Examen parcial, 23 d'abril de 2010

1.– Corbes. Sigui $\alpha(t)$ una hèlix amb eix donat pel vector unitari $\vec{v}$, angle amb l'eix igual a θ i paràmetre arc s (mesurat des de $t = 0$). Considerem la corba γ tal que $\alpha(t) = \gamma(t) + s(t)\cos\theta\,\vec{v}$. Proveu

a) γ està en el pla que passa per $\alpha(0)$ i és ortogonal a $\vec{v}$

b) La curvatura de γ és $\kappa/\sin^2\theta$ on κ és la curvatura de α.

c) Trobeu $\vec{v}, \theta, \gamma$, κ i τ per la corba $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$. Comproveu la propietat de l'apartat anterior.

Solució: *Al primer apartat volem veure que $\langle\gamma(t) - \alpha(0), v\rangle = 0$ per a qualsevol t. Derivem i tenim*

$$\langle\gamma'(t), v\rangle = \langle\alpha'(t) - s'(t)\cos\theta v, v\rangle = |\alpha'|\cos\theta - |\alpha'|\cos\theta = 0.$$

Com que $\langle\gamma(t) - \alpha(0), v\rangle = 0$ hem acabat. La curvatura de γ és $|\gamma' \times \gamma''|/|\gamma'|^3$. Tenim que $\gamma' = \alpha' - s'\cos\theta v$. Per simplificar els càlculs suposem α unitària, llavors $s' = 1$ i $\gamma' \times \gamma'' = \alpha' \times \alpha'' - \cos\theta v \times \alpha'' = t \times \kappa n - \kappa\cos\theta v \times n$. Deduïm que la curvatura de γ és el que es demana. La corba que ens donen te com a vector tangent unitari

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1\right).$$

Com que la darrera component val $1/\sqrt{2}$, amb la direcció $(0,0,1)$ forma una angle constant de $\pi/4$. La projecció és la corba plana $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2)$ en el pla $z = 0$. La curvatura d'aquesta corba plana és $2/3(1+t^2)^2$ llavors, fent servir la formula de l'apartat b) tenim que la curvatura de la corba original és $1/3(1+t^2)^2$. Com que l'angle am l'eix és $\pi/4$ resulta que $\kappa/\tau = -1$ llavors la torsió val el mateix que la curvatura canviada de signe.

2.– Superfícies.

a) Definiu curvatures i direccions principals, curvatura de Gauss K i curvatura mitjana H d'una superfície regular.

b) Proveu que es compleix la relació $H^2 \geq K$.

c) Calculeu els radis principals de curvatura en els punts de la superfície donada per l'equació $y = x\ \tan\left(\frac{z}{a}\right)$ amb $a > 0$ i veieu que són $\pm\frac{x^2+y^2+a^2}{a}$. Amb aquest resultat podeu dir fàcilment què val H i K? (aquesta darrera pregunta la podeu respondre encara que no feu els càlculs que es demanen abans!).

Solució: *Les curvatures principals són els valors mínim i màxim de les curvatures normals en un punt. També són els valors propis de l'aplicació de Weingarten $-dN$. Les direccions principals són les direccions en les quals es dona la curvatura normal màxima i mínima, també les podem pensar com les direccions pròpies de l'endormorfisme de Weingarten. Si k_1, k_2 són les curvatures principals aleshores $K = k_1k_2$ i $H = (k_1+k_2)/2$. Són el determinant i la traça de l'aplicació de Weingarten. $H^2 \geq K$ es dedueix del fet que la mitjana aritmètica sempre és més gran que la geomètrica. També ho podem veure del fet que k_1, k_2 són les arrels reals d'un polinomi de segon grau ($t^2 - (k_1+k_2)t + k_1k_2$.) Per veure que els radis de curvatura tenen l'expressió que s'indica fem un càlcul en coordenades i ja està. D'aquesta expressió deduïm*

$$H = 0, \quad K = -\left(\frac{x^2+y^2+a^2}{a}\right)^2.$$