Seminario de Métodos Numéricos
Práctica individual: Cuadratura Gaussiana

Prof. Susana Serna

Curso 2018-2019

Objetivo del proyecto

Cálculo de integrales de funciones continuas arbitrarias en un intervalo (a, b) mediante fórmulas de Cuadratura Gaussiana.

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Las fórmulas de cuadratura estudiadas hasta el momento (Newton-Cotes, Trapecios, Simpson compuestas, $\cdots$) utilizan puntos equiespaciados para interpolar las funciones que finalmente se integran. La elección de las fórmulas de Cuadratura Gaussiana se basan en la elección apropiada de los nodos de interpolación de manera que se mejora la precisión.

Definición 1 Quadratura Gaussiana

Una fórmula integral se dice de Cuadratura Gaussiana con n nodos si es de la forma

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \tag{1}$$

donde x_i son las raíces de un polinomio de grado n ortogonal respecto de la función peso $\omega(x)$ (no negativo en $[a, b]$) y los a_i se calculan imponiendo que la fórmula ha de ser exacta para $f(x) = x^k$ con $k = 0, \cdots n - 1$.

Definición 2 Polinomios ortogonales

Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios. Decimos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal respecto del peso $\omega(x)$ (no negativo) en el intervalo $[a, b]$ si y solo si

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b \omega(x) P_i(x) P_j(x)\, dx = 0 \qquad\qquad i \neq j$$

Se cumple que $\langle P_k, P_k \rangle > 0$ para cada k

Lema 1 *Para cada n todas las raíces de P_n son reales, simples y pertenecen al intervalo (a, b).*

Teorema 1 Fórmula del error de la Quadratura Gaussiana

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ los ceros simples del polinomio ortogonal ϕ_n (de grado n) respecto del peso $\omega(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces la fórmula de cuadratura (1) es exacta para polinomios de grado menor o igual que $2n - 1$.

Para una funcion $f(x)$ de clase C^{2n} el error de la fórmula (1) es

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} < \phi_n, \phi_n >$$

con $a < \xi < b$.

La *"magia"* en la precisión de las fórmulas de Cuadratura Gaussiana se debe a las propiedades de los polinomios ortogonales.

Familias de polinomios ortogonales: Polinomios de Legendre, Laguerre, Hermite, Chebyshev,... Todos ellos son ortogonales respecto de funciones peso $\omega(x)$ diferentes en sus correspondientes intervalos $[a, b]$.

Definición 3 *Sea $P_n(x)$ la familia de los polinomios de Legendre en el intervalo $[-1, 1]$ definidos por*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Estos se pueden obtener a partir de la fórmula recursiva:

$P_0 = 1; P_1 = x;$

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

$\rightarrow$ Los polinomios de Legendre son ortogonales respecto de la funcion peso $\omega(x) = 1$.

Definición 4 *Sea $T_n(x)$ la familia de los polinomios de Chebyshev en el intervalo $[-1, 1]$ definidos por*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Se pueden obtener a partir de la fórmula recursiva:

$T_0 = 1; T_1 = x;$

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

$\rightarrow$ Los polinomios de Chebyshev son ortogonales respecto de la función peso $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nota:

Detalles de las demostraciones de ortogonalidad, precisión de las fórmulas Gaussianas y ejemplos se pueden encontrar (a partir de la trasparencia 82/117) en los apuntes del Profesor Lluís Alsedà:

http://mat.uab.cat/~alseda/MatDoc/MetNumMat-DifInt.pdf

EJERCICIO

Calcular las integrales

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx; \qquad \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx;$$

mediante fórmulas de cuadratura Gauss-Legendre y Gauss-Chebyshev para n=2,4,6,8.

- Discutir las diferencias en las aproximaciones con los diferentes métodos.
- Comentar las diferencias entre utilizar las fórmulas de Cuadratura Gaussiana y la regla de los trapecios compuesta.

PROCEDIMIENTO GENERAL

1. Escribir una rutina que, mediante el método de Newton, permita calcular las n raíces de los polinomios de Legendre y de Chebyshev de grado n.

   Para ello primero localizar los intervalos de todos los cambios de signos mediante Sturm o el método de bisección.

   En el metodo de Newton tomar como pivote cada punto medio de los intervalos donde se localizan las raíces.

   Realizar tantas iteraciones de Newton como sean necesarias para que la tolerancia sea 10^{-6}.

   Nota:

   Utilizar la fórmula de recurrencia: $(1-x^2)P_n'(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$

   Comprobar que las raíces son correctas comparando con las que figuran en los apuntes del Profesor Alsedá (trasparencias 107/117 y siguientes).

2. Determinar (escrito, no resolver) el sistema lineal que han de cumplir los coeficientes a_i en (1) para poder resolver la integral mediante una fórmula de cuadratura Gaussiana.

3. Calcular los coeficientes a_i de Legendre mediante la fórmula

$$a_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$$

   donde x_i son las raíces del polinomio de Legendre de grado n.

4. Calcular los coeficientes a_i de Chebyshev mediante la fórmula

$$a_i = \frac{\pi}{n}$$

5. Escribir sendos programas que permitan calcular las integrales de las funciones propuestas mediante las fórmulas de cuadratura Gaussiana utilizando las rutinas anteriores.

EVALUACIÓN

- Esta práctica se llevará a cabo de forma **individual** durante las sesiones de seminario de las semanas del 6, 13 y 20 de Mayo. La **fecha límite** de entrega es la semana del 27 de Mayo en la sesión que le corresponda a cada estudiante. La entrega se hara a través del Campus Virtual. La **extensión máxima** de la memoria es de **cuatro páginas**.

- La práctica se evaluará en **tres partes**. Las dos primeras serán durante las sesiones de seminario de las semanas del 6 y 13 de Mayo. En estas se evaluará la comprensión del problema y el desarrollo de los códigos.

  La última sesión de evaluación se llevará a cabo una vez entregada la memoria y los códigos y consistirá en una entrevista sobre toda la práctica. Las entrevistas finales podrán hacerse a partir del 20 de Mayo hasta el Viernes 31 de Mayo a las 16:00.

- Cada estudiante debe asistir como mínimo a dos sesiones de su grupo.

EJERCICIOS OPCIONALES

- Escribir una rutina que, dado un número n, resuelva el sistema lineal que proporciona los coeficientes a_i a partir de las raíces de los polinomios ortogonales.

- Extender las fórmulas de Cuadratura Gaussiana estudiadas a un intervalo $[a, b]$.

- Aplica una fórmula de integración Gaussiana al cálculo de la longitud de un arco de curva.

  Considera un arco de una curva en R^2 representado mediante una función explicita $y = y(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ donde el punto $M = (a, y(a))$ es el origen del arco y $N = (b, y(b))$ el extremo. La longitud del arco se calcula mediante la integral

  $$L(y, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

  Caso a resolver: Considerar la elipse que tiene como ecuación

  $$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1$$

  Calcular la longitud del arco de la elipse en el intervalo $[-1, 1]$ (en el plano superior) con 6 cifras decimales correctas.