Geometria Diferencial. 11 d'abril de 2013.

1.

a) Demostreu les fórmules de Frenet. *(1 punt)*

b) Definiu la curvatura normal d'una corba en una superfície i relacioneu-la amb la segona forma fonamental (Teorema de Meusnier). *(1 punt)*

$k_n(\alpha') = \mathrm{II}(\alpha', \alpha')$

$k_n = \langle \vec{T}', N \rangle$

2. Siguin $\alpha, \beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ dues corbes parametritzades diferents amb curvatura i torsió no nul·les en cap punt. Considerem la recta $r_\alpha(t)$ passant per $\alpha(t)$ amb la direcció del normal principal de α en aquell punt. Sigui $r_\beta(t)$ la recta per $\beta(t)$ amb vector director el normal principal de $\beta(t)$. Suposem que $r_\alpha(t)$ i $r_\beta(t)$ coincideixen per tot $t \in (a, b)$.

a) Proveu que existeix una constant $r \neq 0$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + rN(t)$, $\forall t \in (a, b)$, on $N(t)$ és el vector normal principal a la corba α en el punt $\alpha(t)$. En particular la distància entre $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant. *(1 punt)*

b) Proveu que l'angle entre els vectors tangents a α i β en els punts $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ és constant. *(1 punt)*

c) Proveu que hi ha una relació lineal entre la curvatura i la torsió de α (de la forma $A\,k(t) + B\,\tau(t) = 1$, on A, B són constants). *(2 punts)*

3. Considerem la superfície determinada per l'equació $z = x^3 - 3xy^2$.

a) Calculeu els coeficients de la primera forma fonamental respecte la parametrització $\varphi(x, y) = (x, y, x^3 - 3xy^2)$. *(1 punt)*

b) Calculeu els coeficients de la segona forma fonamental respecte aquesta mateixa parametrització. *(1 punt)*

c) Calculeu la curvatura de Gauss en $\varphi(x, y)$ i observeu que només depèn de $x^2 + y^2$. *(1 punt)*

d) Trobeu les direccions asimptòtiques en els punts de la superfície amb $x = 0$. *(1 punt)*

$K_n(\alpha) = 0$

$(\lambda\ \ \mu)\ \mathrm{II}_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$