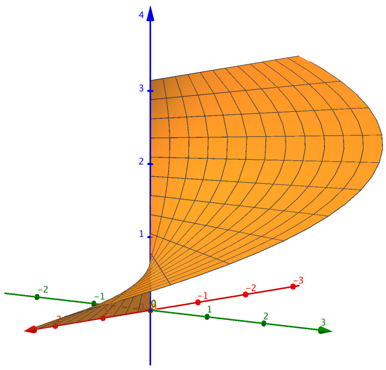
15 El Teorema de Stokes i les seves variants.

Exercici 147: Considereu dins l'helicoide S de $\mathbb{R}^3$, parametritzat per $\varphi(s,t) = (s\,\cos(t), s\,\sin(t), t)$, la regió R determinada per $0 \le s \le \pi$, $0 \le t \le \pi$ i la forma $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$. Calculeu les integrals necessàries per tal de comprovar el teorema de Stokes amb aquestes dades.

Solució:



Tenint en compte que $d\omega = 0$, el que s'ha de veure és que la suma de les integrals (amb les orientacions adequades) al llarg dels quatre segments que determinen ∂R és 0. Aquestes quatre corbes són:

$$\alpha_1(s) = (s, 0, 0)$$

(corresponent a $t = 0$ i amb $s \in [0, \pi]$)

$$\alpha_2(s) = (\pi\,\cos(t), \pi\,\sin(t), t)$$

(corresponent a $s = \pi$ i amb $t \in [0, \pi]$)

$$\alpha_3(s) = (s, 0, \pi)$$

(corresponent a $t = \pi$ i amb $s \in [-\pi, 0]$ tenint en compte el sentit del recorregut)

$$\alpha_4(t) = (0, 0, t)$$

(corresponent a $s = 0$ i amb $t \in [0, \pi]$, que cal recórrer des de $t = \pi$ fins a $t = 0$).

Les integrals sobre cada un dels trams seran

$$\int_{\alpha_1} \omega = \int_0^\pi s\,ds = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{\alpha_2} \omega = \int_0^\pi (-\pi^2\,\cos(t)\,\sin(t) + \pi^2\,\sin(t)\,\cos(t) + t)\,dt = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{\alpha_3} \omega = \int_{-\pi}^0 s\,ds = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{\alpha_4} \omega = \int_\pi^0 t\,dt = -\frac{\pi^2}{2}$$

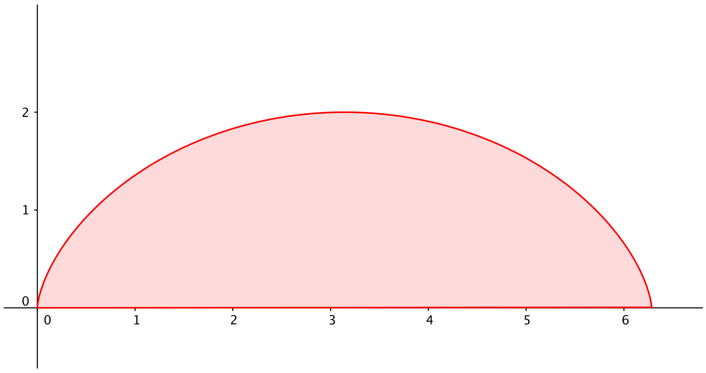
Exercici 148: Sigui D una regió del pla limitada per una certa corba (diferenciable) tancada γ. Utilitzeu la fórmula de Green (o, equivalentment, el t. de Stokes) per a provar que l'àrea de D es pot calcular com:

$$\text{Àrea}(D) = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx$$

Apliqueu l'anterior per a calcular l'àrea que queda entre la cicloide $\gamma(s) = (s - \sin(s), 1 - \cos(s))$ i l'eix de les x (per a $s \in [0, 2\,\pi]$).

Solució: Com que $d(x\,dy) = -d(y\,dx) = dx \wedge dy$ és l'element de volum del pla, el T. de Stokes aplicat a la regió R corresponent a l'interior de la corba γ dóna directament la fórmula.

$$\int_\gamma x\,dy = \int_R dx \wedge dy \quad (\text{ja que } \partial R = \gamma)$$



Segons la fórmula anterior serà suficient calcular integrar $x\,dy = (s - \sin(s))\,d(1-\cos(s)) = (s\,\sin(s) - \sin^2(s))\,ds$ (tenint en compte que, per compatibilitzar amb l'orientació, caldrà integrar començant en $s = 2\,\pi$ i acabant en $s = 0$) ja que sobre $y = 0$ la forma és nul·la. Caldrà calcular, doncs,

$$\int_{2\,\pi}^{0} (s\,\sin(s) - \sin^2(s))\,ds = \left[-s\,\cos(s) + \sin(s) - \frac{1}{2}\,s + \frac{1}{4}\,\sin(2\,s)\right]_{2\,\pi}^{0} = 3\,\pi$$

Exercici 149: Determineu la corba tancada γ del pla per a la qual la integral

$$\int_\gamma y^3\,dx + (3\,x - x^3)\,dy$$

té el valor màxim.

Solució: Tenint en compte que

$$d(y^3\,dx + (3\,x - x^3)\,dy) = 3\,(1 - x^2 - y^2)\,dx \wedge dy$$

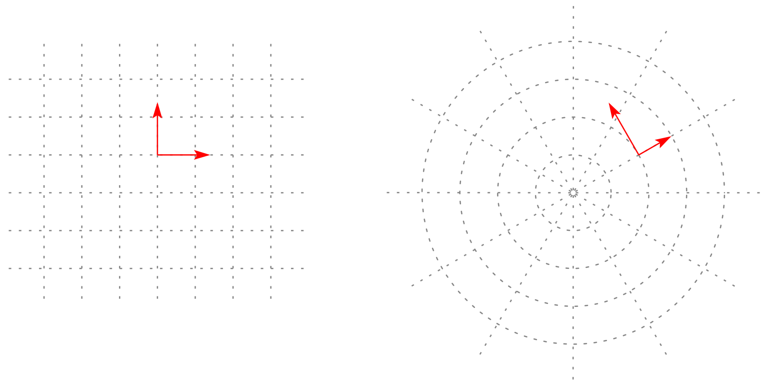
La integral sobre qualsevol corba tancada γ es redueix a la integral sobre el seu interior R donada per

$$\int_R 3\,(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

que és la integral d'una funció del pla que decreix amb la distància a l'origen i és positiva al disc unitat i negativa fora. D'aquesta expressió es dedueix, doncs, que la regió que donarà el valor màxim serà el disc unitat i, per tant, que la corba γ és el cercle unitat.

Exercici 150: Quan es defineix un camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ (o, en general, de $\mathbb{R}^n$) sempre es pot interpretar que l'expressió $X = (a_1, a_2, a_3)$ representa en cada punt el *vector tangent* que s'escriu com combinació lineal dels vectors tangents a les corbes coordenades amb components a_i. Si s'estableix $\frac{\partial}{\partial x} = \left.\frac{d(t,\text{ct.},\text{ct.})}{dt}\right|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \left.\frac{d(\text{ct.},t,\text{ct.})}{dt}\right|_{t=0}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \left.\frac{d(\text{ct.},\text{ct.},t)}{dt}\right|_{t=0}$ l'anterior observació es resumeix en la igualtat $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z}$. D'aquesta forma, si es fa un *canvi de coordenades* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \Phi(x, y, z)$ també es podrà representar X en funció de $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Per exemple, en $\mathbb{R}^2$,



1. Quina relació hi ha entre els camps tangents corresponents a les coordenades cartesianes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ i els de les coordenades cilíndriques $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ de $\mathbb{R}^3$?

2. Com es calcularà la divergència d'un camp de $\mathbb{R}^3$ si es coneix la seva expressió en funció de les coordenades cilíndriques?

Solució:

1. Pensant el vectors tangents com derivades direccionals i aplicant la regla de la cadena es pot deduir que les fórmules de canvi de base seran (les derivades parcials en la direcció de les z són comuns als dos sistemes de coordenades)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\,\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\,\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$

(Recordeu que el canvi de coordenades ve donat per $x = r\,\cos(\theta)$, $y = r\,\sin(\theta)$).

Per tal de condensar els càlculs, es pot pensar que es té, en cada punt, la matriu de canvi de base

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

amb inversa

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -(1/r)\,\sin(\theta) & (1/r)\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

i, per l'altre costat, un camp F que s'expressa en la base associada a les coordenades cilíndriques com $F = F_1 \frac{\partial}{\partial r} + F_2 \frac{\partial}{\partial \theta} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$ s'escriurà *en coordenades cartesianes* com

$$F = (\cos(\theta)\, F_1 - r\, \sin(\theta)\, F_2)\, \frac{\partial}{\partial x} + (\sin(\theta)\, F_1 + r\, \cos(\theta)\, F_2)\, \frac{\partial}{\partial y} + F_3\, \frac{\partial}{\partial z}$$

La divergència de F es calcularà, doncs, sumant el termes

$$\begin{gathered}(\cos(\theta)\, \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\, \sin(\theta)\, \frac{\partial}{\partial \theta})(\cos(\theta)\, F_1 - r\, \sin(\theta)\, F_2) \\ (\sin(\theta)\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \cos(\theta)\, \frac{\partial}{\partial \theta})(\sin(\theta)\, F_1 + r\, \cos(\theta)\, F_2) \\ \frac{\partial F_3}{\partial z}\end{gathered}$$

Un cop fet tots els càlculs i simplificant la suma surt

$$\operatorname{div}(F) = \frac{1}{r}\, \frac{\partial (r\, F_1)}{\partial r} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{F_1}{r} + \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

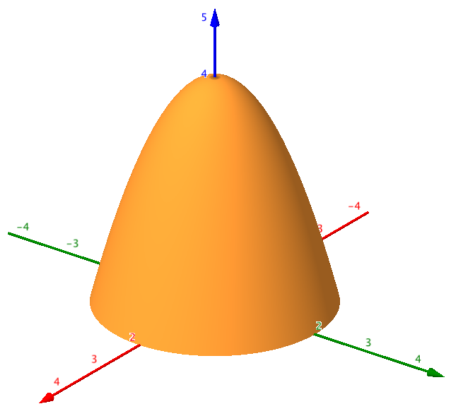
Nota: En la literatura trobareu la fórmula escrita com

$$\operatorname{div}(F) = \frac{1}{r}\, \frac{\partial (r\, F_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

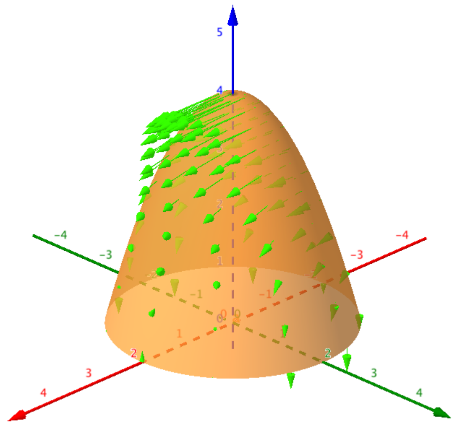
El motiu d'aquesta discrepància és que en aquestes fórmules les components del camp F que s'utilitzen són les relatives a la base *ortonormal* associada a les coordenades cilíndriques que està formada pels vectors $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ de forma que la component F_2 d'aquestes fórmules és igual a r vegades la component F_2 que s'ha utilitzat en els càlculs anteriors.

Exercici 151: Calculeu el flux del camp definit per $F(x, y, z) = (z^2, x\, z, x - y^2)$ a través del paraboloide S donat per $x^2 + y^2 = 4 - z$, $z \geq 0$ (amb la orientació que dóna $(0, 0, 1)$ com a vector normal quan $x = y = 0$).

Solució: Noteu que la superfície és el paraboloide de l'esquema següent



i que el camp (sobre la superfície) es veu com



Si es parametritza S prenent

$$\varphi(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

amb la condició que $x^2 + y^2 \leq 4$, l'espai tangent es generarà amb

$$\varphi_x = (1, 0, -2\,x)$$
$$\varphi_y = (0, 1, -2\,y)$$

de forma que el vector normal $\varphi_x \times \varphi_y$ serà

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = (2\,x, 2\,y, 1)$$

(notem que aquest vector normal és el que dóna l'orientació que es vol, ja que el seu valor quan $x = y = 0$ és, justament, $(0, 0, 1)$).

Observem que la integral que dóna el flux que cerquem es pot escriure en termes de la parametrització com

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, N \rangle \, dS = \int_{\partial\Omega} \langle F, \varphi_x \wedge \varphi_y \rangle \, dx\, dy$$

on N és el normal unitari a la superfície, ja que $dS = \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| dx\, dy$. No cal, doncs, calcular $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|$ ja que se simplifica.

D'aquesta forma tenim

$$\langle F, \varphi_x \wedge \varphi_y \rangle = 2\,x\,y\,z + 2\,x\,z^2 - y^2 + x$$

que restringit a S (posant z en funció de x, y) serà

$$\langle F, \varphi_x \wedge \varphi_y \rangle = 2\,x^5 + 4\,x^3\,y^2 + 2\,x\,y^4 - 2\,x^3\,y - 2\,x\,y^3 - 16\,x^3 - 16\,xy^2 + 8\,x\,y - y^2 + 33\,x$$

Aleshores el flux de F al llarg de S serà la integral

$$\int_S \langle F, \varphi_x \wedge \varphi_y \rangle dx\, dy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (2\,x^5 + 4\,x^3\,y^2 + 2\,x\,y^4 - 2\,x^3\,y - 2\,x\,y^3 - 16\,x^3 - 16\,xy^2 + 8\,x\,y - y^2 + 33\,x)\, dy$$

i una mica de càlcul dona *immediatament*

$$\int_S \langle F, N \rangle dS = -4\,\pi$$

Segona solució. Consisteix en aplicar el teorema de la divergència. Per això considerem la superfície anterior S junt amb la tapa inferior $z = 0$, és a dir, el disc del pla $z = 0$ amb centre $(0,0,0)$ i radi 2. Aquesta superfície és la vora de la regió R d'equacions $x^2 + y^2 \leq 4 - z$, $z \geq 0$.

El camp F donat té divergència nul·la (això és obvi ja que la primera component no depèn de x, la segona no depèn de y i la tercera no depèn de z). El teorema de la divergència diu, aleshores, que el flux al llarg de S més el flux al llarg de la *tapa de baix* D ha de ser igual a zero (quan es prenen les orientacions compatibles entre si), ja que, si M és la regió que queda *dins* el paraboloide, s'ha de complir

$$0 = \int_M \operatorname{div}(F)\, dV = \int_{\partial M} \langle F, N \rangle dS$$

i ∂M està format per les dues components S i D. Els càlculs seran molt més simples sobre la regió plana D que sobre S. A més, els càlculs es poden escurçar una mica més prenent *coordenades polars* en D (que són les que millor s'adapten a regions circulars). El que s'ha de calcular ara és

$$\int_D \langle F, N \rangle dS$$

on $N = (0,0,-1)$. La parametrització del disc serà

$$\varphi(\theta, r) = (r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta), 0)$$

amb vectors tangents generats per

$$\begin{aligned} \varphi_\theta &= (-r\,\sin(\theta), r\,\cos(\theta), 0) \\ \varphi_r &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \end{aligned}$$

per tant

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_r = (0, 0, -r)$$

(aquesta elecció de l'ordre de les coordenades no és arbitrària, és la compatible amb l'orientació que s'ha triat a S). Com que F restringit a D (recordem que D correspon a $z = 0$) serà (respecte les coordenades polars (θ, r))

$$F = \big(0,\ 0,\ -r^2 \sin^2(\theta) + r\,\cos(\theta)\big)$$

el flux sobre D serà la integral

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(r^3\,\sin^2(\theta) - r^2\,\cos(\theta)\big)\; d\theta dr = 4\,\pi\,.$$

I, per tant,

$$\int_S \langle F, N \rangle\, dS = -4\,\pi$$

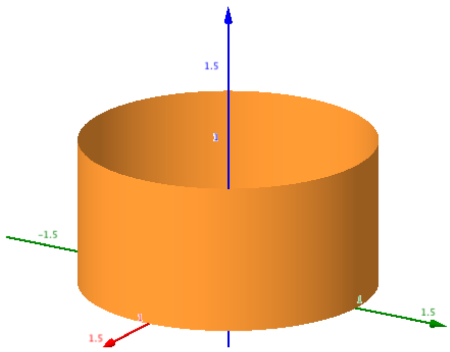
on N és ara la normal unitària exterior al paraboloide.

Exercici 152: Considereu el camp determinat per $F(x,y,z) = (x+1, y-1, 1-2\,z)$ i el cilindre $S = \{x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ (orientat pel vector normal $\nu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0)$). Calculeu el flux de F al llarg de S ($\int_S \langle F, N \rangle\, dS$) integrant la divergència sobre un domini adequat (i alguna cosa més).

Solució: El primer de tot que cal veure és que el camp F té divergència nul·la

$$\mathrm{div}(F) = 1 + 1 - 2 = 0$$

De forma que la circulació al llarg del cilindre ha de compensar la circulació al llarg de les dues *tapes*



Com que l'orientació que s'ha triat del cilindre és la que *mira cap a fora* l'orientació de la tapa inferior ha de ser la corresponent al vector normal $\nu_0 = (0, 0, -1)$ i la de la tapa superior al vector normal $\nu_1 = (0, 0, 1)$. El camp F restringit a la tapa inferior ($z = 0$) serà

$$F_0 = (x + 1, y - 1, 1)$$

mentre que la restricció a la superior serà

$$F_1 = (x + 1, y - 1, -1)$$

Els fluxos respectius es calcularan, doncs, amb

$$\int_{z=0} \langle F_0, \nu_0 \rangle \, dxdy = \int_{z=0} (-1) \, dxdy = -\pi$$

i

$$\int_{z=1} \langle F_1, \nu_1 \rangle \, dxdy = \int_{z=1} (-1) \, dxdy = -\pi$$

(l'àrea dels dos discs). L'element d'àrea és en els dos casos $dS = dx\, dy$.

A partir d'aquí és clar que el flux al llarg del cilindre serà $2\,\pi$

Exercici 153:

1. Sigui $F = (x, y, z)$ el camp radial de $\mathbb{R}^3$ i D una regió qualsevol (amb frontera S prou regular). Proveu que el volum de D es pot calcular com

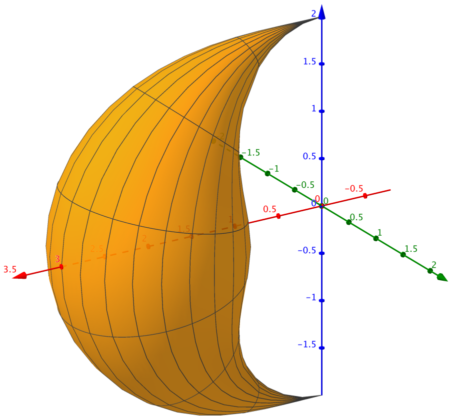
$$\mathrm{Vol}(D) = \frac{1}{3} \int_S \langle F, \nu \rangle \, dS$$

(un terç del flux del camp radial sobre la superfície).

2. Utilitzeu l'estratègia de l'apartat anterior per a calcular el volum de la regió limitada per la superfície parametritzada com

$$\varphi(u, v) = (2\cos(u) + \cos^3(u)\, \cos(v), \cos^2(u)\, \sin(v), 2\, \sin(u) + \cos^2(u)\, \sin(u)\, \cos(v))$$

que correspon a $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, 2\,\pi]$.



Solució:

1. La divergència del camp radial F és constant, amb valor 3. Per tant, la fórmula és únicament la manifestació del teorema de la divergència en aquest cas:
$$\int_S \langle F, N\rangle \, dS = \int_D 3\, dV = 3 \ \mathrm{Vol}(D)$$

2. Per als càlculs d'aquest exercici caldrà tenir una bona calculadora.

   Per a la parametrització que s'ha donat, els vectors tangents seran
$$\varphi_u = \Big(-3\,\cos^2(u)\cos(v)\sin(u) - 2\,\sin(u),\ -2\,\cos(u)\,\sin(u)\,\sin(v),\\ -\big(3\,\cos(u)\,\sin^2(u) - \cos(u)\big)\cos(v) + 2\,\cos(u)\Big)$$
$$\varphi_v = \Big(-\cos^3(u)\,\sin(v),\ \cos^2(u)\,\cos(v),\ -\cos^2(u)\,\sin(u)\,\sin(v)\Big)$$

   Això dóna un vector normal
$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \Big(-\cos^5(u)\,\sin^2(v) + 3\,\cos^5(u) + 2\,\cos^3(u)\cos(v) - 2\,\cos^3(u),\\ \big(\cos^4(u)\,\cos(v) + 2\,\cos^2(u)\big)\sin(v),\\ -\cos^4(u)\,\sin(u)\sin^2(v) + 3\,\cos^4(u)\,\sin(u) + 2\,\cos^2(u)\,\cos(v)\,\sin(u)\Big)$$

   (ja s'ha triat el signe per tal d'obtenir el vector normal que mira *cap a fora*).

   El que s'haurà d'integrar respecte $du\,dv$ per aplicar la fórmula serà
$$\langle F, \varphi_u \wedge \varphi_v\rangle = -2\,\cos^4(u)\,\sin^2(v) + 4\,\cos^4(u) + \big(\cos^6(u) + 4\,\cos^2(u)\big)\cos(v)$$

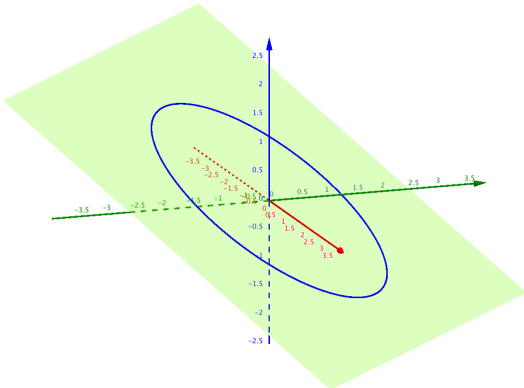
   i el resultat serà
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol} &= \frac{1}{3}\int_S \langle F, N\rangle\, dS \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(-2\,\cos^4(u)\,\sin^2(v) + 4\,\cos^4(u) + \big(\cos^6(u) + 4\,\cos^2(u)\big)\cos(v)\Big)\, dudv \\ &= \frac{3}{4}\pi^2\end{aligned}$$

Exercici 154: Calculeu la circulació del camp definit per

$$F(x,y,z) = (3\,x^2\,y^2 + 4\,x^3\,y\,z^3 + 3\,x^2\,y\,z - y, 2\,x^3\,y + x^4\,z^3 + x^3\,z + x, 3\,x^4\,y\,z^2 + x^3\,y + y - x)$$

al llarg de l'el·lipse parametritzada per $c(t) = (2\,\sin(t), 2\,\cos(t), -\sin(t) - \cos(t))$. Feu el càlcul directe i el corresponent a aplicar el T. de Stokes. (Aneu en compte amb les orientacions i recordeu la versió corresponent al rotacional).

Solució: Si es vol fer el càlcul directament s'ha de calcular la restricció del camp F a la corba c (respecte el paràmetre t) i el vector velocitat de la corba $c'(t)$.



El més fàcil de calcular és

$$c'(t) = (2\,\cos(t), -2\,\sin(t), -\cos(t) + \sin(t))$$

La restricció de F a la corba, en funció del paràmetre t, donarà

$$\begin{aligned} F(c(t)) = \Big(&128\,\cos(t)\sin^6(t) + 128\,\sin^7(t) - 64\,\sin^5(t) \\ &\qquad - 24\,(8\,\cos(t)+1)\sin^4(t) - 8\,(3\,\cos(t)+8)\sin^3(t) + 24\,\sin^2(t) - 2\,\cos(t), \\ &32\,\sin^7(t) - 32\,\cos(t)\sin^6(t) - 48\,\sin^5(t) \\ &\qquad - 8\,(2\,\cos(t)+1)\sin^4(t) + 24\,\cos(t)\sin^3(t) + 2\,\sin(t), \\ &-192\,\sin^7(t) + 192\,\sin^5(t) + 96\,\cos(t)\sin^4(t) + 16\,\cos(t)\sin^3(t) - 2\,\sin(t) + 2\,\cos(t)\Big) \end{aligned}$$

La projecció sobre l'element de longitud (producte escalar) resultarà

$$\begin{aligned} \langle F(c(t)), c'(t)\rangle = -256\,\sin^8(t) &+ 512\,\cos(t)\sin^7(t) + 32\,(8\,\cos^2(t)+9)\sin^6(t) - 16\,(12\,\cos(t)-1)\sin^5(t \\ &- 80\,(6\,\cos^2(t)+\cos(t))\sin^4(t) - 64\,(\cos^2(t)+2\,\cos(t))\sin^3(t) + 6\,(8\,\cos(t)-1) \\ &+ 4\,\cos(t)\sin(t) - 6\,\cos^2(t) \end{aligned}$$

I la integral d'aquesta funció serà

$$\int_c \langle F(t), c'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\,\pi} \langle F(t), c'(t)\rangle\,dt = -12\,\pi$$

Com es pot veure, aquest és un altre exemple on es necessita una bona calculadora per poder obtenir els resultats sense cometre errades.

Segon mètode. D'altra banda, obtenir el valor d'aquesta circulació és immediat utilitzant la fórmula del rotacional

$$\text{Circulació de } F = \int_{\partial S} \langle F(c(t)), c'(t)\rangle\, dt = \int_S \langle \text{rot}(F), \nu\rangle\, dS$$

ja que no costa massa veure que el rotacional del camp que tenim és constant:

$$\text{rot}(F) = (1, 1, 2)$$

Per altra banda l'el·lipse que ens donen és la intersecció del pla $x + y + 2\,z = 0$ amb el cilindre $x^2 + y^2 = 4$. O com la vora de la intersecció del pla amb $x^2 + y^2 \leq 4$.

Diguem S aquest recinte. La orientació de la el·lipse que ens donen és tal que deixa S a la dreta quan es recorre ∂S en el sentit creixent de t. Com que hem d'agafar el vector unitari normal a S de manera que $c' \wedge N$ sigui exterior al recinte d'integració, prenem

$$N = (-1/2, -1/2, -1)$$

com vector normal al pla (no cal fer-lo unitari pel comentari que hem fet a l'exercici 151).

Parametritzem la superfície S per $\varphi(x, y) = (y, x, -\frac{1}{2}(x + y))$ amb $x^2 + y^2 \leq 4$, de manera que

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = (-1/2, -1/2, -1)$$

Amb això resulta que la integral que s'haurà de calcular serà, simplement,

$$\int_S \langle \text{rot}(F), \nu\rangle\, dS = \int_S \langle \text{rot}(F), \varphi_x \wedge \varphi_y\rangle\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-3)\, dydx = -12\,\pi$$

(la darrera integral no cal fer-la ja que es veu de seguida que es tracta de multiplicar per -3 l'àrea del cercle de radi 2).

Exercici 155:

1. Calculeu la circulació del camp vectorial

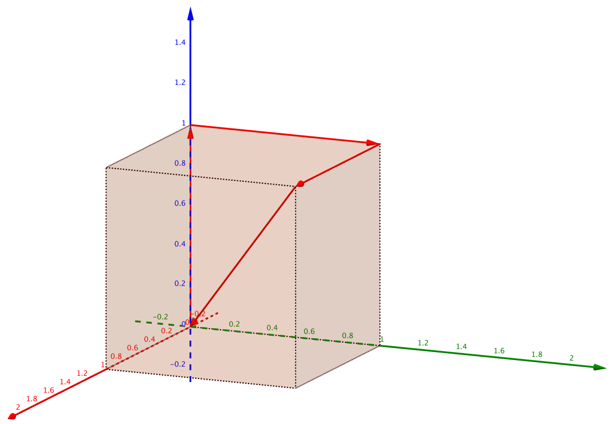
$$F(x, y, z) = (x^3 - 3\,x\,y^2, y^3 - 3\,x^2\,y, z)$$

   al llarg de la trajectòria que sortint de l'origen va seguint les arestes del cub, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ i $0 \leq z \leq 1$, anant a $(0, 0, 1)$, a $(0, 1, 1)$, i a $(1, 1, 1)$ i finalment torna a l'origen per la diagonal des de $(1, 1, 1)$.

2. Calculeu el rotacional de F. Observeu que és nul i que aquest fet permet determinar una funció f tal que $F = \nabla f = \text{grad}(f)$. Expliciteu-la.

Solució:

1. L'esquema del recorregut serà



Els quatre segments que el formen (tenint en compte l'orientació del circuit) estan parametritzats per (amb $0 \leq t \leq 1$),

$$\begin{array}{ll} \alpha_1(t) = (0,0,t) & \alpha_1'(t) = (0,0,1) \\ \alpha_2(t) = (0,t,1) & \alpha_2'(t) = (0,1,0) \\ \alpha_3(t) = (t,1,1) & \alpha_3'(t) = (1,0,0) \\ \alpha_4(t) = (1-t,1-t,1-t) & \alpha_4'(t) = (-1,-1,-1) \end{array}$$

De forma que les projeccions del camp F sobre les tangents són

$$\begin{aligned} \langle F(\alpha_1(t)), \alpha_1'(t)\rangle &= t \\ \langle F(\alpha_2(t)), \alpha_2'(t)\rangle &= t^3 \\ \langle F(\alpha_3(t)), \alpha_3'(t)\rangle &= t^3 - 3\,t \\ \langle F(\alpha_4(t)), \alpha_4'(t)\rangle &= -4\,t^3 + 12\,t^2 - 11\,t + 3 \end{aligned}$$

i la circulació serà la suma de les integrals

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\,dt &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 t^3\,dt &= \frac{1}{4} \\ \int_0^1 (t^3 - 3\,t)\,dt &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4} \\ \int_0^1 (-4\,t^3 + 12\,t^2 - 11\,t + 3)\,dt &= -1 + 4 - \frac{11}{2} + 3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que, clarament, dona com a resultat 0.

2. Aplicant la fórmula del càlcul del rotacional

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^3 - 3\,x\,y^2 & y^3 - 3\,x^2\,y & z \end{vmatrix} = 0\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} + (-6\,x\,y + 6\,x\,y)\cdot\mathbf{k} = (0,0,0)$$

Es pot obtenir, doncs, una funció f tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= x^3 - 3\,x\,y^2\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^3 - 3\,x^2\,y\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= z\end{aligned}$$

Integrant amb compte s'obtindrà (s'integra la primera respecte x i apareix una constant d'integració $C = C(y,z)$; es deriva respecte y i s'iguala amb la segona equació; s'integra respecte y i apareix una constant d'integració $C = C(z)$; es deriva i usant la tercera equació s'obté el resultat). El fet de que aquest mètode funcioni és perquè els camps irrotacionals (conservatius) sobre oberts simplement connexos deriven d'un potencial, és a dir, són gradients d'una funció.

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\,y^2 + C$$

(on C és una constant qualsevol).

Segon mètode. Per trobar un potencial només hem de fixar un punt, per exemple $O = (0,0,0)$ i definir $f(x,y,z)$ com la integral de X al llarg d'una corba (qualsevol, i per tant n'agafarem una fàcil) que uneixi O amb (x,y,z).

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$$

on $\gamma(t) = (tx, ty, tz)$. Així

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= \int_0^1 \langle (t^3x^3 - 3txt^2y^2, t^3y^3 - 3t^2x^2ty, tz), (x,y,z)\rangle\, dt\\ &= \int_0^1 (t^3x^4 - 3t^3x^2y^2 + t^3y^4 - 3t^3x^2y^2 + tz^2)\, dt\\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}z^2.\end{aligned}$$

Ara és fàcil veure que $X = \nabla f$ (vegeu *Notes sobre corbes i superfícies*, A. Reventós, 2018, p. 434.)

Observació. Sigui $\gamma(t)$ una corba qualsevol tal que $\gamma(0) = (0,0,0)$ i $\gamma(1) = (x,y,z)$ on (x,y,z) és un punt fixat. Llavors

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \langle (x(t)^3 - 3x(t)y(t)^2, y(t)^3 - 3x(t)^2y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t))\rangle\, dt\\ &= \left[\frac{x(t)^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{y(t)^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{z(t)^2}{2}\right] - \int_0^1 (3xy^2x' + 3x^2yy')\, dt\end{aligned}$$

Com $3xy^2x' + 3x^2yy' = \frac{3}{2}(x^2y^2)'$ tenim el resultat.

Exercici 156 (Frobenius)**:** Sigui X un camp de $\mathbb{R}^3$. Les seves trajectòries són normals a una superfície si i només si $\langle X, \operatorname{rot} X\rangle = 0$.

Solució: Conseqüència immediata del teorema del rotacional aplicat al camp X. Si existís una superfície S de la que X en fos el camp normal, el terme de l'esquerra del teorema del rotacional seria zero, ja que s'integra el producte escalar del camp amb un vector tangent, per tant, per tot obert de la superfície la integral del rotacional pel normal és zero, i per tant, $\langle X, \operatorname{rot} X\rangle = 0$.

Segon mètode, només pels que coneixeu el teorema de Frobenius. α la 1-forma associada al camp, és a dir, $\alpha = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$. Observem que

$$\langle X, Y\rangle = \alpha(Y)$$

de manera que un camp Y pertany a la distribució ortogonal a X, que denotarem $X^\perp$, si i només si $\alpha(Y) = 0$.

Observem que un càlcul directe mostra

$$\alpha \wedge d\alpha = \langle X, \operatorname{rot} X\rangle \eta$$

on $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$.

El teorema de Frobenius, versió dual, diu que la distribució $\ker \alpha$ és integrable si l'ideal I generat per α és un ideal diferencial, és a dir, $dI \subseteq I$. Això vol dir que $d\alpha$ és múltiple de α i per tant $\alpha \wedge d\alpha = 0$ i hem acabat.

Recordem que el teorema de Frobenius diu que una distribució és integrable si és tancada pel parèntesi de Lie. Això vol dir que hem de veure que si $Y, Z \in X^\perp$ llavors $[Y, Z] \in X^\perp$.

Però
$$d\alpha(Y, Z) = Y\alpha(Z) - Z\alpha(Y) - \alpha([Y, Z]) = -\alpha([Y, Z])$$
I com $\alpha = X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$ també

$$d\alpha(Y, Z) = \langle \operatorname{rot} X, Y \wedge Z\rangle$$

i com $Y \wedge Z$ té la direcció de X veiem que $[Y, Z] \in \ker \alpha$ si i només si $\langle X, \operatorname{rot} X\rangle = 0$, com volíem veure.