Práctica 4, **Cuadratura Gaussiana (Trabajo final)** Fecha de Reporte: **27/05/2019**
Métodos numéricos Alumno: *Graells Ricardo, Marc*
2n curso del grado en Matemáticas (`NIU:` *1388471*)

0. Resumen

En el presente documento se comentan las soluciones al ejercicio final propuestos en las sesiones de *Seminarios de Métodos Numéricos* de los días 6, 13 y 20 de Mayo. Los ficheros `.c` con las implementaciones del código en lenguaje C se adjuntan tal como se detalla en documento del mismo subdirectorio `README.txt`.[1]

1. Cálculos previos

Consideremos las siguientes manipulaciones algebraicas elementales y definiciones de las integrales dadas. Para la primera integral:

$$F(x)\Big|_{-1}^{1} := \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\cdot 1 dx & \Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) := e^{-x^2} \\ \texttt{(C.Gauss-Legendre)} \end{pmatrix} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(e^{-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & \Rightarrow \begin{pmatrix} f_2(x) := e^{-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} \\ \texttt{(C.Gauss-Chebyshev)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Y para la segunda:

$$G(x)\Big|_{0}^{1} := \int_{0}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx \overset{g(x)=g(-x)}{=} \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}\cdot 1\cdot dx & \Rightarrow \begin{pmatrix} g_1(x) := \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} \\ \texttt{(C.Gauss-Legendre)} \end{pmatrix} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\cdot\sqrt[6]{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & \Rightarrow \begin{pmatrix} g_2(x) := e^{-x^2}\cdot\sqrt[6]{1-x^2} \\ \texttt{(C.Gauss-Chebyshev)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

[1]En el apartado, no numerado, Anexo se responden a algunos de los ejercicios complementarios.

2. Procedimiento general

Tal como se detalla en el primer punto del *procedimiento general*, en este caso mediante una adaptación del *método de la bisección*, se hallan todos los intervalos en los que hay una única raíz del polinomio ortogonal dado. Esto lo podemos hacer ya que por **Lema 1** sabemos que todas las raíces de estos polinomios son reales y simples, por tanto esperamos n intervalos si estos tienen una longitud *suficientemente* pequeña.

Para lograr esto, con una filosofía heurística, dividimos el intervalo $[-1,1]$ en `TOL` intervalos de longitud $\frac{2}{\texttt{TOL}}$ y comprobamos si hay cambio de signo en cada uno de ellos (cosa que implicaría la presencia de al menos una raíz, por Teorema de Bolzano).

Para asegurar que en cada intervalo solo cojeemos una única raíz [2] se utilizan dos contadores, uno para el número de intervalos con cambio de signo y otro para el número de raíces halladas [3]

El valor `TOL` puede modificar-se, por ejemplo `#define TOL 10000` en vez de `#define TOL 1000`, aunque para polinomios de grado ≤ 20 no es necesario. En caso de que en alguno de los intervalos hubiera más de una raíz, mediante la presencia de los contadores anteriormente mencionados, el programa imprimiría un mensaje de error que solventaríamos modificando el paramento `TOL`.

Una vez encontrados estos intervalos eligiendo el punto medio y aplicamos el proceso iterativo de Newton-Raphson de convergencia cuadrática para raíces simples conseguiriamos las raíces con tolerancia deseada o superior, sin necesidad de aplicar Sturm y asegurando que hemos encontrado todas las raíces del polinomio con la tolerancia deseada.

El sistema lineal que han de cumplir los coeficientes a_i puede plantearse

3. Apartado a)

Resultados para $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$	`(C.Gauss-Legendre)`	`(C.Gauss-Chebyshev)`
`n=2`	**1.4**33062621147579	**1**.347372359753599
`n=4`	**1.493**334622449539	**1**.509544014901066
`n=6`	**1.49364**7614150605	**1**.501716307252864
`n=8`	**1.49364826**4899014	**1.49**8269900093957
`n=10`	**1.493648265624**351	**1.49**6630466539133
`n=12`	**1.493648265624854**	**1.49**5728452515196

Tabla 1: Resultados obtenidos mediante `pr3_abc_d.c`

[2]Equivalente a que la longitud del intervalo sea *suficientemente* pequeña

[3]Ya que estas podrían coincidir en uno de los extremos de uno de los intervalos.

Resultados para $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$	(C.Gauss-Legendre)	(C.Gauss-Chebyshev)
n=2	**0.8**202235964492217	**0.8**487913990500435
n=4	**0.8**653882550375894	**0.**9035877798072207
n=6	**0.8**745199676806141	**0.8**982364172452582
n=8	**0.8**789653183338564	**0.8**955429715534456
n=10	**0.88**1540069130857	**0.8**940299048220692
n=12	**0.88**31932589792649	**0.8**930783042638903

Tabla 2: Resultados obtenidos mediante `pr3_abc_d.c`

4. Ejercicios opcionales

4.1. Extensión de las fórmulas de cuadratura Gaussiana a un intervalo $[a,b]$

Consideremos el cambio de variable de

$$\begin{cases} x = \dfrac{(b-a)t+(b-a)}{2} \\ dx = \dfrac{b-a}{2}dt \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \dfrac{(b-a)(1)+(b+a)}{2} = \dfrac{b-a+b+a}{2} = b \\ \dfrac{(b-a)(-1)+(b+a)}{2} = \dfrac{-b+a+b+a}{2} = a \end{cases}$$

Aplicando esto a la fórmula de cuadratura:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 w\left(\frac{(b-a)t+(b-a)}{2}\right) f\left(\frac{(b-a)t+(b-a)}{2}\right)dt$$

4.2. Calculo de la longitud del arco de una elipse

Partiendo de la siguiente ecuación de una elipse, calcularemos la longitud del arco de esta en el intervalo $[-1,1]$ del plano superior, mediante cuadratura de Gauss-Legendre. Primero expresamos y en función de x y calculamos $y'(x)$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y(x)_+ = +\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ y'(x)_+ = \dfrac{-x}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \end{cases}$$

Seguidamente consideramos la integral del calculo de longitud de un arco

$$L(y(x),a,b) = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}dx$$

substituyendo

$$L(y(x),-1,1) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+y'(x)^2}dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{16(4-x^2)}}dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{64-15x^2}{64-16x^2}}\,dx$$