Segon Lliurament

Geometria Diferencial
(3r curs, Grau en Matemàtiques)
Universitat Autònoma de Barcelona

César Jose de Almenara & Marc Graells

21 de maig de 2020

Seminari 11

Es considera una superfície S que admet una parametrització global definida al semiplà superior $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ en la qual la primera forma fonamental I té coeficients $E = G = 1/y^2$ i $F = 0$. Una tal superfície s'anomena *pla hiperbòlic*. Identifiquem S amb $\mathbb{H}^2$ a traves d'aquesta parametrització.

Exercici 11.6

Donat $c \in \mathbb{R}$ considerem $\Psi(x,y) = \frac{1+c^2}{(x-c)^2+y^2}(x-c, y) + (c, 0)$. Proveu que $\Psi(0, e^{-t}) = (x(t), y(t))$ amb $x(t), y(t)$ donades per:

$$x(t) = x_0 + r\frac{1-e^{2(at+b)}}{1+e^{2(at+b)}}, \qquad y(t) = r\frac{2e^{at+b}}{1+e^{2(at+b)}}$$

i trobeu x_0, r, a, b.

Podem tractar $\mathbb{H}^2$ com el semiplà complex $\{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$. Conseqüentment, $\Psi(z) := \psi(x,y)$ i notem que és una homografia. De fet,

$$\Psi = \Psi_3 o \Psi_2 o \Psi_1 o \Psi_3^{-1}$$

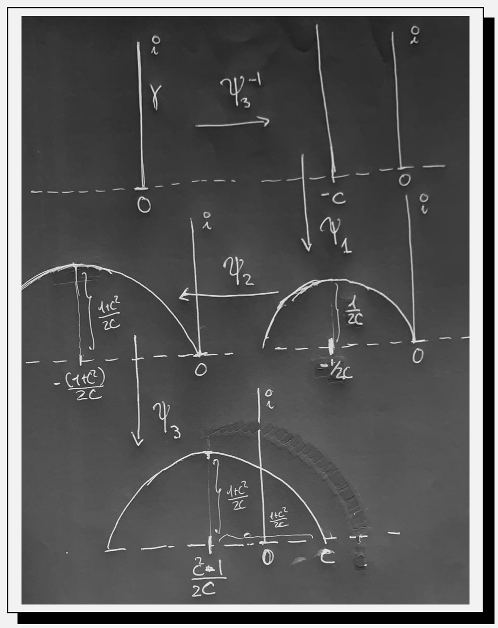

Figura 1: Descomposició gràfica de la funció Ψ, suposant $0 < c < 1$. La imatge és il·lustrativa, no té en compte escala alguna (com és veu *de lluny*).

on $\Psi_1(z) = \frac{1}{z}$,$\Psi_2(z) = (1+c^2)z$ i $\Psi_3(z) = z + c$. A més, per l'*exercici 5*[1] sabem que les homografies són isomètriques i en particular, envien geodèsiques a geodèsiques. Apliquem Ψ a la geodèsica donada, separant

[1] Del mateix seminari 11.

en tres casos[2]: **1)** $c > 0$, **2)** $c = 0$, **3)** $c < 0$. **1)** Fàcilment podem seguir les transformacions, *Figura 1*. Sense sorpresa, acaba sent una geodèsica no-vertical (semicircumferència). Per tant, aïllem els valors x_0, r, a, b de *les equacions del enunciat*, manipulant adequadament les expressions per tal de que tot "encaixi":

$$y(t) = r\frac{2e^{at+b}}{1+e^{2(at+b)}} = Im(\Psi(e^{-t}i))$$
$$= Im\left(\frac{(1+c^2)(ie^{-t})}{c^2+e^{-2t}}\right)$$
$$= \frac{(1+c^2)}{2c}\cdot\frac{2e^{-t}e^{-log(c)}}{1+e^{-2t}e^{-2log(c)}}$$

Així, obtenim que $r = \frac{(1+c^2)}{2c}$, $a = -1$ i $b = -log(c)$. Falta x_0, però seguint la composició d'homografíes (*Figura 1*), resulta $x_0 = \frac{c^2-1}{2c}$. Ho podem fer analíticament, veure annex, o bé geomètricament, observant que Ψ_3^{-1} trasllada a la semirecta $x = -c$, Ψ_1 envia la semirecta anterior a una semicircumferència el centre $\frac{-1}{2c}$ i que Ψ_2 la dilata, donant de centre $\frac{-(1+c^2)}{2c}$. Finalment, Ψ_3 el [3] trasllada a $\frac{c^2-1}{2c}$. El cas **3)** és anàleg, *prenem que* $c > 0$ ja que el seu signe el tenim en compte invertint les Ψ_3 (i.e primer desplacem positivament la geodèsica al punt ideal $(c, 0)$ i finalment ho fem negativament). Per tant $x_0 = \frac{1-c^2}{2c}$ i la resta de forma anàloga.

El cas **2)** és molt agradable, geomètricament deduïm que cap homografia modifica la recta: no hi ha translació, la semirecta segueix passant pel 0 verticalment, conseqüentment la inversió no la modifica, i finalment la homotècia deixa la semirecta, semirecta. Per tant $x_0 = 0, a = -1, b = 0$ i considerem $r = \infty$ (doncs en realitat torna a talla l'eix de les x en el punt de l'∞)

Exercici 11.7

Donats dos punts $p = (p_x, p_y) \neq q = (q_x, q_y) \in \mathbb{H}^2$, proveu que existeix una geodèsica $\gamma(t)$ de $\mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ (*). A més, proveu que la longitud $\gamma([1, 0])$ és menor o igual que la longitud de qualsevol corba que uneixi $\gamma(0)$ amb $\gamma(1)$.

Provem l'existència de geodèsiques, llevat reparametritzacions, i en cada cas particular serà trivial desprès trobar l'exigència (*). Per claredat, separem en tres casos: **1)**$p_x = q_x$, tenim la recta vertical, per ex. 11.4) hem acabat. **2)** $p_x \neq q_x$, però $p_y = q_y$: prenem $C = \frac{p_x+q_x}{2}$ i $R = \|p - C\|_{\mathbb{H}^2}$ i de l'*ex 11.4* sabem que la semicircumferència de centre C i radi R podrà reparametritzar-se per ser geodèsica (i per construcció conté p i q). **3)** Altrament, en aquest cas (generalitza 2) exigim que p i q pertanyin a la mateixa semicircumferència centrada en l'eix x i ja. Detallem: $(p_x-x_0)^2+p_y^2 = (q_x-x_0)^2+q_y \Rightarrow x_0 = \frac{\|q\|^2_{\mathbb{H}^2}-\|p\|^2_{\mathbb{H}^2}}{2(q_x-p_x)}$ ens dona el centre de la semicircumferència i el radi serà $R = \|p - x_0\|_{\mathbb{H}^2}$.

Reduïm el problema al cas vertical, ja que les inversions són isomètriques (*ex 11.5*) i aquestes envien rectes a circumferències i viceversa (llevat les rectes que passen per l'origen, que les envia al seu conjugat). Com la mètrica d'$\mathbb{H}^2$ és induïda per la restricció del producte escalar estàndard $I = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$ tenim que modifica *homogèniament* les distàncies sobre els eixos i és ortogonal. Per tant, els arguments euclidians que demostren que la recta és la distància mínima entre dos punts són aplicables; us deixem una, [1] (només cal canviar la mètrica).

Exercici 11.8

Donat $P \in \mathbb{H}^2$ i $v \in T_p\mathbb{H}^2$ un vector amb $I(v, v) = 1$, denotem per $\gamma_{P,v}(s)$ la geodèsica parametritzada pe l'arc tal que $\gamma_{P,v}(0) = P$ i $\gamma'_{P,v}(0) = v$. Anomenem circumferència hiperbòlica de radi r i centre P al conjunt $S_r(P) = \{\gamma_{P,v}(r) : v \in T_p\mathbb{H}^2,\ I(u, v) = 1\}$.

a) Dibuixeu amb `Sage` un parell de circumferències hiperbòliques centrades a P=(0,1).

Primer, cal observar que tota circumferència hiperbòlica C pot ser identificada *inequívocament* com un punt del *upper-half-plane* P i un nombre real positiu r, el radi. Aquest r coincidirà amb la distància de P amb un punt qualsevol de la corba (circumferència).

En general, la distància r entre dos punts qualsevols

[2] Això ho fem per la *por* que ens dóna el valor absolut sobre la recta de l'∞, al final és el mateix però som *covards*.

[3] El centre.

amb la la mètrica de $\mathbb{H}^2$ al llarg de una geodèsica ve[4] donada per la funció distància:

$$r = dist\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)$$

$$= arccosh\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1y_2}\right)$$

Considerem ara, aplicant la funció *cosinus hiperbòlic*:

$$cosh(r) = \frac{2y_1y_2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1y_2}$$

Continuant manipulant algebraicament:

$$2y_1y_2cosh(r) = 2y_1y_2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

$$2y_1y_2cosh(r) = 2y_1y_2 + (x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2;$$

$$2y_1y_2cosh(r) = (x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + y_2^2;$$

$$-y_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 - 2y_1y_2cosh(r);$$

Arribem a:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1cosh(r))^2 = y_1^2(cosh^2(r) - 1)$$

En conseqüència podem escriure la nostra *circumferència hiperbòlica* $C(P, r)$ en coordenades de $\mathbb{R}^2$ com $C((x_1, y_1cosh(r)), y_1^2(cosh^2(r) - 1))$. Programa'n en `Sage 8.1` tenim:

```
C_1=circle((0,cosh(2)),sqrt(cosh(2)^2-1),
color='red');
C_2=circle((0,cosh(1)),sqrt(cosh(1)^2-1),
color='blue');
C_1+C_2
```

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/PoincarC3A9_half-plane_model`

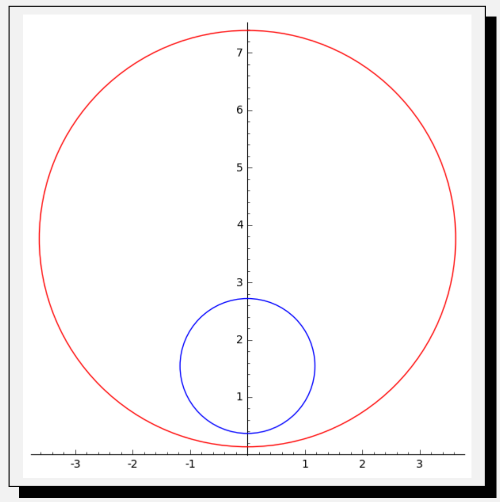

Figura 2: Intentant *imitar* la *diapositiva 11* de la presentació del *seminari 11*. Coincideix amb el `ouput` del codi superior.

Annex

Recordem que les rectes complexes estan donades per un element director $\alpha \in \mathbb{C}$ (i.e la recta serà perpendicular a α, pensat com a vector en $\mathbb{R}^2$). La recta serà escrita com $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + m = 0$ per a cert $m \in \mathbb{C}$. La circumferència de centre α i radi r, en variable complexa, correspon a $|z|^2 - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z - r^2 + |\alpha|^2 = 0$. A més, aplicar la inversió és invertir les z de l'anterior equació obtenint $\frac{\overline{\alpha}}{m}z + \frac{\alpha}{m}\overline{z} + |z|^2 = 0$.

Sobre la geodèsica $\varphi(t) = (-c, e^{-t})$ per $\forall c \neq 0$, obtenim la recta $x + c = 0$ i en conseqüència $\frac{z}{2} + \frac{\overline{z}}{2} + c = 0$ per ser $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$. Aplicant la inversió, $\frac{z}{2c} + \frac{\overline{z}}{2c} + |z|^2 = 0$ i tractant d'obtenir l'expressió general de la circumferència en variable complexa, $|z|^2 - \frac{-1}{2c}z - \frac{-1}{2c\overline{z}} = 0$. Ara bé, això ens diu que $x_0 = \alpha = \frac{-1}{2c}$ i el terme que ens faltava per completar l'expressió ens indicarà la r, amb la qual cosa $-r^2 + |\alpha|^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4c^2} \Rightarrow r = \frac{1}{2|c|}$.
Si volem seguir amb l'estudi analític, cal aplicar la homotècia $(1 + c^2) \Rightarrow r = \frac{1+c^2}{2|c|}$ i $x_0 = \frac{-(1+c^2)}{2c}$. Finalment la translació $+c$, així $x_0 + c = \frac{-(1+c^2)}{2c} + c = \frac{c^2-1}{2c}$.

Referències

[1] P. Blochle. Canisius College, Buffalo, NY. *Proof that the shortest distance between two point is a straight line* `http://www.instant-analysis.com/Principles/straightline.htm` Bonica demostració de 25 passos en format llista de que la distància més curta entre dos punts és una línia recta. Algú ens va dir un cop: *Calia demostrar l'àrea del cercle?*