

Homework 0

Devoir 0

Marc-Antoine Provost

- This homework must be done and submitted to Gradescope individually (you will not be collaborating with other students).

Ce devoir doit être fait et envoyé sur Gradescope individuellement (pas de collaboration avec d'autres étudiants)

- The theoretical part should be submitted as a pdf file. It should preferably be done in L^AT_EX by copying this project (**Menu -> Copy Project**) and working off of this exact file. Still all **legible** solutions submitted as a pdf will be accepted. We reserve the right to penalize solutions that are very hard to read, even if they are correct.

*La partie théorique doit être envoyée au format pdf. Il est recommandé de l'écrire en L^AT_EX, en clonant le répertoire (**Menu -> Copy Project**) et en travaillant directement sur ce fichier. Toutefois, toute solution **lisible** au format pdf sera acceptée. Les solutions difficiles à lire pourront être pénalisées, même si elles sont justes*

- The practical part should be coded in python (you can use the numpy and matplotlib libraries) and all code will be submitted as a python file to Gradescope. To enable automated code grading you should work off of the template file given in this homework folder. Do not modify the name of the file or any of the function signatures of the template file or the code grading will not work for you. You may, of course, add new functions and any regular python imports.

La partie pratique doit être codée en python (avec les librairies numpy et matplotlib), et envoyée sur Gradescope sous fichier python. Pour permettre l'évaluation automatique, vous devez travailler directement sur le modèle donné dans le répertoire de ce devoir. Ne modifiez pas le nom du fichier ou aucune des fonctions signatures, sinon l'évaluation automatique ne fonctionnera pas. Vous pouvez bien sûr ajouter de nouvelles fonctions et importations python

- Any graphing, charts, or practical report parts should be submitted in a pdf to Gradescope. For the report it is recommended to use a Jupyter notebook, writing math with MathJax and export as pdf. You may alternatively write your report in L^AT_EX; LyX; Word. In any case, you should export your report to a pdf file that you will submit. You are of course encouraged to draw inspiration from what was done in lab sessions.

Les figures, courbes et parties pratiques du rapport doivent être envoyées au format pdf sur Gradescope. Pour le rapport il est recommandé d'utiliser un Jupyter notebook, en écrivant les formules mathématiques avec MathJax et en exportant vers pdf. Vous pouvez aussi écrire votre rapport en L^AT_EX; LyX; Word. Dans tout les cas, exportez votre rapport vers un fichier pdf que vous enverrez. Vous êtes bien sur encouragés à vous inspirer de ce qui a été fait en TP.

- NOTE: Many of the math questions can be answered by using online resources and automatic math solvers. This is perfectly fine if it helps you practice, but keep in mind that during the in-class exams you will not have access to those resources and automatic solvers.

NOTE : Beaucoup des questions mathématiques peuvent être résolues en utilisant des ressources en ligne ou des solveurs automatiques. Ce n'est pas un problème si cela vous aide à progresser, mais gardez à l'esprit que pendant les examens en classe vous n'aurez pas accès à ces ressources et solveurs.

1 Theoretical Part (6 pts) *Partie Théorique*

This part of the homework will not be graded for correctness. You will still need to provide an answer and properly annotate it on Gradescope. You get 1 point for each answer that you properly annotate, even if the answer itself is incorrect. We will provide you with solutions which you can use to check your answers. The goal is for you to i) practice the process of annotating answers to questions on Gradescope and, ii) get an idea of what kind of basic math we will need during the class. If you are having trouble answering these questions you might be missing some important prerequisite knowledge for this class.

Cette partie du devoir ne sera pas notée. Vous devez cependant fournir une réponse et l'annoter correctement sur Gradescope. Vous recevez 1 point pour chaque réponse que vous annotez correctement, même si la réponse n'est pas

juste. Nous vous fournirons des solutions que pourrez utiliser pour vérifier vos réponses. Le but est que vous puissiez : i) vous familiariser avec le processus d'annotation de réponses sur Gradescope, et ii) obtenir une idée du genre de bases mathématiques nécessaires pour ce cours. Si vous avez des difficultés à répondre à ces questions, il vous manque peut être des pré-requis important pour suivre ce cours.

1. **Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts**

Question. Let X be a random variable representing the outcome of a single roll of a 6-sided dice. Show the steps for the calculation of i) the expectation of X and ii) the variance of X .

Soit X une variable aléatoire représentant le résultat d'un lancer de dé à 6 faces. Montrez les étapes pour le calcul de i) l'espérance de X et ii) la variance de X .

Answer 1.i)

The expectation of X being

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^6 x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

giving us the long-run average value of repetitions of rolling the die.

Answer 1.ii)

The variance of X being

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + \dots + (6 - 3.5)^2}{6} \\ &\approx 2.92 \end{aligned}$$

Giving us an average of how far the value of each roll of die is from its mean.

2. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Let $u, v \in \mathbb{R}^d$ be two vectors and let $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ be a matrix. Give the formulas for the euclidean norm of u , for the euclidean inner product (aka dot product) between u and v , and for the matrix-vector product Au .

Soit $u, v \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs et soit $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ une matrice. Donnez la formule pour la norme euclidienne de u , pour le produit scalaire euclidien (dot product) de u et v , et pour le produit matrice-vecteur Au

Answer 2)

Euclidean norm of u

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Dot product defined as

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \sum_{n=1}^d u_n v_n \\ &= u_1 v_1 + \dots + u_d v_d \end{aligned}$$

Matrix-vector product Au defined as

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \dots + a_{1d}u_d \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + \dots + a_{2d}u_d \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + a_{n3}u_3 + \dots + a_{nd}u_d \end{bmatrix}$$

3. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Consider the two algorithms below. What do they compute and which algorithm is faster?

Observez les deux algorithmes ci-dessous. Que calculent-ils et lequel est le plus rapide ?

```
ALGO1(n)
result = 0
for i = 1...n
    result = result + i
return result
```

```
ALGO2(n)
return (n + 1) * n/2
```

Answer 3)

ALGO1 and ALGO2 sum all the non-zero natural numbers up to n.
ALGO2 is the fastest one.

4. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Give the step-by-step derivation of the following derivatives:

Donnez les étapes de calculs des dérivées suivantes:

i) $\frac{df}{dx} = ?$, where $f(x, \beta) = x^2 \exp(-\beta x)$

ii) $\frac{df}{d\beta} = ?$, where $f(x, \beta) = x \exp(-\beta x)$

iii) $\frac{df}{dx} = ?$, where $f(x) = \sin(\exp(x^2))$

Answer 4i)

First, you need to treat β as a constant and apply the product rule where $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

In our case, $f(x) = x^2$ and $g(x) = \exp(-\beta x)$, so the derivative of $f'(x) = 2x$ and with the chain rule $(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x))$, $g'(x) = -\beta \exp(-\beta x)$.

After summarizing, you end up with $\frac{df}{dx} = 2 \exp(-\beta x)x - \exp(-\beta x)x^2 \beta$

Answer 4ii)

With x being a constant and the chain rule you end up with $\frac{df}{d\beta} = -\exp(-\beta x)x^2$

Answer 4iii)

With β being a constant, you apply the chain rule and end up with $\frac{df}{dx} = \cos(\exp(x^2)) \exp(x^2) 2x$

5. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Let $X \sim N(\mu, 1)$, that is the random variable X is distributed according to a Gaussian with mean μ and standard deviation 1. Show how you can calculate the second moment of X , given by $\mathbb{E}[X^2]$.

Soit $X \sim N(\mu, 1)$, c'est à dire que X est une variable aléatoire suivant une distribution gaussienne de moyenne μ et d'écart-type 1. Montrez comment calculer le second moment de X , donné par $\mathbb{E}[X^2]$.

Answer 5

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= 1 + \mu^2\end{aligned}$$

2 Practical Part (7 pts) *Partie pratique*

You should work off of the template file `solution.py` in the project and fill in the basic numpy functions using numpy and python methods

Vous devez travailler sur le modèle `solution.py` du répertoire et compléter les fonctions basiques suivantes en utilisant numpy et python

1. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Create a numpy array from a python list
Crée un tableau numpy à partir d'une liste python

2. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Create a numpy array of length 1 from a python number
Crée un tableau numpy de taille 1 à partir d'un nombre python

3. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Sum two arrays elementwise
Additionne deux tableaux élément par élément

4. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Sum an array and a number
Additionne un tableau et un nombre

5. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Mutliple two arrays elementwise

Multiplie deux tableaux élément par élément

6. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Dot product of two arrays

Calcule le produit scalaire euclidien (dot product) de deux tableaux

7. Undergraduates 1 pts Graduates 1 pts

Question. Dot product of an array (1D) and a matrix (2D array)

Calcule le produit scalaire euclidien (dot product) d'un tableau (1D) et d'une matrice (tableau 2D)