7 Superfícies de revolució

En el seminari d'aquesta setmana farem servir `Sage` *(*`http://sagemath.org`*) per treballar amb superfícies. Podeu trobar a*
`http://doc.sagemath.org/html/en/reference/riemannian_geometry/index.html`
instruccions i exemples per fer càlculs amb superfícies parametritzades.

Al final del document trobareu un exemple complet, si voleu podeu començar per aquí o bé anar quan calgui.

Exercici 7.1. Sigui $(a(u), b(u))$ una corba plana parametritzada per l'arc. Considerem la superfície de revolució S parametritzada per $\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$. Calculeu els coeficients de la primera i segona forma fonamental de S en aquesta parametrització i comproveu que la curvatura de Gauss de S ve donada per

$$K(u,v) \quad = \quad -\frac{a''(u)}{a(u)}. \tag{7.1}$$

Exercici 7.2. Particularitzeu-ho al cas d'un tor de revolució i d'una esfera. Feu els dibuixos amb `Sage`.

Exercici 7.3. Ens proposem obtenir i dibuixar superfícies de revolució que tinguin curvatura de Gauss constant $K \equiv 1$. Per la igualtat (7.1), això es redueix a resoldre l'equació diferencial $a''(u) = -a(u)$. Comproveu que, llevat d'un canvi $u \to u + C$, les solucions són totes de la forma

$$a(u) = c\cos(u), \qquad b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$$

on la segona expressió prové de la suposició $a'(u)^2 + b'(u)^2 = 1$ (i.e. u és paràmetre arc). Proveu que la correspondència latitud $= u$, longitud $= cv$ defineix una isometria entre un obert de la surpefície anterior i un obert de l'esfera unitat.

Exercici 7.4. La integral $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2\sin^2(t)}dt$ és una integral el·líptica, existeix una funció en `Sage` que la implementa. En aquest cas $b(u) = \texttt{elliptic\_e}(u, c^2)$. Tenim tres casos interesessants: $c = 1, c < 1, c > 1$. En el primer cas tenim l'esfera de radi 1, en el segon cas un 'fus' i en el tercer una 'gorra de cop' (xixonera). En els dos primers casos l'argument u pot anar de $-\pi/2$ a $\pi/2$ en el tercer, per evitar arrels de nombres negatius, tenim $|u| \leq \arcsin(1/c)$. Fem el dibuix per $c > 1$:

```
sage: xixo = ParametrizedSurface3D(
sage.       (2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v), elliptic\_e(u,4)),
sage:       ((u,-arcsin(1/2),arcsin(1/2)),
sagw:       (v,0,2*pi)),'Xixonera')
sage: X = xixo.plot(mesh=True, color='red',aspect\_ratio=1)}
sage: X
```

Feu ara els dibuixos pels casos $c \leq 1$.

Exercici 7.5. Utilitzeu l'estratègia anterior per a obtenir i dibuixar superfícies de revolució amb curvatura de Gauss constant $K \equiv -1$. El cas $a(u) = e^{-u}$ és conegut amb el nom de *pseudoesfera.*

Exercici 7.6. Determineu les superfícies de revolució desenvolupables, és a dir, reglades amb curvatura de Gauss $K \equiv 0$.

Exercici 7.7. Utilitzeu l'exercici 7.1 per donar una expressió de la curvatura mitjana $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-dN)$ d'una superfície de revolució. Ho podeu fer també amb `Sage`. Comproveu que la catenoide $\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z$, superfície de revolució obtinguda al girar la catenària, té curvatura mitjana nula (és una superfície mínima).

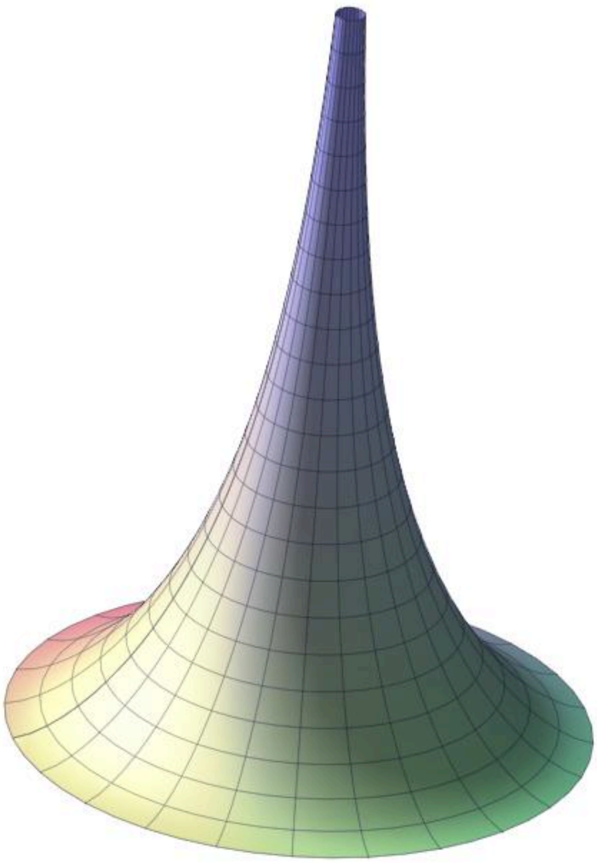

Figura 7.6: Pseudoesfera

Exemple amb Sage

Fem un exemple complet en el que veiem com fer servir el `Sage`. Es considera la superfície que s'obté fent girar la corba $y = e^{-z^2}$ al voltant de l'eix OZ. Podem considerar la parametrització

$$\varphi(u,v) = (e^{-u^2}\cos(v), e^{-u^2}\sin(v), u).$$

Posem

```
> var('u,v');
> ceba=ParametrizedSurface3D((e^(-u^2)*cos(v),e^(-u^2)*sin(v),u), (u,v),'Ceba');
> ceba.plot((-2, 2), (0, 2*pi),mesh=True, color='orange',aspect_ratio=1);
```

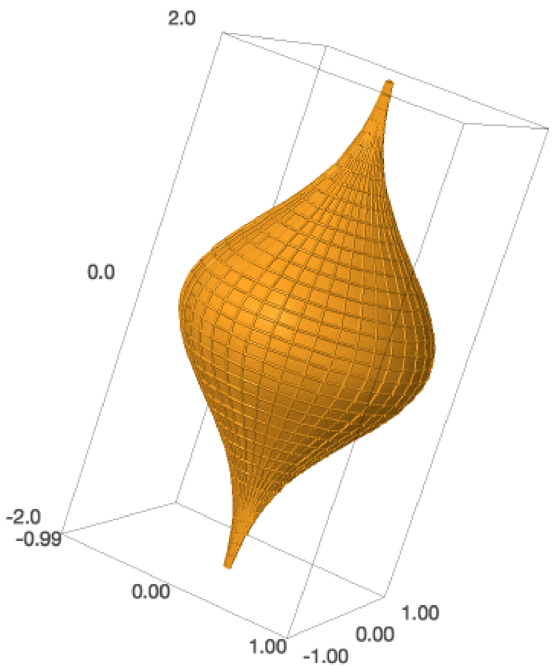

Figura 7.1: Ceba

Calculem la primera i segona formes fonamentals.

```
> pf=ceba.first_fundamental_form_coefficients(); pf;
> sf=ceba.second_fundamental_form_coefficients(); sf;
```

Obtenim, respectivament

$$\left\{(1,2):0,(1,1):\left(4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}\right)e^{\left(-2\,u^2\right)},(2,1):0,(2,2):e^{\left(-2\,u^2\right)}\right\}$$

$$\left\{(1,2):0,(1,1):-\frac{2\left(2\,u^2-1\right)}{\sqrt{4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}}},(2,1):0,(2,2):\frac{1}{\sqrt{4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}}}\right\}$$

Les direccions i curvatures principals, `dp=ceba.principal_directions();`

$$\left[\left(-\frac{2\sqrt{4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}}\left(2\,u^2-1\right)e^{\left(2\,u^2\right)}}{16\,u^4+8\,u^2e^{\left(2\,u^2\right)}+e^{\left(4\,u^2\right)}},\left[(1,\,0)\right],1\right),\left(\frac{e^{\left(2\,u^2\right)}}{\sqrt{4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}}},\left[(0,\,1)\right],1\right)\right].$$

La curvatura mitjana i de Gauss, `cm=ceba.mean_curvature();`, `cg=ceba.gauss_curvature();`

$$H = \frac{e^{\left(4\,u^2\right)}+2\,e^{\left(2\,u^2\right)}}{2\left(4\,u^2+e^{\left(2\,u^2\right)}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = -\frac{2\left(2u^2 - 1\right)e^{\left(4u^2\right)}}{16u^4 + 8u^2e^{\left(2u^2\right)} + e^{\left(4u^2\right)}}$$

Observem que $K = K(u)$ i només és positiva a la part central (quan $|u| < \sqrt{2}/2$).

Fem el dibuix d'un troç de geodèsica. La corba comença a $(0,0)$ amb direcció $(-1,1)$ amb valor del paràmetre arc de 0 a 3 i fent 100 troços per integrar

```
> g1 = [c[-1] for c in ceba.geodesics_numerical((0,0),(1,-1),(0,3,100))];
> dceba=ceba.plot((-2, 2), (0, 2*pi),mesh=True, color='orange',aspect_ratio=1);
> line3d(g1,color='red',thickness=5)+dceba;
```

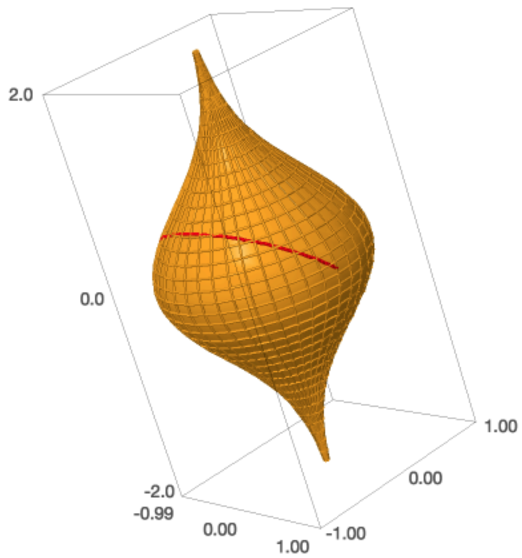

Figura 7.2: Geodèsica