Capítol 5

Geometría intrínseca de superfícies

5.1 Teorema Egregi de Gauss

Sigui S una superfície regular orientada i sigui $\varphi = \varphi(u,v)$ una parametrització local de S compatible amb l'orientació. Denotem $\nu = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$.

Proposició 5.1.1. *Amb la notació anterior es compleix*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_{uu} & = & \Gamma_{11}^1\,\varphi_u + \Gamma_{11}^2\,\varphi_v + e\,\nu \\ \varphi_{uv} & = & \Gamma_{12}^1\,\varphi_u + \Gamma_{12}^2\,\varphi_v + f\,\nu \\ \varphi_{vu} & = & \Gamma_{21}^1\,\varphi_u + \Gamma_{21}^2\,\varphi_v + f\,\nu \\ \varphi_{vv} & = & \Gamma_{22}^1\,\varphi_u + \Gamma_{22}^2\,\varphi_v + g\,\nu \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Comentari 5.1.2. Els coeficients Γ_{ij}^k s'anomenen **símbols de Christoffel** de S associats a la parametrització φ. La relació $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ implica que es compleix $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Demostració. Són les expressions de les derivades segones de φ en la base $\varphi_u, \varphi_v, \nu$. Com que ν és unitari i perpendicular a φ_u i φ_v, el coeficient en ν d'un tal vector és el seu producte escalar amb ν. Utilitzant (4.21) veiem per exemple que $\langle\, \varphi_{uu}, \nu \,\rangle = e$. □

Proposició 5.1.3. *Els símbols de Christoffel Γ_{ij}^k tant sols depenen de la primera forma fonamental de S. Concretament es compleix*

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lclcl} \Gamma_{11}^1 \cdot E + \Gamma_{11}^2 \cdot F & = & \langle\, \varphi_{uu}, \varphi_u \,\rangle & = & \frac{1}{2}\,E_u \\ \Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G & = & \langle\, \varphi_{uu}, \varphi_v \,\rangle & = & F_u - \frac{1}{2}\,E_v \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lclcl} \Gamma_{12}^1 \cdot E + \Gamma_{12}^2 \cdot F & = & \langle\, \varphi_{uv}, \varphi_u \,\rangle & = & \frac{1}{2}\,E_v \\ \Gamma_{12}^1 \cdot F + \Gamma_{12}^2 \cdot G & = & \langle\, \varphi_{uv}, \varphi_v \,\rangle & = & \frac{1}{2}\,G_u \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lclcl} \Gamma_{22}^1 \cdot E + \Gamma_{22}^2 \cdot F & = & \langle\, \varphi_{vv}, \varphi_u \,\rangle & = & F_v - \frac{1}{2}\,G_u \\ \Gamma_{22}^1 \cdot F + \Gamma_{22}^2 \cdot G & = & \langle\, \varphi_{vv}, \varphi_v \,\rangle & = & \frac{1}{2}\,G_v \end{array}\right. \end{array} \tag{5.2}$$

Demostració. Comprovem per exemple la segona de les equacions. Multiplicant escalarment per φ_v la segona equació de (5.1) s'obté $\Gamma_{11}^1 \cdot F + \Gamma_{11}^2 \cdot G = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle$. D'altra banda

$$\begin{aligned} F_u &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle \\ &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{1}{2}\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_v = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{1}{2}E_v \end{aligned}$$

d'on resulta la identitat buscada. La resta d'equacions s'obtenen de manera similar. $\square$

Comentari 5.1.4. Aquest resultat mostra que els símbols de Christoffel tant sols depenen de la primera forma fonamental. Les equacions (5.2) permeten trobar fórmules explícites pels símbols de Christoffel Γ_{ij}^k en termes de E, F, G i de les seves derivades. No detallarem aquí aquestes fórmules. A efectes pràctics és suficient resoldre el sistema (5.2), que podem pensar com tres sistemes lineals diferents, en cada cas concret. Per exemple, les primeres dues equacions donen

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}.$$

Veiem això a l'exercici i l'exemple següents.

Exercici 5.1.5. Es considera un pla amb coordenades cartesianes, és a dir les associades a una base ortonormal. Determineu els símbols de Christoffel del pla en aquestes coordenades.

Exemple 5.1.6. Considerem la superfície de revolució parametritzada per

$$\varphi(u, v) = \big(a(v) \cos u, a(v) \sin u, b(v)\big) \qquad \text{on} \quad a(v) > 0.$$

En aquest cas

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a')^2 + (b')^2 \end{pmatrix}$$

d'on resulta $E_v = 2a\, a'$, $G_v = 2(a'\, a'' + b'\, b'')$ i $E_u = F_u = F_v = G_u = 0$. El primer parell d'equacions del sistema (5.2) és

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & (a')^2 + (b')^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\, a' \end{pmatrix}$$

d'on resulta

$$\Gamma_{11}^1 = 0 \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{-a\, a'}{(a')^2 + (b')^2}.$$

Anàlogament, el segon parell d'equacions dona

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{a'}{a} \qquad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

i el tercer parell

$$\Gamma_{22}^1 = 0 \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{a'\, a'' + b'\, b''}{(a')^2 + (b')^2}.$$

Comentari 5.1.7. Si expressem les derivades dels vectors φ_u, φ_v i ν en termes de la mateixa base $\{\varphi_u, \varphi_v, \nu\}$, els coeficients corresponents dependran només, en virtut de la proposició anterior, dels coeficients de la primera i de la segona formes fonamentals (E, F, G, e, f i g) així com de les seves derivades. Aquests coeficients estan relacionats com a conseqüència de les identitats següents

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u & = & 0 \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{vu})_v & = & 0 \\ \nu_{uv} = \nu_{vu} & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.3}$$

D'aquestes identitats s'obtenen les relacions que estableix la següent proposició.

Proposició 5.1.8. *Es compleix*

1) $\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1\,\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1\,\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\,\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\,\Gamma_{22}^2 = -E\,\dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = -E\,K$

2) $\left(\Gamma_{12}^1\right)_u - \left(\Gamma_{11}^1\right)_v + \Gamma_{12}^1\,\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\,\Gamma_{22}^1 = F\,\dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = F\,K$

3) $\left(\Gamma_{22}^2\right)_u - \left(\Gamma_{12}^2\right)_v + \Gamma_{22}^1\,\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1\,\Gamma_{12}^2 = -F\,\dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = -F\,K$

4) $\left(\Gamma_{22}^1\right)_u - \left(\Gamma_{12}^1\right)_v + \Gamma_{22}^1\,\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\,\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\,\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\,\Gamma_{22}^1 = G\,\dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = G\,K$

5) $e_v - f_u = e\,\Gamma_{12}^1 + f\left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) - g\,\Gamma_{11}^2$

6) $f_v - g_u = e\,\Gamma_{22}^1 + f\left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\right) - g\,\Gamma_{12}^2$

Comentari 5.1.9. Les quatre primeres identitats es coneixen com les **equacions de Gauss** mentre que les dues últimes s'anomenen **equacions de Codazzi-Mainardi**.

Notem que, al ser $E \neq 0$, la primera de les anteriors equacions permet calcular la curvatura de Gauss K en termes de E i dels símbols de Christoffel els quals, a la vegada, són funció dels coeficients de la primera forma fonamental, com es desprèn de les equacions (5.2). D'aquí resulta el següent fet fonamental: **la curvatura de Gauss d'una superfície tant sols depèn de la seva primera forma fonamental**. A la mateixa conclusió es pot arribar a partir de l'equació 4) ja que també es compleix $G \neq 0$.

Demostració. El conjunt d'aquestes sis equacions es dedueix del sistema (5.2) per un càlcul directe però molt laboriós que no farem aquí. □

Teorema 5.1.10 (Teorema Egregi de Gauss)**.** *La curvatura de Gauss és invariant per isometries locals*

Demostració. Sigui $f\colon S \to S'$ una isometria local entre dues superfícies i sigui (Ω, φ) una parametrització local de S. Prenent l'obert Ω suficientment petit podem suposar que la restricció de f a $\varphi(\Omega)$ és injectiva. Llavors, com hem assenyalat al Comentari 3.3.4, la composició $\varphi' = f \circ \varphi$ és una parametrització de S' i es compleix

$$E'(f(p)) = E(p), \quad F'(f(p)) = F(p), \quad G'(f(p)) = G(p), \qquad \forall\, p \in S$$

i això implica que $K'(f(p)) = K(p)$. □

Exemple 5.1.11. Com a conseqüència del teorema egregi deduïm que un pla, una esfera i una sella no són localment isomètrics.

Teorema 5.1.12 (Bonnet)**.** *Siguin E, F, G i e, f, g funcions diferenciables, definides en un obert $V \subset \mathbb{R}^2$, amb $E > 0$, $G > 0$ i $EG - F^2 > 0$. Suposem també que aquestes funcions compleixen formalment les equacions de Gauss i de Codazzi-Mainardi. Aleshores, per a tot $p \in V$ hi ha un entorn $\Omega \subset V$ de p i una immersió $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ tal que $S = \varphi(\Omega)$ és una superfície regular i de manera que E, F, G i e, f, g són, respectivament, els coeficients de la primera i segona formes fonamentals de S en aquesta parametrització. A més, si $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ compleix les mateixes condicions, llavors ψ i φ difereixen en un moviment rígid, i.e. $\psi = A\varphi + C$ on $A \in \mathrm{O}(3)$ i $C \in \mathbb{R}^3$.*

Acabem aquest apartat amb el següent resultat que proporciona una manera de calcular la curvatura de Gauss de forma relativament senzilla, si disposem de coordenades ortogonals, i que serà útil amb posterioritat.

Proposició 5.1.13. *Sigui $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrització ortogonal de S, i.e. tal que $F \equiv 0$. Aleshores*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}. \tag{5.4}$$

Demostració. Diem A al terme de la dreta en la identitat (5.4). Observem que

$$\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v = \frac{2EGE_{vv} - E_v^2G - EE_vG_v}{2(EG)^{3/2}}, \qquad \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u = \frac{2EGG_{uu} - G_u^2E - GE_uG_u}{2(EG)^{3/2}}.$$

D'aquí

$$A = -\frac{1}{4}\,\frac{2EG(E_{vv} + G_{uu}) - G(E_uG_u + E_v^2) - E(E_vG_v + G_u^2)}{(EG)^2}. \tag{5.5}$$

D'altra banda, utilitzant que $F = 0$, de les relacions (5.2) resulta

$$\begin{array}{lllllllll}
\Gamma_{11}^1 & = & \dfrac{E_u}{2E} & \Gamma_{11}^2 & = & -\dfrac{E_v}{2G} & \Gamma_{12}^1 & = & \dfrac{E_v}{2E} \\
\Gamma_{12}^2 & = & \dfrac{G_u}{2G} & \Gamma_{22}^1 & = & -\dfrac{G_u}{2E} & \Gamma_{22}^2 & = & \dfrac{G_v}{2G}
\end{array}$$

d'on

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_u = \frac{G_{uu}G - G_u^2}{2\,G^2} \qquad \text{i} \qquad \left(\Gamma_{11}^2\right)_v = -\frac{E_{vv}G - E_vG_v}{2\,G^2}.$$

Substituint aquests valors en la identitat 1) de la Proposició 5.1.8 obtenim

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{4E}\left\{\frac{2G_{uu}G - 2G_u^2}{G^2} + \frac{2E_{vv}G - 2E_vG_v}{G^2} - \frac{E_v^2 + E_uG_u}{G^2} + \frac{G_u^2 + E_vG_v}{G^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{4E^2G^2}\left\{2EG\big(G_{uu} + E_{vv}\big) - E\big(G_u^2 + E_vG_v\big) - G\big(E_v^2 + E_uG_u\big)\right\}
\end{aligned}$$

d'on resulta que $K = A$, la qual cosa prova la proposició. □

5.2 Transport paral·lel

Definició 5.2.1. Sigui S una superfície regular. Un **camp vectorial (tangent a S)** definit en un obert U de S és una correspondència X que a cada punt $p \in U \subset S$ assigna un vector tangent $X(p) \equiv X_p \in T_pS$. Diem que X és **diferenciable** en $p \in S$ si hi ha una parametrització $\varphi = \varphi(u, v)$ de S, la imatge de la qual conté p, en la que X s'escriu

$$X = a\,\varphi_u + b\,\varphi_v \tag{5.6}$$

amb $a = a(u, v)$ i $b = b(u, v)$ funcions diferenciables en p. Notem que aquesta condició de diferenciabilitat no depèn de l'elecció de la parametrització. Diem que X és diferenciable si ho és en cada punt del seu domini.

Nota 5.2.2. Excepte menció explícita, tots els camps vectorials que considerem seran suposats diferenciables Així mateix, i també excepte menció explícita, els camps vectorials que considerarem en aquest apartat seran tangents a la superfície en el sentit de l'anterior definició. Per simplicitat, parlarem de "camps de S"de forma que la condició de tangència quedarà sobreentesa, o fins i tot ometrem aquesta condició si no hi ha perill de confusió.

Definició 5.2.3. Sigui X un camp vectorial de S i sigui $\vec{w} \in T_pS$ on $p \in S$. Sigui $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ corba parametritzada, amb $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = \vec{w}$, i denotem per $X(t) \equiv (X \circ \alpha)(t)$ la restricció de X a la corba. S'anomena **derivada covariant** de X en el punt p i direcció $\vec{w}$ a la projecció ortogonal $\dfrac{DX}{dt}(0)$ del vector $X'(0) = \dfrac{dX}{dt}(0)$ sobre l'espai tangent T_pS. És a dir

$$\frac{DX}{dt}(0) = \pi^{\perp}\Big(\frac{dX}{dt}(0)\Big). \tag{5.7}$$

Les consideracions que segueixen mostraran, en particular, que l'anterior definició no depèn de l'elecció de la corba α.

Expressió en coordenades. Sigui $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrització local de S la imatge de la qual conté la corba $\alpha = \alpha(t)$. Podem escriure

$$X(t) = a\big(u(t), v(t)\big)\,\varphi_u + b\big(u(t), v(t)\big)\,\varphi_v = a(t)\,\varphi_u + b(t)\,\varphi_v,$$

llavors

$$\frac{dX}{dt} = a\left(\varphi_{uu}\,u' + \varphi_{uv}\,v'\right) + b\left(\varphi_{vu}\,u' + \varphi_{vv}\,v'\right) + a'\,\varphi_u + b'\,\varphi_v.$$

D'aquí resulta

$$\begin{aligned}\frac{DX}{dt} &= \big(a' + \Gamma^1_{11}\,a\,u' + \Gamma^1_{12}\,a\,v' + \Gamma^1_{21}\,b\,u' + \Gamma^1_{22}\,b\,v'\big)\,\varphi_u \\ &\quad + \big(b' + \Gamma^2_{11}\,a\,u' + \Gamma^2_{12}\,a\,v' + \Gamma^2_{21}\,b\,u' + \Gamma^2_{22}\,b\,v'\big)\,\varphi_v.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Comentaris 5.2.4. a) L'anterior expressió mostra que la derivada covariant $\frac{DX}{dt}(0)$ tant sols depèn del vector $\vec{w}$ i, en particular, que no depèn de la particular corba α sempre que compleixi $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = \vec{w}$.

b) També posa de manifest que la derivada covariant és una noció **intrínseca** de la superfície, és a dir que pot ser calculada a partir, només, de la primera forma fonamental.

c) Finalment, implica que la noció de derivada covariant s'estén de forma natural als camps definits al llarg de corbes, cosa que fem a continuació.

Definició 5.2.5. Un camp vectorial X (tangent a S) al llarg d'una corba $\alpha\colon I \to S$ és una correspondència que a cada $t \in I$ assigna un vector tangent $X(t) \equiv X_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}S$. El camp es diu diferenciable si en cada carta local $\varphi = \varphi(u,v)$ s'escriu

$$X(t) = a(t)\,\varphi_u + b(t)\,\varphi_v,$$

amb $a = a(t), b = b(t)$ funcions diferenciables. Es defineix la seva **derivada covariant (al llarg de** α**)** com el camp vectorial $\frac{DX}{dt}$ definit per la identitat (5.8). Notem que, al seu torn, $\frac{DX}{dt}$ és un camp vectorial diferenciable al llarg de α (tangent a S).

Exemple 5.2.6. El camp tangent $\alpha'(t)$ a la corba α de S és un camp vectorial diferenciable al llarg de α. Notem que la seva derivada covariant $\frac{D\alpha'}{dt}$ és la component tangencial (a S) del vector acceleració α'' de α.

Comentari 5.2.7. Si dues superfícies S i S' són tangents al llarg d'una corba C i $\alpha\colon I \to S \cap S'$ és una parametrització de C, llavors la derivació covariant al llarg de α coincideix en les dues superfícies.

Definició 5.2.8. Diem que un camp vectorial diferenciable $X = X(t)$, tangent a S, al llarg d'una corba parametritzada $\alpha\colon I \to S$ és **paral·lel** si es compleix

$$\frac{DX}{dt} \equiv 0. \tag{5.9}$$

Proposició 5.2.9. *Siguin X, Y dos camps paral·lels al llarg de $\alpha\colon I \to S$. Aleshores $t \mapsto \langle X(t), Y(t)\rangle$ és una funció constant. En particular les normes $\|X(t)\|$ i $\|Y(t)\|$, així com l'angle entre $X(t)$ i $Y(t)$, són constants.*

Demostració. Dir que el camp X és paral·lel és dir que la seva derivada $\frac{dX}{dt}$ és normal a la superfície S. Per tant

$$\frac{d}{dt}\big\langle X(t), Y(t)\big\rangle = \Big\langle \frac{dX}{dt}(t), Y(t)\Big\rangle + \Big\langle X(t), \frac{dY}{dt}(t)\Big\rangle = 0.$$

I això prova la proposició. □

Proposició 5.2.10. *Sigui $\alpha\colon I \to S$ una corba parametritzada de S. Donat $\vec{w} \in T_{\alpha(t_0)}S$ hi ha un únic camp paral·lel $X = X(t)$ al llarg de α tal que $X(t_0) = \vec{w}$. Aquest camp està definit a tot $t \in I$.*

Demostració. En una carta local podem escriure $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Llavors el camp cercat, $X(t) = a(t)\,\varphi_u + b(t)\,\varphi_v$, és l'unica solució del sistema **lineal** d'equacions diferencials ordinàries

$$\left\{\begin{array}{lcl} a' + \Gamma^1_{11}\,a\,u' + \Gamma^1_{12}\,a\,v' + \Gamma^1_{21}\,b\,u' + \Gamma^1_{22}\,b\,v' & = & 0 \\ b' + \Gamma^2_{11}\,a\,u' + \Gamma^2_{12}\,a\,v' + \Gamma^2_{21}\,b\,u' + \Gamma^2_{22}\,b\,v' & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.10}$$

amb condicions inicials $a(t_0) = a_0$ i $b(t_0) = b_0$, on $\vec{w} = a_0\,\varphi_u + b_0\,\varphi_v$. □

Definició 5.2.11. El camp $X = X(t)$ donat per la proposició anterior s'anomena **transport paral·lel** del vector $\vec{w}$ al llarg de $\alpha = \alpha(t)$.

Comentaris 5.2.12. a) La noció camp paral·lel, i per tant també la de transport paral·lel, no depèn de la parametrització de la corba $\alpha = \alpha(t)$. En efecte, si $t = t(s)$ és una reparametrització, llavors

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{DX}{ds} = \frac{DX}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

i per tant

$$\frac{DX}{ds} \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{DX}{dt} \equiv 0$$

b) La noció de transport paral·lel s'estén de manera natural a les corbes parametritzades diferenciables a trossos.

Exercicis 5.2.13. 1) Determineu l'equació del transport paral·lel en un pla P en coordenades cartesianes. Què podem dir del transport paral·lal llarg d'una corba de P?

2) Descriviu el transport paral·lel al llarg d'un cercle màxim d'una esfera.

3) Denotem per p_N el pol nord de l'esfera unitat S^2 i siguin M_1 i M_2 dos meridians de S^2 formant entre si un angle τ. Es considera una corba $\alpha\colon [0,1] \to S^2$, diferenciable a trossos, consistent a recórrer M_1 des de p_N fins a trobar l'equador de S^2, a continuar seguidament per l'equador fins arribar a M_2 i tornar finalment a p_N per aquest segon meridià. Sigui $\vec{w}(t)$ el transport paral·lel d'un vector $\vec{w}_0 \in T_{p_N}S^2$ al llarg de α. Quin és l'angle format per $\vec{w}(0) = \vec{w}_0$ i $\vec{w}(1)$?

4) Seguint amb la notació de l'exercici anterior, sigui p_S el pol sud de S^2. Es consideren els vectors $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ de $T_{p_S}S^2$ obtinguts per transport paral·lel de $\vec{w}_0 \in T_{p_N}S^2$ al llarg dels meridians M_1 i M_2 respectivament. Quin angle formen aquests dos vectors?

5) Descriviu el transport paral·lel de S^2 al llarg de la corba tancada descrita pel paral·lel $\theta = \theta_0$, on θ denota la colatitud.

5.3 Geodèsiques

Definició 5.3.1. Diem que la corba parametritzada $\gamma\colon I \to S$ és una **geodèsica** de la superfície regular S si el seu vector tangent γ' és paral·lel al llarg de $\gamma = \gamma(t)$. És a dir si es compleix

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0. \tag{5.11}$$

Comentaris 5.3.2. a) Dir que la corba $\gamma = \gamma(t)$ de S és geodèsica és equivalent a dir que el seu vector acceleració γ'' és normal a S.

b) Direm que una corba C de S és geodèsica si admet una parametrització $\gamma = \gamma(t)$ que ho és.

c) Entendrem que una corba constant és geodèsica.

Com a corol·lari de la Proposició 5.2.9 s'obté

Proposició 5.3.3. *Sigui $\gamma = \gamma(t)$ geodèsica de S. Llavors $\|\gamma'\|$ és constant.*

Comentari 5.3.4. De l'anterior proposició resulta que el paràmetre d'una geodèsica (no constant) és un múltiple del paràmetre arc. A més, si $\gamma = \gamma(t)$ és geodèsica i $t = t(s)$ és un canvi de paràmetre, llavors $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ és també geodèsica si i només si $t = a\,s + b$ amb $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposició 5.3.5. *Sigui $(\Omega, \varphi = \varphi(u,v))$ parametrització local de S i sigui $\gamma = \gamma(t)$ corba de S, amb imatge continguda en $\varphi(\Omega)$, que escrivim $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Aleshores γ és geodèsica de S si i només si es compleix*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'' + \Gamma_{11}^1\,(u')^2 + 2\,\Gamma_{12}^1\,u'\,v' + \Gamma_{22}^1\;(v')^2 & = & 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2\,(u')^2 + 2\,\Gamma_{12}^2\,u'\,v' + \Gamma_{22}^2\;(v')^2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.12}$$

Demostració. La corba $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ és geodèsica si el seu camp vectorial tangent $\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$ és paral·lel, és a dir si compleix l'equació (5.10). D'aquí resulta l'equació de les geodèsiques (5.12). $\square$

Com a conseqüència del teorema d'existència i unicitat de solucions d'equacions diferencials ordinàries resulta

Proposició 5.3.6. *Donats un punt p de S i un vector $\vec{w} \in T_pS$ hi ha un nombre $\epsilon > 0$ i una única corba, $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$, que és geodèsica i tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = \vec{w}$.*

Comentaris 5.3.7. a) Notem que l'equació de les geodèsiques (5.12) no és lineal. Això comporta que les geodèsiques d'una superfície puguin no estar definides per a tot t.

b) Es pot provar que que si la superfície S és compacta aleshores és **geodèsicament completa**, és a dir que les geodèsiques de S estan definides per a tot $t \in \mathbb{R}$.

c) Les nocions de transport paral·lel i de geodèsica no depenen de l'orientació de S.

Exemples 5.3.8. 1) Les geodèsiques d'un pla són les rectes parametritzades de velocitat constant, i.e. $\gamma(t) = \vec{v} + t\,\vec{w}$.

2) Les geodèsiques d'una esfera són els cercles màxims amb parametritzacions de velocitat constant.

3) Les geodèsiques d'un cilindre recte són els meridians, els paral·lels i les hèlixs, sempre amb parametritzacions de velocitat constant.

Exercicis 5.3.9. 1) Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució són geodèsiques. Quins paral·lels són també geodèsiques?

2) Es considera una superfície $\mathbb{H}^2$ que admet una parametrització global $\varphi = \varphi(u,v)$, definida en $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$, en la qual la primera forma fonamental s'escriu

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}$$

i) Comproveu que els símbols de Christoffel en aquestes coordenades són

$$\Gamma_{11}^1 = 0 \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{v} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{v}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \qquad \Gamma_{22}^1 = 0 \qquad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{v}$$

ii) Determineu el transport paral·lel d'aquesta superfície al llarg de les corbes $\alpha(t) = (0, t)$, per $t > 0$, i $\beta(t) = (t, 1)$, per $t \in \mathbb{R}$. Comproveu que la corba $\gamma(s) = (u_0, e^s)$ és una geodèsica.

iii) Determineu $\frac{D\gamma'}{dt}$ si $\gamma(t) = (u_0 + R\cos t, R\sin t)$, on $t \in (0, \pi)$. Què podem dir de la corba γ?

iv) Determineu la curvatura de Gauss de la superfície $\mathbb{H}^2$. És possible calcular la seva curvatura mitjana?

Comentari 5.3.10. Si una corba γ compleix que $\frac{D\gamma'}{dt}$ és un múltiple de γ' llavors hi ha una reparametrització $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de la corba de manera que $\gamma = \gamma(s)$ és geodèsica. Es pot veure llavors que la superfície $\mathbb{H}^2$ de l'exercici anterior és geodèsicament completa amb geodèsiques que són, amb una parametrització adequada, les semirectes verticals i les semicircumferències amb centre l'eix $v = 0$. Aquesta superfície s'anomena **pla hiperbòlic**.

Hilbert va provar que el pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$ no es pot realitzar (globalment) com a superfície de $\mathbb{R}^3$, però la podem pensar com a varietat de Riemann. Llavors $\mathbb{H}^2$ resulta ser un model de la geometria hiperbòlica (no-Euclidiana).

Comentari 5.3.11. Es pot provar que les geodèsiques minimitzen, localment, la longitud. De manera precisa, si $\gamma\colon I \to S$ és una geodèsica i $t_0 \in T$, hi ha $\epsilon > 0$ de manera que, si $a, b \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, llavors la longitud de γ entre $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ és menor que la longitud de qualsevol altra corba que uneixi $\gamma(a)$ amb $\gamma(b)$.

5.4 Curvatura geodèsica

Considerem una superfície regular orientada S i sigui ν el camp normal unitari que defineix l'orientació. Fixem una corba $\alpha = \alpha(t)$ de S. Donat un camp tangent **unitari** $X = X(t)$ al llarg de α, denotarem per $\overline{X} = \overline{X}(t)$ el camp vectorial unitari al llarg de α unívocament determinat per la condició que $(X, \overline{X}, \nu)$ sigui una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ (és a dir que $(X, \overline{X})$ sigui base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t)}S$, $\forall\, t$). Notem que es compleix

$$N = X \wedge \overline{X} \quad \Rightarrow \quad \overline{X} = \nu \wedge X. \tag{5.13}$$

Mantenint aquesta notació, definim

Definició 5.4.1. Sigui $X = X(t)$ un camp vectorial unitari, tangent a S, al llarg d'una corba parametritzada $\alpha = \alpha(t)$ de S. Com que $X(t)$ és unitari es compleix $\langle \frac{dX}{dt}, X \rangle = 0$ i per tant

$$\frac{DX}{dt} = \lambda \cdot \overline{X} = \lambda \cdot \nu \wedge X. \tag{5.14}$$

El nombre

$$\left[\frac{DX(t)}{dt}\right] := \lambda(t) \tag{5.15}$$

s'anomena **valor algebraic** de la derivada covariant de X en t.

Comentari 5.4.2. El signe de $\left[\frac{DX}{dt}\right]$ depèn de l'orientació de S. Observem també que, llevat del signe, $\left[\frac{DX}{dt}\right]$ coincideix amb la norma del vector derivada covariant $\frac{DX}{dt}$.

Definició 5.4.3. Sigui C una corba regular en S i sigui $\alpha = \alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C. El valor algebraic de la derivada covariant de α' en $\alpha(s)$

$$k_g = k_g(s) := \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] \tag{5.16}$$

s'anomena **curvatura geodèsica** de C en $\alpha(s)$.

Comentaris 5.4.4. 1) Les geodèsiques (no constants) estan caracteritzades perquè la seva curvatura geodèsica k_g és zero.

2) El signe de k_g depèn de l'orientació de S.

3) Notem que es compleixen les següents relacions, força útils en els càlculs concrets

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = \left\langle \frac{dX}{dt}\,,\,\overline{X}\right\rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}\,,\,\nu\wedge X\right\rangle. \tag{5.17}$$

$$k_g = \left[\frac{D\alpha'}{ds}\right] = \left\langle \frac{d\alpha'}{ds}\,,\,\nu\wedge\alpha'\right\rangle = \left\langle \alpha''\,,\,\nu\wedge\alpha'\right\rangle. \tag{5.18}$$

Proposició 5.4.5. *Sigui C una corba regular en S. Siguin k, k_n i k_g les seves curvatura, curvatura normal i curvatura geodèsica respectivament. Aleshores es compleix*

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2. \tag{5.19}$$

Demostració. Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C. Llavors

$$\alpha'' = k\,N = \frac{D\alpha'}{ds} + \langle\alpha'',\nu\rangle\,\nu$$

i per tant

$$\begin{aligned} k^2 = \|\alpha''\|^2 &= \left\|\frac{D\alpha'}{ds}\right\|^2 + \left\|\langle\alpha'',\nu\rangle\,\nu\right\|^2 \\ &= \left[\frac{D\alpha'}{ds}\right]^2 + \big(k\langle N,\nu\rangle\big)^2 = k_g^2 + k_n^2, \end{aligned}$$

on hem utilitzat el teorema de Pitàgores. □

Proposició 5.4.6. *Siguin X i Y dos camps vectorials unitaris, tangents a S, al llarg de la corba $\alpha = \alpha(t)$ de S. Llavors*

$$\left[\frac{DY}{dt}\right] - \left[\frac{DX}{dt}\right] = \frac{d\theta}{dt}, \tag{5.20}$$

on θ és una determinació diferenciable de l'angle de X a Y.

Demostració. Posem, com al principi d'aquesta secció, $\overline{X} = \nu\wedge X$ i $\overline{Y} = \nu\wedge Y$. Llavors $(X,\overline{X})$ i $(Y,\overline{Y})$ són bases ortonormals i positives de $T_{\alpha(t)}S$. A més es compleix

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = \left\langle \frac{dX}{dt}\,,\,\overline{X}\right\rangle \qquad \text{i} \qquad \left[\frac{DY}{dt}\right] = \left\langle \frac{dY}{dt}\,,\,\overline{Y}\right\rangle. \tag{5.21}$$

Per la definició de θ, tindrem

$$Y = \cos\theta\cdot X + \sin\theta\cdot\overline{X}, \tag{5.22}$$

i per tant

$$\begin{aligned}\overline{Y} = \nu \wedge X &= \cos\theta \cdot \nu \wedge X + \sin\theta \cdot \nu \wedge \overline{X} \\ &= \cos\theta \cdot \overline{X} - \sin\theta \cdot X.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Derivant la igualtat (5.22) resulta

$$Y' = \frac{dY}{dt} = -\sin\theta \cdot \theta' \cdot X + \cos\theta \cdot X' + \cos\theta \cdot \theta' \cdot \overline{X} + \sin\theta \cdot \overline{X}' \tag{5.24}$$

D'aquí, de la igualtat (5.23) i de les relacions d'ortogonalitat $\langle X, \overline{X}\rangle = 0$ i $\langle X, X'\rangle = 0$, deduïm

$$\begin{aligned}\left[\frac{DY}{dt}\right] = \left\langle Y', \overline{Y}\right\rangle &= \sin^2\theta \cdot \theta' - \sin^2\theta\,\langle X, \overline{X}'\rangle + \cos^2\theta\,\langle \overline{X}, X'\rangle + \cos^2\theta \cdot \theta' \\ &= \theta' + \cos^2\theta \left[\frac{DX}{dt}\right] - \sin^2\theta\,\langle X, \overline{X}'\rangle.\end{aligned} \tag{5.25}$$

D'altra banda

$$0 = \frac{d}{dt}\langle X, \overline{X}\rangle = \langle X', \overline{X}\rangle + \langle X, \overline{X}'\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle X, \overline{X}'\rangle = -\left[\frac{DX}{dt}\right].$$

D'aquí i de la identitat(5.25) resulta

$$\left[\frac{DY}{dt}\right] - \left[\frac{DX}{dt}\right] = \frac{d\theta}{dt}$$

tal i com voliem provar. □

Corol·lari 5.4.7. *Sigui $\alpha = \alpha(s)$ una corba de S parametritzada per l'arc i sigui $X = X(s)$ un camp paral·lel (unitari) al llarg de α. Sigui $\theta = \theta(s)$ una determinació diferenciable de l'angle de $X(s)$ a $\alpha'(s)$. Aleshores*

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] = \frac{d\theta}{ds}. \tag{5.26}$$

Proposició 5.4.8. *Sigui S superfície regular i $\varphi = \varphi(u, v)$ una parametrització ortogonal (i.e. $F = 0$) de S compatible amb l'orientació. Sigui $X = X(t)$ un camp unitari, tangent a S, al llarg de $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$. Aleshores*

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\theta}{dt}, \tag{5.27}$$

on $\theta = \theta(t)$ és l'angle de φ_u a $X(t)$.

Demostració. Definim $\vec{e}_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}$ i $\vec{e}_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}$. Llavors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ és base ortonormal positiva i $\nu = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Posem $\vec{e}_1(t) = \vec{e}_1(u(t), v(t))$. Per la Proposició 5.4.6, tindrem

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = \left[\frac{D\vec{e}_1}{dt}\right] + \frac{d\theta}{dt}.$$

D'altra banda

$$\begin{aligned}\left[\frac{D\vec{e}_1}{dt}\right] &= \left\langle \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \nu \wedge \vec{e}_1\right\rangle = \left\langle \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \vec{e}_2\right\rangle \\ &= \left\langle (\vec{e}_1)_u, \vec{e}_2\right\rangle \frac{du}{dt} + \left\langle (\vec{e}_1)_v, \vec{e}_2\right\rangle \frac{dv}{dt}.\end{aligned}$$

Però $F=0$ implica que $\big\langle \varphi_{uu}\,,\,\varphi_v\,\big\rangle = -\frac{1}{2}E_v$ i per tant

$$\big\langle (\vec{e}_1)_u\,,\,\vec{e}_2\,\big\rangle = \Big\langle \Big(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}\Big)_u\,,\,\frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}\Big\rangle = -\frac{1}{2}\,\frac{E_v}{\sqrt{EG}}.$$

De manera anàloga es comprova que

$$\big\langle (\vec{e}_1)_v\,,\,\vec{e}_2\,\big\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

i per tant

$$\left[\frac{DX}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\,\frac{dv}{dt} - E_v\,\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\theta}{dt},$$

que és la identitat que volíem provar. □

Com a corol·lari de l'anterior proposició s'obté

Teorema 5.4.9 (Fórmula de Liouville)**.** *Sigui S superfície regular i $\varphi=\varphi(u,v)$ una parametrització ortogonal (i.e. $F=0$) de S. Sigui $\alpha(s)=\varphi(u(s),v(s))$ una corba de S parametritzada per l'arc i denotem per $\theta=\theta(s)$ l'angle de φ_u a $\alpha'(s)$. Aleshores*

$$k_g = (k_g)_1\,\cos\theta\,+\,(k_g)_2\,\sin\theta\,+\,\frac{d\theta}{ds}, \tag{5.28}$$

on $(k_g)_1$ i $(k_g)_2$ denoten les curvatures geodèsiques de les corbes coordenades $v=v_0$ i $u=u_0$, respectivament.

Demostració. Aplicant la proposició anterior al camp $X(s)=\alpha'(s)$ resulta

$$k_g = \left[\frac{D\alpha'}{ds}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\,\frac{dv}{ds} - E_v\,\frac{du}{ds}\right\} + \frac{d\theta}{ds}$$

Al llarg de la línia coordenada $s\mapsto (u(s),v_0)$ tenim $\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}$ i $\frac{dv}{ds}=0$, per tant

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

De manera anàloga

$$(k_g)_2 = -\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Per tant

$$k_g = (k_g)_1\,\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\,+\,(k_g)_2\,\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}\,+\,\frac{d\theta}{ds},$$

però $\langle \alpha',\varphi_u\rangle = \langle u'\varphi_u + v'\varphi_v,\varphi_u\rangle = \frac{du}{ds}\,E$, la qual cosa implica

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{ds} = \Big\langle \alpha', \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}\Big\rangle = \cos\theta.$$

De manera similar es comprova que

$$\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} = \sin\theta,$$

d'on resulta

$$k_g = (k_g)_1\,\cos\theta\,+\,(k_g)_2\,\sin\theta\,+\,\frac{d\theta}{ds},$$

com volíem demostrar. □