11 Exercicis complementaris de Superfícies I

Exercici 116 (Exemple de Beltrami-Enneper)**:** Demostreu que les corbes coordenades de la superfície

$$\varphi(u,v) = (e^a \cos b, e^a \sin b, a), \qquad a = a(u,v) = \frac{u-v}{2}, b = b(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

són línies asimptòtiques. Comproveu que sobre la línia $v = 0$ tenim $\tau^2 = -K$.

Solució: Calculem la segona forma fonamental.

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= (\frac{1}{2}e^a \cos b - \frac{1}{2}e^a \sin b, \frac{1}{2}e^a \sin b + \frac{1}{2}e^a \cos b, \frac{1}{2}) \\
\varphi_v &= (-\frac{1}{2}e^a \cos b - \frac{1}{2}e^a \sin b, -\frac{1}{2}e^a \sin b + \frac{1}{2}e^a \cos b, -\frac{1}{2}) \\
\nu &= (-\cos b, -\sin b, e^a)\frac{1}{\sqrt{1+e^{2a}}} \\
\varphi_{uu} &= (-\frac{1}{2}e^a \sin b, \frac{1}{2}e^a \cos b, 0) \\
\varphi_{uv} &= \frac{1}{4}e^a(-2\cos b, -2\sin b, 0) \\
\varphi_{vv} &= (\frac{1}{2}e^a \sin b, -\frac{1}{2}e^a \cos b, 0) \\
e &= \varphi_{uu} \cdot \nu = 0 \\
f &= \varphi_{uv} \cdot \nu = \frac{1}{2}e^a \frac{1}{\sqrt{1+e^{2a}}} \\
g &= \varphi_{vv} \cdot \nu = 0
\end{aligned}$$

El fet de que $e = 0$ vol dir que les línies coordenades $v = constant$ són asimptòtiques. En efecte, el vector tangent a aquestes corbes té coordenades $(1, 0)$ respecte de la base (φ_u, φ_v) de manera que si diem e_1 a aquest vector tenim

$$II(e_1, e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e = 0.$$

Anàlogament, el fet de que $g = 0$ vol dir que les línies coordenades $u = constant$ són asimptòtiques. En efecte, el vector tangent a aquestes corbes té coordenades $(0, 1)$ respecte de la base (φ_u, φ_v) de manera que si diem e_2 a aquest vector tenim

$$II(e_2, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g = 0.$$

Per calcular la torsió de la línia $v = 0$ hem de calcular φ_{uuu}. És fàcil veure que aquesta derivada tercera la podem escriure com

$$\varphi_{uuu} = \frac{1}{2}\varphi_{uu} - \frac{1}{4}e^{u/2}(\cos u/2, \sin u/2, 0).$$

També ens simplifica els càlculs observar que

$$\varphi_u = \varphi_{uu} + \frac{1}{2}(e^{u/2}\cos u/2, e^{u/2}\sin u/2, 1).$$

Llavors

$$\tau(u) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_{uu} \cdot \varphi_{uuu}}{|\varphi_u \wedge \varphi_{uu}|^2} = \frac{1}{1+e^u}.$$

Per altra banda la primera forma fonamental val

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^u + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}e^u + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

de manera que

$$K(u,0) = \frac{\det II(u,0)}{\det I(u,0)} = \frac{-f^2}{\frac{1}{4}e^u(1+e^u)} = -\frac{1}{(1+e^u)^2} = -\tau^2(u).$$

Exercici 117: Sigui S la superfície de revolució parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

amb $a(u) > 0$ i $(a')^2 + (b')^2 = 1$.

1. Calculeu el símbols de Christoffel i les equacions de les geodèsiques de S.
2. Comproveu que els meridians d'una superfície de revolució són geodèsiques.
3. Proveu que un paral·lel és una geodèsica si i només si la recta tangent al meridià que passa per cada un dels seus punts és paral·lela a l'eix de rotació de la superfície. Apliqueu-ho al cas de l'esfera i del tor.
4. Demostreu el **Teorema de Clairaut**: Si $\alpha(s)$ és una geodèsica (parametritzada) de S i $\theta(s)$ és l'angle que forma α amb el paral·lel per $\alpha(s)$, aleshores el producte de la distància de $\alpha(s)$ a l'eix de gir pel cosinus de $\theta(s)$ és constant al llarg de la corba α.
5. Trobeu la curvatura geodèsica dels paral·lels ($u = u_0$) en funció de $a(u)$.

Solució: Utilitzarem els càlculs fets al problema 176

(a) Com que $E(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$ i $G(u,v) = a(u)^2$, els símbols de Christoffel són els següents (veure el problema 176):

$$\begin{array}{ll} \Gamma^1_{11} = 0 & \Gamma^2_{11} = 0 \\ \Gamma^1_{12} = 0 & \Gamma^2_{12} = \frac{a'(u)}{a(u)} \\ \Gamma^1_{22} = -a(u)a'(u) & \Gamma^2_{22} = 0 \end{array}$$

I $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ és una geodèsica (parametritzada) de S si i només si es satisfan les següents equacions:

$$\begin{aligned} u''(s) - a(u(s))a'(u(s))v'(s)^2 &= 0 \\ v''(s) + 2\frac{a'(u(s))}{a(u(s))}u'(s)v'(s) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Les funcions $u(s) = s$, $v(s) = v_0$ verifiquen les equacions anteriors i la corba $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ és un meridià de S.

(c) Els paral·lels parametritzats a velocitat constant s'obtenen prenent $u(s) = u_0$ i $v(s) = s$. Aquest parell de funcions verifiquen les equacions de les geodèsiques si i només si $a'(u_0) = 0$, o equivalentment si la recta tangent a un meridià que passi per aquest paral·lel és vertical (paral·lela a l'eix de gir). En el cas de la esfera, de tots el paral·lels només l'equador és geodèsica (cercle màxim). En el cas del tor, hi ha dos *equadors*, l'interior i l'exterior.

(d) Si escrivim la segona equació de les geodèsiques com

$$\frac{v''(s)}{v'(s)} + 2\frac{a'(u(s))u'(s)}{a(u(s))} = 0$$

i integrem respecte a s obtenim la relació

$$\log v'(s) + 2\log a(u(s)) = \log(v'(s)a(u(s))^2) = const.$$

Sigui $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ una geodèsica parametritzada per l'arc i sigui $\theta(s)$ l'angle que forma α amb el paral·lel que passa per $\alpha(s)$. Llavors el cosinus de $\theta(s)$ és igual a

$$\cos\theta(s) = \frac{\langle \varphi_v, u'(s)\varphi_u + v'(s)\varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\| \, \|\alpha'\|} = v'(s)a(u(s))$$

Per tant, $a(u(s))\cos\theta(s) = v'(s)a(u(s))^2$ és constant.

(e) Sigui $\alpha_{u_0}(s) = \varphi(u_0, \frac{s}{a(u_0)})$ amb $s \in [0, 2\pi a(u_0)]$ una parametrització per l'arc del paral·lel que passa per $\varphi(u_0, 0)$. Recordem la fórmula $\frac{1}{a(u_0)^2} = k_\alpha^2 = k_n^2 + k_g^2$. D'altra banda, la curvatura normal de $\alpha(s)$ és igual a $II(\frac{1}{a(u_0)}\varphi_v) = \frac{1}{a(u_0)^2}\langle -d\nu(\varphi_v), \varphi_v \rangle = \frac{g\left(u_0, \frac{s}{a(u_0)}\right)}{a(u_0)^2}$, on $g(u, v)$ denota l'últim coeficient de la segona forma fonamental de S que ja havíem calculat al problema 77. Així teníem que $g(u, v) = b'(u)a(u)$ i per tant

$$|k_g(\alpha_{u_0})| = \sqrt{\frac{1}{a(u_0)^2} - \left(\frac{b'(u_0)}{a(u_0)}\right)^2} = \frac{|a'(u_0)|}{a(u_0)}.$$

Per determinar el signe hem de tenir en compte que $\overline{\nabla}_T T = k_g N_g$ on N_g és un vector tangent a S unitari de manera que T, N_g i ν formen una base ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$. Per exemple, si el vector normal $\nu = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ apunta cap en fora (en sentit contrari cap a on es troba l'eix de gir de S) i estem en un punt on $a'(u_0) > 0$ (la corba generatriu es recorre de dalt a baix per què el vector ν sigui exterior) aleshores podem veure que $k_g > 0$ i per tant $k_g(\alpha_{u_0}) = \frac{a'(u_0)}{a(u_0)}$. També podríem haver arribat al mateix resultat calculant

$$\alpha''_{u_0}(s) = \overline{\nabla}_T T = x\varphi_u + y\varphi_v + z\nu = -\frac{1}{a(u_0)}\left(\cos\left(\frac{s}{a(u_0)}\right), \sin\left(\frac{s}{a(u_0)}\right), 0\right)$$

i utilitzar que $T = \frac{1}{a(u_0)}\varphi_v$, $-\varphi_u$ i ν formen una base ortonormal directa de $\mathbb{R}^3$ per deduir que $y = \langle \alpha''_{u_0}(s), \varphi_v \rangle = 0$ i per tant

$$k_g(\alpha_{u_0}) = \langle \alpha''_{u_0}(s), -\varphi_u \rangle = \frac{a'(u_0)}{a(u_0)}.$$

Exercici 118: Teorema de Monge[33]**.** Demostreu que una corba d'una superfície S és línia de curvatura si i només si les rectes normals a S al llarg de la corba formen una superfície desenvolupable.

Solució: *Primer mètode.* Sigui $\gamma(s)$ una línia de curvatura d'una certa superfície S. Suposem-la parametritzada per l'arc i denotem $\nu(s)$ la restricció a $\gamma(s)$ del vector normal a S.

La superfície engendrada per les normals de què ens parla el problema és

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t\nu(s).$$

Recordem que, tal com va dir Olinde,

$$\frac{d\nu}{ds} = -k_n(s)\gamma'(s)$$

on $k_n(s)$ és la curvatura principal en la direcció principal $\gamma'(s)$.

Així

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \gamma'(s) + t\nu'(s) = (1 - k_n t)\gamma'(s) \\ \varphi_t &= \nu. \end{aligned}$$

Observem que la relació entre la curvatura de $\gamma(s)$, $k(s)$, i la curvatura principal $k_n(s)$ és $k_n(s) = k\cos\theta$, on θ és l'angle entre la normal a la superfície i la normal principal de $\gamma(s)$.

Per tant,

$$\widehat{\nu}(s,t) = \gamma'(s) \wedge \nu(s)$$

és el vector normal a la nova superfície i depèn només de s. És doncs constant al llarg de les generatrius. Això demostra ja que aquesta superfície és desenvolupable: és reglada amb el mateix pla tangent sobre les generatrius. Vegeu la definició i algunes propietats de les superfícies reglades al problema 155.

No obstant, podem trobar explícitament la línia de regressió, que jo en diré *la línia que desenvolupa*, ja que és una corba dins la superfície tal que les seves tangents coincideixen amb les generatrius de la superfície reglada.

En efecte, aquesta corba ha de ser de la forma

$$\sigma(s) = \gamma(s) + t(s)\nu(s)$$

i tal que

$$\sigma'(s) = \gamma'(s) + t'(s)\nu(s) + t(s)\nu'(s) = (1 - k_n(s)t(s))\gamma'(s) + t'(s)\nu(s)$$

tingui la direcció de $\nu(s)$. És a dir, ha de ser $1 - k_n(s)t(s) = 0$, que equival a $t(s) = \rho_n(s)$ on $\rho_n(s)$ és el radi de curvatura principal ($\rho = \rho_n \cos\theta$).

Si la línia de curvatura és també geodèsica (la normal a la corba i la normal a la superfície coincideixen) llavors la línia de regressió és justament l'evoluta d'aquesta línia.

Segon mètode. La línia de regressió és la línia característica de la família uniparamètrica de plans tangents. Recordem que, en general, donada una corba sobre una superfície tenim la família uniparamètrica de plans tangents a la superfície en el punts de la corba.

[33] No és que Monge trobés aquest teorema com una propietat de les línies de curvatura sinó que Monge defineix les línies de curvatura com línies tals que les normals en punts pròxims es tallen.

La “característica” d’aquesta família (que s’obté resolent els sistema de tres equacions format per l’equació de la família uniparamètrica i les seves derivades primera i segona respecte del paràmetre) és la que s’anomena “línia de regressió” i és tal que les seves tangents són les rectes que s’obtenen com a intersecció de plans consecutius.

La família uniparamètrica de plans tangents a la superfície de Monge:

$$(x - \langle\gamma(s)), \widehat{\nu}(s)\rangle = 0$$

Derivada primera:

$$\langle x - \gamma(s)), \widehat{\nu}'(s)\rangle = 0,$$

ja que $\langle\gamma'(s), \widehat{\nu}(s)\rangle = 0$.

A més,

$$\widehat{\nu}'(s) = \gamma''(s) \wedge \nu(s) + \gamma'(s) \wedge \nu'(s) = k(s)n(s) \wedge \nu(s) = k(s)\gamma'(s),$$

de manera que de les dues equacions anteriors deduïm que $(x - \gamma(s))$ és ortogonal a $\widehat{\nu}(s)$ i a $\gamma'(s)$, per tant, ha de ser $x - \gamma(s) = \lambda(s)\nu(s)$, per a una certa funció $\lambda(s)$.

Derivada segona (derivem $\langle x - \gamma(s), k(s)\gamma'(s)\rangle$):

$$-k(s) + k'(s)\langle(x - \gamma(s)), \gamma'(s)\rangle + k(s)^2\langle(x - \gamma(s)), \vec{n}(s)\rangle = 0,$$

on $\vec{n}(s)$ és el vector normal principal de $\gamma(s)$. Però el terme del mig de la suma és zero, de manera que tenim

$$-k(s) + k(s)^2\lambda(s)\cos\theta = 0,$$

és a dir $\lambda(s) = \rho_n(s)$ com ja sabíem.

Comentari. Les línies de curvatura estan caracteritzades pel fet de que *normals en punts consecutius es tallen.* Aquesta afirmació que es pot trobar en els treballs clàssics vol dir el següent (recordeu que dues rectes de l’espai en general no es tallen). Fixem una recta r i una família uniparamètrica de rectes $s(t)$ amb $s(0) = r$. Direm que $r = s(0)$ talla la recta consecutiva si existeix un punt $P \in r$ tal que per tot pla Π que contingui r el punt $P(t) = \Pi \cap s(t)$ compleix que $\lim_{t\to 0} P(t) = P$.

Per exemple, si prenem r l’eix z i com rectes $s(t)$ les normals a la superfície $z = 3x^2 + y^2$ al llarg d’una corba $(t, y(t), 3t^2 + y(t)^2)$, rectes que s’escriuen com

$$s(t) : (t, y(t), 3t^2 + y(t)^2) + \lambda(-6t, -2y(t), 1),$$

i les tallem amb un pla arbitràri que contingui l’eix x, $y = \mu x$, obtenim

$$P(t) = (t - 6t\frac{\mu t - y(t)}{6\mu t - 2y(t)}, y(t) - 62t\frac{\mu t - y(t)}{6\mu t - 2y(t)}, 3t^2 + y(t)^2 + \frac{\mu t - y(t)}{6\mu t - 2y(t)})$$

de manera que, per l’Hôpital,

$$\lim_{t\to 0} P(t) = (0, 0, \frac{\mu - y'(0)}{6\mu - 2y'(0)})$$

i aquest quocient no depèn de μ, i per tant del pla, si i només si $y'(0) = 0$, cas en que el límit val $1/6$ (serà el valor del radi de curvatura principal en $(0, 0, 0)$). Hi ha una segona direcció principal donada per corbes amb vector tangent a l’origen $((0, 1, 0))$ que hem eliminat al parametritzar per x.

Exercici 119: Coordenades isotermes. Si $ds^2 = \lambda(u,v)(du^2+dv^2)$ amb $\lambda(u,v)$ una funció diferenciable positiva (en aquest cas es diu que u, v són coordenades isotermes) proveu que la curvatura de Gauss K està donada per

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log \lambda$$

on $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ és el Laplacià de $\mathbb{R}^2$.

Calculeu la curvatura de Gauss d'una superfície en la qual $E = 1/(u^2+v^2+c^2)^2 = G$ i $F = 0$.

Solució: Posant $E = G = \lambda$ a l'expressió de la curvatura del problema anterior (en el que ja havíem suposat $F = 0$) obtenim

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v\right] = -\frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\right)_u + \left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\right)_v\right] \\ &= -\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2}\right] = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \log\lambda. \end{aligned}$$

En particular, si $\lambda = \frac{1}{(u^2+v^2+c^2)^2}$ aleshores $\frac{-1}{2}\log\lambda = \log(u^2+v^2+c^2)$ i per tant,

$$K = \frac{\left(\frac{2u}{u^2+v^2+c^2}\right)_u + \left(\frac{2v}{u^2+v^2+c^2}\right)_v}{\frac{1}{(u^2+v^2+c^2)^2}} = 2(u^2+v^2+c^2) - 4u^2 + 2(u^2+v^2+c^2) - 4v^2 = 4c^2.$$

Exercici 120: Sigui $\varphi(u,v)$ una carta isoterma.

1. Demostreu que $\langle \Delta\varphi, \varphi_u\rangle = \langle \Delta\varphi, \varphi_v\rangle = 0$.
2. Demostreu que la superfície $\varphi(u,v)$ és minimal si i només si $\Delta\varphi(u,v) = 0$, és a dir, si i només si φ és harmònica.

Solució: a) Observem que el laplacià es pot escriure com

$$\Delta\varphi = \varphi_{uu} + \varphi_{vv}.$$

Derivant les relacions

$$\begin{aligned} \varphi_u \cdot \varphi_v &= 0 \\ \varphi_u \cdot \varphi_u &= \varphi_v \cdot \varphi_v = \lambda \end{aligned}$$

obtenim

$$\begin{aligned} 2\varphi_{uu} \cdot \varphi_u &= \lambda_u \\ 2\varphi_{uv} \cdot \varphi_v &= \lambda_u \\ \varphi_{uu} \cdot \varphi_v + \varphi_u \cdot \varphi_{uv} &= 0 \end{aligned}$$

i, per tant,

$$(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) \cdot \varphi_u = \frac{\lambda_u}{2} - \frac{\lambda_u}{2} = 0.$$

I anàlogament quan multipliquem el laplacià per φ_v.

b) Si el laplacià és zero, els termes de la diagonal de la segona forma fonamental són

$$e = -\varphi_{uu} \cdot \nu = \varphi_{vv} \cdot \nu = -g.$$

La matriu de l'endomorfisme associat (endomorfisme de Weingarten) és el producte de matrius $L = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}$. Aquesta matriu té traça zero, ja que la segona forma fonamental té traça zero i la primera forma fonamental és un múltiple de la identitat. Com la curvatura mitjana és la traça de l'endomorfisme associat, hem acabat.

Exercici 121: Calculeu, directament a partir de la definició de curvatura de Gauss com límit de quocient d'àrees, la curvatura de Gauss del tor

$$\varphi(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

en el punt $\varphi(0, 0)$.

Solució: Com que

$$\begin{array}{rcl} \varphi_u(u, v) & = & (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u) \\ \varphi_v(u, v) & = & (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0) \end{array}$$

la mètrica és

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

L'àrea sobre el tor de la regió $\mathcal{R}$ donada per $-\epsilon < u < \epsilon$, $-\delta < v < \delta$ és

$$A(\mathcal{R}) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int_{-\delta}^{\delta} r(R + r\cos u)du\,dv = 4Rr\delta\epsilon + 4r^2\delta\sin\epsilon.$$

Calculem ara l'àrea de la regió $\nu(\mathcal{R})$, on $\nu : \mathrm{Tor} \longrightarrow S^2$ és l'aplicació de Gauss.

La normal al tor és

$$\nu(u, v) = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$$

per tant, $\nu(\mathcal{R})$ és la regió sobre l'esfera S^2 determinada pels vectors $\nu(u, v)$ quan $-\epsilon < u < \epsilon$, $-\delta < v < \delta$.

Si pensem, com és habitual, S^2 parametritzada per la longitud θ i la colatitud φ de manera que els seus punts són $(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, la mètrica és

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2,$$

i la relació entre (u, v) i (θ, φ) és $\cos\varphi = -\sin u$, i $\theta = v$, com es veu comparant l'expressió de $\nu(u, v)$ amb l'expressió dels punts de S^2 en coordenades (θ, φ) que acabem de donar.

Per tant, la regió $\nu(\mathcal{R})$ està caracteritzada per $-\epsilon + \pi/2 < \varphi < \epsilon + \pi/2$, $-\delta < \theta < \delta$.

I l'àrea de $\nu(\mathcal{R})$ és

$$A(\nu(\mathcal{R})) = \int_{-\epsilon+\pi/2}^{\epsilon+\pi/2}\int_{-\delta}^{\delta} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\delta[-\cos\varphi]_{-\epsilon+\pi/2}^{\epsilon+\pi/2} = 4\delta\sin\epsilon.$$

Finalment

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{A(\nu(\mathcal{R}))}{A(\mathcal{R})} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\delta\sin\epsilon}{4Rr\delta\epsilon + 4r^2\delta\sin\epsilon} = \frac{1}{r(R + r)}.$$

Aquest resultat és obvi sense fer cap càlcul ja que en el punt P les direccions principals venen donades per dues circumferències ortogonals de radis respectius r i $R + r$.

Exercici 122: Sigui S una superfície reglada tal que les generatrius són rectes senceres. Suposem $K<0$. Demostreu que la curvatura total és igual a $-2L$ on L és la longitud de la indicatriu unitària de les generatrius.

Useu aquest resultat per calcular la curvatura total de la sella de muntar (hiperboloide) $z=xy$ i vegeu que coincideix (en valor absolut) amb l'àrea sobre l'esfera per l'aplicació de Gauss.

Solució: És sabut que podem suposar la superfície donada per

$$\varphi(s,t)=\beta(s)+tu(s), \quad \|u(s)\|=1, \quad \langle \beta'(s),u'(s)\rangle=0.$$

Com $u'(s)$ és perpendicular a $\beta'(s)$ i a $u(s)$ és clar que existeix una funció $p(s)$ tal que

$$\beta'(s)\wedge u(s)=p(s)u'(s).$$

Per determinar $p(s)$ només hem de veure que

$$\det(\beta'(s),u(s),u'(s))=\langle u'(s),\beta'(s)\wedge u\rangle=p(s)\|u'(s)\|^2$$

i per tant

$$p(s)=\frac{\det(\beta'(s),\vec{u}(s),\vec{u}\,'(s))}{|\vec{u}\,'(s)|^2}.$$

Calculem la primera i segona forma fonamental. Posem per simplificar $u=u(s)$, $p=p(s)$, etc.

$$\begin{aligned}
\varphi_s &= \beta'+tu'\\
\varphi_t &= u\\
\varphi_{ss} &= \beta''+tu''\\
\varphi_{st} &= u'\\
\varphi_{tt} &= 0\\
\varphi_s\wedge\varphi_t &= \beta'\wedge u+tu'\wedge u=pu'+tu'\wedge u\\
\nu &= \frac{1}{\|u'\|\sqrt{p^2+t^2}}(pu'+tu'\wedge u)\\
dS &= \|u'\|\sqrt{p^2+t^2}\,ds\,dt\\
f &= \langle u',\nu\rangle=\frac{p\|u'\|}{\sqrt{p^2+t^2}}\\
K &= \frac{-f^2}{EG-F^2}=-\frac{p^2}{(p^2+t^2)^2}
\end{aligned}$$

Per tant la curvatura total és (suposem $s\in[a,b]$)

$$\Theta=\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}K\,dS=-\int_a^b\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2\|u'\|}{(p^2+t^2)^{3/2}}dt\,ds=-\int_a^b 2\|u'\|ds=-2L,$$

on L és la longitud de la corba esfèrica $u(s)$.

Apliquem-ho a l'hiperboloide. Hem d'escriure la superfície implícita $z=xy$ en la forma de l'exercici 156. Pera. això observem que sempre que tallem per plans $y=s=cte$ tenim $z=sx$ que és un altra pla, i per tant la seva intersecció serà una recta continguda a la superfície. Els punts d'aquesta intersecció, en funció de s que passarà de constant a paràmetre, seran de la forma (t, s, st) (hem canviat x per t) que es pot escriure com

$$\varphi(s,t) = (0,s,0) + t(1,0,s)$$

però que per estar en les hipòtesis de 156 hem d'escriure com

$$\varphi(s,t) = (0,s,0) + \frac{t}{\sqrt{1+s^2}}(1,0,s).$$

D'aquesta manera $u(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(1,0,s)$ és unitari i $\langle \beta'(s), u'(s)\rangle = 0$ amb $\beta(s) = (0,s,0)$, i podem aplicar el resultat anterior.

Per tant,

$$\Theta = -2L = -2\int_a^b \|u'(s)\| ds = -2\int_a^b \frac{1}{1+s^2}\, ds = -2(\arctan(b) - \arctan(a)).$$

Però podem arribar aquí directament integrant directament la curvatura de Gauss que ja ha estat calculada a l'exercici 142. En efecte, hem vist que

$$K = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad EG - F^2 = 1 + x^2 + y^2,$$

i per tant

$$\begin{aligned} \Theta &= -\int_{\infty}^{\infty}\int_a^b \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \\ &= -2\int_a^b \frac{1}{1+y^2}\, dy = -2(\arctan(b) - \arctan(a)) \end{aligned}$$

com abans.

Si volem, com diu l'enunciat, la curvatura total de tota la sella de muntar només hem de fer $a = -\infty, b = \infty$ i obtenim

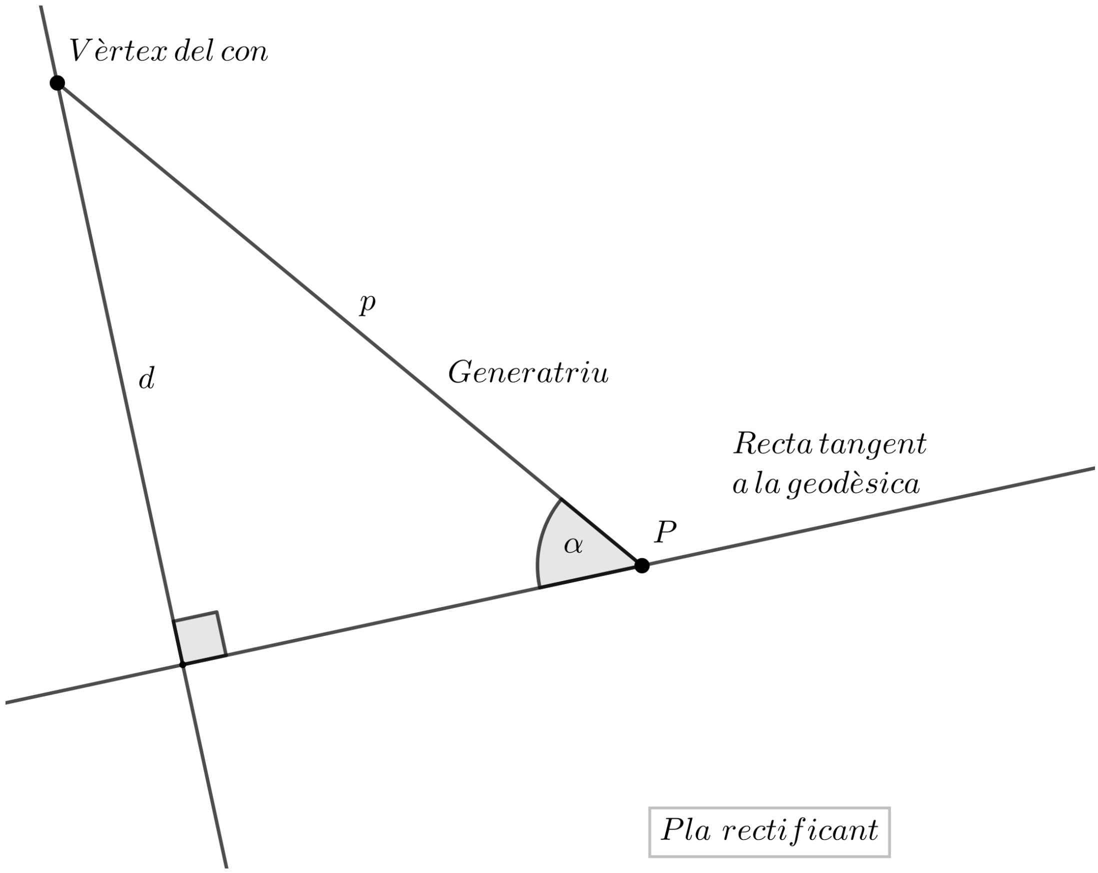
$$\Theta = -2\pi$$

Recordeu que aquest valor (en valor absolut) és l'àrea de l'esfera coberta per l'aplicació de Gauss. En aquest cas doncs, mitja esfera queda coberta per l'aplicació de Gauss, cosa que en aquest cas es pot veure directament estudiant la normal a l'hiperboloide (més fàcil amb la parametrització (x, y, xy)).

Exercici 123: Demostreu que els plans osculadors d'una geodèsica sobre un con estan a distància constant del vèrtex.

Solució: El punt central és que les geodèsiques estan caracteritzades per la igualtat de normals en cada punt $N = \nu$ essent N la normal principal de la geodèsica i ν la normal a la superfície. Com la normal al con és constant al llarg de la generatriu, la generatriu que passa pel punt P intersecció d'aquesta generatriu amb la geodèsica que estem considerant, està tota ella continguda en el pla rectificant (pla pel punt amb vector normal N). En particular el vèrtex del con pertany a aquest pla rectificant. I la recta tangent a la geodèsica en P també. Tracem en aquest pla la perpendicular des del vèrtex a la tangent.

La longitud d'aquesta perpendicular és la distància del vèrtex al pla osculador, ja que és perpendicular a T i a N (té la direcció de a binormal).



Però com es veu a la figura $d = p \sin\alpha$ on α és l'angle entre la geodèsica i la generatriu. Pel teorema de Clairaut sabem que aquest producte és constant i hem acabat.

Nota: *Troços de geodèsiques no parametritzades.* En el procés de plegar un paper per obtenir un con les rectes del paper van a geodèsiques del con. De manera que una manera fàcil d'obtenir aquests trams de geodèsiques (no tota la geodèsica sinó el tram corresponent a la intersecció d'una recta amb el triangle pla inicial).

La parametrització del con que correspon a aplegar el triangle esfèric U donat en polars (r, α) per $0 < r < R$ i $0 < \alpha < \gamma$ està donada per

$$\varphi(r, \alpha) = r\left(a\cos(\frac{\alpha}{a}), a\sin(\frac{\alpha}{a}), b\right)$$

amb $a = \sin(\varphi_0), b = \cos(\varphi_0), \gamma = 2\pi\sin\varphi_0$.

Si tallem una recta arbitraria $y = mx + n$ amb U i trobem la seva imatge sobre el con obtenim la geodèsica

$$\sigma(\alpha) = \varphi(r(\alpha), \alpha) = \frac{n}{\sin(\alpha) - m\cos(\alpha)}\left(a\cos(\frac{\alpha}{a}), a\sin(\frac{\alpha}{a}), b\right)$$

Però insistim que aquesta expressió, per $0 < \alpha < \gamma$, és només un tros de geodèsica no parametritzada.

Les equacions diferencials de les geodèsiques del con amb aquesta parametrització són

$$\begin{aligned} r'' - \frac{r}{a^2} &= 0 \\ \alpha'' + \frac{2}{r}r'\alpha' &= 0, \end{aligned}$$

de difícil solució.