Métodos Numéricos
Práctica 1: Errores

Prof. Susana Serna
Curso 2018-2019

18 de Febrero, 2019

Práctica para trabajar en las sesiones de Seminarios de las semanas del 18/2, 25/2 y 4/3.
Se evaluará el trabajo en clase y un informe breve que incluya los comentarios correspondientes a cada problema. El informe tendrá una extensión máxima de cinco páginas. La entrega se hará antes del 10 de Marzo a las 8:00. Solamente se admitirán prácticas entregadas a traves del CAMPUS VIRTUAL.

Problema 1 Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Queremos evaluar $f(x_0)$ para el valor $x_0 = 1{,}2 \times 10^{-5}$.

(a) Escribir programas en C, uno en **precisión simple** y otro en **precisión doble**, que evalúen la función $f(x)$ para valores de $x \neq 0$ y excluyan explícitamente el valor $x = 0$.
Calcular para cada uno de los programas el valor $x = x_0$.
Comparar y comentar los resultados. Discutir el tipo de error que se comete.
(b) Reescribir la función $f(x)$ utilizando únicamente fórmulas trigonométricas de manera que se reduzca el error que se produce utilizando la expresion (1).

Problema 2 Ecuación cuadrática.

La solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales,

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

se obtiene a partir de la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Obtener numéricamente una solución precisa es mucho mas complicado.

Suponiendo que $a > 0$ y $b^2 > 4ac$,
(a) Demuestrar que si $b^2 >> 4ac$ una de las dos fórmulas para el cálculo de las raices en (2) produce resultados contaminados con error de cancelación.
(b) Proponer un procedimiento para el cálculo de las raices en (2) que evite el error de cancelación.
(c) Construir ejemplos numéricos donde el cálculo de las raices en simple y doble precisión proporcionen diferencias significativas en exactitud usando (2) y el procedimiento que has propuesto.

Problema 3 Cálculo de la varianza muestral. En estadística la varianza muestral de n números se define como

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \qquad \text{donde} \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

Una fórmula alternativa equivalente que conlleva un número de operaciones similar es

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2\Big) \tag{4}$$

Esta fórmula puede sufrir error de cancelación!

(a) Escribe programas en C **en simple y doble precision** que calculen la varianza muestral con ambas fórmulas donde el input sea un vector de números reales y el output sea la varianza muestral.
(b) Considera el vector $x = \{10000, 10001, 10002\}^T$ y calcula la varianza con los programas generados. Analiza las discrepancias.
(c) Construye dos ejemplos de vectores de dimensión grande (al menos 100 componentes) donde estas discrepancias sean más conspicuas.
(d) Discute las diferencias en los resultados.

Problema 4 Suma de una serie. Es conocido que la serie de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales converge y su suma es $\frac{\pi^2}{6}$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}644934066848226... \tag{5}$$

Deseamos calcular aproximadamente la suma S sumando términos (sumas parciales) de la serie y vamos a establecer dos estrategias para programarlas en C en **simple y en doble precisión**.

(a) Escribe programas C que calculen la suma de los términos de la serie S en orden creciente hasta un término máximo (5000, 10000, ...) donde los datos sean el número de términos a sumar.
(b) Escribe programas en C (doble y simple precisión) que sumen términos de la serie en orden decreciente.
(c) Compara los resultados anteriores con el valor exacto y justifica los diferentes resultados obtenidos.
(d) Proporciona una fórmula alternativa que se comporte mejor que (5).

Problema 5 Cálculo del área de un triángulo.

Sean $a \geq b \geq c$ las longitudes de los lados de un triángulo. Si $p = (a + b + c)/2$ (semi-perímetro) entonces el área del triángulo se puede calcular mediante la fórmula de Heron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{6}$$

(a) Prueba que dicha fórmula sufre de error de cancelación cuando $a \approx b + c$.
(b) Construye valores para los que el valor de A sea muy inexacto. Computa el valor de A mediante programas C en simple y doble precisión.
(c) Investiga posibles reformulaciones de (6) que reduzcan significativamente el error de cancelación justificando la mejora.