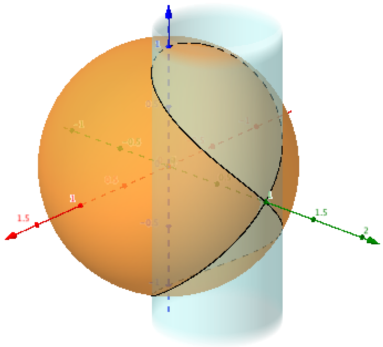
3 Corbes esfèriques i hèlixs

Exercici 23: (Volta de Viviani) Sigui C la corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=1$ amb el cilindre $x^2+y^2-y=0$. Calculeu la curvatura i la torsió de C.[1]



Exercici 24: Es diu que una corba és esfèrica si el seu recorregut està sobre una esfera.

1. Demostreu que una corba $\alpha(s)$ és esfèrica si, i només si, existeix un punt fix c_0 (el centre de l'esfera que la conté) tal que el vector $\alpha(s)-c_0$ és perpendicular a $\alpha'(s)$ per a tot s.

2. Comproveu que si $\alpha(s)$ és esfèrica llavors $k(s)>0$ per a tot s.

3. Comproveu que el centre c_0 de l'esfera que conté una certa corba $\alpha(s)$ (parametritzada per l'arc) es pot obtenir com

$$c_0=\alpha(s)+\frac{1}{k(s)}\,N(s)+\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}\,B(s)$$

per a qualsevol s on $\tau(s)\neq 0$,[2] i per tant, el radi d'aquesta esfera és

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2+\left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}\right)^2}$$

4. Tenint en compte els càlculs de l'apartat anterior, demostreu el recíproc. És a dir, si $\alpha(s)$ és una corba parametritzada per l'arc amb $k(s)\neq 0$ i $\tau(s)\neq 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2+\left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}\right)^2=c$$

amb c constant, llavors $\alpha(s)$ està sobre una esfera de radi $\sqrt{c}$.

[1] Un clic sobre l'esquema us permetrà accedir (`https://www.geogebra.org/m/hqVuj92y`) a una construcció dinàmica de la situació per tal de poder observar la corba des del punt de vista que vulgueu.

[2] Si $\tau(s)=0$ per tot s la corba és plana (un paral·lel o meridià) i no es pot determinar el radi de l'esfera que la conté. Un paral·lel pot ser comú a esferes de diferent radi. Fora dels intervals on $\tau(s)=0$ aquestes fórmules són certes encara que $\tau(s)=0$ en un punt (a la demostració es veurà que si $\tau(s_0)=0$ també $k'(s_0)=0$) ja que per ser $\alpha(s)$ diferenciable ho és la component de $\alpha(s)-c$ respecte $B(s)$, la qual és una funció que val $\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}$ fora dels zeros de $\tau(s)$ i $\lim_{s\to s_0}\frac{k'(s)}{(k(s))^2\,\tau(s)}$ quan $\tau(s_0)=0$.

Exercici 25: Es designa per *hèlix* una corba tal que les seves tangents formen un angle constant amb una direcció fixada (que és diu que és l'eix de l'hèlix).[3]

1. Proveu que una corba és una hèlix si, i només si, les seves normals principals són paral·leles a un pla fixat (de fet, el pla perpendicular a l'eix).
2. Demostreu que si la torsió no s'anul·la, llavors $\alpha(s)$ és una hèlix si i només si $\dfrac{k(s)}{\tau(s)} =$ ct.
3. Quin invariant permet distingir una hèlix dextrògira d'una hèlix levògira?
4. Proveu que tota hèlix $\gamma(s)$ es pot escriure com $\gamma(s) = \beta(s) + s\,\vec{v}$ on $\beta(s)$ és una corba plana continguda en un pla perpendicular a l'eix de $\gamma(s)$ i $\vec{v}$ un vector fix. Relacioneu les curvatures de $\beta(s)$ i $\gamma(s)$.
5. Comproveu que la corba $\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$ és una hèlix (s'anomena *hèlix circular*). Determineu l'eix i la corba plana associada.
6. Vegeu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors d'una hèlix circular és una altra hèlix circular coaxial i del mateix pas.
7. Localitzeu, entre les corbes que han sortit en exercicis anteriors, altres hèlix i mireu d'obtenir el seu eix i la corba plana associada.

Exercici 26: Considerem l'hèlix circular donada per $\alpha(s) = (a\,\cos(s/c), a\,\sin(s/c), b\,s/c)$, amb $s \in \mathbb{R}$ i $c^2 = a^2 + b^2$.

1. Demostreu que $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc.
2. Determineu la curvatura i la torsió de $\alpha(s)$.
3. Determineu el pla osculador.
4. Demostreu que les rectes que tenen direcció $N(s)$ i passen per $\alpha(s)$ tallen l'eix Oz amb angle constant igual a $\pi/2$.

Exercici 27: Sigui $\alpha(s)$ una corba que té curvatura constant $k = 3$, torsió constant $\tau = 4$ i quan $s = 0$ passa per $(0, 0, 0)$ amb triedre de Frenet $T(0) = (1, 0, 0)$, $N(0) = (0, 1, 0)$, $B(0) = (0, 0, 1)$. Determineu la parametrització per l'arc de α.

Exercici 28: Trobeu les hèlixs esfèriques.

Exercici 29: Considerem la corba parametritzada $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Trobeu-ne la curvatura i la torsió. Demostreu que $\alpha(t)$ és una hèlix.
2. Trobeu el paràmetre arc de $\alpha(t)$.

[3] Amb aquesta definició tota corba plana és una hèlix ja que les seves tangents formen un angle de $\pi/2$ amb el vector director del pla. Per això assumirem que les hèlixs son corbes no planes.