

ANNEXE

---

# CINÉMATIQUE DU MEGABOT

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de la problématique</b>	<b>1</b>
1.1	Modèle Cinématique Direct . . . . .	1
1.2	Modèle Cinématique Inverse . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Elaboration de la Cinématique Directe</b>	<b>4</b>
2.1	Cinématique directe dans le plan de la patte . . . . .	4
2.2	Cinématique directe dans l'espace . . . . .	10
2.3	Généralisation . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Centre de gravité et optimisation quadratique</b>	<b>16</b>
3.1	Calcul à partir de $\delta V$ . . . . .	17
3.2	Intégration à $\delta X$ . . . . .	17

# 1 Présentation de la problématique

Etablir le modèle cinématique direct d'un robot consiste à élaborer un ensemble de méthodes de calcul permettant de déterminer la position du robot à partir de valeurs articulaires d'entrée. Dans notre cas, il s'agit de créer une ou un ensemble de fonctions prenant en entrée des élongations de vérin valides et retournant la position du Megabot. Ce problème est solvable de manière analytique assez simplement.

Etablir le modèle cinématique inverse d'un robot en revanche consiste à faire le travail inverse : on veut obtenir les valeurs articulaires à partir d'une position d'entrée. Ce sens est bien plus complexe que le précédent et ne peut pas être résolu de manière analytique dans bien des cas, dont celui du Megabot.

## 1.1 Modèle Cinématique Direct

Une solution classique à ce problème est d'avoir recours à la matrice jacobienne associée au modèle cinématique direct : il s'agit de la matrice des dérivées partielles de notre cinématique directe. En effet, elle permet d'approximer linéairement dans le cas de petites variations la relation entre nos valeurs articulaires et nos valeurs de position dans le sens direct (cf. démo 1). Une fois cette jacobienne déterminée, il devient possible de déterminer le modèle cinématique inverse en résolvant un problème d'optimisation quadratique (cf. démo 2).

### Démonstration 1 :

Nous allons démontrer que la jacobienne du modèle cinématique direct permet une approximation linéaire du sens direct. Supposons que nous disposions d'une expression dérivable de notre cinématique directe. Nous nous plaçons dans la cas d'un problème plan dans un premier temps :

$$\begin{cases} dir_x(v_1, v_2) &= x \\ dir_y(v_1, v_2) &= y \end{cases}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} x = \bar{x} + \delta x \text{ avec } \bar{x} \text{ le point actuel et } \delta x \text{ l'écart à la position souhaitée} \\ y = \bar{y} + \delta y \text{ avec } \bar{y} \text{ le point actuel et } \delta y \text{ l'écart à la position souhaitée} \\ v_1 = \bar{v}_1 + \delta v_1 \text{ avec } \bar{v}_1 \text{ l'élongation actuelle et } \delta v_1 \text{ l'écart à l'élongation souhaitée} \\ v_2 = \bar{v}_2 + \delta v_2 \text{ avec } \bar{v}_2 \text{ l'élongation actuelle et } \delta v_2 \text{ l'écart à l'élongation souhaitée} \end{cases}$$

Nous formalisons les relations reliant nos 4 variables  $x$ ,  $y$ ,  $v_1$  et  $v_2$  sous la forme de 2 fonctions  $g$  et  $h$ , dont nous explicitons le développement de Taylor :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x - \text{dir}_x(v_1, v_2) = g(x, y, v_1, v_2) = \underbrace{g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)}_{=0} + \nabla_{x,y,v_1,v_2} g|_{var=\bar{var}} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} + o(||.||) \\ 0 = y - \text{dir}_y(v_1, v_2) = h(x, y, v_1, v_2) = \underbrace{h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}_1, \bar{v}_2)}_{=0} + \nabla_{x,y,v_1,v_2} h|_{var=\bar{var}} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} + o(||.||) \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{x,y,v_1,v_2} g = \begin{bmatrix} \partial_x g & \partial_y g & \partial_{v_1} g & \partial_{v_2} g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\partial_1 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & -\partial_2 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \end{bmatrix} \\ \nabla_{x,y,v_1,v_2} h = \begin{bmatrix} \partial_x h & \partial_y h & \partial_{v_1} h & \partial_{v_2} h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\partial_1 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & -\partial_2 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le système précédent nous fournit la relation matricielle suivante :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\partial_1 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & -\partial_2 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \\ 0 & 1 & -\partial_1 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & -\partial_2 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Id \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \partial_1 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & \partial_2 \text{dir}_x(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \\ \partial_1 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) & \partial_2 \text{dir}_y(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \end{bmatrix} = J$$

On remarque que  $B$  est la jacobienne du modèle direct que nous nommerons  $J$  pour la suite des calculs. La relation précédente aboutit bien à ce que nous voulions démontrer :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix}}$$

## 1.2 Modèle Cinématique Inverse

Une fois la jacobienne associée au modèle cinématique direct déterminée, nous pouvons déterminer le modèle cinématique inverse. Pour cela, nous utilisons un solveur QP (*Quadratic Programming*) afin de résoudre le problème d'optimisation quadratique suivant permettant de déterminer les variations d'élongation de vérin en fonction d'une entrée de variations de position en minimisant l'erreur quadratique de position :

$$\begin{aligned} & \underset{\delta V}{\text{minimize}} && \frac{1}{2} \delta V^T (J^T J) \delta V - (J \delta X)^T \delta V \\ & \text{subject to} && G \delta V \leq h \\ & && A \delta V = b \\ & && lb \leq \delta V \leq ub \end{aligned}$$

Ce problème, où  $\delta V$  est le vecteur des variations des élongations des vérins à déterminer,  $J$  la jacobienne de la cinématique directe et  $\delta X$  le vecteur des variations de position, minimise effectivement l'erreur quadratique sur  $\delta X$  tout en permettant de contraindre  $\delta V$  avec les variables  $G$ ,  $h$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $lb$  et  $ub$  (cf. démo 2).

### Démonstration 2 :

On cherche à minimiser l'erreur quadratique de position. Notons :

$$\begin{aligned} \overline{X_k} & : \text{position objectif à l'instant } k \\ X_k & : \text{position réelle à l'instant } k \\ \overline{\delta X_k} = \overline{X_{k+1}} - X_k & : \text{variation de la position prévue à l'instant } k \\ \delta X_k = X_{k+1} - X_k & : \text{variation de la position réelle à l'instant } k \\ \delta V_k & : \text{variation de l'élongation des vérins correspondant à } \delta X_k \end{aligned}$$

L'erreur quadratique de position vaut alors :

$$\begin{aligned}
 ||\overline{X_{k+1}} - X_{k+1}||^2 &= ||\overline{X_{k+1}} - X_k - \delta X_k||^2 \\
 &= ||\overline{X_{k+1}} - X_k - J\delta V_k||^2 \\
 &= CST - 2\left(\overline{\delta X_k}^T J\delta V_k\right) - \delta V_k^T J^T J\delta V_k
 \end{aligned}$$

Minimiser l'erreur quadratique revient alors effectivement à minimiser

$$\boxed{\frac{1}{2}\delta V_k^T (J^T J)\delta V_k - (\overline{\delta X_k})^T J\delta V_k}$$

## 2 Elaboration de la Cinématique Directe

Nous allons a présent élaborer la matrice jacobienne associée à la cinématique directe du Megabot. Nous l'élaborerons tout d'abord relativement à une patte dans son plan avant de la généraliser à l'ensemble des pattes dans le référentiel monde.

### 2.1 Cinématique directe dans le plan de la patte

Il est nécessaire de formaliser notre modèle cinématique direct. Pour cela, nous allons calculer successivement les écarts de position des points  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  et  $J$  représentés sur la Figure 1 en fonction des variations d'élongation  $\delta v_1$  et  $\delta v_2$  des vérins.

Pour 2 points  $A$  et  $B$  d'éloignement constant, nous noterons la distance les séparant  $d_{AB}$ . Le graphe des dépendances des articulations de la patte est représenté à la Figure 2.

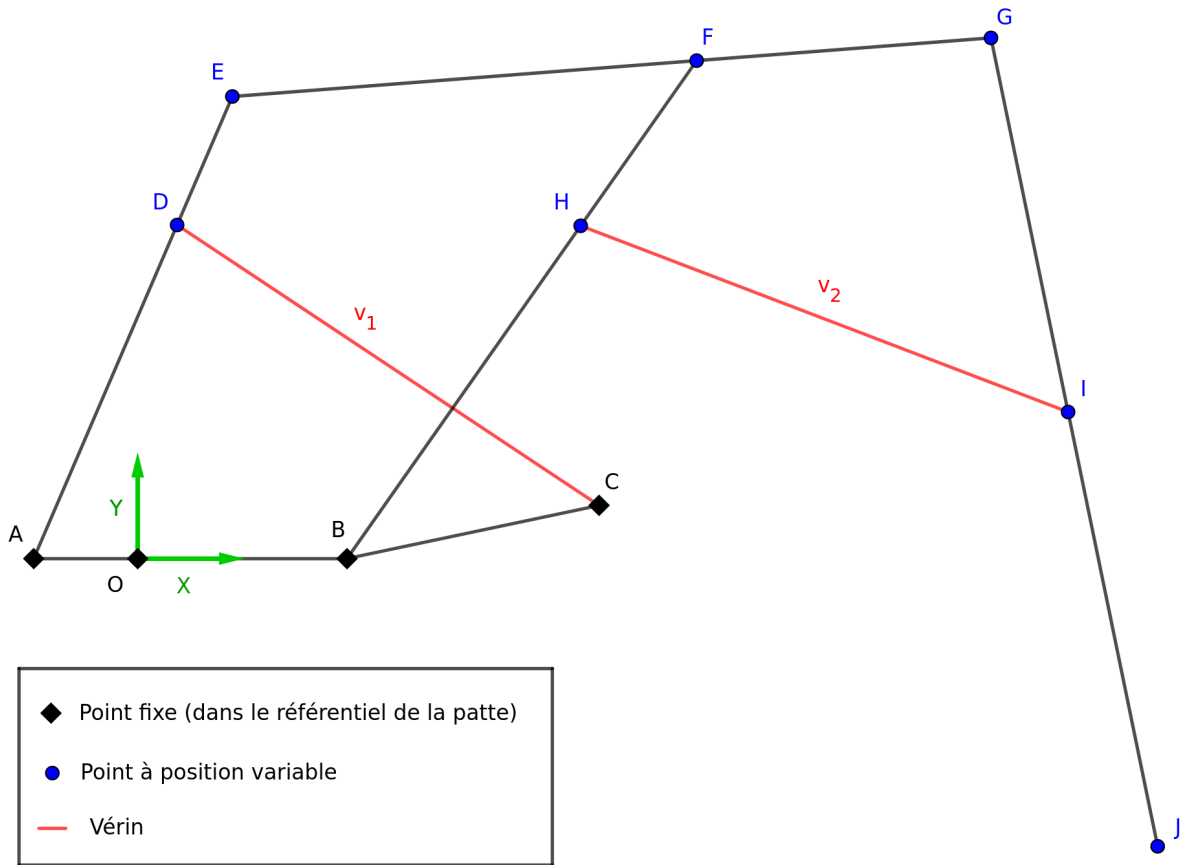


FIGURE 1 – Schéma d'une patte du MegaBot

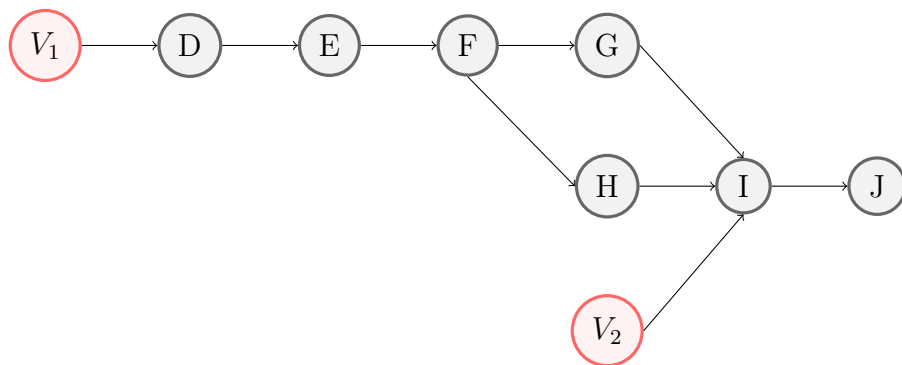


FIGURE 2 – Schéma des dépendances articulaires

Nous cherchons tout d'abord à déterminer l'écart en  $D$ . Pour cela, nous nous plaçons dans le triangle  $ADC$  où l'élongation  $v_1$  du segment  $CD$  et la position du point  $D$  sont variables. Nous obtenons le système  $S_1$  suivant :

$$S_1 \begin{cases} \langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AB} \rangle - d_{AD}^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 - d_{AD}^2 = 0 \\ \langle \overrightarrow{CD} | \overrightarrow{CD} \rangle - v_1^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 - v_1^2 = 0 \end{cases}$$

Après dérivation par rapport à  $x_D$ ,  $y_D$  et  $v_1$  et à condition que  $A$ ,  $D$  et  $C$  ne soient pas alignés<sup>1</sup>, le système  $S_1$  nous donne la relation matricielle suivante :

$$\nabla S_{1D,v_1} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta y_D \\ \delta v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_D - x_A) & 2(y_D - y_A) & 0 \\ 2(x_D - x_C) & 2(y_D - y_C) & -2v_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta y_D \\ \delta v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta D = \begin{bmatrix} \delta x_D \\ \delta y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_D - x_A) & 2(y_D - y_A) \\ 2(x_D - x_C) & 2(y_D - y_C) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_1 \end{bmatrix} \cdot \delta v_1$$

$$\boxed{\delta D = M_D \cdot \delta v_1} \text{ avec } M_D = \begin{bmatrix} 2(x_D - x_A) & 2(y_D - y_A) \\ 2(x_D - x_C) & 2(y_D - y_C) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_1 \end{bmatrix}$$

Du fait que les points  $A$ ,  $D$  et  $E$  sont alignés, il est possible de déterminer l'écart de position en  $E$  à partir de l'écart de position en  $D$  en lui appliquant un simple facteur de proportionnalité.

$$\boxed{\delta E = M_E \cdot \delta v_1} \text{ avec } M_E = \frac{d_{AE}}{d_{AD}} \cdot M_D$$

---

1. Cela est toujours vérifié en raison de la structure de la patte (cf. Figure 1)



Nous calculons maintenant l'écart en F en nous plaçant dans le triangle  $EBF$  où les positions de  $E$  et  $F$  sont variables. Nous obtenons le système  $S_2$  suivant :

$$S_2 \begin{cases} \langle \overrightarrow{EF} | \overrightarrow{EF} \rangle - d_{EF}^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 - d_{EF}^2 = 0 \\ \langle \overrightarrow{BF} | \overrightarrow{BF} \rangle - d_{BF}^2 = (x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2 - d_{BF}^2 = 0 \end{cases}$$

Nous le dérivons par rapport à  $x_F$ ,  $y_F$ ,  $x_E$  et  $y_E$ , et à condition que  $B$ ,  $E$  et  $F$  ne soient pas alignés<sup>1</sup>, nous obtenons :

$$\nabla S_{2_{F,E}} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_F \\ \delta y_F \\ \delta x_E \\ \delta y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_F - x_E) & 2(y_F - y_E) \\ 2(x_F - x_B) & 2(y_F - y_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(x_F - x_E) & -2(y_F - y_E) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_F \\ \delta y_F \\ \delta x_E \\ \delta y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \delta F = \begin{bmatrix} \delta x_F \\ \delta y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_F - x_E) & 2(y_F - y_E) \\ 2(x_F - x_B) & 2(y_F - y_B) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2(x_F - x_E) & 2(y_F - y_E) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta E$$

$$\boxed{\delta F = M_F \cdot \delta v_1} \text{ avec } M_F = \begin{bmatrix} 2(x_F - x_E) & 2(y_F - y_E) \\ 2(x_F - x_B) & 2(y_F - y_B) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2(x_F - x_E) & 2(y_F - y_E) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M_E$$

---

1. Cela est toujours vérifié en raison de la structure de la patte (cf. Figure 1)

Les points  $E$ ,  $F$  et  $G$  d'une part et  $B$ ,  $F$  et  $H$  d'autre part sont alignés. On peut donc obtenir les écarts en  $G$  et en  $H$  à partir de l'écart en  $F$  :

$$\boxed{\delta G = M_G \cdot \delta v_1} \quad \text{avec} \quad \boxed{M_G = \frac{d_{EG}}{d_{EF}} \cdot M_F}$$

$$\boxed{\delta H = M_H \cdot \delta v_1} \quad \text{avec} \quad \boxed{M_H = \frac{d_{BH}}{d_{BF}} \cdot M_F}$$

Nous pouvons à présent obtenir l'écart en  $I$  en nous plaçant dans le triangle  $GHI$  où les positions des points  $G$  et  $H$  ainsi que l'élongation  $v_2$  du segment  $HI$  sont variables. Nous obtenons le système  $S_3$  suivant :

$$S_3 \begin{cases} \langle \vec{GI} | \vec{GI} \rangle - d_{GI}^2 = (x_I - x_G)^2 + (y_I - y_G)^2 - d_{GI}^2 = 0 \\ \langle \vec{HI} | \vec{HI} \rangle - v_2^2 = (x_I - x_H)^2 + (y_I - y_H)^2 - v_2^2 = 0 \end{cases}$$

Nous le dérivons par rapport à  $x_I$ ,  $y_I$ ,  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $x_H$ ,  $y_H$  et  $v_2$  pour obtenir la jacobienne suivante :

$$\nabla S_{3I,G,H,v_2} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|c} 2(x_I - x_G) & 2(y_I - y_G) & -2(x_I - x_G) & -2(y_I - y_G) & 0 & 0 & 0 \\ 2(x_I - x_H) & 2(y_I - y_H) & 0 & 0 & -2(x_I - x_H) & -2(y_I - y_H) & -2v_2 \end{array} \right]$$

$$\text{On pose } \nabla S_{3I,G,H,v_2} = \left[ M_1 \mid -M_2 \mid -M_3 \mid -M_4 \right] \quad \text{avec}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2(x_I - x_G) & 2(y_I - y_G) \\ 2(x_I - x_H) & 2(y_I - y_H) \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2(x_I - x_G) & 2(y_I - y_G) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2(x_I - x_H) & 2(y_I - y_H) \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_2 \end{bmatrix}$$

On a alors la relation suivante permettant de relier l'écart en  $I$  à  $\delta v_1$  et  $\delta v_2$  à la condition que  $I$ ,  $G$  et  $H$  ne soient pas alignés<sup>1</sup> :

$$\delta I = M_1^{-1} \cdot (M_2 \cdot \delta G + M_3 \cdot \delta H + M_4 \cdot \delta v_2) = M_1^{-1} \cdot (M_2 \cdot M_G + M_3 \cdot M_H) \cdot \delta v_1 + M_1^{-1} \cdot M_4 \cdot \delta v_2$$

$$\text{C'est à dire } \boxed{\delta I = M_I \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix}}$$

$$\text{avec } \boxed{M_I = \begin{bmatrix} V1 & V2 \end{bmatrix}} \quad \boxed{V_1 = M_1^{-1} \cdot (M_2 \cdot M_G + M_3 \cdot M_H)} \quad \boxed{V_2 = M_1^{-1} \cdot M_4}$$

Enfin, du fait que  $G$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés, on obtient l'écart de position en  $J$  :

$$\boxed{\delta J = M_J \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \boxed{M_J = \frac{d_{GJ}}{d_{GI}} \cdot M_I}$$

Nous avons donc pu calculer la jacobienne  $J_2$  associée à notre modèle cinématique direct dans le plan de la patte :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = J_2 \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \end{bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \boxed{J_2 = M_J} \tag{1}$$

---

1. Cela est toujours vérifié en raison de la structure de la patte (cf. Figure 1)

## 2.2 Cinématique directe dans l'espace

L'objectif à présent est de ramener notre modèle dans l'espace en ajoutant l'influence du vérin  $v_3$  sur notre cinématique directe. Le référentiel cible est le référentiel  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  représenté sur la Figure 3. On notera que le vecteur  $\vec{Y}$  utilisés dans la partie précédente et défini à la Figure 1 est devenu le vecteur  $\vec{Z}$  sur la Figure 3 à des fins de convention.

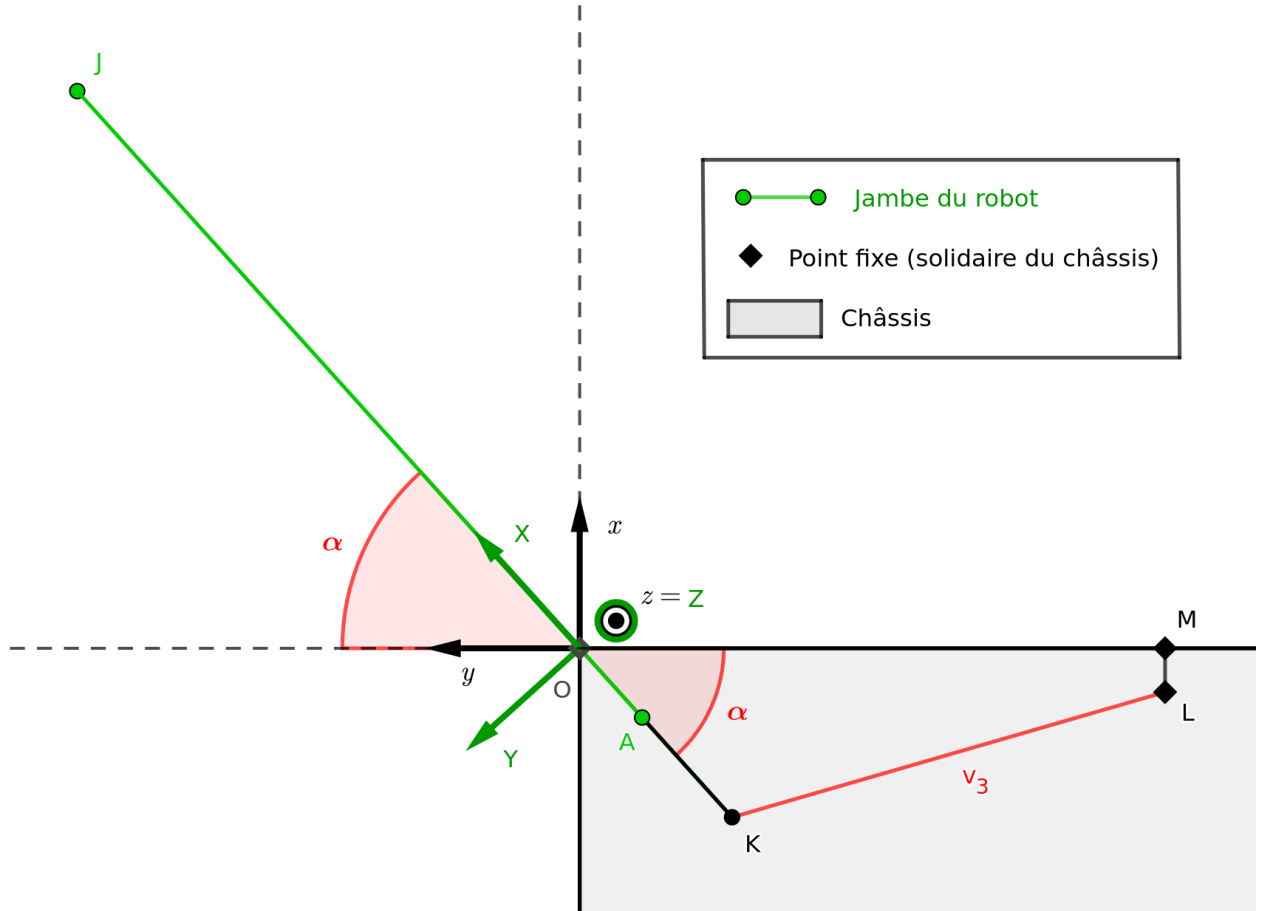
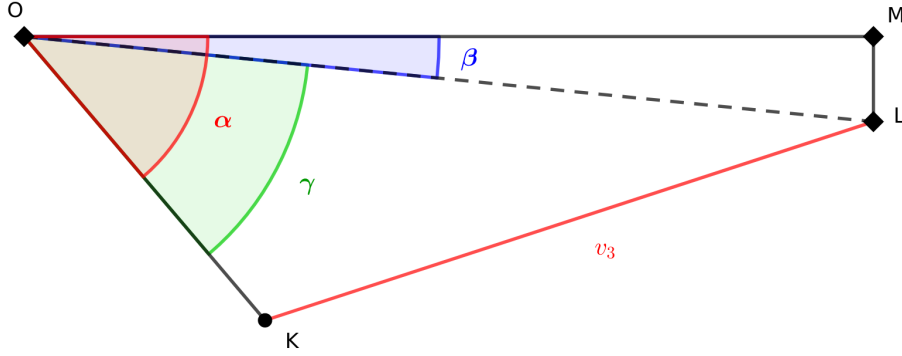


FIGURE 3 – Changement de référentiel (patte avant gauche)

En premier lieu, nous cherchons à exprimer l'angle  $\alpha$  de la patte au châssis en fonction de l'élongation du vérin  $v_3$ . Pour cela, nous nous plaçons dans le triangle  $KLO$  (cf. Figure 4).


 FIGURE 4 – Relation entre  $v_3$  et  $\alpha$ 

En utilisant la loi des cosinus, nous obtenons la relation suivante :

$$d_{OK} \cdot d_{OL} \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2}(d_{OK}^2 + d_{OL}^2 - v_3^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d_{OK}}{d_{OL}} + \frac{d_{OL}}{d_{OK}} - \frac{v_3}{d_{OK}d_{OL}} - 2 \cdot \cos(\gamma) = 0$$

Nous construisons ensuite la jacobienne associée, ce qui nous permet d'obtenir la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \sin(\gamma) & \frac{-2 \cdot v_3}{d_{OK}d_{OL}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\gamma \\ \delta v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Du fait que  $\delta\alpha$  soit égal à  $\delta\gamma$ , nous obtenons enfin la relation suivante :

$$\boxed{\delta\alpha = \frac{v_3}{\sin(\alpha - \beta) \cdot d_{OK}d_{OL}} \cdot \delta v_3}$$

L'obtention de la relation entre  $\delta\alpha$  et  $\delta v_3$  nous permet d'obtenir la matrice liant  $(\delta X, \delta Z, \delta\alpha)$  à  $(\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3)$ . Pour cela, nous réutilisons  $J_2$  obtenue lors de la résolution de la cinématique directe dans le plan de la patte (1) :

$$\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Z \\ \delta \alpha \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La dernière étape permettant l'obtention de notre jacobienne dans le référentiel  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est d'obtenir la matrice reliant  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  à  $(\delta X, \delta Z, \delta \alpha)$ . Pour cela, nous devons étudier la rotation d'angle  $\alpha$  séparant  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  et  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

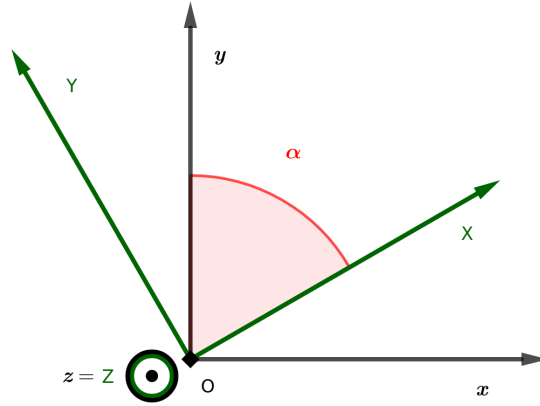


FIGURE 5 – Rotation  $\alpha$

Nous notons tout d'abord que l'inégalité  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  est toujours vérifiée de par la structure du châssis. De ce fait, nous nous autorisons l'expression de la rotation d'un angle de  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  sans nous questionner sur le signe de l'angle de rotation.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}-\alpha} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & -\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En dérivant cette relation par rapport à  $\alpha$ , nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \frac{\partial R_{\frac{\pi}{2}-\alpha}}{\partial \alpha} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \cdot \delta \alpha + R_{\frac{\pi}{2}-\alpha} \cdot \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \frac{\partial R_{\frac{\pi}{2}-\alpha}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous savons que  $Y$  et  $\delta Y$  sont constant dans notre modèle et valent  $Y = 0$  et  $\delta Y = 0$ . De ce fait il nous est possible de simplifier la relation précédente en :

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ -X \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \alpha + \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Z \end{bmatrix}$$

Ou bien, formulé autrement :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Z \\ \delta \alpha \end{bmatrix}} \text{ avec } B = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 & X \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 & -X \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A partir des matrices  $A$  et  $B$  calculés respectivement en (2) et (3), il devient possible de construire  $J_3$ , la matrice reliant  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  à  $(\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3)$  :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = J_3 \cdot \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \\ \delta v_3 \end{bmatrix}} \text{ avec } \boxed{J_3 = B \cdot A} \quad (4)$$

## 2.3 Généralisation

Nous avons à présent explicité  $J_3$ , la jacobienne associée au modèle cinématique direct d'une patte du Megabot dans son référentiel. Afin de pouvoir appliquer un contrôle simultané sur l'ensemble des pattes, il est nécessaire de généraliser notre modèle cinématique à l'ensemble de notre robot.

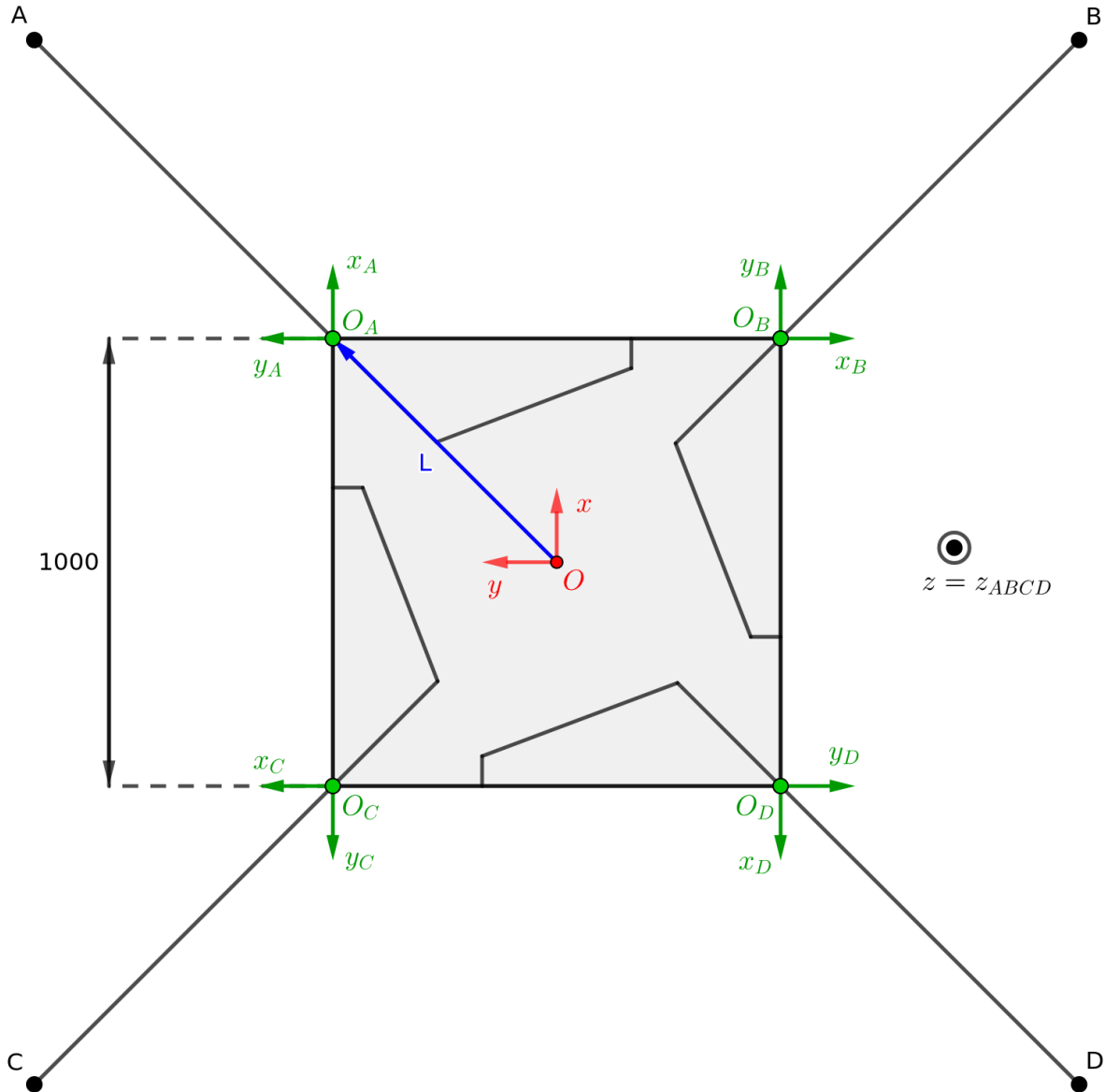


FIGURE 6 – Passage au référentiel du robot



Nous noterons à partir de maintenant  $\delta V$  les variations d'élongation des 12 vérins et  $\delta X$  les variations de position de l'extrémité des pattes dans le référentiel du robot (cf. Figure 6). La nouvelle matrice de passage entre ces vecteurs sera nommée  $J_{12}$  :

$$\boxed{\delta X = J_{12} \cdot \delta V} \text{ avec } \delta V = \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \\ \delta v_3 \\ \delta v_4 \\ \delta v_5 \\ \delta v_6 \\ \delta v_7 \\ \delta v_8 \\ \delta v_9 \\ \delta v_{10} \\ \delta v_{11} \\ \delta v_{12} \end{bmatrix} \text{ et } \delta X = \begin{bmatrix} \delta x_A \\ \delta y_A \\ \delta z_A \\ \delta x_B \\ \delta y_B \\ \delta z_B \\ \delta x_C \\ \delta y_C \\ \delta z_C \\ \delta x_D \\ \delta y_D \\ \delta z_D \end{bmatrix}$$

On peut alors remarquer qu'en utilisant des matrices de rotation il est facile d'exprimer  $J_{12}$  à partir de  $J_3$  qui a été calculée en (4) :

$$\boxed{J_{12} = \begin{bmatrix} J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\frac{\pi}{2}} \cdot J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{-\frac{\pi}{2}} \cdot J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\pi} \cdot J_3 \end{bmatrix}}$$

Les jacobienues  $J_2$ ,  $J_3$  et  $J_{12}$  calculées permettent toutes d'élaborer des algorithmes de contrôle respectivement d'une patte dans son plan, d'une patte dans son référentiel et de l'ensemble des pattes dans le référentiel du Megabot en utilisant un solveur QP comme expliqué dans la partie 1.2. Néanmoins, la problématique importante de gestion du centre de gravité peut également être traitée dès la phase de contrôle, c'est pourquoi nous allons l'intégrer à nos équations.

### 3 Centre de gravité et optimisation quadratique

La gestion du centre de gravité peut être réalisée de 2 façons durant la phase de contrôle :

- En le contraignant via les variables  $G$ ,  $h$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $lb$  et  $ub$  du solveur QP : les variations  $\delta C$  du centre de gravité sont calculées à partir de  $\delta V$  dans l'exemple de la partie 1.2
- En ajoutant la position du centre de gravité aux entrées de la cinématique inverse : il est alors intégré à  $\delta X$  dans l'exemple de la partie 1.2

La première solution apporte une forme de sécurité tout en laissant au centre de gravité plus de liberté, elle semble adaptée à un robot possédant une zone de sustentation constante au cours de son déplacement car, le cas échéant, elle permet de contraindre le centre de gravité à cette zone et de ne plus avoir à s'en préoccuper durant la phase de planification.

Ce n'est malheureusement pas le cas du Megabot, c'est pourquoi nous avons opté pour la seconde solution qui offre un contrôle exact du centre de gravité mais nécessite sa prise en compte dans la planification.

La première étape des 2 méthodes est de calculer la jacobienne du centre de gravité qui, une fois que le modèle cinématique direct a été établi, est assez simple à déterminer. En effet la position du centre de gravité n'est qu'une combinaison linéaire des positions de chacune des articulations du robot, de ce fait sa jacobienne est également une combinaison linéaire des jacobiennes associées à chaque articulation. Pour récupérer ces jacobiennes, il suffit de reprendre les matrices explicitées dans la partie 2.1 et de leur appliquer les changements de référentiel des parties 2.2 et 2.3. Cela abouti à la relation suivante où  $C$  est la position du centre de gravité et  $J_C$  est la jacobienne obtenue :

$$\boxed{\delta C = J_C \cdot \delta V}$$

### 3.1 Calcul à partir de $\delta V$

Pour contraindre le centre de gravité, nous pouvons utiliser l'inégalité  $G\delta V \leq h$  du solveur QP. Chaque ligne de  $G$  et  $h$  correspond à une contrainte sur des coordonnées de centre de gravité.  $G$  est constitué de combinaisons linéaires des lignes de  $J_C$ , tandis que  $h$  contient les valeurs de contrainte. Dans le cas où l'on veut ajouter  $n$  contraintes sur les coordonnées du centre de gravité,  $G$  et  $h$  sont alors constitués de  $n$  lignes.

### 3.2 Intégration à $\delta X$

Dans le cas où l'on souhaite commander la position du centre de gravité, on doit l'intégrer aux entrées du solveur QP. On obtient alors la relation suivante en reprenant les notations de la partie 2.3 :

$$\boxed{\delta X' = J_{15:12} \cdot \delta V} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta X' = \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta C \end{bmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{J_{15:12} = \begin{bmatrix} J_{12} & | & J_C \end{bmatrix}}$$

C'est cette seconde solution qui a été choisie dans le cas du Megabot.