13 Exercicis complementaris de formes

Exercici 133: Vegeu que det és l'element de volum per l'orientació i producte habituals de $\mathbb{R}^n$. Vegeu a més que $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ és el volum del paral·lelepípede definit pels vectors v_i.

Exercici 134: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i h una funció, provar que

$$f^*(h\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

on f' denota la matriu jacobiana de f.

Exercici 135: Si $\omega = x\, dy - dz$, $\eta = 2z^2\, dx$, $\mu = dx - yz\, dy$, calculeu $x\,\omega + \eta$, $z\,\eta - z\,\mu$, $\omega \wedge \mu$, $(2\omega - y\,\mu) \wedge \eta$, $\omega \wedge \eta \wedge \mu$.

Exercici 136: Donat un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$, $X = (X_1, X_2, X_3)$, considereu les formes diferencials

$$\omega_X = X_1\, dy \wedge dz - X_2\, dx \wedge dz + X_3 dx \wedge dy$$

$$\eta_X = X_1\, dx + X_2\, dy + X_3\, dz$$

Calculeu $d\omega_X$ i $d\eta_X$. Observeu que si Y, Z són camps de $\mathbb{R}^3$ llavors $\omega_X(Y, Z) = \det(X, Y, Z)$ i $\eta_X(Y) = \langle X, Y \rangle$.

Exercici 137: Calculeu $d\omega$ en els casos següents:

1. $\omega = xdy + ydx$
2. $\omega = x^2 ydy - xy^2 dx$
3. $\omega = f(x)dx + g(y)dy$
4. $\omega = (dy - xdz) \wedge (xydx + 3dy + zdz)$
5. $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$
6. $\omega = f(x)dy$
7. $\omega = \cos(xy^2)dx \wedge dz$
8. $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$
9. $\omega = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$, amb $f, g, h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.
10. $\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \cdots \wedge dx_n$ $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota: $\widehat{dx_j}$ vol dir que dx_j no hi apareix.

Exercici 138: Calculeu la imatge recíproca (o *pull-back*) de la forma diferencial ω per l'aplicació T en els següents casos:

1. $T : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $T(s) = (s, s^2, s^3)$, $\omega = dx + dz$
2. $T : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $T(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta, 0)$, $\omega = xy\, dx - z\, dy$

3. $T:[0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t)=(s,t,st)$, $\omega = dx\wedge dz$

4. $T:[0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(s,t)=(s\,\cos t, s\,\sin t, t)$, $\omega = xy^2\,dx\wedge dy - 2yz\,dx\wedge dz + 4\,dy\wedge dz$

5. $T:[0,1]^3 \to \mathbb{R}^4$, $T(s,t,u)=(st^2, tu, s, s+u)$, $\omega = dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4$

Exercici 139: Sigui T una parametrització de l'esfera unitat. Calculeu la imatge recíproca per T de les formes dx, dy, dz, $dx\wedge dy$, $dx\wedge dz$, $dx\wedge dy\wedge dz$.

Exercici 140: Sigui α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ donada per $\alpha = xdx + ydy + zdz$ i $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'aplicació $f(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$. Trobeu una expressió per $f^*\alpha$.

Exercici 141: Considereu a $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ la 1-forma

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy$$

1. Demostreu que ω és tancada.

2. Proveu que ω no és exacta.

3. Trobeu un obert $U\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ on ω sigui exacta.