



UNIVERSITAT_{DE}
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

MACHINE LEARNING
APLICAT A LA GENERACIÓ
DE MOODBOARDS

Autor: Ferrer Margarit, Marc

Director: David Buchaca

Realitzat a: Departament....
(nom del departament)

Barcelona, 9 de maig de 2018

Abstract

Moodboards are currently used to represent objects that are formed by the composition of others and seek to obtain a cohesive result among them and generate a new image. Machine learning allows us to train a machine so that it can generate values from the data that we have entered previously, which must be correct.

What we want to obtain is a combination between the two parties to achieve the generation of new images, with totally correct and cohesive objects and different from the images used to train the machine.

So the objective of this project is to create a machine that allows us, based on correct data, moodboards generated correctly, generate correct moodboards without the need for a person to generate them, create an automated system to replace a task slow and mechanical that a series of people realize.

Apart from creating this system, it will also ease your efficiency with respect to the non-automated system or the generation of data in a random way, so we can establish whether the system created is sufficiently effective, fast and accurate when it comes to performing, in this case, new moodboards.

Finally, these tests will be carried out by supervising expert people in order to improve the evaluation.

Resum

Actualment els moodboards s'utilitzen per representar objectes que estan formats per la composició d'altres i preten obtenir un resultat de cohesió entre ells i generar una imatge nova. El machine learning ens permet entrenar una màquina per tal de que aquesta sigui capaç de generar els valors amb les dades que li hem entrat prèviament, les quals han de ser dades correctes.

El que volem obtenir es una combinació entre les dues parts per aconseguir la generació de noves imatges, amb objectes totalment correctes i cohesionats i diferents a les imatges utilitzades per entrenar la màquina.

Així doncs l'objectiu d'aquest projecte es crear una màquina que ens permeti, a partir de dades correctes, moodboards generats correctament, generar moodboards correctes sense la necessitat que una persona els hagi de generar, crear un sistema automatitzat per a reemplaçar una tasca lenta i mecànica que realitzen una sèrie de persones.

A part de crear aquest sistema, també s'anilitzarà la seva eficiència respecte el sistema no automitzat o la generació de dades d'una forma aleatòria, així podrem establir si el sistema creat es el suficientment eficaç, ràpid i precís a la hora de realitzar, en aquest cas, nous moodboards.

Finalment, aquestes proves es realitzaran mitjançant la supervisió de persones expertes per a tal de millorar la evaluació.

Agraïments

Vull agrair a ...

Índex

1	Introducció i objectius	1
2	Moodboards	4
2.1	Disseny dels moodboards	4
2.2	Desenvolupament de l'eina	8
2.2.1	Funcionalitats bàsiques	9
2.2.2	Disseny	9
2.2.3	Funcionament	9
3	Desenvolupament del Machine Learning	9
3.1	Introducció	9
3.2	Plantejament de l'algoritme	9
3.3	Tipus d'algoritmes	9
3.4	Màquina de Boltzmann Restrictiva (RBM)	9
4	Desenvolupament de l'algoritme aplicat al problema	9
4.1	Dades d'entrada	9
4.2	Dades d'entrenament	9
4.3	Ànlisi de l'algoritme amb les dades	9
4.4	Dades de sortida	10
5	Resultats i conclusions i línies de continuació	10

1 Introducció i objectius

Avui en dia, tot i que depenem de les màquines i dels programes per a realitzar tasques que poden ser pesades i lentes encara en queden moltes que es realitzen a mà i que en algun punt haurán de ser automatitzades per tal que es puguin realitzar més ràpidament i de una forma més precisa.

Així doncs aquest projecte el que es vol aconseguir és que una tasca que actualment costa temps, dedicació i concentració es transformi amb un tasca mecànica, senzilla de realitzar, ràpida i amb bons resultats. Que la persona que l'hagi de realitzar no es trobi amb problemes que no pot solucionar o en dedicar-hi masses hores. Aquesta transformació que volem aconseguir, s'ha de realitzar partir de la tasca original, de la informació que es necessita i en què es basa.

Aquesta tasca consisteix en la generació de moodboards. La pregunta és: **Què és un moodboard?**

Un moodboard és una combinació d'imatges relacionades entre elles que juntes formen una sola imatge. Normalment és creen aquestes combinacions per generar imatges de paisatges, d'aplicacions, decoració i creació d'habitacions.

La tasca que volem substituir, més ben dit, millorar, evolucionar, és la tasca de la generació de moodboards. Actualment per generar moodboards es necessita fer una cerca de totes les imatges que es desitgen col·locar. Un cop triades s'han de col·locar de forma que formin un sol conjunt i anar-les editant per tal de generar una sola imatge.

Aquest procés pot ser molt lent i tediós ja que buscar totes les imatges necessàries pot portar molt de temps igual que col·locar-les correctament i editar-les per tal que totes s'ajuntin i formin una sola imatge.

Aquest procés es substituirà per un altre de més ràpid conservant alguns aspectes tot i que el procediment canviarà per tal que tot sigui més mecànic i més ràpid.

Com hem dit anteriorment poden haver-hi moodboards de molts tipus, però per aquest projecte ens centrarem amb els moodboards d'interiorisme, és a dir, els que defineixen una estància d'una casa, un dormitori, un bany, una cuina, etc. A part de definir una estància també definirán un estil, cada moodboard pertanyerà a un estil determinat. Així, cada moodboard serà una combinació de mobles i objectes que junts representarán l'estil d'una zona de la casa.

Un cop explicat tota la base de la qual partirem l'objectiu que ens proposem és crear un sistema automatitzat que ens permeti la generació automàtica de moodboards, sense la necessitat de editar imatges, facilitant la cerca dels mobles i objectes necessaris que es necessiten per a cada zona i generant imatges d'una forma més ràpida i eficient.

Per tal de poder crear aquest sistema utilitzarem tècniques de machine learning per tal de crear una màquina capaç d'aprendre i de generar a partir de les dades

que ha apres. D'aquesta forma podem estructurar el projecte amb dues part essencials, una la generació de moodboards mitjançant eines, ja creades i que explicarem és endavant, per tal d'entrenar la màquina i la segona la creació d'una màquina capaç de llegir els moodboards creats anteriorment, aprendre com estan generats, és a dir, com es distribueixen els diferent elements a cada un ells i generar-ne de nous que siguin correctes.

Com bé he mencionat, farem servir tècniques de machine learning, és a dir algorismes d'aprenentatge automàtic. **Però que entenem per aprenentatge automàtic?**

L'aprenentatge automàtic és un camp de la intel·ligència artificial que està dedicat al disseny, l'anàlisi i el desenvolupament d'algorismes i tècniques que permeten que les màquines evolucionin. Es tracta de crear programes capaços de generalitzar comportaments a partir del reconeixement de patrons o classificació, d'aquesta manera nosaltre el que volem fer és una màquina que sigui capaç de classificar per després poder generar a partir de les dades que ha classificat.

El machine learning ens ha de permetre donada una sèrie de imatges generades correctament importar-les a la màquina i que aquesta aprengui com estan formades, l'ordre que segueix la distribució de cada imatge dins del moodboard. També ha de capaç de generar noves sèries de imatges que han de ser correctes.

Aquest tipus de màquines necessiten moltes dades per tal necessitem generar moltes dades per tal que siguem capaç de entrenar la màquina correctament.

Finalment, tot i que l'objectiu és crear un sistema automatitzat per a millorar la realització d'una tasca, l'objectiu també és analitzar com és de millor aquest sistema, és a dir, com millora respecte l'altre sistema. Per tal de saber-ho, al final de tot el projecte evaluarem el sistema mitjançant l'ajuda humana, en aquest cas, persones expertes que han generat molts de moodboards i que també han generat els correctes per entrenar la màquina i d'aquesta forma podrem validar les qualitats del sistema mitjançant diverses proves que s'explicarán més endavant.

Estructura de la Memòria

En primer lloc ens centrarem com generem els moodboards, amb quines eines i alguns exemples per tal de crear-los. Aquests moodboards seran els que posteriorment servirán per entrenar la màquina. També explicarem el funcionament de les eines i les diferències amb el mètode "tradicional".

Seguidament explicarem quin tipus de màquina farem, és a dir, el tipus d'algorisme d'aprenentatge automàtic que aplicarem, els motius per els quals em decidit escollir aquest algorisme i quines son les seves propietats bàsiques per aquest sistema.

Després analitzarem com són les dades d'entrada, com a partir del moodboards generats obtenim, com transformem aquestes imatges per tal d'obtenir dades vàlides per a entrenar la màquina. També definirem com han de ser aquestes dades i com han de ser les dades que volem obtenir de sortida i com les transformarem en imatges de nou.

I finalment analitzarem els resultats obtinguts i els evaluarem mitjançant diferents proves que realitzarem per comprovar la seva eficiència i els resultats envers els moodboards creats prèviament per experts.

2 Moodboards

Abans de començar a explicar les dades, el funcionament de l'algorisme i els resultats ens hem de centrar en la primera part del projecte i una de les més importants, la generació de dades.

Com hem comentat a la introducció les nostres dades són moodboards que defineixen diferents estàncies d'un habitatge d'un estil concret.

A continuació explicarem com són els moodboards, és a dir, com estan formats els moodboards actuals i com seran els nostres moodboards que generarem amb la nostra eina. També explicarem com està dissenyada la nostra eina, amb quines eines s'ha realitzat i com es creen moodboards seguin l'estàndard que hem decidit.

2.1 Disseny dels moodboards

Com bé ja hem explicat moodboard és una combinació d'imatges relacionades entre elles que juntes formen una sola imatge. Aquesta imatge que formen es una imatge ben generada, és a dir, que hi ha cohesió amb tots els elements de forma que sembli que sigui una fotografia mentres que es tracta una composició de diferents objectes editats manualment mitjançant eines d'edició d'imatge per formar una sola imatge coherent i compacta, la qual mostrarà una habitació d'una casa.

Realitzar moodboards amb aquesta tècnica té avantatges i inconvenients. Un dels problemes més gran que suposa és el temps. Generar un moodboard utilitzant aquest tipus de composició pot suposar una gran quantitat de temps ja que en primer lloc necessitem buscar aquelles imatges que necessitem, és a dir, dintre d'un rang enorme el qual esta format per milers de mobles i objectes escollir els adients segons l'estil i la estància desitjada.

Un cop seleccionats els elements necessaris cal editar-los un per un per tal de poder combinar-los entre ells i que sembli una fotografia. Tot plegat suposa un esforç i un gran quantitat de temps per a generar un moodboard.

Per altra banda uns dels millors aspectes és la cohesió que s'aconsegueix i la impressió que provoca ja que sembla una fotografia. Aixó el que ens permet imaginar-nos molt millor com seria aquella habitació. Ens proporciona una visió molt més real que un conjunt de imatges ajuntades aleatòriament.

La qüestió que ens plantejem és si la gran quantitat de temps invertida per a generar una sola imatge compensa el resultat obtingut. Per tal de respondre aquest pregunta, hem consultat a experts que una de les seves principals tasques és la generació de moodboards.

Segons ells invertir una gran quantitat de temps per a generar una imatge compensa ja que el resultat que obtenen es una reflexió de com seria veure en directe, com fer una fotografia de l'habitació per tal de poder-la mostrar. També afirmen

que ahora de mostrar habitaciones a clientes o empresas és una de les formes de captar més la seva atenció ja que en aquestes imatges es reflexa la realitat del futur, és a dir, es reflexa el que un dia podrà ser aquesta habitació en una casa qualsevol.

També han apuntat que al realitzar aquestes composicions els hi permeten crear diferents habitacions, diferents formes en ambients totalment diferents i poder afegir una història a redere de cada composició que permeti a la persona que està veient aquella imatge entendre, adentrar-se dintre d'aquell ambient fictici fins a fer-lo real en la seva ment.

Així doncs, la generació de moodboards utilitzant aquesta tècnica genera molt bons resultats però té com a conseqüència dedicar-hi molt de temps per tal de obtenir un bon resultat i que captivi aquelles persones a les quals va dirigit.

A partir d'aquest punt el que ens hem de plantejar si utilitzar l'esquema de la tècnica anterior és adient per el nostre projecte, és a dir, si ens podem permetre generar una gran quantitat d'imatges dedicant-hi molt de temps per després utilitzar-les per entrenar una màquina.

La resposta és simple, aquest tipus de tècnica no es serveix per aquest cas ja que necessitem generar, amb un període curt de temps, una gran quantitat de moodboards. Per tal de solucionar s'ha de plantejar una solució que ens permeti organitzar en un moodboard els elements d'una forma ràpida i que més o menys formin una imatge cohesionada.

Partint d'aquesta premisa es van agafar diferents estudis realitzats sobre moodboards anteriorment generats de cada estància i es van treure una sèrie d'especificacions que cada moodboard hauria de complir, així podriem definir un model per dissenyar una plantilla per a generar moodboards d'una forma més mecànica i més ràpida.

Així doncs una de les especificacions més importants que es va arribar és que cada estància que es volia generar tenia una sèrie d'elements fixes, és a dir, una sèrie de mobles i objectes que sempre hi haurien de ser. D'aquesta forma es va establir un nombre d'objectes per a cada estància i quins havien de ser. Això solucionava una part del problema que era saber quants objectes podíem col·locar a cada moodboard. L'altre problema que va sorgir era com combinar imatges per tal d'aconseguir una imatge cohesionada semblant a les imatges que s'obtenien amb l'altra tècnica.

En aquest cas el rang d'objectes disponible era bastant gran, es tractava d'un conjunt d'uns 3000 objectes, i les imatges per a cada objecte eren *thumbs*, imatges amb un fons blanc i l'objecte en petit centrat al mig del fons blanc. La solució de treure el fons blanc editant la imatge no era viable ja que es tardaria molt i no era l'objectiu que volíem aconseguir.

Partint de tot això, es va arribar a trobar una solució que complia amb les especificacions i més o menys s'obtenia un resultat coherent. Partint de les solucions anteriors es va establir una graella per a cada estància. Aquesta graella contindria a cada casella un tipus d'objecte, la qual més endavant contindria la imatge, el

thumb, de l'objecte que fos d'aquell tipus. D'aquesta forma s'aconsegueix una certa cohesió ja que totes les imatges al tenir el mateix format es formaria una imatge de fons blanc amb petites imatges de cada objecte. Tot i això, sempre hi ha la condició que a una cel·la no hi hagi cap element i quedi de color blanc.

Aquesta solució serviria per a totes les estàncies disponibles d'un habitatge però si ens centrem amb el projecte, només analitzarem una estància, el dormitori per tant en aquest cas tindrem una sola graella d'imatges que corresponen als objectes que es troben en la estància. Així doncs es va establir que, en aquest cas, la graella del dormitori tindria 48 elements els quals correspondrien als diferents mobles i objectes que es poden col·locar.

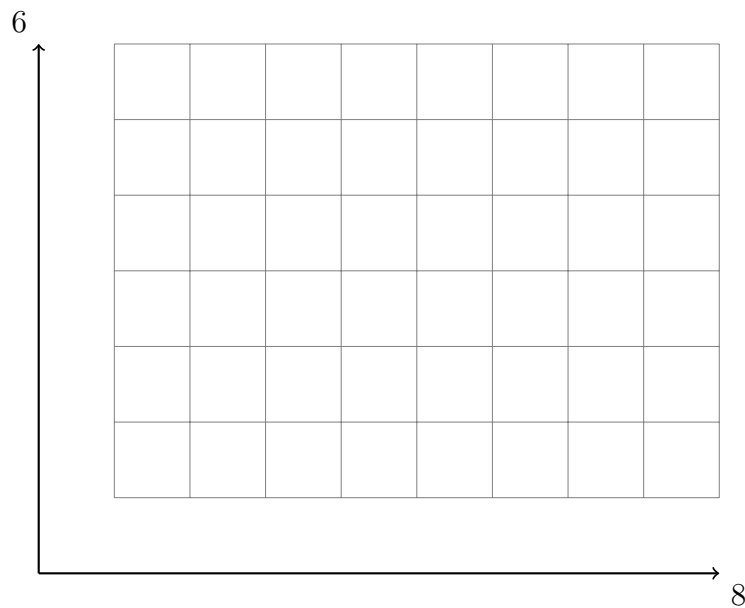


Figura 1: Exemple de la graella de la estància dormitori

Cada casella d'aquesta graella contindrà internament, és a dir, d'una forma que no es veurà visualment uns valors que indicaran quines objectes poden anar aquella casella. D'altra banda cada casella també contindrà una o més d'una paraula que descriurà els valors anteriors, d'aquesta forma la persona que hagi d'emplenar la graella amb objectes ha de saber quins poden i quins no. A continuació es mostra la graella final que s'utilitzarà per la generació de moodboards.

Suelo	Pared A	Pared B	Resto Paredes	Pilar o Columna	Murete	Cornisa	Molduras Frisos
Arrimadero	Zócalos	Cantonera	Escaleras	Techo	Viga o Estructura Compuesta Vigas	Molduras	Rosetón
Puerta	Ventana o Balconera	Otros	Separadores Espaciales	Calefacción	Climatización Ventilador Techo	Chimenea	Interruptores Enchufes
Iluminación Técnica	Cama	Estantería encima cama	Mesita Noche	Lámpara Techo	Armario	Banco/Baúl	Colgadores
Cómoda	Espejode Pie	Galán	Butaca	Lámpara de pie	Mesita Auxiliar	Tocador	Espejo
Alfombra	Cortinas	Textil Cama Principal	Textil Cama Secundario	Textil Cama Secundario 1	Textil Cama Secundario 2	Escritorio	Estantes de Pared

Figura 2: Graella final de la estància dormitori

A partir d'aquest punt ja tenim una solució que ens permet generar moodboards de forma ràpida tot i que el resultat no sigui el mateix que utilitzant la primera tècnica descrita. Tot i aixó, en aquest cas preferim velocitat a la hora de generar que més cohesió ja que tampoc tenim forma que una cop la màquina generi graelles pugui editar aquestes imatges per tal que s'assemblin al model de la primera tècnica. A partir d'ara necessitem una forma de poder colocar els objectes disponibles a la graella d'una forma senzilla i eficient.

2.2 Desenvolupament de l'eina

Per tal de poder aplicar el mètode anteriorment explicat necessitem alguna eina que ens permeti accedir a tots els objectes disponibles d'una forma fàcil per tal de poder crear moodboards seguin la graella prèviament definida. Així doncs necessitem crear un eina per realitzar aquesta tasca.

Aquesta eina que volem desenvolupar ha de ser fàcil de fer servir, intuïtiva i ràpida. Partint d'això s'ha de decidir quines tecnologies utilitzar per desenvoluparla. En aquest cas, com que ja s'havien creat altres eines per altres coses es va decidir aplicar les mateixes tecnologies que en aquest cas són utilitzar Unity i el llenguatge de programació C sharp.

Aquestes dos tecnologies combinades ens permetran desenvolupar una eina capaç de generar moodboards d'una forma ràpida i eficient.

En primer lloc tenim la part de Unity que ens permetrà crear tot el disseny de la interfície i les interaccions necessàries per tal que l'usuari pugui col·locar els objectes i així generar moodboards. També ens permetrà visualitzar tots els objectes i tota la informació que necessitem per a la generació.

I en segon lloc la part de C Sharp que controlarà tot a la lògica que hi ha darrere de la interfície. Però el paper més important és la connexió amb la base de dades. Els objectes que tenim disponibles, la seva informació, la graella creada i tots els moodboards generats es guarden en una base de dades que es troba en un servidor. Així doncs per tal de poder accedir a aquesta informació, s'han realitzat crides constants per obtenir-la i això s'encarrega la part de la lògica de l'aplicació.

Pensant en un esquema model-vista-controlador(MVC), la part de model i vista correspondrien a Unity mentre que tota la part del controlador estaria gestionada per fitxers, scripts, amb C Sharp els quals s'han de comunicar amb la base de dades per tal de proporcionar la informació necessària per a mostrar tots els objectes, la graella i altres funcions que ja explicarem.

2.2.1 Funcionalitats bàsiques

2.2.2 Disseny

2.2.3 Funcionament

3 Desenvolupament del Machine Learning

3.1 Introducció

resum del machine learning, l'estat actual i les seves utilitats

3.2 Plantejament de l'algoritme

explicar que és el que volem que faci l'algoritme

3.3 Tipus d'algoritmes

explicació dels diferents algoritmes que es poden aplicar i quins s'escull per aplicar-lo

3.4 Màquina de Boltzmann Restrictiva (RBM)

explicació rbm funcionament

4 Desenvolupament de l'algoritme aplicat al problema

com aplicarem l'algorisme en el projecte. Com seran les dades.

4.1 Dades d'entrada

format de les dades obtingudes de l'eina

4.2 Dades d'entrenament

format de les dades d'entrenament per a la màquina

4.3 Anàlisi de l'algoritme amb les dades

analitzar el temps, l'eficiència i les propietats de la màquina

4.4 Dades de sortida

format de les dades de sortida

5 Resultats i conclusions i línies de continuació

Evaluation Quantitativa

Evaluar models generatius és en general molt complicat.

Per a decidir que el nostre sistema "va bé" (va millor que generar coses aleatoriament). S'ha decidit generar

- 25 dades amb la RBM. - 25 dades aleatòries.

Donem les graelles al expert i li preguntem quines son bones i quines no. Contem quantes "de les bonescorresponnen amb les generades per la RBM.

Evaluacio custom

Podriem mirar de les graelles generades si els objectes son de color similar.

Evaluation Qualitativa

Posar en el document les graelles generades per la RBM, alguna graella random i alguna graella original. Explicar quins aspectes son bons i quins dolents de les graelles generades. Per exemple, demanar al expert que, de les graelles RBM generades quines coses 'no li agraden'.

Posar imatge de la eina

Interficie grafica de la imatge.

- Que ap orta la eina - Temps que triguen els humans a generar una graella amb photoshop - Temps que triguen els humans a generar una graella amb eina - Temps que triguen els humans a generar una graella amb RBM - Podries vendre-ho com una "help tool" que a un disenyador li genera 25 graelles i ell sols ha de triar quina li agrada més. I si vol variar alguna cosa de la graella.

Referències

- [1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*,
`pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.
- [2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.
- [3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirel'man, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No. G16*,
pàg. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.
- [4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.
- [5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.
- [7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.
- [8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edició, Oxford University Press, 1979.
- [9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, desembre de 2013.
- [10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem,
`arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.
- [11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true,
`arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, gener de 2014.
- [12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.
- [13] Klimov, N. I.; Pil'tjaž, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirel'man problem, *Studies in number theory, No. 4*,
pàg. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.
- [14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

- [15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.
- [16] Ramaré, O.: On Šnirel'man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.
- [17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.
- [18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.
- [19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.
- [20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.
- [21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Col·lecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.
- [22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.
- [23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edició, Cambridge University Press, 1997.
- [24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.
- [25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.