} = \ell/b$ observant l'esquema següent i recordant el T. de Pitàgores (clicant sobre l'esquema accedireu a una construcció dinàmica on podreu modificar els paràmetres)



(Noteu que els casos extrems, quan a tendeix a 0, roda davantera en angle recte, o tendeix a 1, roda davantera alineada amb al quadre, es corresponen amb que s'observa: en el primer cas, r tendeix a 0 i R a ℓ i la configuració correspon a la roda de darrera immòbil, de fet girant sobre el punt on toca a terra sense avançar ni retrocedir, mentre que la roda del davant descriu una circumferència de radi ℓ, i en el segon r i R tendeixen a ∞ de forma que les dues rodes van sobre una recta).