UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

AQUI EL TÍTOL DEL TREBALL

Autor: el vostre nom

Director:	Dr. Nom tutor
Realitzat a:	Departament....
	(nom del departament)

Barcelona, 8 de maig de 2017

Abstract

Goldbach's weak conjecture asserts that every odd integer greater than 5 is the sum of three primes. We study that problem and the proof of it presented by H. A. Helfgott and D. Platt. We focus on the circle method. Finally, we describe a computation that confirms Goldbach's weak conjecture up to 10^{28}.

Resum

La conjectura feble de Goldbach afirma que tot nombre enter imparell major que 5 és la suma de tres nombres primers. En aquest treball estudiem aquest problema i la seva prova presentada per HA Helfgott i D. Platt. Ens centrem en el mètode del cercle. Finalment, describim un càlcul que confirma la conjectura feble de Goldbach fins a 10^{28}.

Agraïments

Vull agrair a ...

Índex

1 Introducció

El projecte

La conjectura forta de Goldbach assegura que tot nombre enter parell més gran que 2 pot ser escrit com a suma de dos nombres primers. És fàcil veure que aquesta conjectura implica l'anomenada conjectura feble de Goldbach: tot nombre enter senar més gran que 5 pot ser escrit com a suma d'exactament tres nombres primers.

En aquest treball comentarem l'origen d'aquests problemes, exposarem una cronologia parcial del seu tractament, amb alguns dels resultats més coneguts, i n'enunciarem algunes conseqüències.

Posarem de manifest les idees bàsiques i les tècniques utilitzades en l'estudi de la conjectura feble de Goldbach, centrant-nos en les de la demostració presentada recentment per H. A. Helfgott en col·laboració amb D. Platt, prestant especial atenció al mètode del cercle de Hardy-Littlewood.

Una part força extensa de la tasca realitzada consisteix en una verificació parcial de la conjectura feble de Goldbach fins a 10^{28}, que requereix del càlcul d'uns dos mil cinc-cents milions de nombres primers certificats. Veurem com portar a la pràctica tals càlculs i guardar les dades generades utilitzant els recursos informàtics de què disposem.

Estructura de la Memòria

2 Capítol 2

2.1 Subapartat 2.1

3 Conclusions

Fent servir un símil geomètrico-cartogràfic, aquesta memòria constitueix un mapa a escala planetària de la demostració de la conjectura feble de Goldbach presentada per Helfgott i un mapa a escala continental de la verificació numèrica d'aquesta. Estudis posteriors i més profunds haurien de permetre elaborar mapes de menor escala.

La naturalesa dels nombres primers ens ha portat per molts racons diferents de les Matemàtiques; en no imposar-nos restriccions en la forma de pensar, hem pogut gaudir del viatge i assolir els objectius que ens vam plantejar a l'inici del projecte i anar més enllà, sobretot en el camp de la computació i la manipulació de grans volums de dades numèriques.

Una gran part dels coneixements bàsics que hem hagut de fer servir han estat treballats en les assignatures de Mètodes analítics en teoria de nombres i d'Anàlisi harmònica i teoria del senyal, que són optatives de quart curs del Grau de Matemàtiques. Altres els hem hagut d'aprendre durant el desenvolupant del projecte. S'ha realitzat una tasca de recerca bibliogràfica important, consultant recursos antics i moderns, tant en format digital com en format paper.

Referències

[1] Batut, C.; Belabas, K.; Bernardi, D.; Cohen, H.; Olivier, M.: User's guide to *PARI-GP*, `pari.math.u-bordeaux.fr/pub/pari/manuals/2.3.3/users.pdf`, 2000.

[2] Chen, J. R.; Wang, T. Z.: On the Goldbach problem, *Acta Math. Sinica*, 32(5):702-718, 1989.

[3] Deshouillers, J. M.: Sur la constante de Šnirelʹman, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fac. 2, Exp. No.* G16, pàg. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[4] Deshouillers, J. M.; Effinger, G.; te Riele, H.; Zinoviev, D.: A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:99-104, 1997.

[5] Dickson, L. E.: *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.: Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, 44(1):1-70, 1923.

[7] Hardy, G. H.; Ramanujan, S.: Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17:75-115, 1918.

[8] Hardy, G. H.; Wright, E. M.: *An introduction to the theory of numbers*, 5a edició, Oxford University Press, 1979.

[9] Helfgott, H. A.: Minor arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1205.5252v4 [math.NT]`, desembre de 2013.

[10] Helfgott, H. A.: Major arcs for Goldbach's problem, `arXiv:1305.2897v4 [math.NT]`, abril de 2014.

[11] Helfgott, H. A.: The ternary Goldbach conjecture is true, `arXiv:1312.7748v2 [math.NT]`, gener de 2014.

[12] Helfgott, H. A.; Platt, D.: Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$, `arXiv:1305.3062v2 [math.NT]`, abril de 2014.

[13] Klimov, N. I.; Pilʹtjaĭ, G. Z.; Šeptickaja, T. A.: An estimate of the absolute constant in the Goldbach-Šnirelʹman problem, *Studies in number theory, No. 4*, pàg. 35-51, Izdat. Saratov. Univ., Saratov, 1972.

[14] Liu, M. C.; Wang, T.: On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, *Acta Arith.*, 105(2):133-175, 2002.

[15] Oliveira e Silva, T.; Herzog, S.; Pardi, S.: Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.*, 83:2033-2060, 2014.

[16] Ramaré, O.: On Šnirel′man's constant, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4):645-706, 1995.

[17] Riesel, H.; Vaughan, R. C.: On sums of primes, *Ark. Mat.*, 21(1):46-74, 1983.

[18] Rosser, J. B.; Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, 6:64-94, 1962.

[19] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, 107(1):649-690, 1933.

[20] Tao, T.: Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes, *Math. Comp.*, 83:997-1038, 2014.

[21] Travesa, A.: *Aritmètica*, Col·lecció UB, No. 25, Barcelona, 1998.

[22] Vaughan, R. C.: On the estimation of Schnirelman's constant, *J. Reine Angew. Math.*, 290:93-108, 1977.

[23] Vaughan, R. C.: *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 125, 2a edició, Cambridge University Press, 1997.

[24] Vinogradov, I. M.: Sur le théorème de Waring, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 393-400, 1928.

[25] Vinogradov, I. M.: Representation of an odd number as a sum of three primes, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 15:291-294, 1937.