8 Superfícies: Segona forma fonamental. Curvatura

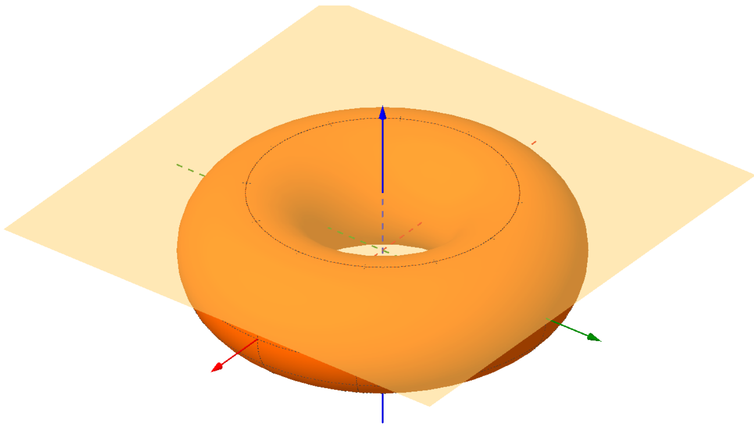
Exercici 85: Determineu la primera i segona formes fonamentals, i les curvatures de Gauss i mitjana, de la superfície parametritzada per

$$\varphi(u,v) = (u+v, u\,v, v)$$

(Noteu que es tracta de la quàdrica $y = z\,(x-z)$ i, per tant, els càlculs es poden fer utilitzant les fórmules corresponents al gràfic d'una funció de l'exercici següent).

Exercici 86: Donada una funció de dues variables $h(x,y)$, doneu en funció de les derivades parcials de h, les expressions del vector normal, l'aplicació de Weingarten i la curvatura de Gauss per a la superfície S que s'obté considerant el gràfic de h.

Exercici 87: Sigui S una superfície regular que és tangent a un pla fix per a tots els punts d'una certa corba (regular). Què es pot dir de la curvatura de Gauss de S en els punts d'questa corba? Preneu com exemple un tor de revolució com el de l'esquema següent



Exercici 88: Sigui S una superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Suposeu que S es connexa. Demostreu que són equivalents:

1. La segona forma fonamental de S és constant igual a zero.
2. L'aplicació de Gauss de S és constant.
3. S està continguda en un pla.

Exercici 89: Sigui S una superfície regular i connexa. Suposeu que totes les rectes normals a la superfície passen pel mateix punt. Demostreu que S està continguda en una esfera.

Exercici 90: Sigui S una superfície de $\mathbb{R}^3$ i $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'homotècia de raó positiva λ. Comproveu que $\bar{S} = F(S)$ és també una superfície i expresseu la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana de $\bar{S}$ en termes de les de S.

Exercici 91: Considereu un helicoide

$$\varphi(u,v) = (u\,\cos(v), u\,\sin(v), a\,v)$$

Calculeu-ne la curvatura de Gauss i la curvatura mitjana.

Exercici 92: (Superfícies paral·leles o semitubs).
Donada una parametrització $\varphi(u,v)$, d'una superfície S, es defineix la superfície paral·lela o semitub a distància t, S_t, com la superfície donada per

$$\varphi^t(u,v) = \varphi(u,v) + t\,\nu(u,v),$$

on $\nu = \nu(u,v)$ és el vector normal unitari de S (escollim un dels dos).

1. Trobeu, respecte de les coordenades u, v, l'expressió de l'element d'àrea de S_t.
2. Proveu que la curvatura de Gauss $K^t = K^t(u,v)$ està donada per

$$K^t = \frac{K}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,,$$

on $K = K(u,v)$ i $H = H(u,v)$ són les curvatures de Gauss i mitjana de la superfície inicial en el punt corresponent.

3. Proveu que la curvatura mitjana $H^t = H^t(u,v)$ de S_t està donada per

$$H^t = \frac{H - K\,t}{1 - 2\,H\,t + K\,t^2}\,.$$

4. Si S és una superfície amb curvatura mitjana constant $c \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{2\,c}$ té curvatura de Gauss constant $K = 4\,c^2$.
5. Si S és una superfície amb curvatura de Gauss constant $a^2 \neq 0$, demostreu que la superfície tubular a distància $\dfrac{1}{a}$ té curvatura mitjana constant $H = -a/2$.

Exercici 93: Demostreu que si l'aplicació de Gauss d'una superfície S és *conforme*, llavors S és una esfera o una superfície minimal (curvatura mitjana zero).