Práctica 3, Interpolación (Parte 1) Fecha de Reporte: **05/05/2019**
Métodos numéricos Alumno: *Graells Ricardo, Marc*
2n curso del grado en Matemáticas (`NIU:` *1388471*)

0. Resumen

En el presente documento se comentan las soluciones a los ejercicios propuestos en las sesiones de *Seminarios de Métodos Numéricos* de los días 1, 24 y 29 de Abril. Los ficheros `.c` con las implementaciones del código en lenguaje C se adjuntan tal como se detalla en documento del mismo subdirectorio `README.txt`.[1]

1. Primer problema

1.1. Apartado a y b

Consideramos la función definida a trozos del enunciado:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \le x \le -0.7\,, \\ 1 & \text{si} \quad -0.7 < x \le 0.7\,, \\ -1 & \text{si} \quad 0.7 \le x \le 1. \end{cases}$$

Si observamos la Figura 1 podemos ver una sobre-posición de los valores de la función con las diferentes aproximaciones mediante polinomios interpoladores de Lagrange para 4+1,8+1,16+1 y 32+1 nodos.

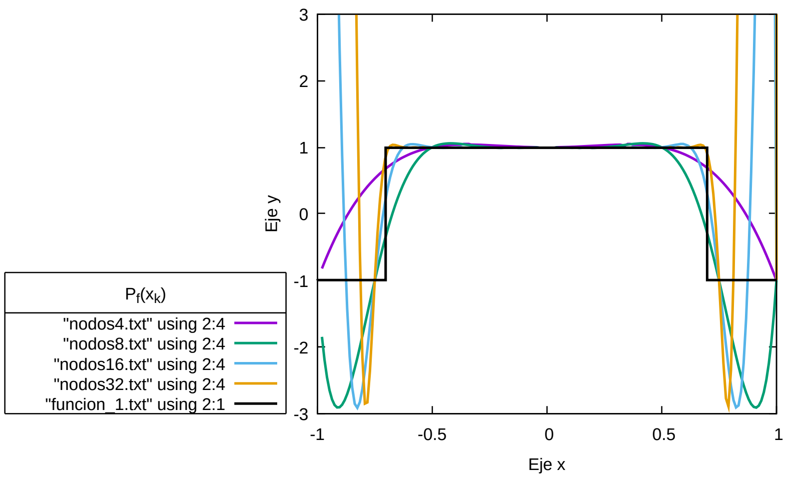

Figura 1: Gráfico de $P_f(x_k)$ como función de $x_k = -0989 + k \cdot 0.011$ para $k = 0, \cdots, 180$, generado con *gnuplot*.

[1] Esta práctica está dividida en dos partes, la primera y presente, trata sobre interpolación numérica; la segunda parte esta dedicada a integración numérica.

La Tabla 1 da valores a los errores máximos de $|f(x_k) - P_f(x_k)|$ para una *malla de puntos* x_k, $k = 0, \cdots, 180$. Donde P_f denota el polinomio interpolador de Lagrange de grado enésimo.

número de nodos	`n=4+1`	`n=8+1`	`n=16+1`	`n=32+1`
$\text{máx}\|f(x_k) - P_f(x_k)\|$	1.67816	1.90891	12.4074	1512.61

Tabla 1: Resultados obtenidos para $\text{máx}|f(x_k) - P_f(x_k)|$, donde $x_k = -0989 + k \cdot 0.011$, para $k = 0, \cdots, 180$ mediante `pr1_ab_d.c`

Elaborando un gráfico para $|f(x_k) - P_f(x_k)|$ como función de x_k para $k = 0, \cdots, 180$, obtenemos Figura 2. Observamos que al aumentar el número de nodos, los errores en el centro del intervalo de interpolación mejoran en $[-0.5, 0.5]$. En cambio, los extremos, al aumentar el número de nodos, crecen de forma sustancial. Tanto es así, que el caso `n=64+1`, no da valores coherentes. En los casos `n=16+1` `n=32+1` ya obtenemos valores fuera de la gráfica (en los extremos). [2]

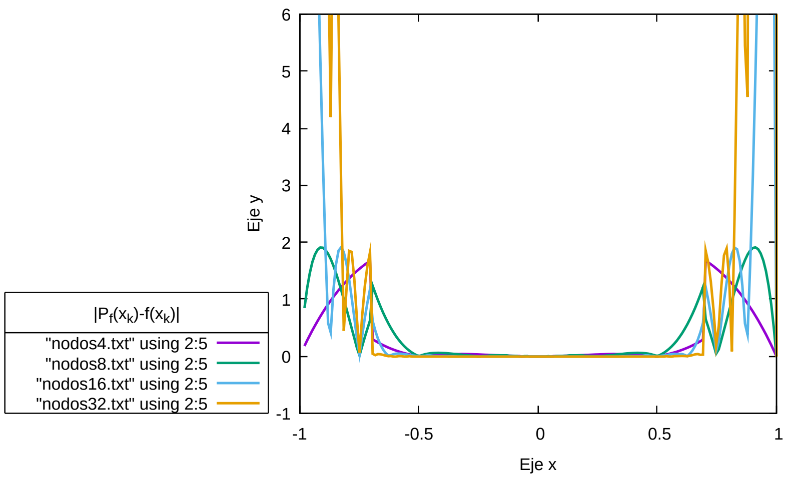

Figura 2: Gráfico de $|f(x_k) - P_f(x_k)|$ como función de $x_k = -0989 + k \cdot 0.011$ para $k = 0, \cdots, 180$, generado con *gnuplot*.

El motivo principal de este hecho es que en contra de lo que nos podría dictar la *intuición*, augmentar el número de nodos (equivalentemente aumentar el grado del polinomio interpolador) no tiene porque mejorar arbitrariamente la aproximación de la función. Es decir, $P_f(x) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$ en general.

El comportamiento, observado de forma particular en este problema, es en esencia, que en augmentar el grado de un polinomio interpolador, aún en mejorar las aproximaciones en el centro del intervalo, los valores de los extremos de este *empeoraron* drásticamente; equivalentemente aumenta el error en los extremos del polinomio que aproxima la función. Este hecho es típico en general para polinomios de grado *elevado* con nodos equidistantes.

[2]Observamos que la linea dibujada en el caso `n=32+1` es aparentemente horizontal en $[-0.5, 0.5]$

Este comportamiento de los polinomios de Lagrange está extensamente documentado y se conoce como **fenómeno de Runge**. [3] Algunas de las soluciones a esta problemática pueden ser usar polinomios **spline** o elegir **nodos de Chebyshev** en vez de equidistantes.

2. Segundo problema

2.1. Apartado a y b

Procediendo de forma análoga al Problema 1, con la misma *malla de puntos* de abscisa con x_k. En la Tabla 2 mostramos los valores máximos del valor absoluto de la diferencia entre la función [4] que queremos aproximar y el polinomio interpolador usando *nodos equidistantes* y nodos de Chebyshev para $n = 4+1, 8+1, 16+1, 32+1$. La Figura 3 y Figura 4 son análogas a la Figura 2 del Problema 1. Observamos pues que los **nodos de Chebyshev** solucionan la problemática del **fenómeno de Runge** que vuelve a repetirse para el caso de **nodos equidistantes**. La mejora que proporcionan los nodos de Chebyshev se basa en minimizar el valor del **polinomio de soporte** que interviene en la formula del error del polinomio interpolador. A la práctica esto se consigue haciendo una distribución de nodos concentrada en los extremos de la función a interpolar, que es precisamente donde se da el fenómeno de Runge para nodos equidistantes.

número de nodos	`n=4+1`	`n=8+1`	`n=16+1`	`n=32+1`
$\max\lvert f(x_k) - P_f(x_k)\rvert$ `con nodos equidistantes`	0.43833	1.04431	14.3939	4905.45
$\max\lvert f(x_k) - P_f(x_k)\rvert$ `con nodos de Chebyshev`	0.401891	0.170717	0.0325382	0.00139354

Tabla 2: Resultados obtenidos para $\max\lvert f(x_k) - P_f(x_k)\rvert$ para los dos tipos de nodos,mediante `pr2_ab_d.c`

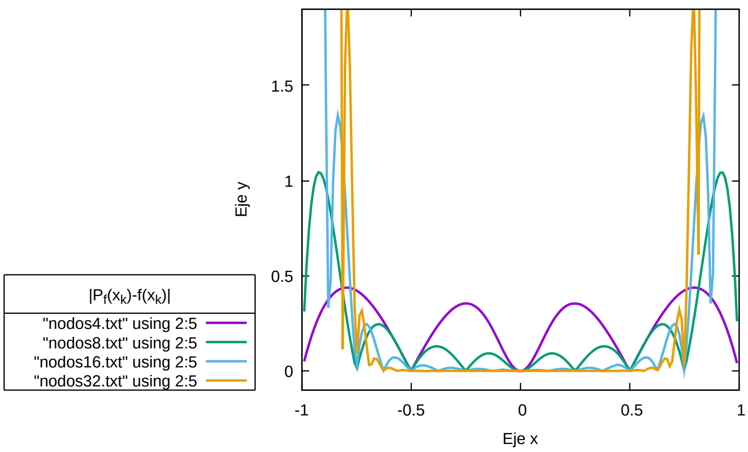

Figura 3: Gráfico de $\lvert f(x_k) - P_f(x_k)\rvert$ con nodos equidistantes, generado con *gnuplot*.

[3] Véase `https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon`

[4] En este problema la función a interpolar es $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

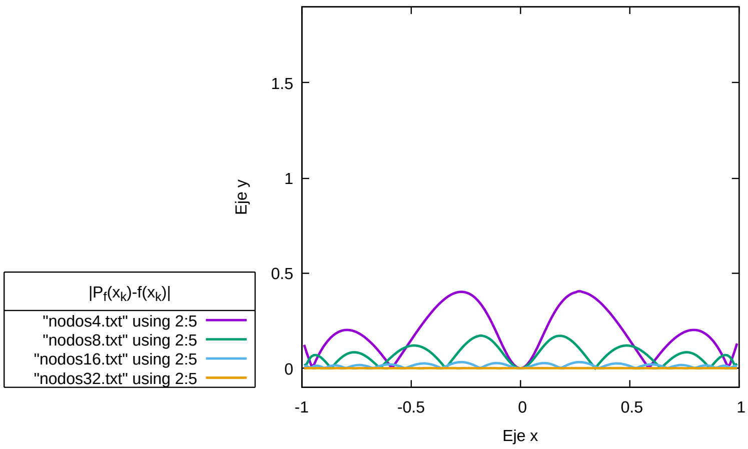

Figura 4: Gráfico de $|f(x_k) - P_f(x_k)|$ con nodos de Chebyshev, generado con *gnuplot*.

3. Tercer ejercicio

Mediante interpolación inversa de la función de Bessel de primer orden $J_0(x)$, obtenemos los siguientes valores para x^* tal que $J_0(x^*) = 0$ recogidos en Tabla 3. Sabiendo que $J_0(x)$ es

Polinomio de grado m	m=1	m=3	m=5
(a) Para nodos positivos más proximos a cero	x*= 2.4047286138828 $w(J_0(x^*)) = 1.3927 \times 10^{-4}$	x*= 2.4048227181139 $w(J_0(x^*)) = 2.5608 \times 10^{-6}$	x*= 2.404825294785 $w(J_0(x^*)) = 1.6158 \times 10^{-7}$
(b) Para nodos negativos más proximos a cero	x*= 2.4000772419471 $w(J_0(x^*)) = 4.6837 \times 10^{-3}$	x*= 2.4041493753535 $w(J_0(x^*)) = 1.2345 \times 10^{-4}$	x*= 2.4042167348682 $w(J_0(x^*)) = 7.2015 \times 10^{-6}$
(c) Para nodos simétricos más proximos a cero	x*= 2.4049275130027 $w(J_0(x^*)) = 1.2133 \times 10^{-4}$	x*= 2.4048240219111 $w(J_0(x^*)) = 6.5234 \times 10^{-7}$	x*=2.4048256530437 $w(J_0(x^*)) = 1.0255 \times 10^{-8}$

Tabla 3: Resultados obtenidos mediante `pr3_abc_d.c`

estrictamente monótona y derivable, recordando además, la cota del Teorema de Error de interpolación de Lagrange tenemos que:

$$\left|J_0^{-1}(0) - P_m(0)\right| \leq \frac{\max\limits_{y\in I}\left|f^{(m+1)}\left(\xi(y)\right)\right|}{(m+1)!}\left|\omega(0)\right| = \frac{\max\limits_{y\in I}\left|f^{(m+1)}\left(\xi(y)\right)\right|}{(m+1)!}\left|\prod_{i=0}^{m} y_i\right|$$

Por tanto para y fijado y m fijado el error puede acotarse por el **polinomio de soporte** $\omega_m(y) = (y-y_0)\cdots(y-y_m)$. Observando ahora los valores que toma el polinomio de soporte recogidos en Tabla 3 son siempre mínimos en el caso **(c)** para los diferentes grados del polinomio interpolador. Por tanto esta es la mejor aproximación, es decir el caso **(c)**. De hecho, para `m=5` el resultado interpolando con los valores positivos más cercanos a cero: `x*=2.404825653043717`, tiene siete cifras correctas.