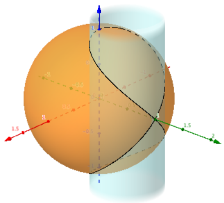
Geometria diferencial
Curs 2017–18

Corbes: Més curvatura i torsió

Exercici 1: (Volta de Viviani) Sigui C la corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2=1$ amb el cilindre $x^2+y^2-y=0$. Calculeu la curvatura i la torsió de C.



Indicacions: Teniu en compte que el cilindre és un cilindre vertical de radi $1/2$ amb l'eix donat per $x=0$, $y=1/2$, parametritzeu adequadament (*coordenades polars en el pla xy centrades al punt* $(0,1/2,0)$) els seus punts i determineu, en funció d'aquests paràmetres, la intersecció amb l'esfera. Un cop fet això només haureu d'aplicar les fórmules.

Un clic sobre l'esquema us permetrà accedir (`https://www.geogebra.org/m/hqVuj92y`) a una construcció dinàmica de la situació per tal de poder observar la corba des del punt de vista que vulgueu.

Solució:

L'equació del cilindre també s'escriu com $x^2+(y-1/2)^2=1/4$. Per tant es pot prendre

$$x=\frac{1}{2}\sin(t)$$
$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(t)$$

Substituint aquest valors a l'equació de l'esfera i aïllant z s'obté

$$z=\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}}=\pm\sin(t/2).$$

Ara ja és un càlcul simple:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t)&=\left(\frac{\cos(t)}{2},-\frac{\sin(t)}{2},\frac{\cos(t/2)}{2}\right)\\
|\gamma'(t)|&=\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2(t/2)}\\
\gamma''(t)&=\left(-\frac{\sin(t)}{2},-\frac{\cos(t)}{2},-\frac{\sin(t/2)}{4}\right)\\
\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)&=\left(\frac{\sin(t)\sin(t/2)}{8}+\frac{\cos(t)\cos(t/2)}{4},\frac{\cos(t)\sin(t/2)}{8}-\frac{\sin(t)\cos(t/2)}{4},-\frac{1}{4}\right)\\
|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|&=\frac{1}{8}\sqrt{8-3\sin^2(t/2)}\\
k(t)&=\frac{\sqrt{8-3\sin^2(t/2)}}{(1+\cos^2(t/2))^{3/2}}\\
\gamma'''(t)&=\left(-\frac{\cos(t)}{2},\frac{\sin(t)}{2},-\frac{\cos(t/2)}{8}\right)\\
\det(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t))&=-\frac{3\cos(t/2)}{32}\\
\tau(t)&=\frac{-6\cos(t/2)}{8-3\sin^2(t/2)}
\end{aligned}$$

Exercici 2: Es diu que una corba és esfèrica si el seu recorregut està sobre una esfera.

(a) Demostreu que una corba $\alpha(s)$ és esfèrica si, i només si, existeix un punt fix c_0 (el centre de l'esfera que la conté) tal que $\alpha(s) - c_0$ és perpendicular a $\alpha'(s)$ per a tot s.

(b) Comproveu que el centre c_0 de l'esfera que conté una certa corba esfèrica $\alpha(s)$ (parametritzada per l'arc) es pot obtenir, per a cada s, com

$$c_0 = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\, N + \frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\, B$$

i, per tant, el radi d'aquesta esfera és

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\right)^2}$$

(c) Tenint en compte els càlculs de l'apartat anterior, demostreu el recíproc. És a dir, si

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2 + \left(\frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\right)^2$$

és constant, la corba α és esfèrica i el radi de l'esfera que la conté és l'arrel quadrada d'aquesta constant.

Nota: L'esfera de centre $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\, N + \frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\, B$ té, com a mínim, ordre de contacte 3 amb la corba α i és *l'esfera osculadora*.

Solució:

(a) La distància (al quadrat) dels punts de la corba al punt fix serà el producte escalar $\langle \alpha(s) - c_0, \alpha(s) - c_0 \rangle$. Derivant, aquest valor és constant si, i només si,

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = 0$$

i això és dir que el *vector radi* $\alpha(s) - c_0$ i la corba són perpendiculars per a cada s.

(b) Partint de la perpendicularitat entre la direcció de la corba i vector radi donada per la iguatat

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = 0$$

es pot tornar a derivar i s'obté

$$0 = \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + 1$$

(si suposem que parametritzem per l'arc).
Ara bé, $\alpha''(s) = k(s)\, N(s)$ d'on es dedueix que

$$\langle N(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{1}{k(s)}$$

Derivant un cop més

$$\langle N'(s), \alpha(s) - c_0 \rangle + \langle N(s), T(s) \rangle = \frac{k'(s)}{(k(s))^2}$$

Però $\langle N(s), T(s) \rangle = 0$ i $N'(s) = -k(s)\, T(s) - \tau(s)\, B(s)$, de forma que

$$-\tau(s)\, \langle B(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = \frac{k'(s)}{(k(s))^2} \implies \langle B(s), \alpha(s) - c_0 \rangle = -\frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}$$

Tenint en compte que T, N, B és una base ortonormal de l'espai per a cada s, els resultats anteriors es poden resumir en la igualtat

$$\alpha(s) - c_0 = -\frac{1}{k(s)}\, N(s) - \frac{k'(s)}{(k(s))^2\, \tau(s)}\, B(s)$$

que és el que es volia comprovar.

(c) Per tal de simplificar les expressions, considerem $R = 1/k$ i $\Theta = 1/\tau$. Noteu que les components del vector radi $\alpha(s) - c_0$ d'una corba esfèrica s'escriuen utilitzant aquest conveni com

$$\alpha(s) - c_0 = -R(s)\,N(s) + R'(s)\,\Theta(s)\,B(s)\,.$$

Prenem, doncs, una corba α per a la qual $R^2 + (R'\,\Theta)^2$ sigui constant i considerem

$$c(s) = \alpha(s) + R(s)\,N(s) - R'(s)\,\Theta(s)\,B(s)\,.$$

S'haurà de provar que $c(s)$ és constant. Derivant a l'expressió de $c(s)$ s'obté

$$\begin{aligned} c'(s) &= T(s) + R'(s)\,N(s) + R(s)\,(-k(s)\,T(s) - \tau(s)\,B(s)) - (R'(s)\,\Theta(s))'\,B(s) \\ &\qquad - \tau(s)\,R'(s)\,\Theta(s)\,N(s) \\ &= -(R(s)\,\tau(s) + (R'(s)\,\Theta(s))')\,B(s) \\ &= -(R(s)\,(\Theta(s))^{-1} + (R'(s)\,\Theta(s))')\,B(s) \end{aligned}$$

Per un altre costa, la condició $R^2 + (R'\,\Theta)^2 = \text{ct.}$ derivada dóna

$$R\,R' + R'\,\Theta\,(R'\,\Theta)' = 0$$

d'on, dividint per R' i Θ,

$$R\,\Theta^{-1} + (R'\,\Theta)' = 0$$

i $c(s)$ és constant.

ATENCIÓ!! Si s'ha dividit per R' i per Θ l'argument serà vàlid només si aquesta acció és vàlida. És a dir cal suposar des del principi que $R' \neq 0$ i $\Theta \neq 0$ (com que Θ és $1/\tau$ això no és un problema mentre $\tau \neq 0$ i aquest element es pugui definir). En qualsevol cas, cal estudiar quina és la situació quan algun dels denominadors que s'han utilitzat k, τ o R' s'anul·la.

Exercici 3: Es designa per *hèlix* una corba tal que les seves tangents formen un angle constant amb una direcció fixada (que és diu que és l'eix de l'hèlix).

(a) Proveu que α és una hèlix si, i només si, les seves normals són paral·leles a un pla fixat (de fet, el pla perpendicular a l'eix).

(b) Demostreu que si la torsió no s'anul·la, llavors $\dfrac{k(s)}{\tau(s)} = \text{ct.}$ caracteritza el fet de ser hèlix.

(c) Quin invariant permet distingir una hèlix dextrògira d'una hèlix levògira?

(d) Proveu que tota hèlix γ es pot escriure com $\gamma(s) = \beta(s) + s\,\vec{v}$ on $\beta(s)$ és una corba plana continguda en un pla perpendicular a l'eix de γ i $\vec{v}$ un vector fix.

(e) Comproveu que la corba $\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$ és una hèlix segons la definició que estem utilitzant (s'anomena *hèlix circular*). Determineu l'eix i la corba plana associada.

(f) Vegeu que el lloc geomètric dels centres dels cercles osculadors d'una hèlix circular és una altra hèlix circular coaxial i del mateix pas.

(g) Localitzeu, entre les corbes que han sortit en exercicis anteriors, altres hèlix i mireu d'obtenir el seu eix i la corba plana associada.

Solució:

(a) Donem per fet que la corba α està parametritzada per l'arc. Sigui $\vec{v}$ un vector (unitari) arbitrari i fix. Aleshores es compleix

$$\langle T, \vec{v}\rangle' = k\,\langle N, \vec{v}\rangle\,.$$

De forma que:

- Si α és una hèlix i $\vec{v}$ el vector director (unitari) del seu eix, el valor de $\langle T, \vec{v}\rangle$ és constant i la seva derivada nul·la. Per tant, $\langle N, \vec{v}\rangle = 0$ (cal que $k \neq 0$ si es vol parlar de vector normal) i N sempre és paral·lel al pla perpendicular a l'eix.
- Recíprocament, si N és paral·lel a un pla fix i $\vec{v}$ és el vector (unitari) perpendicular a aquest pla, la mateixa fórmula dirà que l'angle entre el vector tangent i la direcció determinada per aquest vector és constant. I això és dir que α és una hèlix amb eix determinat per $\vec{v}$.

(b) Notem en primer lloc que quan α és una hèlix i designem per $\vec{v}$ el vector director del seu eix, la condició $\langle N, \vec{v}\rangle = 0$ implica que $\vec{v}$ s'ha d'escriure com

$$\vec{v} = a\,T + b\,B$$

(amb a i b constants). Derivant aquesta igualtat

$$\vec{0} = (a\,k + b\,\tau)\,N$$

Dit d'una altra manera i si $\tau \neq 0$

$$\frac{k}{\tau} = -\frac{b}{a}$$

que és una constant. (Noteu que, si θ és l'angle entre la tangent a la corba i l'eix, el valor de b/a és $\tan(\theta)$).

Recíprocament, pensem $\theta = -\arctan(k/\tau)$, $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$, i definim el vector

$$\vec{v} = a\,T + b\,B$$

que forma un angle constant amb T al llarg de tota la corba. Com que, per construcció,

$$(\vec{v})' = (a\,k + b\,\tau)\,N = \vec{0}$$

(ja que $\dfrac{k}{\tau} = -\tan(\theta) = -\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\dfrac{b}{a}$) el vector $\vec{v}$ és constant i forma un angle constant amb el vector tangent a la corba.

(c) La torsió.

(d) Notem en primer lloc que si $\langle \vec{v}, T(s)\rangle = 0$ (s'està suposant que l'angle és constant) la corba serà plana i continguda en un pla perpendicular a $\vec{v}$ (només cal integrar T per tal d'obtenir el recorregut de la corba γ i, aleshores, queda clar que $\langle \vec{v}, \gamma(s) - \gamma(s_0)\rangle' = \langle \vec{v}, T(s)\rangle = 0$ i, per tant, el valor de $\langle \vec{v}, \gamma(s) - \gamma(s_0)\rangle$ serà constant i igual a 0).

Suposem doncs que $\langle \vec{v}, T(s)\rangle = c \neq 0$ i *projectem* γ sobre el pla perpendicular a l'eix que passa per un punt qualsevol ($\gamma(s_0)$) del seu recorregut de forma que s'obtingui una corba $\beta(s)$ sobre aquest pla i de la forma

$$\beta(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\,\vec{v}\,,$$

on $\lambda(s)$ és una funció tal que $\lambda(s_0) = 0$. Com que $\beta'(s)$ serà perpendicular al vector $\vec{v}$ (unitari) s'obtindrà

$$0 = \langle \vec{v}, \beta'(s)\rangle = \langle \vec{v}, T(s)\rangle + \lambda'(s) = c + \lambda'(s)$$

de forma que $\lambda'(s) = -c$ i, tenint en compte que en $\lambda(s_0) = 0$, $\lambda(s) = -c\,(s - s_0)$. Substituint l'origen del paràmetre per s_0 i el vector unitari que determina l'eix pel vector $\vec{w} = c\,\vec{v}$ es pot parametritzar la corba per

$$\gamma(s) = \beta(s) + s\,\vec{w}$$

(e) Si $\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$, el seu vector tangent és $\gamma'(t) = (-a\,\sin(t), a\,\cos(t), b)$ (de longitud constant $\sqrt{a^2 + b^2}$), que té el producte escalar amb el vector $\vec{v} = (0, 0, 1)$ constant (igual a b). Per tant és una hèlix amb eix en la direcció de l'eix vertical.

La corba plana associada, prenent com origen el punt $\gamma(0) = (0, 1, 0)$, serà $\beta(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), 0)$.

(f) Calculem en primer lloc la curvatura de $\gamma(t)=(a\,\cos(t),a\,\sin(t),b\,t)$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=(-a\,\sin(t),a\,\cos(t),b)\\ \gamma''(t)&=(-a\,\cos(t),-a\,\sin(t),0)\\ \gamma'(t)\wedge\gamma''(t)&=(a\,b\,\sin(t),-a\,b\,\cos(t),a^2)\\ |\gamma'(t)|&=\sqrt{a^2+b^2}\\ k(t)&=\frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Per tant la corba dels centres de curvatura és

$$\beta(t)=\gamma(t)+\frac{a^2+b^2}{a}(-\cos(t),-\sin(t),0)=(-\frac{b^2}{a}\cos(t),-\frac{b^2}{a}\sin(t),b\,t)$$

que és una hèlix sobre el cilindre $x^2+y^2=b^4/a^2$, del mateix pas de rosca $2\,\pi\,b$ que l'hèlix inicial.

(g) Recapitulant els exercicis anteriors, es poden localitzar, com a mínim els casos següents:

I) $\alpha(t)=(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t},\sqrt{2}\,t)$ que té curvatura i torsió iguals ($k/\tau=1$) ja que

$$k=\tau=\frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t})^2}$$

II) $\alpha(t)=(2\,t,\log(t),t^2)$ amb

$$k=\tau=\frac{2\,t}{(2\,t+1)^2}$$

III) $\alpha(t)=(3\,t-t^3,3\,t^2,3\,t+t^3)$ amb

$$k=-\tau=\frac{1}{3\,(t^2+1)^2}$$

A l'apartat (b) s'obté, en particular, que la direcció de l'eix d'una hèlix és la d'un vector definit com $\vec{v}=a\,T+b\,B$, on a i b són constants tals que $k/\tau=-b/a$. Per tant, la direcció de l'eix de cada una d'aquestes corbes vindrà donada per:

I) $\vec{v}=T-B$ que és equivalent a prendre $(1,-1,0)$.

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t}+2}}\left(\mathrm{e}^t,\,-\mathrm{e}^{-t},\,\sqrt{2}\right)\\ B&=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\,t}+\mathrm{e}^{-2\,t}+2}}\left(\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^t,\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

II) $\vec{v}=T-B$ que en aquest cas dóna la mateixa direcció que $(0,1,1)$.

$$\begin{aligned}T&=\left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1},\frac{1}{2\,t^2+1},\frac{2\,t^2}{2\,t^2+1}\right)\\ B&=\left(\frac{2\,t}{2\,t^2+1},-\frac{2\,t^2}{2\,t^2+1},-\frac{1}{2\,t^2+1}\right)\end{aligned}$$

III) $\vec{v}=T+B$ corresponent a la direcció de $(0,0,1)$.

$$\begin{aligned}T&=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t^2+1},\sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ B&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t^2+1},-\sqrt{2}\,\frac{t}{t^2+1},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Per tal de determinar la corba associada només caldrà projectar sobre el/un pla perpendicular a l'eix. Tenint en compte que *la component vertical* del punt de la corba respecte aquest pla de projecció s'obtindrà fent el producte escalar amb el vector unitari que determina l'eix es pot fer:

I) $\langle\alpha(t),(1,-1,0)\rangle = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}$. De forma que la projecció sobre el pla $x-y=0$ (perpendicular a l'eix per l'origen) serà

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,(1,-1,0) = (\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \sqrt{2}\,t) = (\cosh(t), \cosh(t), \sqrt{2}\,t)$$

II) $\langle\alpha(t),(0,1,1)\rangle = \log(t)+t^2$. I la projecció sobre $y+z=0$ serà

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\log(t)+t^2}{2}\,(0,1,1) = (2\,t, \frac{1}{2}\,(\log(t)-t^2), \frac{1}{2}\,(-\log(t)+t^2))$$

III) $\langle\alpha(t),(0,0,1)\rangle = t^3+3\,t$. Amb la projecció sobre el pla $z=0$

$$\beta(t) = \alpha(t) - (t^3+3\,t)\,(0,0,1) = (3\,t - t^3, 3\,t^2, 0)$$

(òbviament).

Exercici 4: Considerem l'hèlix circular donada per $\alpha(s) = (a\,\cos(s/c), a\,\sin(s/c), b\,s/c)$, amb $s\in\mathbb{R}$ i $c^2 = a^2+b^2$.

(a) Demostreu que α és una parametrització per l'arc.

(b) Determineu la curvatura i la torsió de α.

(c) Determineu el pla osculador.

(d) Demostreu que les rectes que tenen direcció $N(s)$ i passen per $\alpha(s)$ tallen l'eix Oz amb angle constant igual a $\pi/2$.

Solució:

(a) Com que

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin(s/c), \frac{a}{c}\cos(s/c), \frac{b}{c}\right)$$

tenim

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = 1\,.$$

Per tant $\alpha(s)$ està parametritzada per l'arc.

(b) D'altra banda

$$k(s)\,N(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos(s/c), -\frac{a}{c^2}\sin(s/c), 0\right)$$

Per tant, $k(s) = \dfrac{|a|}{c^2}$ i $N(s) = -\operatorname{sgn}(a)\,(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)$.

El vector binormal serà $B(s) = T(s)\times N(s) = \operatorname{sgn}(a)\left(\frac{b}{c}\sin(s/c), -\frac{b}{c}\cos(s/c), \frac{a}{c}\right)$, d'on

$$\tau(s)\,N(s) = B'(s) = \operatorname{sgn}(a)\,\frac{b}{c^2}\,(\cos(s/c), \sin(s/c), 0)\,,$$

i $\tau(s) = -\dfrac{b}{c^2}$.

(c) El pla osculador en el punt $\alpha(s)$ és el que passa per $\alpha(s)$ i el seu espai director està generat per $T(s)$ i $N(s)$ 0, equivalentment, és perpendicular a $B(s)$. Per tant té per equació

$$b\,\sin(s/c)\,(x - a\cos(s/c)) - b\,\cos(s/c)\,(y - a\,\sin(s/c)) + a\,(z - b\,(s/c)) = 0\,.$$

(d) El cosinus de l'angle $\theta(s)$ que forma el vector $N(s)$ amb $(0,0,1)$ és $\langle N(s),(0,0,1)\rangle \equiv 0$, per la qual cosa $\theta(s) \equiv \pi/2$. A més, aquesta recta, que ve donada pels punts $(x,y,z) = (a\cos(s/c), a\sin(s/c), b\,s/c) + \lambda(\cos(s/c),\sin(s/c),0)$ (per a escriure la recta el signe del vector director és irrrellevant), passa pel punt $(0,0,b\,s/c)$ de l'eix Oz ($\lambda = -a$).

Exercici 5: Sigui α una corba que té curvatura constant $k=3$, torsió constant $\tau = 4$ i quan $s=0$ passa per $(0,0,0)$ amb triedre de Frenet $T(0) = (1,0,0)$, $N(0) = (0,1,0)$, $B(0) = (0,0,1)$. Determineu la parametrització per l'arc de α.

Solució:

Sabem que per recuperar la corba a partir de la curvatura i la torsió hem de resoldre el sistema de 9 equacions i 9 incògnites següent

$$
\begin{aligned}
x_1{}' &= 3x_4\\
x_2{}' &= 3x_5\\
x_3{}' &= 3x_6\\
x_4{}' &= -3x_1 - 4x_7\\
x_5{}' &= -3x_2 - 4x_8\\
x_6{}' &= -3x_3 - 4x_9\\
x_7{}' &= 4x_4\\
x_8{}' &= 4x_5\\
x_9{}' &= 4x_6
\end{aligned}
$$

on estem pensant

$$T(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)),\ N(s) = (x_4(s), x_5(s), x_6(s)),\ B(s) = (x_7(s), x_8(s), x_9(s))\,.$$

Així

$$x_4{}'' = -9\,x_4 - 16\,x_4 = -25\,x_4$$

d'on $x_4(s) = A_4\cos(5\,s) + B_4\sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_4(0) = 0$, és a dir, $x_4(s) = B_4\sin(5\,s)$. Però com $x_4{}'(0) = -3\,x_1(0) - 4\,x_7(0) = -3$, ha de ser $B_4 = -3/5$. Per tant

$$x_1(s) = 3\int x_4(s)\,ds = \frac{9}{25}\cos(5\,s) + C\,,$$

que ajustant la constant ens dóna $x_1(s) = \dfrac{9}{25}\cos(5\,s) + \dfrac{16}{25}$; finalment la coordenada $x(s)$ de la corba buscada és

$$x(s) = \int x_1(s)\,ds = \frac{9}{125}\sin(5\,s) + \frac{16\,s}{25}\,.$$

Anàlogament

$$x_5{}'' = -9\,x_5 - 16\,x_5 = -25\,x_5$$

d'on $x_5(s) = A_5\cos(5\,s) + B_5\sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_5(0) = 1$, és a dir, $x_5(s) = \cos(5\,s) + B_5\sin(5\,s)$. Però com $x_5{}'(0) = -3\,x_2(0) - 4\,x_8(s) = 0$, ha de ser $B_5 = 0$. Per tant

$$x_2(s) = 3\int x_5(s)\,ds = \frac{3}{5}\sin(5\,s)\,,$$

i finalment la coordenada $y(s)$ de la corba buscada és

$$y(s) = \int x_2(s)\,ds = -\frac{3}{25}\cos(5\,s) + \frac{3}{25}\,.$$

Per acabar,

$$x_6{}''(s) = -9\,x_6 - 16\,x_6 = -25\,x_6$$

d'on $x_6(s) = A_6 \cos(5\,s) + B_6 \sin(5\,s)$, amb la condició inicial $x_6(0) = 0$, és a dir, $x_6(s) = B_6 \sin(5\,s)$. Però com ${x_6}'(0) = -3\,x_3(0) - 4\,x_9(0) = -4$, ha de ser $B_6 = -4/5$. Per tant

$$x_3(s) = 3 \int x_6(s)\,ds = \frac{12}{25}\cos(5\,s) - \frac{12}{25}\,,$$

i finalment la coordenada $z(s)$ de la corba buscada és

$$z(s) = \int x_3(s)\,ds = \frac{12}{125}\sin(5\,s) - \frac{12\,s}{25}\,.$$

Resumint, la corba buscada és

$$\gamma(s) = \frac{1}{125}(9\,\sin(5\,s) + 80\,s, -15\,\cos(5\,s) + 15, 12\,\sin(5\,s) - 60\,s)\,.$$

Segon mètode, només vàlid si intueixes que pot ser una hèlix. (Suposició força raonable ja que estem parlant d'una corba amb curvatura i torsió constants).

Sabem que l'hèlix

$$\gamma(t) = (a\,\cos(t), a\,\sin(t), b\,t)$$

té curvatura i torsió

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Per tant, prenent $a = 3/25$, $b = -4/25$ tenim una hèlix amb curvatura $k = 3$ i $\tau = 4$ com volíem, però el problema és que en $t = 0$ la referència de Frenet d'aquesta corba és

$$\begin{aligned} T(0) &= (0, 3/5, -4/5) \\ N(0) &= (-1, 0, 0) \\ B(0) &= (0, 4/5, 3/5) \end{aligned}$$

i no pas la demanada (volem que sigui la base canònica). Tampoc passa per l'origen quan $t = 0$ ja que $\gamma(0) = (3/25, 0, 0)$ però això es pot arreglar fàcilment fent una translació i considerant la corba $(a\,\cos(t) - 3/25, a\,\sin(t), b\,t)$.

Considerem el moviment rígid donat per la matriu M tal que

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta igualtat ens dóna directament (calculant la inversa, que és igual a la transposada, ja que estem manipulant matrius ortogonals)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Apliquem ara M a la hèlix i trobem la corba demanada

$$\gamma(t) = M \begin{pmatrix} \frac{3}{25}\cos(t) - \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25}\sin(t) \\ -\frac{4}{25}t \end{pmatrix} = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 9\,\sin(t) + 16\,t \\ -15\cos(t) + 15 \\ 12\sin(t) - 12\,t \end{pmatrix}$$

Que, un cop reparametritzada per l'arc, és a dir posant $t = 5\,s$, ens dóna exactament la corba que ha aparegut abans.