Algebra Lineal

Problemes, exercicis i qüestions

Rafel Amer Ramon

Francesc Carreras Escobar

Josep Tudurí i Fortuny

Departament de Matemàtica Aplicada II

ETSEIT

Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria
Industrial de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Rafel Amer, Francesc Carreras i Josep Tudurí
Escola Tècnica Superiors d'Enginyeria de Terrassa
Colom, 11
08222 Terrassa

algebra@ruth.upc.es

Introducció

Presentem una col·lecció de problemes, exercicis i qüestions d'àlgebra lineal que s'ajusta al programa quadrimestral oficial d'aquesta assignatura establert en el Pla 93 de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Terrassa.

En total hi ha 444 problemes o exercicis i 125 qüestions. Els primers estan agrupats en 9 capítols, i al final del llibre s'inclouen les solucions numèriques. D'entre ells, els 177 que porten un asterisc han estat proposats en els exàmens i controls realitzats des de la tardor del 93 fins a la primavera del 97.

El capítol 10, dividit en seccions que reflecteixen l'estructura dels capítols anteriors, recull les qüestions. També moltes d'elles provenen d'exàmens del pla d'estudis actual.

Tot plegat constitueix un material exhaustiu, pensat per cobrir àmpliament les diferents necessitats de cada estudiant. L'experiència demostra que en un quadrimestre hi ha temps de resoldre amb detall, a les classes de problemes, uns 100 exercicis. Recomanem als alumnes més interessats que considerin també uns altres 50–100 exercicis complementaris. Finalment, a aquells que tinguin dificultats, els suggerim la lectura i l'estudi del "Curs d'Àlgebra Lineal" [1], on trobaran tots els coneixements teòrics necessaris.

Setembre de 2003 — R. Amer, F. Carreras i J. Tudurí

Índex

1

Sistemes d'equacions lineals

1.1 Resolució pel mètode de Gauss

1. Resoleu els sistemes d'equacions següents i indiqueu en cada cas si són compatibles determinats, compatibles indeterminats o incompatibles:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{array}{r} x+2y+z=4 \\ 2x-3y+4z=6 \\ 3x-y+5z=1 \end{array}\right\} ; \quad \text{(b)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+3y+z+u=9 \\ 3x+2y-z-2u=4 \\ 4x-y-5z+u=9 \end{array}\right\} ; \quad \text{(c)}\ \left.\begin{array}{r} 3x-y+z+t=0 \\ 2x+y+z+2t=-2 \\ 3x-y+z+4t=-3 \\ 5x+y-z+t=6 \end{array}\right\} .$$

2. Resoleu els sistemes d'equacions següents i indiqueu en cada cas si són compatibles determinats, compatibles indeterminats o incompatibles:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ -x-5y+4z=0 \end{array}\right\} ; \quad \text{(b)}\ \left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=4 \\ -4x+3y+z=2 \end{array}\right\} ; \quad \text{(c)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=0 \\ x+3z=3 \\ x+y+3z=5 \end{array}\right\} .$$

3. Indiqueu si els sistemes d'equacions següents són compatibles o incompatibles:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{array}{r} -x+3y+z-4t=1 \\ 2x-6y-2z+8t=0 \\ x+y+z+t=1 \end{array}\right\} ; \quad \text{(b)}\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \end{array}\right\} .$$

En els casos que siguin compatibles, trobeu la solució general.

4. Feu el mateix que es demana a l'exercici anterior amb els sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ x-y+z&=1\\ 2x+y&=3\\ 3y-2z&=1 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} 2x-y-z-t&=0\\ x+2y+z-t&=1\\ 3x+y-2t&=1\\ 6x+2y-4t&=1 \end{aligned}\right\} .$$

5. Resoleu els sistemes d'equacions següents pel mètode de Gauss–Jordan:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x-y-z&=6\\ x+y-z&=2\\ x+y+z&=12 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} 2x-5y+3z&=-12\\ 3x+2y-5z&=1\\ 7x-4y+2z&=0 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(c)}\ \left.\begin{aligned} x-2y+z&=-4\\ 3x+y-5z&=1\\ 2x+3y-6z&=5 \end{aligned}\right\} .$$

6. Resoleu simultàniament pel mètode de Gauss–Jordan els tres sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x+y-z&=3\\ x+y&=4\\ 3x+3y-2z&=7 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} x+y-z&=-5\\ x+y&=-2\\ 3x+3y-2z&=-12 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(c)}\ \left.\begin{aligned} x+y-z&=1\\ x+y&=2\\ 3x+3y-2z&=4 \end{aligned}\right\} .$$

7. Resoleu simultàniament pel mètode de Gauss–Jordan els tres sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+3y&=0\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+3y&=4\\ x-y&=2 \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(c)}\ \left.\begin{aligned} x+y&=2\\ 2x+3y&=-2\\ x-y&=14 \end{aligned}\right\} .$$

8. Trobeu un sistema homogeni de dues equacions amb quatre incògnites tal que $x=1$, $y=3$, $z=-2$, $t=-1$ i $x=3$, $y=-1$, $z=2$, $t=-2$ siguin solucions. Trobeu la solució general d'aquest sistema d'equacions.

1.2 Resolució per determinants

9. Apliqueu la regla de Cramer als sistemes següents:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} ax+cy&=e\\ bx+dy&=f \end{aligned}\right\} ;\qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} cy+bz&=1\\ cx+az&=0\\ bx+ay&=0 \end{aligned}\right\} .$$

(Suposem que $ad-bc\neq 0$ en el primer cas i $abc\neq 0$ en el segon.)

10. Resoleu els sistemes d'equacions següents pel mètode de Cramer:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}\right\} .$$

11. Resoleu els sistemes homogenis següents:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} x + y + z - t &= 0 \\ x - y + t &= 0 \\ x + 5y + 3z - 5t &= 0 \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(b))}\quad \left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ x - y - 3z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 4x + 3y - 5z &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

12. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x - 2y + z + t - u &= 0 \\ 2x + y - z - t + u &= 0 \end{aligned}\right\} ;\ \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} x - 2y + z + t &= 1 \\ x - 2y + z - t &= -1 \\ x - 2y + z + 5t &= 5 \end{aligned}\right\} ;\ \text{(c)}\ \left.\begin{aligned} 2x - y + z + t &= 1 \\ x + 2y - z + 4t &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11t &= -2 \end{aligned}\right\} .$$

13. Resoleu els sistemes d'equacions següents per determinants:

$$\text{(a)}\ \left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - 3y + 4z &= 6 \\ 3x - y + 5z &= 1 \end{aligned}\right\} ;\quad \text{(b)}\ \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z + u &= 9 \\ 3x + 2y - z - 2u &= 4 \\ 4x - y - 5z + u &= 9 \end{aligned}\right\} ;\quad \text{(c)}\ \left.\begin{aligned} 3x - y + z + t &= 0 \\ 2x + y + z + 2t &= -2 \\ 3x - y + z + 4t &= -3 \\ 5x + y - z + t &= 6 \end{aligned}\right\} .$$

14. Resoleu els sistemes d'equacions següents per determinants:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \\ -x - 5y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} ; \quad \text{(b)}\quad \left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3x - y - 2z &= 4 \\ -4x + 3y + z &= 2 \end{aligned}\right\} ; \quad \text{(c)}\quad \left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 3z &= 3 \\ x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\} .$$

1.3 Discussió de sistemes

15. Calculeu a i b de manera que els sistemes d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - t &= 0 \\ 2x + 4y + 5z + 3t &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x + 6y + 2z + at &= 0 \\ x - by + 4z - 6t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tinguin les mateixes solucions.

16. Descriviu totes les solucions del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{y}{2} - z &= 1 \\ 2x + y + az &= 0 \end{aligned}\right\}$$

per als diferents valors del nombre real a.

17. Donat el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ ty + z &= 0 \\ x + (t+1)y + tz &= t+1 \end{aligned}\right\} ,$$

determineu el valor de t en cada un dels casos següents:

(a) El sistema té solució única.
(b) El sistema té infinites solucions.
(c) El sistema no té solució.

18. Discutiu segons el valor del paràmetre a el caràcter del sistema d'equacions lineals següent i resoleu-lo en els casos en que sigui compatible:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a+1)z &= a \\ x + y + z &= a+1 \end{aligned}\right\} .$$

19. Discutiu segons els valors del paràmetre a el caràcter del sistema d'equacions lineals següent i resoleu-lo en els casos en que sigui compatible:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= 9 \\ x + 2y + az &= 6 \\ 3x + 4z &= 3a^2 \end{aligned}\right\} .$$

20. Estudieu segons els valors del paràmetre α els sistemes d'equacions següents:

(a) $\left.\begin{aligned} (\alpha-2)x - y + z &= 0 \\ x + (2\alpha-1)y - \alpha z &= 0 \\ x + \alpha y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$; (b) $\left.\begin{aligned} x - 2y + \alpha z &= \alpha \\ x + 4y + \alpha^2 z &= 6\alpha \\ x - 8y + \alpha^2 z &= -4 \end{aligned}\right\}$; (c) $\left.\begin{aligned} x + \alpha y - z &= -2 \\ -2y + z &= 5 \\ -x - 5y + 2z &= 7 \\ x + 3y - z &= 1-\alpha \end{aligned}\right\}$.

21. Estudieu segons els valors dels paràmetres a i b el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x + by + az &= 1 \\ ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \end{aligned}\right\} .$$

22. Estudieu segons els valors dels paràmetres a i b el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 5x + 2y + 3z &= 4 \\ x - z &= b \end{aligned}\right\} .$$

1.4 Problemes de plantejament

23. Trobeu un polinomi $p(x)$ de grau 3 tal que $p(2) = 3$, $p'(2) = 1$, $p''(2) = 4$ i $p'''(2) = -18$.

24. Tres productes A, B i C contenen els percentatges següents de Fe, Zn i Cu:

	Fe	Zn	Cu
A	50%	30%	20%
B	40%	30%	30%
C	30%	70%	0%

Quin percentatge de cada producte hem de combinar per obtenir un compost que contingui el 44% de Fe, el 38% de Zn i el 18% de Cu?

25. Una indústria utilitza tres màquines en la fabricació de quatre productes diferents. En la fabricació d'una unitat de cada producte hem d'utilitzar cada màquina el temps que indica la taula següent (en hores):

	Producte 1	Producte 2	Producte 3	Producte 4
Màquina 1	1	2	1	2
Màquina 2	2	0	1	1
Màquina 3	1	2	3	0

Quantes unitats de cada producte es fabriquen en un dia, si totes les màquines s'utilitzen 8 hores?

26. La taula següent dóna el contingut de vitamines A, B i C de tres aliments, I, II i III, en unitats de vitamina per kg. d'aliment:

	I	II	III
A	1	2	3
B	3	3	0
C	4	5	3

Es busca una combinació dels aliments que aporti 11 u. de vitamina A, 9 u. de B i 20 u. de C.

(a) Calculeu les quantitats màxima i mínima possibles de cada aliment.

(b) Si el cost dels aliments és de 600, 100 i 150 pts/kg. respectivament, determineu entre quins valors oscil·la el preu de la combinació.

27. Disposem d'una col·lecció de monedes distribuïdes en tres piles. Es passen de la tercera pila a la segona tantes monedes com hi havia a la segona, i després es passen de la segona a la primera tantes monedes com hi havia a la primera. Aleshores, les tres piles tenen el mateix nombre de monedes.

(a) Calculeu el mínim nombre de monedes amb les quals és possible fer aquestes operacions.

(b) És possible fer-ho amb un nombre parell de monedes? I amb un nombre senar?

28. Després de 38 jornades, ha acabat la lliga i el M és subcampió. El seu entrenador manifesta: "Ens ha perjudicat el sistema de puntuació actual; amb el sistema anterior, en comptes de x punts n'hauríem tret y, dos més que el B". Sabent les quantitats x i y que ha mencionat l'entrenador, podríeu determinar quants partits ha guanyat, empatat i perdut el M?

Nota: abans es donaven 2 punts per victòria, 1 per empat i 0 per derrota; ara es donen 3 punts per victòria, 1 per empat i 0 per derrota.

29. Tres patinadors artístics es mouen en el pla de tal manera que el més jove es troba sempre en el punt mitjà dels altres dos. Quants graus de llibertat té el sistema? I si, a més, el més gran segueix sempre una línea recta?

30. El Joan li explica al Pere un examen de matemàtiques que acaba de fer. "Havíem de resoldre un sistema de Cramer 3×3: la primera equació era $3x + 4y + 5z = 18$, la segona $x - y + z = 3$ i la tercera $x + 4y +$ un número per $z = 8$. Aquest número era enter positiu, i la solució la formaven tres nombres positius". Trobeu quin era el sistema i resoleu-lo.

31. En un dipòsit hi ha tres aixetes. Si estan obertes la primera i la segona, el dipòsit s'omple en dues hores; si estan obertes la primera i la tercera, s'omple en tres hores; i, si estan obertes la segona i la tercera, s'omple en dues hores. En quant de temps omple el dipòsit cada aixeta per separat?

32. En un dipòsit hi ha quatre aixetes, dues del tipus A i dues del B, i dos desguassos del mateix tipus. Obrint una aixeta de cada mena i un desguàs, el dipósit s'omple en 12 hores. Afegint l'altra aixeta A s'omple en 3 hores. En canvi, afegint l'aixeta B s'omple en 4 hores. Finalment, amb una aixeta de cada tipus i els dos desguassos es buida en 4 hores. Determineu, si és possible, quan triguen per separat una aixeta A o una aixeta B en omplir-lo i un desguàs en buidar-lo.

33. Ajusteu un polinomi de grau mínim als punts $(-2, 25)$, $(1, -8)$, $(2, -15)$ i $(4, -23)$.

34. Experimentalment hem observat la relació següent entre dues variables x i y:

x	0	0.5	1	1.5	2
y	5	5.15	5.6	6	6.6

(a) Ajusteu un polinomi de segon grau a les dades per a $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.

(b) Compareu el valor real per a $x = 0.5$ i $x = 1.5$ amb el valor que dóna el polinomi.

(c) Feu una estimació del valor de y quan $x = 1.8$.

(d) Feu una predicció del valor de y quan $x = 2.5$.

2

Matrius i determinants

2.1 Propietats i càlcul dels determinants

1. Calculeu els determinants següents:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \; ; \; \text{(b)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \; ; \; \text{(c)} \begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta \\ -\cos\alpha+\cos\beta & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix} .$$

2. Calculeu els determinants següents mitjançant la regla de Sarrus:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \; ; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \; ; \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} .$$

3. Resoleu les equacions següents:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \text{(c)} \begin{vmatrix} x-5 & 3 & -2 \\ -6 & x+4 & -4 \\ -4 & 4 & x-5 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. Aplicant transformacions elementals o desenvolupant pels coeficients d'una fila o columna, comproveu les igualtats següents:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$

5. Calculeu els determinants següents:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

6. Aplicant el mètode de Gauss, calculeu els determinants següents d'ordre 4:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

2.2 Rang i inversa d'una matriu

7. Calculeu pel mètode de Gauss el rang de les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -12 & -10 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & -13 \end{pmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & -8 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Calculeu el rang de les matrius següents, indicant un menor amb determinant no nul d'ordre màxim:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \end{pmatrix};$$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Calculeu el rang de les matrius següents segons els valors del paràmetre α:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha^3 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 2-\alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Calculeu el rang de les matrius següents segons els valors de a i b:

(a) $\begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{pmatrix}$.

11. Quines de les matrius següents són regulars? En cas afirmatiu, calculeu la matriu inversa.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Calculeu la inversa de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

13. Calculeu els valors de λ per als quals són regulars les matrius següents:

(a) $\begin{pmatrix} 1+\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1+\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Aplicarem una matriu de permutació 4×4 a la codificació i descodificació de missatges per blocs de quatre símbols, que poden ser lletres, nombres, signes de puntuació o espais en blanc (␣). Considerem la matriu C que s'indica i codifiquem, per exemple, l'expressió "`ARA, FEM UNA PROVA`".

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathtt{A} & \_ & \_ & \_ & \mathtt{V} \\ \mathtt{R} & \mathtt{F} & \mathtt{U} & \mathtt{P} & \mathtt{A} \\ \mathtt{A} & \mathtt{E} & \mathtt{N} & \mathtt{R} & \_ \\ \mathtt{,} & \mathtt{M} & \mathtt{A} & \mathtt{O} & \_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathtt{,} & \mathtt{M} & \mathtt{A} & \mathtt{O} & \_ \\ \mathtt{A} & \_ & \_ & \_ & \mathtt{V} \\ \mathtt{A} & \mathtt{E} & \mathtt{N} & \mathtt{R} & \_ \\ \mathtt{R} & \mathtt{F} & \mathtt{U} & \mathtt{P} & \mathtt{A} \end{pmatrix} .$$

La frase codificada és “`,AARM_EFA_NUO_RP_V_A`”.

(a) Codifiqueu el missatge “`NANO, NO ENTENC RES`”.
(b) Descodifiqueu el missatge “`ÒAXIL_OMAAC_DNIT,UIBO_IT_!__`”.

2.3 Operacions i equacions amb matrius

15. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

calculeu $(A+B)C$, CAC, AC^2 i B^3.

16. Sabem que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu $(A+B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B)$ i $A^2 - B^2$. Per què no es compleixen les igualtats corresponents? Quina condició han de complir les matrius A i B per tal que siguin certes aquestes igualtats?

17. Calculeu la matriu $C = 2B^2 - A^{-1}B$ sabent que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Calculeu la matriu $C = AB^{-1} + 2A^2$ sabent que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

comproveu que $A^2 = 2A - I$ i a partir d'aquesta igualtat calculeu A^{10}.
Demostreu per inducció que A^n també es pot posar com a combinació lineal de les matrius I i A.

20. Sigui A una matriu tal que $A^2 = A + 2I$. Expresseu A^{12} com a combinació lineal de les matrius I i A.
Demostreu per inducció que A^n també es pot posar com a combinació lineal de les matrius I i A.

21. Sigui A una matriu tal que $A^2 = 3A - 2I$. Demostreu que A és regular i que A^{-1} és una combinació lineal de I i A.

22. Calculeu $(AB)^t$ i B^tA^t sabent que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. (a) Representeu matricialment, en la forma $Y = AX$, el sistema de relacions

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

(b) Anàlogament, representeu en la forma $Z = BY$ el sistema de relacions

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ z_2 = 6y_1 + 4y_3 \end{cases}$$

(c) Calculeu la matriu BA i feu-la servir per expressar z_1 i z_2 en funció de x_1, x_2, x_3 i x_4.

24. Trobeu una matriu X tal que $AX = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

25. Calculeu X sabent que $AX = BA$ i que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Resoleu l'equació matricial $AX = A$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Ailleu la matriu X de la relació $XAB^{-1} = A$ sabent que la matriu A és regular. Calculeu X si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

28. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Analitzeu si la matriu A és regular o no.

(b) Resoleu l'equació matricial $AX = B$.

(c) Trobeu una matriu C tal que l'equació $AX = C$ no tingui solució.

29. Resoleu, si és possible, l'equació $AX = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

30. Ailleu X de la relació $A(X^t)^{-1}B = C$ sabent que A, B i C són regulars, i calculeu-la si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3

Espais vectorials

3.1 Dependència lineal

1. Determineu els valors de a i b per tal que els vectors $(0, 1, a, 1)$, $(2, 1, 5, b)$ i $(1, 2, 1, 0)$ siguin linealment dependents.

2. Calculeu a i b de manera que els vectors $u = (1, 2, 0, a)$, $v = (3, 2, b, -1)$ i $w = (2, 7, a, -3)$ siguin linealment dependents, i expresseu el tercer com a combinació lineal dels altres dos.

3. Determineu els valors de a per tal que el rang del conjunt format pels vectors $(1, 2, a)$, $(2, a, -1)$ i $(1, -1, a + 2)$ sigui 2.

4. Estudieu la dependència o independència lineal dels conjunts de vectors següents:

(a) $(2, -3, 1)$, $(3, -1, 5)$ i $(1, -4, 3)$.

(b) $(4, -5, 2, 6)$, $(2, 2, -1, 3)$, $(6, -3, 3, 9)$ i $(4, -1, 5, 6)$.

(c) $(1, 0, 0, 2, 5)$, $(0, 1, 0, 3, 4)$, $(0, 0, 1, 4, 7)$ i $(2, -3, 4, 11, 12)$.

5. Comproveu que els vectors $a = (1, 7, -1, 0)$, $b = (2, 13, 0, 1)$, $c = (3, 17, 4, 2)$ i $d = (3, 15, 7, 2)$ de $\mathbb{R}^4$ són linealment dependents, i que cada un d'ells es pot posar com a combinació lineal dels altres tres.

6. Comproveu que els vectors $(2,3,-1,5)$, $(6,1,1,3)$, $(-3,5,-1,9)$ i $(0,2,-1,3)$ són linealment dependents però el tercer vector no es pot posar com a combinació lineal dels altres tres. És una contradicció, això?

3.2 Bases, components i dimensió

7. Quins dels conjunts de vectors següents són bases de $\mathbb{R}^3$?

(a) $(3,13,6)$, $(2,9,4)$ i $(12,56,25)$.

(b) $(1,0,1)$, $(2,1,4)$ i $(-3,-2,-7)$.

(c) $(1,-1,-1)$, $(-2,-1,-2)$ i $(0,1,1)$.

(d) $(1,4,-3)$, $(0,3,-2)$ i $(-2,-12,9)$.

(e) $(1,0,2)$, $(3,1,4)$ i $(2,1,2)$,

8. Calculeu les components del vector $u=(3,-2,3)$ en les bases de l'exercici anterior.

9. Considereu els vectors $(2,1,3)$, $(2,3,0)$ i $(4,-2,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Comproveu que formen base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $(4,2,3)$, $(0,4,-3)$ i un de la base anterior.

10. Les components d'un vector en la base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$ són (x,y). Calculeu les seves components en la base $\mathcal{B}'=\{e_1+e_2,e_1-e_2\}$.

11. Determineu els valors de a i b sabent que les components del vector (5,7) en les bases

$$\mathcal{B}_1=\{(1,-1),(1,a)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2=\{(7,5),(2,b)\}$$

són les mateixes.

12. Sabent que $\mathcal{B}_1=\{(1,2),(4,-1)\}$ i $\mathcal{B}_2=\{(1,1),(1,-1)\}$ són dues bases de $\mathbb{R}^2$, i que el vector u té components $(a,2)$ en la base $\mathcal{B}_1$ i components $(-3,b)$ en la base $\mathcal{B}_2$, calculeu els valors de a i b.

13. Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

demostreu que el conjunt de matrius

$$F=\{B\in M(2\times 2;\mathbb{R}) \text{ tals que } AB=BA\}$$

és un subespai vectorial, i trobeu una base de F.

14. Sigui F el conjunt de matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} a+2b & b \\ -3b & a-2b \end{pmatrix} \qquad \text{amb} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Demostreu que F és un subespai vectorial de $M(2 \times 2\,; \mathbb{R})$ i trobeu una base de F.

(b) Si $A \in F$, és cert que $A^n \in F$ per a tot $n \geq 1$?

15. Trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ que estigui formada pels vectors $(5, 3, -1, 2)$, $(1, 0, 3, 2)$ i dos més d'entre els vectors $(7, 6, -11, -2)$, $(2, 1, -2, 4)$, $(1, -2, 0, 3)$ i $(6, 3, 2, 4)$.

16. Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors

$$(1, 0, 1, 2), \quad (2, 1, a+3, 6), \quad (-2, 2, 0, a^2 - a) \quad \text{i} \quad (-1, 3, 2, 4)\,.$$

Calculeu la dimensió de S en funció del paràmetre a.

3.3 Subespais vectorials

Nota. Les bases i les equacions implícites d'un subespai no són úniques. Així doncs, quan es calculen convé comprovar que els vectors de la base o del sistema de generadors són solucions de les equacions implícites.

17. Quins dels subconjunts de $\mathbb{R}^4$ següents són subespais vectorials?

$$E_1 = \{(x, y, z, t) \quad \text{tals que} \quad x + y = 1\}\,.$$

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \quad \text{tals que} \quad x + y = z + t\}\,.$$

$$E_3 = \{(x, y, z, t) \quad \text{tals que} \quad xz = 0\}\,.$$

$$E_4 = \{(x, y, z, t) \quad \text{tals que} \quad x - y + z - t = 0\}\,.$$

$$E_5 = \{(x, y, z, t) \quad \text{tals que} \quad x = y = z\}\,.$$

En els casos que ho siguin, trobeu una base del subespai.

18. Calculeu les equacions implícites dels subespais següents:

(a) $F_1 = \langle\, (1, 2, -3)\,,\ (2, 2, -1)\,\rangle$.

(b) $F_2 = \langle\, (1, -1, 3, 2)\,,\ (2, 3, 4, -1)\,\rangle$.

(c) $F_3 = \langle\, (2, -1, 0, 1)\,,\ (2, 1, 3, -1)\,,\ (1, 0, 2, 1)\,\rangle$.

19. Calculeu una base i les equacions implícites dels subespais següents:

(a) $F_1 = \langle\, (1, -1, 1, 0)\,,\ (1, 1, 0, 1)\,,\ (2, 0, 1, 1)\,\rangle\,.$

(b) $F_2 = \langle\, (2, 3, -1)\,,\ (1, 2, 2)\,,\ (1, 1, -3)\,\rangle\,.$

(c) $F_3 = \langle\, (1, 1, 1)\,,\ (-2, 1, 2)\,,\ (-1, 2, 3)\,\rangle\,.$

(d) $F_4 = \langle\, (1, -2, -2)\,,\ (1, -1, -2)\,,\ (1, 0, -1)\,\rangle\,.$

(e) $F_5 = \langle\, (1, -1, 1, -1, 1)\,,\ (1, 1, 0, 0, 3)\,,\ (3, 1, 1, -1, 7)\,\rangle\,.$

20. Trobeu una base dels subespais de $\mathbb{R}^3$ següents, definits per les seves equacions implícites:

(a) $2x + 3y - z = 0\,.$

(b) $x + 2y + z = 0\,,\ x + y - z = 0\,.$

(c) $3x + 2y + 5z = 0\,,\ -x + 3y + z = 0\,,\ 2x + 5y + 6z = 0\,.$

(d) $x + y + 2z = 0\,,\ 4x + 5y + 8z = 0\,,\ 6x + 7y + 13z = 0\,.$

21. Trobeu una base dels subespais de $\mathbb{R}^4$ següents, donats per les seves equacions implícites:

(a) $y + 2z + 3t = 0\,,\ x + 2y + z - t = 0\,.$

(b) $x + 3y + 3z + t = 0\,,\ x + z + t = 0\,.$

(c) $x + 2y - z = 0\,,\ x + t = 0\,,\ 2y - z - t = 0\,.$

22. (a) Calculeu el rang del conjunt format pels vectors $a = (1, 0, 1, 0)$, $b = (1, 1, 1, -1)$, $c = (2, 1, 2, -1)$, $d = (1, 2, 2, -1)$ i $e = (0, 1, 1, 0)$.
(b) Determineu la dimensió del subespai S de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$\left.\begin{aligned} x + t &= 0 \\ y - z &= 0 \\ 3x - 2y + 2z + 3t &= 0 \end{aligned}\right\}\,.$$

(c) Doneu un base de S escollida d'entre els vectors de l'apartat a.

23. Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$ engendrat pels vectors $(1, 1, -2, -2)$ i $(0, -1, 1, 1)$, i considereu també els vectors $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (1, -1, 0, 0)$, $c = (1, 0, 0, 0)$, $d = (-2, 1, 1, 1)$ i $e = (1, 2, -3, -3)$. Trobeu la dimensió de S, les seves equacions implícites i una base de S escollida entre a, b, c, d i e.

24. Considereu el subespai $H = \langle\, a,\ b,\ c,\ d\,\rangle$ de $\mathbb{R}^4$, on

$$a = (1, 0, -1, 0), \quad b = (-1, 2, -1, 2), \quad c = (0, 1, -1, 1) \quad \text{i} \quad d = (1, 1, -2, 1)\,.$$

Digueu quina és la dimensió de H, doneu una base de H que no contingui cap dels vectors a, b, c i d ni múltiples seus i calculeu les components de a en la base que heu donat.

3.4 Operacions amb subespais

25. Siguin S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(3, 2, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ i $(0, 1, 2, 3)$ i T el subespai d'equacions $x - y - z + t = 0$, $x + y - z - t = 0$. Trobeu:

(a) La dimensió i una base de $S \cap T$.

(b) La dimensió i les equacions implícites de $S + T$.

26. En cada un dels casos següents calculeu una base i les equacions implícites dels subespais F, G, $F \cap G$ i $F + G$:

(a) $F = \langle (1, -2, 0, 3), (2, 1, -2, 4), (0, 2, -1, 1) \rangle$ i $G = \langle (1, 0, 2, -1), (2, -3, 0, 1) \rangle$.

(b) $F = \langle (1, 2, -1), (1, 1, 0) \rangle$ i $G\, :\, x + y - z = 0$.

(c) $F = \langle (1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, -1) \rangle$ i $G : x - y + t = 0$.

(d) $F : x - y + z + t = 0$, $2x + z = 0$ i $G : x - 3y + 2z + 3t = 0$.

27. Donats els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (-1, 4, -1, 2)\, ,\, (5, 2, -1, 2) \rangle \quad \text{i} \quad G = \langle (7, 16, -5, 10)\, ,\, (4, 6, -2, 4) \rangle\, ,$$

comproveu que $F = G$.

28. Donats els subespais de $\mathbb{R}^4$ definits per

$$\begin{aligned} F &= \langle (2, 0, 5, 2), (3, -1, 9, 3) \rangle \quad \text{i} \\ G &= \langle (3, 1, 6, 3), (3, 2, 5, 7), (2, 1, 4, 6), (1, 1, 1, 1) \rangle\, , \end{aligned}$$

comproveu que $F \subset G$ i amplieu una base de F fins a obtenir una base de G.

29. Siguin T i S els subespais de $\mathbb{R}^3$ següents:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x - y + 3z = 0\} \quad \text{i} \\ T &= \langle (1, 0, -1) \rangle\, . \end{aligned}$$

Comproveu que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

30. Donats els subespais $F = \langle (1, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle$ i G amb equacions implícites

$$\left. \begin{aligned} x + y + 5z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned} \right\}\, ,$$

comproveu que $F + G$ és suma directa i trobeu vectors $u_1 \in F$ i $u_2 \in G$ tals que $u_1 + u_2 = (6, 8, 3)$.

31. Considereu les rectes de $\mathbb{R}^3$ definides per

$$R \,:\, \left\{ \begin{array}{r} x-2y-z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{array} \right. \quad \text{i} \quad S \,:\, \left\{ \begin{array}{r} x-y-4z=0 \\ x+4y+3z=0\,. \end{array} \right.$$

(a) Trobeu un generador de R i un generador de S.

(b) Quina és l'equació implícita del pla que conté les dues rectes?

32. Donats a $\mathbb{R}^3$ els plans $P_1 \,:\, x+y-z=0$ i $P_2 \,:\, x-3y-2z=0$, trobeu una base de P_2, una base $\{\, w \,\}$ de $P_1 \cap P_2$ i les components del vector w en la base de P_2.

33. Trobeu el valor de α per tal que el pla d'equació $\alpha x - 2y + z = 0$ contingui a la recta definida per $x+y+z=0$, $3x+y+2z=0$.

34. Trobeu el valor de α per tal que la suma dels subespais F i G de $\mathbb{R}^4$ tingui dimensió 3, sabent que les equacions implícites de F i G són, respectivament,

$$\left. \begin{array}{r} x+\alpha t=0 \\ x+y+2\alpha z=0 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{r} 3y+6\alpha z-t=0 \\ 3y+6z-t=0 \end{array} \right\}\,.$$

35. Considerem els plans de $\mathbb{R}^4$ definits per

$$P = \langle\, (1,1,1,0), (0,1,\alpha,1) \,\rangle$$
$$Q \,:\, \left\{ \begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ x-t=0\,. \end{array} \right.$$

Trobeu els valors de α per als quals P i Q no formen suma directa i, per a aquests valors de α, trobeu una base i la dimensió de $P \cap Q$.

36. Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle\, (-2, 2\alpha-2, \alpha+5, \alpha+3)\,,\ (1,2,-2,-1)\,,\ (1,\alpha+5,2,5)\,,\ (0,2,4,6) \,\rangle\,.$$

(a) Trobeu l'únic valor de α per al qual $\dim(F) = 2$.

(b) Amb aquest valor trobeu una base i les equacions implícites del subespai $F \cap G$, sabent que $G = \langle\, (3,4,2,5),\ (9,10,-10,-5) \,\rangle$.

37. Els subespais F i G de $\mathbb{R}^4$ tenen equacions implícites

$$\left. \begin{array}{r} x+y+z-t=0 \\ (\alpha-1)x+(\alpha+1)z+t=0 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{r} x+y-\alpha z=0 \\ (2\alpha+1)x+y+z=0 \end{array} \right\}$$

respectivament.

(a) Comproveu que $\dim(F) = \dim(G) = 2$ per a qualsevol valor de α.

(b) Trobeu els valors de α per als quals $\dim(F + G) = 3$.

38. Sabent que S és el subespai de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, 2, -1)$ i $(1, 0, 1)$ i T és el subespai d'equació $x - y - \lambda z = 0$, descriviu els subespais $S \cap T$ i $S + T$ segons els valors de λ.

3.5 Canvis de base

39. Si l'equació d'un pla de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és $x + z = 0$, quina és la seva equació en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 2)\}$?

40. Escriviu l'equació matricial del canvi de base de

$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

a la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Apliqueu-la a trobar les equacions implícites en la base $\mathcal{B}'$ del subespai S definit en la base canònica per

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{aligned}\right\} .$$

41. El subespai F de $\mathbb{R}^4$ té equacions implícites

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3t = 0 \\ 3x - 2y - 3z + 5t = 0 \end{aligned}\right\} .$$

El vector u té components (x_1, x_2, x_3, x_4) en la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0, 0), (0, 1, -1, 1), (0, 0, -3, 5), (0, 0, 0, 1)\} .$$

Quines relacions han de complir x_1, x_2, x_3, x_4 per tal que el vector u pertanyi al subespai F?

42. Les components dels vectors u_1, u_2 i u_3 en la base $\{e_1 = (3, 0, 1), e_2 = (4, 3, 2), e_3 = (6, 4, 3)\}$ són $(3, -2, 1)$, $(2, -1, -1)$ i $(1, -1, 3)$ respectivament. Comproveu que els vectors $u_1,\ u_2,\ u_3$ formen base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les components dels vectors $e_1,\ e_2,\ e_3$ en aquesta base.

43. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Les components dels vectors $u_1,\ u_2,\ u_3$ en aquesta base són, respectivament, $(1, 4, 6)$, $(1, 5, 7)$ i $(2, 8, 13)$. Comproveu que $u_1,\ u_2,\ u_3$ també formen una base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les components dels vectors de la base $\mathcal{B}$ en aquesta nova base.

44. (a) Demostreu que el conjunt $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$.
(b) Escriviu la relació entre les components (x, y, z) d'un vector arbitrari en la base canònica i les components (x', y', z') del mateix vector en la base $\mathcal{B}'$.
(c) Determineu l'equació implícita, en la base canònica, del pla S que té per equació $x' + 2y' - z' = 0$ en la base $\mathcal{B}'$.

45. Si l'equació d'un pla H en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ és $2x' + y' + z' = 0$, quina és l'equació de H en la base canònica de $\mathbb{R}^3$?

46. Donades les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 3), (2, -1)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (2, -3)\}$ de $\mathbb{R}^2$, calculeu les equacions que relacionen les components (x, y) d'un vector en la primera base i les components (x', y') del mateix vector en la segona.

47. Sigui $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ una base de l'espai vectorial E. Calculeu la matriu del canvi de base

$$(E, \mathcal{B}_1) \xrightarrow{\quad C \quad} (E, \mathcal{B}_2)\,,$$

on $\mathcal{B}_1 = \{\, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3 \,\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\, e_1 - e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_1 \,\}$.

48. Considereu les bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 1)\} \quad \text{i}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}\,.$$

(a) Calculeu la matriu C del canvi de base

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \xrightarrow{\quad C \quad} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1)\,.$$

(b) Si l'equació d'un subespai F en la base canònica és $x + y + z = 0$, quines són les seves equacions en les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$?

49. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{(-1, -2, 2), (1, -1, 0), (-1, 0, 1)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 4, 6), (1, 5, 7), (2, 8, 13)\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) Quina relació hi ha entre les components (x_1, x_2, x_3) d'un vector en la primera base i les seves components (y_1, y_2, y_3) en la segona?

(b) El vector v té components $(1, 1, -1)$ en la segona base: quines són les seves components en la primera?

50. L'equació del pla P en la base $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ és $x' - y' + z' = 0$, mentre que les components en la base $\mathcal{B}'' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ d'un generador v de la recta R són $(1, 2, 0)$. Esbrineu si la recta R és o no inclosa en el pla P.

51. Sabent que les components dels vectors $(1, 2)$ i $(2, 3)$ en la base $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2\}$ són $(1, 4)$ i $(1, 3)$ respectivament, trobeu els vectors u_1 i u_2 expressats en la base canònica.

52. Sigui $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sabent que les components dels vectors $(1, -2, 2)$, $(-1, 1, 0)$ i $(1, -2, 1)$ en aquesta base són $(4, 2, 5)$, $(-2, -1, -2)$ i $(-3, -2, 1)$ respectivament, expresseu els vectors u_1, u_2, u_3 en la base canònica.

4

Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

4.1 Producte escalar, norma i angle

1. (a) A partir dels vectors $u = (-2, 4, 4)$ i $v = (3, 0, 4)$, calculeu $\| u \|$ i $\alpha(u, v)$.
(b) Donats els vectors $u_1 = (3, 0, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2)$ i $u_3 = (1, -1, 1)$, calculeu les seves normes i els angles que formen.

2. Referit $\mathbb{R}^2$ a una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ tal que $\| e_1 \| = 3$, $\| e_2 \| = 4$ i $\alpha(e_1, e_2) = 90^\circ$, es consideren els vectors $a = e_1 + e_2$ i $b = 2e_1 - e_2$. Calculeu $\| a \|$, $\| b \|$ i $a \cdot b$.

3. (a) Sabent que $\| u_1 \| = 2$, $\| u_2 \| = 4$ i $\alpha(u_1, u_2) = 60^\circ$, calculeu la longitud del vector $u = 2u_1 + 4u_2$.
(b) Sabent que $\| u_1 \| = 2$, $\| u_2 \| = 3$ i $\alpha(u_1, u_2) = 60^\circ$, calculeu l'angle format pels vectors u_1 i $2u_1 - u_2$.

4. Els vectors de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ compleixen que $\| u_1 \| = \| u_2 \| = 2$, $\| u_3 \| = 1$, $\alpha(u_1, u_2) = 60^\circ$, $\alpha(u_1, u_3) = 120^\circ$ i $\alpha(u_2, u_3) = 90^\circ$. Comproveu que els vectors que tenen components $(1, -1, 3)$ i $(-2, 2, 1)$ en la base $\mathcal{B}$ són perpendiculars.

5. Si els vectors u i v tenen la mateixa norma, comproveu que els vectors $u + v$ i $u - v$ són perpendiculars.

6. Demostreu les igualtats següents relatives a la norma i el producte escalar:

(a) $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2)$.

(b) $u \cdot v = \dfrac{1}{2}(\| u+v \|^2 - \| u \|^2 - \| v \|^2)$.

(c) $u \cdot v = \dfrac{1}{2}(\| u \|^2 + \| v \|^2 - \| u-v \|^2)$.

(d) $u \cdot v = \dfrac{1}{4}\| u+v \|^2 - \dfrac{1}{4}\| u-v \|^2$.

7. Siguin u_1 i u_2 dos vectors de $\mathbb{R}^2$ tals que $\| u_1 \| = \| u_2 \| = 2$ i $u_1 \cdot u_2 = 2$. Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ expressada en termes de u_1 i u_2.

8. Sigui $\mathcal{B} = \{ u,\ v \}$ una base de $\mathbb{R}^2$ tal que $\| u \| = 2$, $\| v \| = 1$ i $\alpha(u, v) = 60^\circ$. Busqueu una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ expressada en termes de u i v.

9. A partir d'una base $\mathcal{B} = \{ e_1,\ e_2,\ e_3 \}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\| e_1 \| = \| e_2 \| = 2$, $\| e_3 \| = 3$, $\alpha(e_1, e_2) = 120^\circ$, $\alpha(e_1, e_3) = 90^\circ$ i $\alpha(e_2, e_3) = 60^\circ$, determineu una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

10. Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ expressada en termes dels vectors u_1, u_2 i u_3 de l'exercici 4..

4.2 Ortogonalitat i mètode de Gram–Schmidt

11. Donat el subespai de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ x-y+z&=0 \end{aligned}\right\} ,$$

determineu:

(a) La dimensió de S.
(b) Una base de $S^\perp$.

12. Trobeu el valor de β per tal que la recta S de $\mathbb{R}^3$ d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=0 \\ 2x+y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

estigui inclosa en el pla T d'equació $4x + y - \beta z = 0$. Per a aquest valor de β, determineu una base ortogonal $\mathcal{B} = \{ v_1,\ v_2,\ v_3 \}$ de $\mathbb{R}^3$ amb $v_1 \in S$ i $v_2 \in T$.

13. Determineu una base ortonormal del subespai S de $\mathbb{R}^4$ definit per l'equació $x-y+2z+t = 0$ i amplieu-la a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

14. Trobeu bases ortonormals dels subespais vectorials següents:

(a) Pla de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, 2, 2)$ i $(7, -4, 5)$.

(b) Subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1, 2, 0, 1)$, $(-2, 5, 3, -2)$ i $(4, 1, 7, 0)$.

(c) Pla de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(2, 4, 3, -1)$ i $(2, 5, 3, 1)$.

15. Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(0, 1, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 0)$ i $(1, -1, 1, -1)$. Trobeu una base ortonormal de S.

16. Trobeu una base ortogonal i una base ortonormal del subespais següents:

(a) Pla de $\mathbb{R}^3$ d'equació $2x + y - 5z = 0$.

(b) Subespai de $\mathbb{R}^4$ definit per $x + y - z = 0$, $z - y + t = 0$.

17. Trobeu una base ortonormal del subespai S de $\mathbb{R}^4$ definit per $x - y + z + t = 0$.

18. Calculeu una base i les equacions implícites dels ortogonals dels subespais següents:

(a) Pla de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, -2, 3)$ i $(2, 1, 4)$.

(b) Pla de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(2, 1, 3, -1)$ i $(4, 1, 2, 3)$.

19. Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z + t &= 0 \\ 2x - y + z - 2t &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

(a) Trobeu una base ortogonal de S.

(b) Trobeu una base i les equacions implícites de l'ortogonal de S.

20. Trobeu bases ortogonals de F i de $F^{\perp}$, on F és el subespai de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions $x + z - 2t = 0$, $y + t = 0$.

21. L'equació d'un pla P en la base canònica és $y + 3z = 0$, i les equacions d'una recta R en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ són $x' + y' = 0$, $x' + z' = 0$. Decidiu si R és ortogonal a P o està continguda en el pla.

22. L'equació del pla P en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ és $x' + y' - 2z' = 0$, mentre que les components en la base $\mathcal{B}'' = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ d'un generador de la recta R són $(1, 1, -2)$. Esbrineu si la recta R és o no ortogonal al pla P.

4.3 Projecció ortogonal i simetria

23. Sigui S el pla d'equació $2x + y - z = 0$. Expresseu el vector $u = (7, 0, 2)$ com a suma $u = u_1 + u_2$ amb $u_1 \in S$ i $u_2 \in S^{\perp}$.

24. Calculeu la projecció ortogonal del vector $(1, 2, -2)$ sobre els subespais de $\mathbb{R}^3$ següents:

(a) $F_1 = \langle\, (-4, 3, 2), (1, 1, 3)\, \rangle$.

(b) $F_2 = \langle\, (1, -2, 0), (-2, 1, 1)\, \rangle$.

(c) $F_3 = \langle\, (1, 4, -2)\, \rangle$.

25. Calculeu els simètrics del vector $(1, 3, -3)$ respecte als mateixos subespais de l'exercici anterior.

26. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $u = (1, 0, 1, 1)$ respecte del pla

$$F = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle\,.$$

27. Trobeu un generador u de la recta R definida per

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{aligned}\right\}\,,$$

la projecció ortogonal de u sobre el pla $x + y + 3z = 0$ i les equacions implícites de la projecció ortogonal R' de R sobre aquest pla.

28. Considereu el pla T de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(0, 1, 2)$ i $(2, 1, 0)$. Trobeu:

(a) Una base ortogonal de T.

(b) Una base ortonormal de T.

(c) El suplementari ortogonal de T.

(d) La projecció ortogonal del vector $u = (1, 0, 1)$ sobre T.

(e) El simètric del vector u respecte a T.

4.4 Mètode dels mínims quadrats

29. Trobeu l'equació de la recta de regressió dels punts $(0, 0)$, $(1, 1)$ i $(5, 4)$, calculeu l'error quadràtic ϵ i dibuixeu en un gràfic aquests punts i la recta obtinguda.

30. Donats els punts $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ i $(3, 2)$,

(a) Calculeu la recta de regressió.

(b) Escolliu una altra recta pròxima a aquests punts i compareu els errors quadràtics.

(c) Dibuixeu un gràfic de la recta de regressió.

31. Trobeu la paràbola que aproxima millor la taula de valors següent, calculeu l'error quadràtic ϵ i dibuixeu-ne un gràfic.

x	-2	0	1	2
y	3	2	1	2

32. Trobeu el polinomi de segon grau $y = ax^2 + bx + c$ que aproxima millor els valors següents:

x	-2	0	1	2	3
y	-5	-3	2	1	-4

Dibuixeu els punts i la paràbola obtinguda.

33. Trobeu la funció de la forma $z = ax + by + c$ que aproxima millor la taula de valors següent:

x	1	0	1	2	1
y	0	1	1	1	2
z	8	4	0	1	1

34. Ajusteu una funció de la forma $z = ax + by + c$ a la taula de valors següents pel mètode dels mínims quadrats:

x	1	0	-1	2	1
y	2	1	1	-1	0
z	3	2	3	-2	3

35. Resoleu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ 3x + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

aplicant el mètode dels mínims quadrats i calculeu l'error quadràtic ϵ de qualsevol de les solucions.

36. Trobeu la funció de la forma $y = Ae^{kx}$ que aproxima millor la taula de valors següent:

x	1	2	3	4
y	1.65	2.70	4.50	7.35

Dibuixeu el gràfic de la funció.

4.5 Orientació i producte vectorial

37. Quines de les bases de $\mathbb{R}^3$ següents tenen orientació positiva?

(a) $\{(1, 1, 1),\ (1, 0, -1),\ (-1, 1, 0)\}$.
(b) $\{(0, 1, -1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 2)\}$.
(c) $\{(1, 0, 3),\ (2, 0, -1),\ (2, 1, -1)\}$.

38. Donats els vectors $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-2, 3, 1)$ i $u_3 = (-1, 1, 2)$, calculeu els productes vectorials següents:

(a) $u_1 \wedge u_2$, $u_1 \wedge (u_2 + 2u_3)$ i $u_2 \wedge 3u_2$.
(b) $u_1 \wedge (u_2 \wedge u_3)$ i $(u_1 \wedge u_2) \wedge u_3$.

39. Donada la recta S d'equacions

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z\,,$$

escriviu l'equació implícita del pla $S^\perp$ i trobeu un vector u d'aquest pla que sigui ortogonal al vector $(1, -1, 1)$.

40. (a) Comproveu la identitat de Jacobi: donats tres vectors u_1, u_2 i u_3 de $\mathbb{R}^3$ es compleix que

$$(u_1 \wedge u_2) \wedge u_3 + (u_2 \wedge u_3) \wedge u_1 + (u_3 \wedge u_1) \wedge u_2 = 0\,.$$

(b) Donats quatre vectors u_1, u_2, v_1 i v_2 de $\mathbb{R}^3$, comproveu que es compleix

$$(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot\ v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1)\,.$$

(c) Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Comproveu que els vectors $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ i $e_2 \wedge e_3$ formen una base de $\mathbb{R}^3$ amb orientació positiva.

Feu servir el doble producte vectorial.

5

Transformacions lineals

5.1 Imatges i antiimatges

1. Quines de les transformacions següents són lineals?

(a) $f(x, y, z) = (y + z, 2x + z, 3x - y + z)$.
(b) $f(x, y) = (x, x + y - 1, 2x + 2)$.
(c) $f(x, y, z, t) = (2x - y + 3t, 2x + 3y, xy - 3)$.
(d) $f(x, y, z) = (3x - 2y + 3z, 5x - y + 2z)$.
(e) $f(x, y) = (x^2, xy - 2)$.

2. Digueu quines de les següents transformacions de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ són lineals:

(a) $f(x, y) = (x, y - x)$.
(b) $y_1 = 2x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2 + 2$.
(c) $g(x, y) = x(1, 3) + y(2, 1)$.
(d) $h(x_1, x_2) = ({x_1}^2, x_2 + 1)$.
(e) $m(x, y) = x(1, 1) + y(1, 2) + (1, 3)$.

3. La matriu associada a la transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ en les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculeu $f(1, 2, -3)$, $f(2, 3, -5)$, $f^{-1}(5, 2, -4, -1)$ i $f^{-1}(-3, 2, -8, 5)$.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformació lineal tal que

$$\left.\begin{array}{l} f(2, 1) = (2, 3, -1) \\ f(7, 4) = (5, -1, 2) \end{array}\right\}.$$

Calculeu $f(2, 5)$, $f(3, 1)$, $f^{-1}(-1, 7, -4)$ i $f^{-1}(3, -4, 2)$.

5. La matriu de la transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{(3, 0, 1), (4, 3, 2), (6, 4, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i la canònica de $\mathbb{R}^2$ és

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i escriviu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

6. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ té associada la matriu A en la base $\mathcal{B} = \{(2, 3), (3, 4)\}$. Calculeu $f(1, 6)$, $f(-2, 4)$ i $f^{-1}(3, 6)$ sabent que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, -2), (-1, 3)\}$ és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determineu :

(a) La imatge del vector $(1, 4)$.

(b) Una antiimatge, si existeix, del vector $(-1, 2)$.

(c) La matriu associada a f en la base canònica.

8. D'una transformació lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabem que $T(1, -2) = (0, 0, 0)$, que el vector $(1, -5, 2)$ té com a mínim una antiimatge i que la segona component de $T(1, 0)$ en la base canònica és 10. Determineu la matriu de T en les bases canòniques.

9. Trobeu un endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que transformi la recta $2x - y = 0$ en la recta $3x + 2y = 0$ i la recta $x - y = 0$ en la recta $5x + 3y = 0$.
Podeu trobar-ne dos de diferents que compleixin aquestes condicions?

10. Digueu la matriu en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ d'un endomorfisme T que transforma la recta $x - 2y = 0$ en la recta $2x - y = 0$ i la recta $x + y = 0$ en ella mateixa.

11. Trobeu un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que transformi el pla $y = z$ en el pla $2x - 5y + z = 0$ i el pla $x + 2z = 0$ en la recta $z = -2x$, $y = 0$.

12. Sigui $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformació lineal i considerem subespais arbitraris $F \subset \mathbb{R}^n$ i $G \subset \mathbb{R}^m$.

(a) Demostreu que la *imatge* de F,

$$T(F) = \{\, T(u) \;:\; u \in F \,\},$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^m$.

(b) Demostreu que l'*antiimatge* de G,

$$T^{-1}(G) = \{\, u \in \mathbb{R}^n \;:\; T(u) \in G \,\},$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

13. La matriu associada a la transformació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donats el subespai $F : x - 2y - 2t = 0$ de $\mathbb{R}^4$ i el subespai $G = \langle\, (2, -1, 1), (1, -1, 1) \,\rangle$ de $\mathbb{R}^3$, calculeu una base i les equacions implícites dels subespais $f(F)$ i $f^{-1}(G)$.

14. La matriu associada a la transformació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trobeu dos subespais F i G de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 3 que compleixin $\dim f(F) = 2$ i $\dim f(G) = 1$.

5.2 Canvis de base

15. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x - y, x + y)$. Trobeu la matriu associada a f en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

16. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ve donat per

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + 6y + 2z, -3x + 7z)\,.$$

(a) Calculeu la matriu associada a f en la base canònica.

(b) Calculeu la matriu associada a f en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 4), (-2, -1, -3)\}$, indicant clarament quina és la matriu del canvi de base.

17. La transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ve donada per

$$f(x, y, z) = (2x + y - 3z, x + 3y - 7z)\,.$$

Calculeu la matriu de f en les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (7, 2, 4), (6, 1, 4)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}_2 = \{(4, 5), (3, 4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

18. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu associada a f en la base $\mathcal{B}' = \{u_3,\ u_2,\ u_1\}$.

(b) Feu el mateix en la base $\mathcal{B}'' = \{u_1,\ u_1 + u_2,\ u_1 + u_2 + u_3\}$.

19. Considereu les bases

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(-1, 0, 1, -2), (0, 1, 1, -1), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, -2)\} \qquad \text{i} \\ \mathcal{B}_2 &= \{(1, -1, 2), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}\,. \end{aligned}$$

La matriu associada a la transformació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$. Quines matrius de canvi de base heu fet servir?

20. Sabent que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ compleix

$$\left.\begin{aligned} f(1, 1) &= (-6, -8) \\ f(1, 2) &= (11, 15) \end{aligned}\right\},$$

calculeu la matriu associada a f en la base canònica.

21. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\left.\begin{aligned} f(0,1,1) &= (0,1,2) \\ f(1,1,0) &= (1,2,0) \\ f(0,1,0) &= (1,0,1) \end{aligned}\right\} .$$

Calculeu la matriu de f en la base $\mathcal{B} = \{(0,1,1), (1,1,0), (0,1,0)\}$.

22. Sabem que la transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ compleix

$$\left.\begin{array}{c} f(1,0,-1) = (0,-2,-1,0) \\ f(1,1,0) = (3,1,0,1) \\ f(0,1,2) = (5,4,1,1) \end{array}\right\} .$$

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

(b) Calculeu la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B}_1 = \{(3,-2,1), (2,-1,-1), (1,-1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0,2), (-4,1,1,-2), (0,0,1,4), (1,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

23. Considereu els vectors $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,2,1)$ i $e_3 = (0,1,1)$ i l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per

$$\left.\begin{array}{c} f(e_1 - e_2) = 0 \\ f(e_1 + e_2 + e_3) = 4e_2 + 5e_3 \\ f(e_2 + e_3) = 3e_2 + 3e_3 \end{array}\right\} .$$

(a) Calculeu la matriu associada a f en la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(b) Calculeu la matriu associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

24. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ dues bases de $\mathbb{R}^2$ amb $v_1 = -e_1 + 2e_2$ i $v_2 = e_1 - 3e_2$. Donat l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 \\ f(v_2) &= -v_2 \end{aligned}\right\} ,$$

trobeu la matriu de f en la base $\mathcal{B}_1$.

25. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\begin{aligned} &f(u) = u \text{ per a tot } u \in F \qquad \text{i} \\ &f(v) = -2v \text{ per a tot } v \in G\,, \end{aligned}$$

on F és el subespai generat pels vectors $(1,0,1)$ i $(2,-1,3)$ i G té equacions implícites $x - y = 0$, $x + 3y + z = 0$.

(a) Determineu la matriu de f en la base obtinguda en reunir una base de F i una base de G.

(b) Determineu la matriu de f en la base canònica.

26. La matriu associada a la transformació lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la imatge del vector $(-1, 2)$.

(b) Calculeu la matriu de T en les bases $\mathcal{B}_1' = \{(1, 2), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i canònica de $\mathbb{R}^3$.

5.3 Nucli, imatge i classificació

27. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trobeu una base i les equacions implícites de Nuc f i de Im f. (Expresseu les equacions implícites del Nuc f amb el menor nombre possible d'equacions.)

(b) Classifiqueu aquest endomorfisme, és a dir, indiqueu si és injectiu, exhaustiu o bijectiu.

28. Determineu una base i les equacions implícites del nucli i de la imatge de l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 2y + 3z, y - 5z).$$

29. Trobeu una base del nucli i les equacions implícites de la imatge de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

30. Calculeu bases dels nuclis i de les imatges i classifiqueu les transformacions lineals que tenen associades les matrius següents en les bases canòniques:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

31. Considereu la transformació lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$\left.\begin{array}{l} T(1,1,1) = (2,1) \\ T(1,1,0) = (1,-2) \\ T(0,1,0) = (0,0) \end{array}\right\} .$$

(a) Determineu la imatge d'un vector arbitrari $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Descriviu $\operatorname{Nuc} T$ i $\operatorname{Im} T$.

32. Trobeu les equacions implícites de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$, on f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que compleix

$$\left.\begin{array}{l} f(1,-2) = (-4,-2) \\ f(2,-1) = (4,2) \end{array}\right\} .$$

33. Trobeu les equacions implícites de $\operatorname{Im} f$ i de $\operatorname{Nuc} f$ i la matriu de f en la base canònica sabent que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix

$$\left.\begin{array}{l} f(2,1,1) = (0,-1,0) \\ f(1,1,0) = (1,0,0) \\ f(1,2,1) = (1,0,0) \end{array}\right\} .$$

34. La transformació lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida en les bases canòniques per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

transforma el subespai d'equació $x + y + 2z - t = 0$ en un pla de $\mathbb{R}^3$. Trobeu l'equació implícita d'aquest pla i una base de $\operatorname{Nuc} T$.

35. Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és l'endomorfisme definit en la base canònica per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

trobeu la projecció ortogonal del vector $u = (1, 6, 1)$ sobre el subespai $\operatorname{Im} T$.

36. Estudieu la injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat de la transformació lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ que en les bases canòniques té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

37. Sabent que $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és lineal i compleix que

$$f(1,-1)=(3,-3,6) \qquad \text{i} \qquad f(2,1)=(9,3,0)\,,$$

trobeu les equacions de Im f i digueu si f és injectiva o exhaustiva.

38. La matriu associada a l'endomorfisme $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} \alpha-2 & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2\alpha & 2\alpha+2 & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Classifiqueu f segons els valors del paràmetre α, i en els casos que no sigui bijectiu trobeu bases de Nuc f i Im f.

39. Classifiqueu segons els valors dels paràmetres que hi apareixen les transformacions lineals que tenen associades les matrius següents en les bases canòniques:

$$\text{(a)}\begin{pmatrix} -a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & ab & a \end{pmatrix};\qquad \text{(b)}\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{pmatrix};\qquad \text{(c)}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 2 \\ 3 & -\alpha & \alpha \\ -9 & \alpha & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\begin{pmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 3 & 4-a & 2+a^2 \end{pmatrix};\qquad \text{(e)}\begin{pmatrix} t & -1 & 2t \\ 3 & -1 & t \\ -9 & t & 2 \end{pmatrix}.$$

40. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que en la base canònica té per matriu associada

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

Estudieu si f és injectiu, exhaustiu o bijectiu en funció del paràmetre α i calculeu una base del seu nucli i la dimensió de la seva imatge per a $\alpha=1$.

41. Trobeu la matriu d'un endomorfisme $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canònica, sabent que les equacions de Nuc T són $x+y+z=0$, $2x-y-4z=0$ i que $T(1,1,-1)=(1,0,1)$ i $T(1,1,0)=(0,-1,-1)$.

42. Siguin $F=\langle (3,2,-9),(4,3,-12),(1,0,-3)\rangle$ i G: $7x-2y+z=0$, $3x+z=0$. Trobeu un endomorfisme $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que Nuc $f=G$ i Im $f=F$. És únic aquest endomorfisme?

5.4 Operacions amb transformacions lineals

43. Les transformacions lineals $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ i $g:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ venen donades per

$$f(x,y,z)=(x-2y+z,-x+y+3z,x+z,2x-y+z)$$
$$g(x,y,z,t)=(2x-3y+4z-t,x+y-3z+2t)\,.$$

Calculeu la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques.

44. La matriu de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, -2), (-1, -1, 3)\}$ és

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

i l'endomorfisme $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ve donat per

$$g(x, y, z) = (x - y + z, -y + 2z, x - z) .$$

Classifiqueu els endomorfismes $f \circ g$, $g \circ f$ i $f + g$.

45. De les transformacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ sabem que

$$\left.\begin{array}{l} f(1, 0, -1) = (2, 1) \\ f(1, 1, -1) = (3, -2) \\ f(-2, 0, 1) = (1, 4) \end{array}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{array}{l} g(2, 3) = (1, -2, 3, 1) \\ g(3, 4) = (-2, 0, 3, 1) \end{array}\right\} .$$

Calculeu la matriu associada a la transformació lineal $g \circ f$ en les bases canòniques, trobeu bases del nucli i de la imatge de $g \circ f$ i classifiqueu aquesta transformació.

46. La transformació lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques.

(b) Trobeu una aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g \circ f = I$.

47. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{(3, -1), (-8, 3)\}$ és

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} .$$

Calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

48. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme donat per

$$f(x, y, z) = (x, x + y - 2z, -z) .$$

Comproveu de dues maneres diferents que $f^3 - f^2 - f = -I$.

5.5 Endomorfismes i producte escalar

49. Calculeu la matriu associada en la base canònica a la projecció ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el pla d'equació $x - y + z = 0$.

50. Calculeu la matriu en la base canònica de la projecció ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el pla definit per l'equació $x + 2y + 2z = 0$.

51. Una projecció ortogonal de $\mathbb{R}^2$ transforma el vector $(1, 8)$ en el vector $(4, 6)$. Calculeu la matriu associada a aquesta projecció en la base canònica.

52. Trobeu una base del nucli de la projecció ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el pla $2x+y+z = 0$ i també les equacions implícites de la projecció ortogonal de la recta $2x = y = z$ sobre aquest pla.

53. Un gir G de $\mathbb{R}^2$ compleix que $G(5, 10) = (2, 11)$. Calculeu la matriu associada a aquest gir en la base canònica.

54. Trobeu la matriu en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ de la simetria respecte al pla d'equació $x + 2y + 3z = 0$.

55. Calculeu les matrius associades en la base canònica a les simetries respecte als subespais següents:

(a) Pla de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, 2, -3)$ i $(3, 4, -1)$.

(b) Pla de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(1, 2, 1, -3)$ i $(3, 1, 10, -5)$.

(c) Recta de $\mathbb{R}^3$ generada pel vector $(1, 2, -3)$.

56. Una simetria de $\mathbb{R}^2$ transforma el vector $(-1, 7)$ en el vector $(5, -5)$. Calculeu la matriu associada a aquesta simetria en la base canònica.

57. Calculeu la matriu associada a la rotació de 120° al voltant del vector $(0, 1, 0)$.

58. Calculeu la matriu associada a la rotació de 90° al voltant del vector $(0, 0, -1)$.

59. Calculeu la matriu associada en la base canònica a les rotacions d'angle α al voltant del vector w en cada un dels casos següents:

(a) $\alpha = 120^\circ$ i $w = (-1, -1, 1)$.

(b) $\alpha = 90^\circ$ i $w = (1, 2, -1)$.

(c) $\alpha = 45^\circ$ i $w = (1, 0, 1)$.

(d) $\alpha = 143.13^\circ$ i $w = (1, 0, -2)$. (Nota: preneu $\sin\alpha = 3/5$ i $\cos\alpha = -4/5$.)

60. En una rotació al voltant de l'eix definit per $x - y = 0$, $x - y - 2z = 0$, la imatge del vector $(1, 1, 1)$ pertany al pla $x + y - 4z = 0$. Trobeu els possibles angles de rotació i, en un dels casos, la seva matriu en la base canònica.

61. Quin angle hem de fer girar el vector $(1, 2, 1)$ al voltant de $(1, 0, 1)$ per obtenir un vector perpendicular a l'inicial?

62. En una rotació al voltant del vector $(1, -1, 1)$, el vector $(1, 0, 0)$ es transforma en el vector $(0, 0, 1)$. Calculeu l'angle de rotació i la seva matriu en la base canònica.

63. Els vectors $(4, -7)$ i $(8, -1)$ són simètrics respecte a un eix F de $\mathbb{R}^2$. Trobeu una base de F i la matriu en la base canònica de la simetria respecte a aquest eix.

64. En una rotació de 180° el vector $(2, 7, -4)$ es transforma en el vector $(2, 1, -8)$. Calculeu la matriu associada a la rotació en la base canònica.

65. Siguin $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la projecció ortogonal sobre el pla $x + 2y + z = 0$ i $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la simetria axial respecte a l'eix OZ.

(a) Calculeu la matriu de la transformació composta $P \circ S$ en la base canònica.

(b) Doneu una base del nucli d'aquesta transformació i comproveu que aquest subespai és el simètric del nucli de P respecte a l'eix OZ.

66. Siguin f i g les rotacions d'angle α al voltant dels vectors $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, -1)$, respectivament. Calculeu la matriu associada a $f \circ g$ en la base canònica i comproveu que és una isometria.

67. La matriu associada a $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ és

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -25 & -40 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que f és una isometria.

68. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que f és una isometria.

69. La matriu de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Es una isometria?

(b) Calculeu la matriu A de f en la base canònica.

70. Comproveu que les matrius següents representen isometries en la base canònica:

$$(a)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad (b)\ \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 6\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 10 & -3\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -10 & 0 & 5\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$(c)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \qquad (d)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & -\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

71. Trobeu una isometria de $\mathbb{R}^3$ que transformi el pla d'equació $x - 2y + z = 0$ en el pla $x + y - 2z = 0$.

72. En una isometria de $\mathbb{R}^3$ el vector $(1, 2, -1)$ queda invariant i el vector $(2, 0, 3)$ es transforma en el vector $(-3, 0, -2)$. Quina és la imatge del vector $(-7, 3, 4)$?

6

Diagonalització

6.1 Polinomi característic i condicions de diagonalització

1. Considerem els endomorfismes de $\mathbb{R}^2$ que en la base canònica tenen per matrius respectives

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Estudieu-ne la possible diagonalització i, en cas de ser diagonalitzables, indiqueu la matriu C del canvi de base, la matriu diagonal i la relació amb la matriu donada.

2. Calculeu el polinomi característic de les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \\ -8 & -1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & -8 \end{pmatrix} ; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 8 & -27 & -12 & 3 \\ 3 & -10 & -4 & 1 \\ -3 & 9 & 3 & -1 \\ -5 & 15 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

3. Estudieu si les matrius de l'exercici anterior són diagonalitzables. En cas que ho siguin, trobeu una base de vectors propis.

4. Estudieu si són diagonalitzables sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Comproveu que les tres matrius següents no són diagonalitzables, tot i que els seus polinomis característics es descomponen totalment sobre $\mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. A cadascuna de les matrius següents trobeu-li tants vectors propis linealment independents com pugueu, indicant a quin valor propi està associat cada vector propi (si cal, feu servir complexos):

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

7. Indiqueu quines de les matrius següents són diagonalitzables. En cas afirmatiu, trobeu una base de vectors propis.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -4 & 9 & -10 \\ -4 & 11 & -12 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 18 & -7 & 0 \\ 12 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Analitzeu si són diagonalitzables o no els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ que en la base canònica tenen per matrius associades

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cas afirmatiu, indiqueu la matriu C del canvi de base, la matriu diagonal i la relació amb la matriu original.

9. Diagonalitzeu sobre els nombres complexos les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & -16 & 0 \end{pmatrix}; \text{(b)} \begin{pmatrix} -3 & 10 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & -20 & 3 \end{pmatrix}; \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -3 & 5 \\ -2 & -10 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. A $\mathbb{R}^3$ es considera la base constituïda pels vectors $e_1 = (0,0,1)$, $e_2 = (1,-1,0)$ i $e_3 = (1,1,0)$, i l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que compleix

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - 3e_3 \\ f(e_2) &= -3e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= 4e_3 \end{aligned}\right\} .$$

Estudieu si és possible la diagonalització de f. En cas que ho sigui, trobeu una base en la qual la matriu de f sigui diagonal. (Indiqueu clarament la base en la qual expresseu els resultats.)

11. Diagonalitzeu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

tot indicant, per a cada una d'elles, la matriu C del canvi de base i la matriu diagonal D. Calculeu la fórmula general de A^n i B^n.

12. Diagonalitzeu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Indiqueu la matriu C del canvi de base i la matriu diagonal D i calculeu la fórmula general de A^n.

13. Comproveu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable i calculeu A^n.

14. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

comproveu que és diagonalitzable i trobeu una matriu B tal que $B^2 = A$. Quantes matrius hi ha que compleixen aquesta igualtat?

15. Estudieu segons els valor del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ si són diagonalitzables o no les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & \alpha & 4-\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix} .$$

16. Trobeu els valors de a per als quals és diagonalitzable la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

17. Estudieu segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ si és diagonalitzable o no la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

18. Estudieu, segons els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$, si és diagonalitzable o no la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -a & a & a \\ 1-b & 2 & b \end{pmatrix}.$$

19. Trobeu els valors de α per als quals la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 1+\alpha & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

té valors propis múltiples, i estudieu en cada cas si és diagonalitzable. En cas que ho sigui, trobeu una base de vectors propis.

20. Trobeu la matriu en la base canònica d'un endomorfisme T de $\mathbb{R}^2$ sabent que diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ i que $T(1, 2) = (1, -1)$.

21. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, 1)\}$ i en la base canònica té associada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & 10 \\ b & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculeu:

(a) Els valors propis de f.
(b) Els coeficients a i b.
(c) Una base de vectors propis.

22. L'endomorfisme $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ té associada en la base canònica la matriu

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ d & e & 0 \end{pmatrix}$$

i diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$. Calculeu a, b, c, d, e i els valors propis d'aquesta matriu.

23. L'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ i compleix que $f(1,2,6) = (1,-2,17)$. Calculeu la matriu associada a f en la base canònica.

24. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ té polinomi característic $p(x) = x^3 - 3x - 2$ i els vectors $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,-2,3)$ són vectors propis de f. Calculeu la matriu associada a f en la base canònica.

25. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(3,2)\}$, i $f(3,1) = (9,7)$. Trobeu la seva matriu A en la base canònica i l'expressió de A^n.

26. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix},$$

comproveu que són diagonalitzables i que les matrius diagonals coincideixen, i trobeu una matriu regular C tal que $B = C^{-1}AC$.

6.2 Diagonalització ortogonal de matrius simètriques

27. Trobeu una base ortonormal de vectors propis i la matriu diagonal corresponent a partir de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

28. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

determineu una matriu regular C tal que $A' = C^t AC$ sigui diagonal. Quina és la matriu A'?

29. Per a cada una de les matrius següents calculeu una matriu ortogonal P tal que $A' = P^t AP$ sigui diagonal. (Comproveu els resultats.)

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Considereu l'endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ definit per la seva matriu

$$A = M(T, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Demostreu que T és diagonalitzable.

(b) Trobeu una base ortonormal de vectors propis de T.

(c) Escriviu la matriu T en la base de l'apartat anterior.

31. Diagonalitzeu les matrius simètriques següents i trobeu una base ortonormal de vectors propis:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

32. Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Diagonalitzeu aquesta matriu, indicant la matriu diagonal A' i la matriu de canvi C corresponent.

(b) Diagonalitzeu ortogonalment la matriu A, indicant també la matriu diagonal D i la matriu ortogonal de canvi P.

33. Diagonalitzeu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indiqueu en cada cas la matriu del canvi, la matriu diagonal i una base ortogonal de vectors propis.

34. Es considera un endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que en la base canònica té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base ortonormal de vectors propis de T i la matriu de T en aquesta base.

35. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu matrius regulars C i D tals que $A' = C^t AC$ i $B' = D^t BD$ siguin diagonals.

36. Calculeu una base ortonormal de vectors propis de les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

37. Determineu els valors del paràmetre b que fan diagonalitzable la matriu

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a algun $b \neq 0$ determineu una base ortogonal de vectors propis de A i els respectius valors propis.

38. Si S és la simetria de $\mathbb{R}^3$ respecte al pla $2x - y - z = 0$, trobeu una base ortonormal $\mathcal{B}$ de vectors propis de S i la matriu A de S en aquesta base.

39. D'un endomorfisme simètric f de $\mathbb{R}^3$ sabem que el determinant és 18 i que $f(u) = 3u$ per a tot vector u del pla $\langle(0, 1, -1), (-1, 0, 1)\rangle$. Trobeu la matriu de f en la base canònica.

40. D'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ sabem que tots els vectors del pla $x + 2y + 2z = 0$ són propis de valor propi 2 i que els ortogonals a ells són propis de valor propi -1. Determineu una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ en la qual la matriu associada a f sigui diagonal.

41. Si T és un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que els vectors del pla $x + y - z = 0$ són propis de valor propi 1 i els de la recta perpendicular a aquest pla són propis de valor propi 2, determineu la matriu de T en la base canònica.

42. Demostreu que existeix alguna matriu regular C tal que $C^t AC = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Indicació: no cal que calculeu C.

6.3 Classificació d'isometries

43. Classifiqueu les isometries de $\mathbb{R}^2$ que en la base canònica tenen associades les matrius següents:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix};\ \text{(b)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix};\ \text{(c)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix};\ \text{(d)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

44. Classifiqueu i estudieu les isometries del pla definides en la base canònica per les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

45. Classifiqueu les isometries de $\mathbb{R}^3$ que en la base canònica tenen associades les matrius següents:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix};\quad \text{(c)}\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix};$$

(d) $\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 20 & -12 \\ -20 & 0 & -15 \\ -12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$; (e) $\dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 37 & 20 & 16 \\ -16 & 40 & -13 \\ -20 & 5 & 40 \end{pmatrix}$; (f) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

46. (a) Si A és la matriu en la base canònica d'un endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$, expliqueu quines condicions ha de complir A per tal que T sigui una rotació.
(b) Trobeu el resultat d'aplicar al vector $(1, 0, 0)$ una rotació R de 90° al voltant del vector $(1, 2, 2)$.
(c) La mateixa qüestió, però ara amb un angle de 180°.

47. Es considera l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que en una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ queda descrit per les equacions

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - 2y - 2z}{3} \\ y' &= \frac{-2x + y - 2z}{3} \\ z' &= \frac{-2x - 2y + z}{3} \end{aligned}\right\} .$$

(a) Escriviu la matriu A de f en la base $\mathcal{B}$ i proveu que A és ortogonal.

(b) Calculeu els vectors $v \in \mathbb{R}^3$ tals que $f(v) = v$.

(c) Interpreteu geomètricament f.

48. Comproveu que les matrius següents defineixen isometries de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Classifiqueu aquestes isometries i descriviu-ne els elements geomètrics característics.

49. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

defineix una isometria de $\mathbb{R}^3$. Classifiqueu-la i indiqueu-ne els elements geomètrics.

50. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

defineix un endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica. Classifiqueu l'endomorfisme T, digueu quin tipus d'isometria representa i indiqueu-ne els elements geomètrics.

51. La matriu de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B}' = \{(2,1), (1,1)\}$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la matriu A de f en la base canònica i digueu de quin tipus és aquest endomorfisme:

(a) Gir.

(b) Simetria axial.

(c) Un altre tipus d'isometria.

(d) Projecció ortogonal.

(e) Cap dels anteriors.

52. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\left.\begin{aligned} f(0,1,1) &= (0,1,1) \\ f(1,1,0) &= (1,0,1) \\ f(1,0,1) &= (1,1,0) \end{aligned}\right\}.$$

Comproveu que és una isometria i classifiqueu-la.

53. La isometria $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix

$$\left.\begin{aligned} f(1,1,0) &= (0,1,1) \\ f(1,0,-1) &= (-1,0,1) \\ f(0,3,0) &= (2,1,2) \end{aligned}\right\}.$$

Calculeu-ne la matriu en la base canònica i digueu de quin tipus és la isometria.

54. La matriu associada a un endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1,-1,0), (1,0,1), (0,-1,0)\}$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Trobeu la matriu de T en la base canònica.

(b) Digueu si T és una isometria.

(c) En cas afirmatiu, classifiqueu-la i doneu els seus elements geomètrics. En cas negatiu, trobeu l'equació implícita de la imatge segons T del pla d'equació $x + y - z = 0$.

55. Siguin f la rotació d'angle 270° al voltant del vector $(0,0,-1)$ i g la simetria respecte al pla generat pels vectors $(1,0,0)$ i $(0,1,1)$. Classifiqueu la isometria $f \circ g$.

56. Determineu la matriu en la base canònica de la rotació de 90° al voltant del vector $w = (1, 1, 1)$. Calculeu el quadrat i la inversa d'aquesta matriu i expliqueu quines isometries defineixen.

57. Les matrius de dos endomorfismes f i g de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica són

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu els valors de a i b per tal que f i g siguin isometries.

(b) Per a cadascun d'ells, classifiqueu les isometries i indiqueu els seus elements geomètrics.

58. La matriu de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu els valors de a i b per tal que f sigui una isometria i classifiqueu-la.

(b) Determineu l'equació del pla obtingut aplicant f al pla d'equació $2x - y + 3z = 0$.

59. Trobeu totes les isometries de $\mathbb{R}^2$ que transformen la recta $3x + 4y = 0$ en la recta $x = 0$.

60. Doneu les matrius en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ d'una isometria directa, una isometria inversa i un endomorfisme no isomètric que transformin l'eix OX en l'eix OY. Detalleu raonadament quantes isometries de cada un dels dos tipus duen a terme aquesta transformació.

61. Digueu la matriu en la base canònica d'una de les isometries de $\mathbb{R}^3$ que transformen l'eix OX en l'eix OY i deixen invariant l'eix OZ. Classifiqueu la isometria.

62. Trobeu totes les isometries de $\mathbb{R}^3$ que transformen els vectors de la base canònica en vectors de la base canònica i classifiqueu-les.

63. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la composició de la rotació d'angle α al voltant del vector unitari w amb la simetria respecte al pla $< w >^{\perp}$. Demostreu que per a tot $u \in \mathbb{R}^3$ es compleix que

$$f(u) = u\cos\alpha - (u \cdot w)(1 + \cos\alpha)w + (w \wedge u)\sin\alpha\,.$$

64. Trobeu les dues isometries de $\mathbb{R}^3$ que compleixen

$$\left.\begin{aligned} f(1, 2, 2) &= (2, 1, 2) \\ f(2, 1, 0) &= (0, 2, 1) \end{aligned}\right\}$$

i classifiqueu-les.

6.4 Equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals

65. Escriviu la solució general de les equacions diferencials següents:

(a) $y' = 3y$.
(b) $dy + y dx = 0$.
(c) $y' = y \ln 5$.

66. Calculeu la solució general de les equacions diferencials no homogènies següents:

(a) $y' - y = e^x$.
(b) $y' = x + y$.
(c) $y' = 2y + \cos x$.

67. Resoleu les equacions següents, determinant la solució particular que correspon a les condicions inicials indicades:

(a) $y' + 4y = e^x$ amb $y(0) = -3$.
(b) $y' + y - x^3 = 0$ amb $y(3) = 12$.
(c) $y' - 2y = x^2 + x + 1$ amb $y(0) = 3$.
(d) $y' = abe^{-ax} - cy$ (a, b, c constants i $a \neq c$) amb $y(0) = 0$.

68. Resoleu els sistemes d'equacions diferencials de primer ordre següents:

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(b)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 3y \\ \dot{y} &= 3x - y \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(c)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - 5y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}\right\} .$$

En el cas (c), imposeu les condicions inicials $x(0) = 0$ i $y(0) = 1$.

69. Resoleu els sistemes d'equacions diferencials de primer ordre següents:

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y + z \\ \dot{y} &= -x + 5y - z \\ \dot{z} &= x - y + 3z \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(b)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}\right\} .$$

70. Resoleu els sistemes no homogenis següents:

$$\text{(a)} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + 6t \\ \dot{y} &= 4x - 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{amb } x(0) = 0,\ y(0) = -2 ; \qquad \text{(b)} \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y + 1 \end{aligned}\right\} .$$

71. Trobeu les solucions generals del sistema d'equacions diferencials no homogeni

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - 2z - t + 2 \\ \dot{y} &= -x + 1 \\ \dot{z} &= x + y - z - t + 1 \end{aligned}\right\} .$$

72. Trobeu les solucions dels sistemes d'equacions diferencials no homogenis següents:

$$\text{(a)} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y + 2t \\ \dot{y} &= 3x - 2y + 4t \end{aligned}\right\} ; \qquad \text{(b)} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 4y + 4t + 1 \\ \dot{y} &= y - x + \frac{3t^2}{2} \end{aligned}\right\} .$$

Imposeu les condicions inicials $x(0) = 1$ i $y(0) = 1$ en el cas (a) i $x(0) = 2$ i $y(0) = 2$ en el cas (b).

7

Tensors i formes quadràtiques

7.1 Diagonalització

1. Escriviu la forma hessiana de les funcions següents en els punts indicats:

(a) $f(x, y) = e^x \sin y + e^x \cos y$ en el punt $(0, {}^{\pi}/_{2})$.
(b) $z = x^3y^2 - 2xy^4$ en el punt $(-1, 1)$.
(c) $g(x, y, z) = xe^y \sin z$ en el punt $(1, 0, \pi)$.
(d) $u = x^2 - yz + 2yt^2$ en el punt $(0, 1, 1, 1)$.

2. (a) Aplicant la fórmula del doble producte vectorial, demostreu que si una partícula de massa m gira amb velocitat angular $\| w \|$ al voltant de l'eix $\langle w \rangle$, el seu moment cinètic quan es troba a la posició r és

$$M = m \| r \|^2 w - m(r \cdot w)r \, .$$

(b) Si $r = (1, 1, 3)$, $w = (1, 2, 2)$ i $m = 5$, calculeu M i també l'energia cinètica de la partícula en aquell punt.

3. Un tensor $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ queda definit en la base canònica $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ per

$$T(e_1, e_1) = 1 \, , \qquad T(e_1, e_2) = T(e_2, e_1) = 2 \quad \text{i} \quad T(e_2, e_2) = 1 \, .$$

Expliqueu mitjançant les fórmules corresponents com actua T sobre un parell de vectors $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ i com actua sobre un vector $w = (x, y)$ la forma quadràtica q associada a T.

4. La matriu d'un tensor T en la base canònica és

$$A = M(T, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la matriu de T en la base $\mathcal{B} = \{(2, 1, 1), (-1, 0, 1), (2, -1, 0)\}$.

5. Expresseu la forma quadràtica $q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2xz - 4yz$ en termes de (x', y', z') sabent que

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + y' - 2z' \\ y = -2x' + y' \\ z = y' + z' \end{array}\right\}.$$

6. Donada la forma quadràtica $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz + 2yz$, calculeu la seva restricció als subespais següents, indicant quina base feu servir a cada subespai:

(a) La recta generada per $u = (1, 2, 1)$.

(b) El pla d'equació $x + y - z = 0$.

7. Expresseu com a combinació lineal de quadrats les formes següents i digueu quin canvi ortogonal heu aplicat:

(a) $q(x, y) = 8x^2 + 8xy + 2y^2$.

(b) $q(x, y) = 2xy$.

8. Calculeu l'expressió euclidiana canònica de les formes següents. Expliqueu en cada cas el canvi ortogonal que permet obtenir aquesta expressió:

(a) $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xz - 4yz$.

(b) $q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz - 4yz$.

7.2 Classificació de formes

9. Classifiqueu les formes quadràtiques següents i calculeu els seus índexs d'inèrcia:

(a) $q(x, y) = 2x^2 + 8xy + 8y^2$.

(b) $q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

10. Feu el mateix que es demana a l'exercici anterior amb les formes següents:

(a) $q(x, y, z) = 3x^2 + 11y^2 + 3z^2 - 6xy + 2xz + 6yz$.
(b) $q(x, y, z) = -x^2 - 7y^2 - z^2 - 10xy + 6xz + 6yz$.
(c) $q(x, y, z) = -5x^2 - 4y^2 - 10z^2 + 2xy - 6xz - 8yz$.

11. Classifiqueu i calculeu els índexs d'inèrcia de la forma q definida per la matriu

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

12. Classifiqueu i calculeu els índexs d'inèrcia de les formes següents:

(a) $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz$.
(b) $q(x, y, z) = 3x^2 + 11y^2 + 3z^2 - 6xy + 2xz + 6yz$.

13. Trobeu una base en la que la forma quadràtica

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

sigui diagonal i classifiqueu aquesta forma.

14. Classifiqueu les formes quadràtiques definides per les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Considereu la forma quadràtica $q(x, y, z) = 2axy + 2bxz + 2cyz$, on a, b i c representen el nombre de lletres del nom, primer cognom i segon cognom, respectivament, del vostre millor amic.

(a) Determineu els indexs d'inèrcia de la forma q.
(b) Classifiqueu aquesta forma.

16. Expresseu com a combinació lineal de quadrats la forma quadràtica

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy + 4yz$$

mitjançant un canvi ortogonal i classifiqueu-la.

17. Considereu les formes quadràtiques següents definides en la base canònica:

(a) $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

(b) $q(x, y, z) = 2xy + 2xz - 2yz$.

(c) $q(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Classifiqueu aquestes formes i trobeu per a cada una una base ortonormal en la que la forma adopti la seva expressió euclidiana canònica.

18. Classifiqueu la forma quadràtica

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz\,.$$

7.3 Extrems de les funcions de diverses variables

19. Determineu els extrems locals de la funció

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\,.$$

20. Trobeu els extrems locals de les funcions següents:

(a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$.

(b) $g(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$.

21. Trobeu els extrems locals de la funció $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ en el quadrant $x > 0$, $y > 0$.

22. Calculeu els extrems locals de la funció de tres variables

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z\,.$$

8

Geometria lineal

8.1 Equacions de les varietats lineals

1. Trobeu l'equació de les rectes que passen pel punt d'intersecció de les rectes $x - 3 = 0$ i $2x + y - 5 = 0$ i formen un angle de 30° amb la primera.

2. Trobeu les equacions de les dues rectes que passen pel punt $(2, -3)$ i formen un angle de 45° amb la recta $5x - 2y + 1 = 0$.

3. Trobeu les equacions de la recta que passa pels punts $(5, -2, 3)$ i $(4, 1, 2)$ i l'equació implícita del pla que passa pels punts $(5, 1, -2)$, $(-2, 1, 3)$ i $(-1, -2, 3)$.

4. Calculeu l'equació implícita del pla que conté les rectes $x = 0$, $y = z$ i $x + y = 0$, $z = 0$.

5. En cada un dels casos següents, calculeu l'equació implícita del pla que passa pel punt P i conté la recta R:

(a) $P = (-1, 2, 0)$ i R: $x - 2y + z = 3$, $y + 3z = 5$.

(b) $P = (-2, 1, -5)$ i

$$R: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}\,.$$

6. Calculeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt (0, 1, 2) i talla les rectes

$$\frac{x-3}{-2} = y+1 = \frac{z+4}{3} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y-z &= 15 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\} .$$

7. Trobeu el valor de a per al qual les rectes R_1 i R_2 d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x-2y &= 1 \\ y-z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x-2y-z &= a \end{aligned}\right\}$$

són coplanàries, i escriviu l'equació implícita del pla P que defineixen.

8. Determineu el valor de a per tal que es tallin les rectes

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{2} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ ax-y-z &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

9. Calculeu α de manera que les rectes d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z-\alpha &= 0 \\ 2x-y-z+2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$$

es tallin en un punt i calculeu-lo.

10. Calculeu α de manera que els plans d'equacions $x+y+z=2$, $2x+3y+z=3$ i $\alpha x+10y+4z=11$ tinguin una recta en comú. Quin és el vector director d'aquesta recta?

8.2 Posicions relatives

11. Determineu l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de les rectes $4x-3y+1=0$ i $2x+y-7=0$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts (8, 0) i (0, 5).

12. Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt (5, −1, 6) i és paral·lela a la recta

$$\left.\begin{aligned} 2x+5y-z &= 1 \\ x-2y+z &= 6 \end{aligned}\right\} .$$

13. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt (1, 1, 2) i és paral·lel a les rectes

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y &= 0 \\ 4x+z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} 2x-2y &= 4 \\ y-z &= -3 \end{aligned}\right\} .$$

14. Calculeu l'equació implícita del pla que conté la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

i és paral·lel a la recta que passa pels punts $(2, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$.

15. Calculeu l'equació del pla que conté la recta d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - \lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= -1 + 2\lambda \end{aligned}\right\}$$

i és paral·lel a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2} .$$

16. Calculeu l'equació contínua i les equacions implícites de la recta que passa pel punt $(1, 0, -1)$ i és paral·lela als plans $3x + 2y - z = 1$ i $x - y + z = 0$.

17. Calculeu l'equació del pla que conté la recta

$$x - 1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$$

i és paral·lel a la recta

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}\right\} .$$

18. Calculeu l'equació contínua i les equacions implícites de la recta que passa pel punt $(1, 1, 2)$ i és perpendicular al pla que passa per aquest punt i conté la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} .$$

19. Calculeu l'equació contínua i les equacions implícites de la recta que passa pel punt $(1, 2, -1)$, és paral·lela al pla $2x + y - z = 3$ i és perpendicular a la recta

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - \lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 1 - 3\lambda \end{aligned}\right\} .$$

20. Calculeu l'equació contínua i les equacions implícites de la recta que passa pel punt $(-1, 1, 0)$ i és perpendicular a les rectes $y = 0$, $x = z$ i $x + 3y = 2$, $y = z + 1$.

21. Calculeu l'equació contínua i les equacions implícites de la recta que, passant pel punt $(1, 1, 0)$, és perpendicular al pla que passa per aquest punt i conté la recta

$$x = \frac{y-1}{3} = z + 1\,.$$

22. Calculeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $(1, -2, 2)$, és paral·lela al pla $x + y - 2z = 4$ i és perpendicular a la recta

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 3 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}\,.$$

23. Escriviu l'equació del pla que conté a la recta definida per $x+y+z = 2$, $2x-y+z = 0$ i és perpendicular al pla d'equació $2x + 2y - z = \sqrt{3}$.

24. Calculeu a i b per tal que la recta R d'equació

$$x + a = \frac{y-3}{b} = \frac{z}{3}$$

estigui continguda en el pla $x + y + z = 2b$. Amb aquests valors de a i b trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $(0, 0, -8)$, és perpendicular a R i està continguda en el pla.

25. Calculeu a i b per tal que la recta R d'equació

$$\frac{x-2}{a} = y + b = \frac{z}{3}$$

estigui continguda en el pla P d'equació $x + y - z = 2a$. Amb aquests valors de a i b trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $(2, 3, 1)$, és perpendicular a R i està continguda en el pla P.

26. Estudieu la posició relativa dels parells de rectes següents (intersecció, paral·lelisme i angle que formen):

(a) $\left.\begin{aligned} x &= z - 1 \\ y &= 2 - 3z \end{aligned}\right\}$ i $\left.\begin{aligned} x &= 5z + 4 \\ y &= 4z - 3 \end{aligned}\right\}$.

(b) $x - 2 = \dfrac{y+9}{3} = \dfrac{z+8}{4}$ i $x - 1 = y + 2 = 13 - z$.

(c) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ i $\dfrac{x-3}{-2} = 3 - y = \dfrac{z+1}{2}$.

(d) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - z &= 2 \end{aligned}\right\}$ i $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 4 \\ x + 6y - 8z &= 12 \end{aligned}\right\}$.

27. Estudieu la posició relativa dels parells de plans següents:

(a) $2x + 3y - 5z = 7$ i $3x + 2y + 3z = 1$.
(b) $2x + 3y - 5z = 7$ i $x + y + z = -2$.
(c) $3x + 2y + 3z = 1$ i $6x + 4y + 6z = -5$.

28. Estudieu la posició relativa de la recta

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\lambda - 1 \\ y &= \lambda + 2 \\ z &= 2\lambda \end{aligned}\right\}$$

i el pla que passa pels punts $(1, 3, 2)$, $(2, 0, 1)$ i $(1, 4, 3)$.

29. Considereu la recta R d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ x + 5y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

i el pla P d'equació $2x + y + \alpha z = \beta$. Per a quins valors de α i de β es dóna cada un dels casos següents?

(a) La recta R i la pla P es tallen en un punt.
(b) La recta està continguda en el pla.
(c) La recta és paral·lela (i exterior) al pla.

30. Considereu la família de plans que tenen equació

$$(m - 1)x - 3my + (2m + 2)z - m + 3 = 0 \qquad \text{amb} \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Comproveu que tots els plans tenen una recta en comú.
(b) Calculeu l'equació del pla perpendicular a aquesta recta que passa per $(1, 2, -3)$.

31. (a) Trobeu el valor de a per tal que la recta R definida per

$$\left.\begin{aligned} x - y + a &= 0 \\ ax - z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sigui perpendicular a l'eix OZ.
(b) Amb aquest valor de a, escriviu l'equació contínua de la perpendicular comuna (secant) a R i a l'eix OZ.

32. Dos plans variables que passen per la recta definida per les equacions $x - y - 4 = 0$, $2x - z - 7 = 0$ es mantenen perpendiculars entre ells. Quan un d'ells passa per l'origen de coordenades, quina és l'equació de l'altre?

33. Siguin R_1 i R_2 les rectes definides per les equacions

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 2 \end{aligned}\right\}\,.$$

(a) Estudieu la posició relativa de R_1 i R_2 en funció del paràmetre a.

(b) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals existeix un pla que conté a R_1 i és perpendicular a R_2 i, en cada cas, calculeu l'equació d'aquest pla.

34. Estudieu en funció del paràmetre a la posició relativa de les rectes d'equacions

$$x-3=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{a} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 2x+y-z&=2 \end{aligned}\right\} .$$

8.3 Projeccions ortogonals i simetries

35. Calculeu l'equació de la recta que passa pel punt $(4,-2)$ i pel simètric del punt $(8,3)$ respecte a la recta $R\colon 3x-y-1=0$.

36. Calculeu el simètric del punt $(1,-1,3)$ respecte a la recta

$$x=y-1=\frac{-z}{3} .$$

37. En cada un dels casos següents calculeu el simètric del punt p respecte al pla P:

(a) $p=(3,4,-3)$ i P té equació $x+3y-2z+7=0$.

(b) P té equació $x+y+2z-6=0$ i p és l'origen de coordenades.

38. Calculeu l'equació contínua de la recta simètrica de la recta d'equació

$$\frac{x-1}{2}=-y+3=\frac{z-2}{3}$$

respecte al pla $2x-y+z-1=0$.

39. Calculeu la projecció ortogonal de la recta

$$-x+2=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$$

sobre el pla $x-2y+5z+18=0$.

40. Els punts $(2,-1,3)$ i $(-4,3,1)$ són simètrics respecte al pla P. Calculeu l'equació de P.

41. Les rectes d'equacions

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y}{0}=\frac{z}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{4}$$

són simètriques respecte al pla P. Calculeu l'equació d'aquest pla.

42. (a) Demostreu que si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa norma, el vector $\vec{u}+\vec{v}$ forma el mateix angle amb $\vec{u}$ que amb $\vec{v}$.
(b) Comproveu que les rectes

$$\frac{x-1}{0} = y = \frac{z+2}{0} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} 2x-z-4=0 \\ 2x-2y+z+6=0 \end{aligned}\right\}$$

es tallen i trobeu-ne les rectes bisectrius en forma contínua.

43. Establiu un criteri per determinar si dos punts donats es troben o no en el mateix semiespai dels dos que defineix un pla. Apliqueu-lo als punts $p=(1,1,2)$ i $q=(0,1,4)$ i al pla $2x+y-z+2=0$.

44. Una gota de mercuri de 2 mg. de massa cau verticalment, és a dir, paral·lelament a l'eix OZ, des del punt $(2,1,20)$ fins a tocar el pla $x+y+z=15$, per on rellisca seguint la recta de màxim pendent. Trobeu el punt on la gota arriba al pla OXY i l'equació de la seva trajectòria en aquest darrer pla.
Dades: gravetat $g=9.8\ {}^{m}\!/_{s^2}$ i densitat del mercuri $13.6\ {}^{g}\!/_{cm^3}$.

8.4 Distàncies, àrees i volums

45. Donats el punt $p=(5,-7,2)$, la recta R d'equacions $x-2=y+3=-z$ i el pla P d'equació $2x+y+3z=0$, calculeu $d(p,R)$, $d(p,P)$ i $d(R,P)$.

46. Considereu el punt p d'intersecció de les rectes

$$\left.\begin{aligned} x=2+t \\ y=2+t \\ z=4+t \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} 3x-y+z=5 \\ x+y+z=5 \end{aligned}\right\}$$

i el pla P que passa pel punt $(3,0,0)$ i per la recta definida per les equacions $x+y-z+1=0$, $2x+3y+z-2=0$. Calculeu la distància del punt p al pla P.

47. Calculeu la distància entre els plans $x-3y+4z=2$ i $x-3y+4z=-4$.

48. Calculeu la distància entre les rectes

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z-4 \qquad \text{i} \qquad x+1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{5}\,.$$

49. Calculeu la distància entre la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

i la recta que passa pels punts $(0,3,-1)$ i $(1,5,1)$. Calculeu també l'equació de la perpendicular comuna que les talla.

50. Donats el punt $p = (1, 1, 2)$ i la recta R d'equació

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}\,,$$

considereu el pla P determinat per p i R, i també la recta S que passa per p i és perpendicular a P.

(a) Doneu l'equació contínua de S.

(b) Calculeu la distància de R a S.

51. Trobeu el valor de a per al qual la distància entre les rectes

$$\left.\begin{aligned} ax + y &= 2a \\ (a+2)x + y + 2z &= 2a+2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad \frac{x-3}{-1} = y = z+1$$

és màxima. Quina és aquesta distància?

52. Una avió es dirigeix a la pista d'aterratge $z = 0$ seguint la trajectòria

$$\left\{\begin{aligned} x &= 3+t \\ y &= 5+3t \\ z &= 16-2t \end{aligned}\right.$$

durant un cert interval de temps. Determineu l'instant t en què l'avió es troba més a prop d'una carretera d'equacions $x + y - 10 = 0$, $z = 0$ i calculeu a quina distància de la carretera passa.

53. Trobeu els dos plans que passen per la recta definida per

$$\left.\begin{aligned} x - 6 &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

i es troben a 2 unitats de distància de l'origen de coordenades.

54. Els punts que equidisten de dos plans formen els anomenats *plans bisectors*. Trobeu les equacions dels plans bisectors de $x - 2y + z = 0$ i $2x + y - z = 0$.

55. Els punts $(2, 3)$ i $(-1, 4)$ són vèrtexs d'un triangle que té àrea de 4'5 unitats. Calculeu l'altre vèrtex sabent que està situat sobre la recta $y = -x + 8$.

56. Calculeu l'àrea del triangle que s'obté en fer la intersecció del pla $2x - 3y + z = 0$ amb el tetràedre que té els vèrtexs en els punts $(1, -2, 1)$, $(1, 2, -5)$, $(4, -11, -5)$ i $(1, -4, 1)$.

57. Els punts $(5, 1, 5)$, $(4, 3, 2)$ i $(-3, -2, 1)$ són els vèrtexs d'un triangle rectangle. Calculeu la seva àrea i la longitud de la hipotenusa.

58. Calculeu l'àrea del triangle determinat per les projeccions ortogonals del punt $(1, 5, -2)$ sobre els plans $2x - y + z - 1 = 0$, $x + 2y + 3z + 23 = 0$ i $x - 2y + 5z = 41$.

59. Els punts $(2, -1, 0)$, $(0, -1, -1)$, $(1, 1, -3)$ i $(3, 1, -2)$ són els vèrtexs d'un rectangle. Calculeu la seva àrea, el seu perímetre i la longitud de les diagonals.

60. Sabem que els punts $(1, 1, 1)$, $(7, 7, -2)$, $(6, 9, 0)$ i $(0, 3, 3)$ són vèrtexs consecutius d'un quadrilàter.

(a) Demostreu que es tracta d'un rectangle.

(b) Trobeu-ne l'àrea, el perímetre i la longitud de les diagonals.

61. Donada la piràmide de base el quadrat de vèrtexs en els punts $(3, 3, -9)$, $(7, 5, -5)$, $(-1, 7, -7)$ i $(3, 9, -3)$ i vèrtex superior $(0, 0, 0)$, trobeu l'equació del pla paral·lel a la base tal que la seva intersecció amb la piràmide és un quadrat d'àrea 4.

62. Un tetràedre té els vèrtexs en els punts $(1, 1, 1)$, $(-2, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ i $(4, 6, -5)$. Calculeu el seu volum i la distància del punt $(-2, 1, 0)$ al pla determinat pels altres tres.

63. Els cinc vèrtexs d'una piràmide estan situats en els punts $(0, 3, 2)$, $(1, 1, 6)$, $(0, 0, 0)$, $(2, 4, 0)$ i $(2, 7, 2)$.

(a) Quins d'aquests cinc punts corresponen a la base, sabent que aquesta és un paral·lelogram?

(b) Calculeu el volum de la piràmide.

64. D'entre tots els plans que contenen la recta

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

trobeu:

(a) Un pla que formi amb els eixos de coordenades un tetràedre de volum 9.

(b) El pla més allunyat de l'origen de coordenades.

65. Determineu el volum d'un cub que té dues cares oposades situades en els plans $x + 2y + 2z + 5 = 0$ i $x + 2y + 2z = 4$.

66. Trobeu l'equació d'un pla que passi per la recta definida per $x + y = 3$, $z = 0$ i talli els eixos de coordenades formant un tetràedre de volum 18.

8.5 Sistemes de referència

67. Donats dos sistemes de referència en el pla,

$$\mathcal{S}_1 = \{p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{S}_2 = \{q;\ \vec{v}_1, \vec{v}_2\}\,,$$

on $p = (1, -2)$, $\vec{u}_1 = (1, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1)$, $q = (-3, 0)$, $\vec{v}_1 = (2, 1)$ i $\vec{v}_2 = (-1, 2)$, calculeu l'expressió del canvi de coordenades de $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.

68. Calculeu l'equació de la recta $2x - 3y = 2$ en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, on $p = (2, 1)$, $\vec{u}_1 = \frac{1}{5}(3, 4)$ i $\vec{u}_2 = \frac{1}{5}(-4, 3)$.

69. Siguin p, q i r tres punts del pla no alineats. Donats els sistemes de referència $\mathcal{S}_1 = \{p;\ \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}\}$ i $\mathcal{S}_2 = \{r;\ \overrightarrow{rp}, \overrightarrow{rq}\}$, calculeu l'expressió del canvi de coordenades de $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1$.

70. Siguin p, q i r els vèrtexs d'un triangle en el pla. Trobeu les equacions de les tres medianes del triangle en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}\}$.

71. Siguin p, q, r i s els quatre vèrtexs d'un paral·lelogram en el pla, situats de manera que el segment ps és una diagonal. Calculeu les equacions de les dues diagonals en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}\}$.

72. Demostreu, escollint un sistema de referència adequat, que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt.

73. Calculeu les coordenades del punt $q = (2, 1, -3)$ en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, on $p = (-2, 1, 1)$, $\vec{u}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (3, 2, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, -1, -7)$.

74. Calculeu l'equació del pla $2x + y + 3z = 2$ en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, on $p = (1, 3, 1)$, $\vec{u}_1 = (1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (-7, 1, -1)$ i $\vec{u}_3 = (-1, 2, 1)$.

75. L'equació d'un pla és $x + y + z = 1$. Calculeu l'equació d'aquest pla en la referència determinada pel punt $(1, 1, 1)$ i la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$.

76. Siguin p, q, r i s els vèrtexs d'un tetràedre. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts q, r i s en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}, \overrightarrow{ps}\}$.

77. (a) Estudieu la posició relativa del pla $x + 2y + 2z - 5 = 0$ i la recta

$$x - 3 = \frac{y - 6}{2} = \frac{z - 4}{2}\,.$$

(b) Trobeu un nou sistema de referència $\mathcal{S} = \{p;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tal que p pertanyi a la recta anterior i l'equació del pla passi a ser $z' = 0$.

78. Considereu un cub de 6 m. de costat. Adapteu una referència rectangular a la figura i calculeu la distància entre una diagonal del cub i la diagonal no concurrent amb ella d'una de les seves cares.

9

Corbes i superfícies de segon grau

9.1 Equacions de les còniques

1. Calculeu l'equació de la paràbola que té per focus el punt $(2, -3)$ i per directriu la recta d'equació $3x - y + 2 = 0$. Representeu-la gràficament i escriviu la seva equació canònica.

2. Calculeu l'equació de l'el·lipse que té els focus en els punts $(-2, -1)$ i $(4, 1)$ i el semieix major igual a 4. Representeu-la gràficament i escriviu la seva equació canònica.

3. Calculeu l'equació de la hipèrbola que té els focus en els punts $(2, 0)$ i $(-2, 4)$ i el semieix real igual a 2. Representeu-la gràficament i escriviu la seva equació canònica.

4. Les rectes $2x + y = 3$ i $x - y = 0$ són les asímptotes d'una hipèrbola. Calculeu la seva equació sabent que passa pel punt $(1, -1)$.

9.2 Classificació i elements geomètrics

En els exercicis 5. a 8. d'aquesta secció, indiqueu el tipus de cònica i, en cada cas, calculeu els seus elements característics (centre, vèrtex, eixos, equació reduïda, asímptotes, etc.). Si la cònica és degenerada, calculeu les equacions de les rectes que la formen.

5. Estudieu les còniques següents:

(a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$.
(b) $4x^2 - 6xy - 4y^2 - 14x - 2y + 1 = 0$.
(c) $x^2 - xy - 2y^2 + x + 7y - 6 = 0$.
(d) $3x^2 + 4xy - 6x - 4y - 1 = 0$.

6. Estudieu les còniques següents:

(a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 12x + 4y + 4 = 0$.
(b) $4xy - 3y^2 + 4x - 14y + 15 = 0$.
(c) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 13 = 0$.
(d) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 126x - 22y - 31 = 0$.

7. Estudieu les còniques següents:

(a) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.
(b) $3x^2 + 10xy - 8y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.
(c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 12y + 20 = 0$.
(d) $x^2 + 8xy + 16y^2 + 8x + 32y + 15 = 0$.

8. Estudieu les còniques següents:

(a) $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 4y - 31 = 0$.
(b) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 19 = 0$.
(c) $xy - x - 2 = 0$.
(d) $10x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$.
(e) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 32 = 0$.

9. Classifiqueu les còniques següents:

(a) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2 = 0$.
(b) $xy + 2x + y - 1 = 0$.

10. Digueu quins parells de rectes formen cadascuna de les còniques degenerades següents:

(a) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$.
(b) $x^2 - y^2 - x - y = 0$.

11. Classifiqueu segons els valors de λ les còniques d'equació

$$\lambda x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2x - 2y + \lambda = 0\,.$$

12. Classifiqueu segons els valors de λ les còniques d'equació

$$(2+\lambda)x^2 - y^2 + 4y - (1+3\lambda) = 0\,.$$

13. Calculeu els valors de t per als quals la cònica d'equació

$$x^2 + 2txy + y^2 + 2x + 2(1+t)y + 1 = 0$$

és una paràbola i, en cada cas, trobeu la seva equació reduïda.

14. Trobeu els punts d'intersecció de la cònica $2x^2 + 9xy + 18y^2 - 26x - 45y + 8 = 0$ i la recta d'equació $2x + 3y - 4 = 0$.

15. Trobeu els quatre vèrtexs de l'el·lipse $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 104x + 72y + 112 = 0$ i els dos vèrtexs de la hipèrbola $x^2 - 6xy + y^2 - 2x + 6y + 17 = 0$.

16. Calculeu l'equació de la recta tangent a la cònica $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + 4y - 9 = 0$ en el punt $(1, 2)$.

17. Trobeu les tangents a la cònica $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5y + 6 = 0$ que passen pel punt $(2, 7)$.

18. Trobeu les tangents a la cònica $4x^2 - 3xy - 2y^2 + 2x - 3y - 10 = 0$ que són paral·leles a la recta $x - y + 5 = 0$.

9.3 Problemes de llocs geomètrics

En tots els exercicis d'aquesta secció, si el lloc geomètric obtingut és una cònica, classifiqueu-la.

19. Siguin $p = (2, 1)$ i q un punt variable sobre la recta $y = 2x + 1$. Calculeu l'equació del lloc geomètric de les interseccions de la recta que passa per p i q i la perpendicular a pq que passa per l'origen.

20. Calculeu l'equació del lloc geomètric dels centres de les còniques

$$(1+\lambda)x^2 - 2\lambda y^2 + 6xy + 2\lambda y - 1 = 0\,.$$

21. Una circumferència de radi variable és tangent a la recta $y = 0$ en el punt $(-1, 0)$. Si R és la recta tangent a la circumferència paral·lela a l'eix OX i S és la recta tangent a la circumferència que passa per $(1, 0)$, calculeu l'equació del lloc geomètric de les interseccions de les rectes R i S.

22. Calculeu l'equació del lloc geomètric dels punts tals que la seva distància al punt $(1, -3)$ és igual al doble de la seva distància a la recta $x + 2y - 1 = 0$.

23. Calculeu l'equació del lloc geomètric dels baricentres dels triangles que tenen dos vèrtexs en els punts $(-4, -2)$ i $(6, 8)$ i el tercer sobre la circumferència de centre $(1, 3)$ i radi 4.

24. Siguin p un punt sobre la recta R d'equació $x + 2y = 3$ i p' la seva projecció ortogonal sobre l'eix de les x. Calculeu l'equació del lloc geomètric de les interseccions de la recta perpendicular a R que passa per p i la circumferència de centre p' que passa per l'origen de coordenades.

25. Donats els punts $p = (-4, 0)$, $q = (4, 0)$ i r sobre la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = 16$, siguin m el punt mitjà del segment qr i s el punt mitjà del segment pm. Calculeu l'equació del lloc geomètric format pels punts s.

26. Sigui R una recta variable amb pendent igual al doble de l'ordenada a l'origen. Calculeu l'equació del lloc geomètric de les projeccions ortogonals del punt $(-2, 3)$ sobre les rectes R.

27. Calculeu l'equació del lloc geomètric de les projeccions ortogonals del punt $(3, 0)$ sobre les tangents a la paràbola $y = x^2$.

28. Trobeu l'equació del lloc geomètric dels centres de les el·lipses que tenen un vèrtex de l'eix principal a l'origen de coordenades i un vèrtex de l'eix secundari en el punt (a, b).

9.4 Classificació de quàdriques

29. Calculeu l'equació de l'esfera de centre $(1, 2, 2)$ i radi 3.

30. Calculeu el centre i el radi de l'esfera d'equació

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 1 = 0\,.$$

31. Trobeu el centre i el radi de la circumferència que resulta d'intersecar el pla $x + 2y + 2z = 8$ amb l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 16$.

32. Estudieu les quàdriques següents:

(a) $xy + xz - 1 = 0$.

(b) $2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$.

33. Estudieu les quàdriques següents:

(a) $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 8x + 2y - 14z + 5 = 0$.
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 4y + 2 = 0$.

34. Estudieu les quàdriques següents:

(a) $3y^2 + 2xz + 4x - 6y + 2z + 7 = 0$.
(b) $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz + 10yz - 36x - 6y + 42z + 21 = 0$.

35. Comproveu que la quàdrica d'equació

$$x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 2yz + z^2 - 4 = 0$$

està formada per plans i calculeu les equacions d'aquests plans.

36. Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$x^2 - 2y^2 + \alpha z^2 - 2xz + 2yz + 2x + 1 = 0$$

segons els valors del paràmetre α.

37. Classifiqueu la quàdrica d'equació

$$x^2 + (a+1)y^2 - 2az + 4(a-1)y + 3 = 0$$

segons els valors del paràmetre a.

38. Donades l'esfera d'equació $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$ i la recta

$$\frac{x-2}{9} = \frac{y+4}{12} = \frac{z+3}{16},$$

trobeu els plans tangents a l'esfera que contenen la recta.

39. La circumferència C té centre $(1, 1, 1)$ i radi 3 i està situada en el pla d'equació $x + y + z - 3 = 0$. Calculeu l'equació del lloc geomètric format per les rectes que passen pel punt $(0, 0, 0)$ i per un punt de la circumferència C i classifiqueu la figura obtinguda.

40. Calculeu l'equació del lloc geomètric format pels punts de l'espai que equidisten de les rectes $y = 0$, $z = 0$ i $z = 3$, $2x - 3y = 0$. Classifiqueu la figura.

41. Calculeu l'equació del lloc geomètric de les rectes tangents a una esfera de radi λ i centre $(0, 0, 0)$ que passen pel punt $(0, 0, 5)$. Classifiqueu la quàdrica obtinguda segons els valors de λ.

42. Calculeu l'equació de la quàdrica que s'obté fent girar la recta $x = y = z$ al voltant de l'eix OX. Classifiqueu-la.

43. Calculeu l'equació del cilindre engendrat per la rotació de la recta d'equacions $x = 1$, $y = 2$ al voltant de l'eix OZ.

44. Calculeu l'equació del lloc geomètric dels centres de les esferes que passen pel punt $(1, 2, -1)$ i són tals que la seva intersecció amb el pla $x - z + 2 = 0$ és un circumferència de radi donat λ. Classifiqueu la quàdrica obtinguda.

10

Qüestionari

Aquest qüestionari ha estat dissenyat amb la intenció de recordar als alumnes una sèrie de punts bàsics de la teoria als quals dediquen sovint menys atenció de la necessària. Pensem que una bona comprensió dels fonaments teòrics de l'assignatura és la millor garantia per atacar i resoldre correctament els problemes.

Bona part de les qüestions provenen d'exàmens de l'actual Pla 93. Moltes d'elles només requereixen localitzar un o diversos punts de la teoria, mentre que les restants demanen uns moments addicionals de reflexió. Confiem que totes plegades constituiran un bon material complementari per als problemes i exercicis proposats en aquest llibre, però hem cregut convenient no incloure les respostes perquè desvirtuarien la intenció del qüestionari.

10.1 Sistemes d'equacions lineals

1. Enunciеu i demostreu el teorema principal dels sistemes homogenis.

2. De quins tipus pot ser un sistema d'equacions lineals amb tantes incògnites com equacions? I un sistema amb més equacions que incògnites?

3. Enunciеu i demostreu el teorema de Rouché-Frobenius.

4. Com pot variar el tipus d'un sistema d'equacions lineals canviant només els termes independents? I si es tracta d'un sistema amb tantes incògnites com equacions?

5. És possible que un sistema d'equacions lineals amb tots els coeficients i termes independents reals tingui solucions complexes? I que *només* tingui solucions complexes? (Entenem per *solució complexa* aquella on no totes les incógnites x_i tenen valors reals.)

10.2 Matrius i determinants

6. Expliqueu quins són els tres defectes principals del producte de matrius quadrades. Poseu exemples 2×2 per il·lustrar-los.

7. Definiu matriu regular i digueu què sabem del seu rang i del seu determinant.

8. Demostreu que si A, B i C són matrius quadrades tals que $AB = C$, i C és regular, aleshores A també és regular. Es pot dir el mateix de B?

9. Demostreu que si A és regular i $AB = AC$ aleshores $B = C$.

10. Si A i B són matrius regulars del mateix ordre, demostreu que AB és regular i que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

11. Escriviu dues matrius 2×2 no nul·les, A i B, tals que $AB = 0$.

12. Existeix alguna matriu quadrada no nul·la A tal que $AA^t = 0$?

13. Aplicant la propietat $(AB)^t = B^t A^t$, demostreu que tota matriu de la forma AA^t és simètrica, i que si A és simètrica aleshores $C^t AC$ també és simètrica.

14. Una matriu quadrada A és *antisimètrica* si $A^t = -A$. Demostreu que si A és antisimètrica i d'ordre 3 aleshores $\det(A) = 0$. Generalitzeu aquesta afirmació.

15. Determineu quantes arrels quadrades admeten la matriu unitat I i la matriu nul·la 0 d'ordre 2 (A és una *arrel quadrada* de B si $A^2 = B$). Preciseu en cada cas quantes són diagonals.

16. Definiu matriu ortogonal i digueu què sabem del seu determinant i de la seva inversa. Quina és la inversa d'una matriu ortogonal i simètrica?

17. Enuncieu les propietats dels determinants relatives al producte i a la transposició de matrius.

18. Si A i B són matrius 2×2 tals que $\det(A) = 4$ i $\det(B) = 2$, calculeu $\det(3A^{-1}B^2)$.

19. Si B és una matriu regular i $A^t BA = B$, determineu quins valors pot tenir $\det(A)$.

20. Citeu tres aplicacions interessants dels determinants.

21. Sabent que a, b, c i d són nombres reals diferents de zero, determineu el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}.$$

10.3 Espais vectorials

22. Si uns quants vectors són linealment dependents, en quin cas es pot assegurar que *cadascun d'ells* és combinació lineal dels altres? En quin cas *només un d'ells* ho és?

23. Donat un conjunt de vectors, n'hi ha prou amb veure que un d'ells no és combinació lineal dels altres per assegurar que tots plegats són linealment independents?

24. Es cert que donats $n+1$ vectors de $\mathbb{R}^n$ sempre podem escollir-ne n que formin base?

25. Com són els vectors columna d'una matriu regular? I els vectors fila?

26. Definiu sistema de generadors de $\mathbb{R}^n$. Definiu conjunt de vectors linealment independents.

27. Poseu un exemple de sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ linealment dependents i un exemple de conjunt linealment independent de vectors de $\mathbb{R}^3$ que no generin $\mathbb{R}^3$.

28. Enuncieu i demostreu el teorema de les bases.

29. Definiu els conceptes de dimensió d'un espai vectorial, rang d'un conjunt de vectors i rang d'una matriu.

30. Definiu subespai vectorial.

31. Si un subespai S de $\mathbb{R}^5$ queda definit per un sistema de 4 equacions lineals homogènies de rang 3, quina és la dimensió de S?

32. Si un subespai S de $\mathbb{R}^n$ admet un sistema de generadors amb k vectors, i el rang de la matriu formada per aquests k vectors és r, quina és la dimensió de S?

33. Si un subespai S de $\mathbb{R}^n$ està definit per un sistema de m equacions lineals homogènies, i el rang del sistema és r, quina és la dimensió de S?

34. Si S és un subespai de $\mathbb{R}^n$ definit per un sistema de m equacions lineals homogènies, i d és la dimensió de S, digueu quin és el rang del sistema.

35. Demostreu que si S és un subespai de T i $\dim(S) = \dim(T)$ aleshores $S = T$.

36. (a) Les matrius quadrades d'ordre 6 tals que la suma dels coeficients de cada columna és 0 formen un subespai S de $M_{6\times6}(\mathbb{R})$. Calculeu la dimensió de S.
(b) Feu el mateix amb les que tenen zeros a tota la diagonal principal i amb les de traça nul·la (la *traça* d'una matriu quadrada és la suma dels coeficients de la diagonal principal).

37. (a) Calculeu la dimensió de l'espai vectorial format per les matrius quadrades simètriques d'ordre 5.
(b) Calculeu la dimensió de l'espai vectorial format per les matrius antisimètriques d'ordre 4.
(c) Generalitzeu els resultats anteriors al cas $n \times n$.

38. (a) Buscant la dimensió d'un espai vectorial, un company vostre ha trobat 4 vectors linealment independents, i un altre company ha trobat un sistema de generadors amb 5 vectors. Què els podeu dir?
(b) I si el primer ha trobat 5 vectors linealment independents que no formen sistema de generadors i el segon un sistema de generadors format per 7 vectors linealment dependents?
(c) I si l'un ha trobat 5 vectors linealment independents i l'altre ha trobat un sistema de generadors amb 4 vectors?

39. Definiu la intersecció i la suma de dos subespais vectorials. Expliqueu en quines condicions diem que la suma de dos subespais és directa.

40. Escriviu la fórmula de Grassmann. Expliqueu què se'n dedueix en el cas de suma directa.

41. Si S i T són subespais tals que $\dim(S) = \dim(S + T)$, què podem dir de T i $S \cap T$?

42. Si S i T són subespais de $\mathbb{R}^5$ de dimensions respectives 3 i 4, quines són les possibles dimensions de $S \cap T$?

43. Digueu tots els casos en els que dos subespais no trivials de $\mathbb{R}^3$ formen suma directa. En quins d'aquests casos són suplementaris?

44. Expliqueu el significat de la matriu d'un canvi de base

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{\quad C \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$$

i preciseu de quina manera relaciona els dos sistemes de components d'un vector genèric.

45. Suposem que $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i que el canvi de base és

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_2) \xrightarrow{\quad C \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1) \qquad\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indiqueu les components de u_1 en la base $\mathcal{B}_2$ i les components de v_2 en la base $\mathcal{B}_1$.

46. No és difícil que un vector tingui les mateixes components en dues bases diferents (per exemple, el vector 0 té les mateixes components en totes les bases). Si a $\mathbb{R}^2$ cadascun dels vectors u_1 i u_2 té les mateixes components en les bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, en quin cas podem afirmar que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$?

47. Si coneixem les matrius dels canvis de base

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1) \xrightarrow{\quad C_1 \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \qquad \text{i} \qquad (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_2) \xrightarrow{\quad C_2 \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$$

expliqueu com trobem la matriu del canvi de base

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_2) \xrightarrow{\quad C \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_1)\,.$$

10.4 Estructura euclidiana de $\mathbb{R}^n$

48. Definiu angle no orientat entre vectors no nuls de $\mathbb{R}^n$.

49. Enunicieu i demostreu el teorema de Pitàgores a $\mathbb{R}^n$.

50. Enunicieu la desigualtat de Schwarz.

51. Demostreu que si u i v tenen la mateixa norma aleshores aquests vectors formen el mateix angle amb $u + v$.

52. Existeix algun vector $u \in \mathbb{R}^3$ que formi amb els vectors de la base canònica angles de 60°, 60° i 45° respectivament? En cas afirmatiu, trobeu-ne un amb $\| u \| = 2$.

53. Quines són les propietats característiques del producte vectorial de dos vectors linealment independents u i v?

54. Calculeu un vector unitari w ortogonal a $u = (1, 1, -1)$ i $v = (0, 1, 1)$. Quantes solucions hi ha?

55. Demostreu que tot subespai no nul de $\mathbb{R}^n$ admet bases ortonormals.

56. Demostreu que els vectors ortogonals a un subespai S de $\mathbb{R}^n$ formen un subespai $S^\perp$ que és suplementari de S. Demostreu també que $(S^\perp)^\perp = S$.

57. Si $u \in \mathbb{R}^n$ i H és un subespai de $\mathbb{R}^n$, què ha de complir un vector $u' \in H$ per ser la projecció ortogonal de u sobre H? Expliqueu en quin sentit es diu que la projecció ortogonal u' és la millor aproximació a u dins de H.

58. Conservant les notacions de la qüestió anterior, si u'' és la projecció ortogonal de u sobre $H^\perp$, relacioneu els vectors u, u' i u''. I si u^* és el simètric de u respecte al subespai H, relacioneu els vectors u, u' i u^*.

59. Si u' és la projecció ortogonal d'un vector $u \in \mathbb{R}^n$ sobre un subespai H de $\mathbb{R}^n$, digueu on ha de trobar-se u en les casos següents:

(a) Si $u' = 0$.

(b) Si $u' = u$.

60. Quina condició satisfan els vectors columna d'una matriu ortogonal? La compleixen també els vectors fila?

61. Expliqueu breument el mètode dels mínims quadrats. A partir de les dades, com sabem si la solució és única?
Expliqueu què és l'error quadràtic i especifiqueu quina relació hi ha entre els errors quadràtics de les solucions quan n'hi ha més d'una.

62. Si un sistema d'equacions lineals és compatible, quina relació hi ha entre les seves solucions (exactes) i les que surten en aplicar el mètode dels mínims quadrats (aproximades)?

10.5 Transformacions lineals

63. La revista "Tráfico" de març de 1994 deia que un Seat Ibiza costava a Alemanya un 23% més que a Espanya, i que a Portugal costava un 18% menys que a Espanya. La revista deduïa que un Seat Ibiza costava a Alemanya un 41% més que a Portugal. Es correcta aquesta deducció? Quina relació té aquesta pregunta amb les transformacions lineals?

64. Definiu transformació lineal.

65. Enunncieu el teorema de caracterització de les transformacions lineals.

66. És cert que la imatge d'un conjunt de vectors linealment independents és un conjunt linealment independent?

67. Es cert que les imatges dels vectors d'una base del primer espai formen una base del segon espai? Formen una base del subespai imatge?

68. Enunncieu la relació fonamental entre dimensions per a qualsevol transformació lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

69. Si T és un endomorfisme de $\mathbb{R}^n$, demostreu que $\mathrm{Nuc}(T)$ és un subespai de $\mathrm{Nuc}(T^2)$, mentre que $\mathrm{Im}(T^2)$ és un subespai de $\mathrm{Im}(T)$.

70. Demostreu que si T és un endomorfisme tal que $T^2 = 0$ aleshores $\mathrm{Im}(T)$ és un subespai de $\mathrm{Nuc}(T)$.

71. Quina condició ha de complir l'endomorfisme $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ per tal que existeixi un subespai H de dimensió 3 tal que $\dim T(H) = 1$?

72. Demostreu que si $\mathrm{Nuc}(T) = \{0\}$, aleshores la transformació lineal T és injectiva.

73. Si $u_1, u_2, \ldots, u_r$ són vectors linealment independents de $\mathbb{R}^n$ i tenim una transformació lineal injectiva $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, què es pot dir dels vectors $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_r)$?

74. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ és una transformació lineal injectiva, què es pot dir de les dimensions n i p? I si T és exhaustiva?

75. Si T és una transformació lineal bijectiva de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, determineu les dimensions de $\mathrm{Nuc}(T)$ i de $\mathrm{Im}(T)$ i demostreu que $n = m$.

76. Demostreu que un endomorfisme és una transformació injectiva si, i només si, és exhaustiva.

77. Si $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és una transformació lineal, A és la seva matriu en les bases canòniques i sabem que $\mathrm{rang}(A) = 3$, digueu si la transformació T és injectiva o exhaustiva. La mateixa pregunta si és $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ i $\mathrm{rang}(A) = 3$.

78. Si A i B són matrius quadrades d'ordre n, relacioneu $\mathrm{rang}(AB)$ amb $\mathrm{rang}(A)$ i $\mathrm{rang}(B)$. (Indicació: penseu que A, B i AB representen endomorfismes de $\mathbb{R}^n$.)

79. Suposem que A i B són matrius quadrades d'ordre n tals que $AB = 0$. Si $\mathrm{rang}(A) = r$, quins valors pot tenir el rang de B? I si A és regular? (La mateixa indicació que a la qüestió anterior.)

80. Si T és un endomorfisme i H un subespai de $\mathbb{R}^n$, en general tenim $\dim T(H) \neq \dim(H)$. Poseu exemples no trivials on es compleixin la igualtat i la desigualtat estricta, i relacioneu la dimensió de $T(H)$ amb les dimensions de H i de $H \cap \mathrm{Nuc}(T)$.

81. Definiu matriu associada a una transformació lineal respecte de dues bases donades.

82. Escriviu la fórmula del canvi de base de la matriu d'un endomorfisme explicant el significat de cadascuna de les matrius que hi intervenen.

83. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un endomorfisme del que coneixem la matriu A' en una base $\mathcal{B}'$ i

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{\quad C \quad} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_c)$$

és la matriu del canvi de $\mathcal{B}'$ a la base canònica, escriviu la matriu A de T en la base canònica en funció de A' i C.

84. Demostreu que el determinant de la matriu d'un endomorfisme no varia quan fem un canvi de base.

85. Expliqueu les dues situacions on apareixen matrius ortogonals.

86. Demostreu que el determinant de la matriu d'una isometria només pot ser ± 1.

10.6 Diagonalització

87. Demostreu que el polinomi característic d'una matriu no varia en fer un canvi de base.

88. Definiu vector propi i valor propi d'un endomorfisme.

89. Demostreu que tota combinació lineal de dos vectors propis del mateix valor propi és també un vector propi. Amb quin valor propi?

90. Demostreu que si v és vector propi tant de l'endomorfisme T com de l'endomorfisme S, aleshores v també és vector propi de l'endomorfisme compost $S \circ T$. Amb quin valor propi?

91. Si α és un valor propi de l'endomorfisme T amb multiplicitat m, què podem dir del nombre de vectors propis independents de valor propi α?

92. Demostreu que si dos vectors no nuls u i v són vectors propis d'un endomorfisme T amb valors propis respectius $\alpha \neq \beta$ aleshores u i v són linealment independents.

93. Si α és un valor propi d'un endomorfisme T, demostreu que α^2 és valor propi de l'endomorfisme T^2.

94. Quins són els únics valors propis possibles d'una isometria? Descriviu els valors propis de cada isometria del pla i de l'espai tridimensional.

95. Definiu matriu simètrica i digueu en quines condicions és diagonalitzable.

96. Sigui $w = (a, b, c)$ un vector no nul de $\mathbb{R}^3$. Escriviu la matriu en la base canònica de l'endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ definit per $T(u) = w \wedge u$ i digueu si T és diagonalitzable.

97. Demostreu que tota matriu real simètrica 2×2 admet dos valors propis reals diferents o bé és múltiple de la matriu unitat I. Deduïu-ne el teorema espectral per a $n = 2$.

98. Enuncieu el teorema espectral. Expliqueu en què consisteix la diagonalització ortogonal d'una matriu simètrica.

99. Sigui P una projecció ortogonal sobre un pla de $\mathbb{R}^3$. Quins són els seus valors propis? Quina multiplicitat té cada valor propi? I si P és una projecció ortogonal sobre una recta de $\mathbb{R}^3$?

100. (a) Poseu un exemple de matriu 3×3 amb coeficients reals no diagonalitzable sobre $\mathbb{R}$ però sí sobre $\mathbb{C}$.
(b) Poseu un altre exemple de matriu 3×3 que no sigui diagonalitzable sobre els reals ni sobre els complexos.

101. Què podem dir de dos vectors propis de valor propi diferent d'una matriu de coeficients reals? I si la matriu es simètrica?

102. Digueu totes les isometries del pla que admeten vectors propis no nuls. Per a cada una, descriviu els vectors propis i els corresponents valors propis.

103. Digueu una condició necessària però no suficient per tal que una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sigui diagonalitzable sobre $\mathbb{R}$. Digueu també una condició suficient però no necessària.

104. Determineu els girs de $\mathbb{R}^2$ que són endomorfismes diagonalitzables sobre $\mathbb{R}$.

105. Expliqueu les dues causes que poden fer que una matriu A de coeficients reals no sigui diagonalitzable sobre $\mathbb{R}$.

106. Digueu si és cert el raonament següent: tota matriu diagonalitzable admet una base ortonormal de vectors propis; per obtenir aquesta base és suficient aplicar el mètode de Gram-Schmidt a una base qualsevol de vectors propis.

107. Si A és la matriu en la base canònica d'una simetria plana de $\mathbb{R}^3$, expliqueu quin tipus d'isometria representa la matriu $-A$.

108. Si G és un gir del pla i S una simetria axial, quin tipus d'isometria és $S\circ G$?

109. Quins són els dos tipus d'isometries del pla $\mathbb{R}^2$ i com es distingeixen segons la seva matriu en la base canònica?

110. Si S_x i S_y són les simetries axials de $\mathbb{R}^3$ d'eixos OX i OY, escriviu la matriu de $S_y\circ S_x$ i digueu quina isometria representa.

111. Si A és la matriu d'un endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica, expliqueu quines condicions ha de complir A per tal que T sigui:

(a) Una rotació.
(b) Una simetria plana.

(c) Una simetria axial.

112. Si T és una isometria de $\mathbb{R}^3$ i A és la seva matriu en la base canònica, digueu quin tipus d'isometria és T en cada un dels casos següents:

(a) A és simètrica i $\det(A) = 1$.
(b) A no és simètrica i $\det(A) = 1$.
(c) A és simètrica i $\det(A) = -1$.

10.7 Tensors i formes quadràtiques

113. Què diu la llei d'inèrcia? Expliqueu què són els índexs d'inèrcia d'una forma quadràtica i quina és la manera de calcular-los.

114. Per a què serveixen els índexs d'inèrcia?

115. Enunicieu el teorema de caracterització matricial dels tensors.

116. Enunicieu el criteri de Sylvester.

117. Demostreu que dos tensors diferents no poden definir la mateixa forma quadràtica.

10.8 Geometria lineal

118. Amb les equacions de dos plans que defineixen una recta R i la d'un tercer pla P formem un sistema d'equacions lineals 3×3. Descriviu la posició relativa de R i P segons el rang del sistema.

119. Ajuntem les equacions de dues parelles de plans que defineixen respectivament les rectes R i R', formant un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites. Descriviu la posició relativa de R i R' segons el rang del sistema.

120. Definiu paral·lelisme i perpendicularitat entre varietats lineals.

121. Si la distància entre dues varietats lineals és 0, què podem dir de la seva intersecció?

10.9 Corbes i superfícies de segon grau

122. Definiu com a lloc geomètric l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola.

123. Quines condicions han de complir els coeficients de la cònica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

per tal que sigui una circumferència?

124. Què és una cònica degenerada? Com es coneix a partir de l'equació?

125. Definiu esfera com a lloc geomètric. Com són entre si el pla tangent a una esfera en un dels seus punts i el vector que uneix el centre amb aquest punt?

11

Solucions dels problemes

11.1 Sistemes d'equacions lineals

1. a) Incompatible.
b) Compatible indeterminat, $x = z + 2$, $y = -z + 1$, $u = 2$.
c) Compatible determinat, $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$, $t = -1$.

2. a) Compatible indeterminat, $x = \frac{3z}{7}$, $y = \frac{5z}{7}$.
b) Incompatible.
c) Compatible determinat, $x = -\frac{21}{5}$, $y = 2$, $z = \frac{12}{5}$.

3. a) Incompatible.
b) Compatible indeterminat, $x = 0$, $y = -z$.

4. a) Compatible indeterminat, $x = \frac{4-z}{3}$, $y = \frac{2z+1}{3}$.
b) Incompatible.

5. a) Compatible determinat, $x = 9$, $y = -2$, $z = 5$.
b) Compatible determinat, $x = 2$, $y = 5$, $z = 3$.
c) Compatible indeterminat, $x = \frac{9z-2}{7}$, $y = \frac{8z+13}{7}$.

6. a) Incompatible.
b) Compatible indeterminat, $x = -y - 2$, $z = 3$.
c) Compatible indeterminat, $x = -y + 2$, $z = 1$.

7. a) Incompatible.
b) Incompatible.
c) Compatible determinat, $x = 8$, $y = -6$.

8. Un possible sistema i la seva solució general són

$$\left.\begin{aligned} 7x + y + 10t &= 0 \\ -6x + z - 8t &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{i} \qquad y = -7x - 10t, \qquad z = 6x + 8t\,.$$

9. a) $x = \dfrac{ed - fc}{ad - bc}$, $y = \dfrac{af - be}{ad - bc}$.
b) $x = -\dfrac{a}{2bc}$, $y = \dfrac{1}{2c}$, $z = \dfrac{1}{2b}$.

10. a) Compatible determinat, $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.
b) Compatible determinat, $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

11. a) Compatible indeterminat. $x = y - t$, $z = -2y + 2t$.
b) Compatible indeterminat. $x = 2z$, $y = -z$.

12. a) Compatible indeterminat, $x = \dfrac{z + t - u}{5}$, $y = \dfrac{3z + 3t - 3u}{5}$.
b) Compatible indeterminat, $x = 2y - z$, $t = 1$.
c) Incompatible.

13. a) Incompatible.
b) Compatible indeterminat, $x = z + 2$, $y = -z + 1$, $u = 2$.
c) Compatible determinat, $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$, $t = -1$.

14. a) Compatible indeterminat, $x = \dfrac{3z}{7}$, $y = \dfrac{5z}{7}$.
b) Incompatible.
c) Compatible determinat, $x = -\dfrac{21}{5}$, $y = 2$, $z = \dfrac{12}{5}$.

15. $a = 4$, $b = 10$.

16. Si $a = -2$, el sistema és incompatible. Si $a \neq -2$, és compatible indeterminat i la solució és

$$x = -\frac{(a+2)y - 2a}{2(a+2)}\,, \qquad z = \frac{-2}{a+2}\,.$$

17. a) $t \neq 0$ i 1. La solució és $x = \dfrac{t}{t-1}$, $y = \dfrac{1}{1-t}$, $z = \dfrac{t}{t-1}$.
b) $t = 0$. La solució general és $x = 1 - y$, $z = 0$.
c) $t = 1$.

18. Si $a = 1$ és incompatible. Si $a \neq 1$ és compatible determinat, i la solució és

$$x = \frac{a^3 + a^2 - 1}{a - 1}\,, \quad y = \frac{a}{1-a}\,, \quad z = -a^2 - a\,.$$

19. Si $a \neq \pm 2$ és incompatible. Si $a = 2$ és compatible indeterminat, i la solució és $x = \frac{12-4z}{3}$, $y = \frac{3-z}{3}$. Finalment, si $a = -2$ és compatible determinat, i la solució és $x = 4$, $y = 1$, $z = 0$.

20. a) Si $\alpha \neq 1$ i 2, compatible determinat. La solució és $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Si $\alpha = 1$, compatible indeterminat. La solució és $x = -y + z$. Si $\alpha = 2$, compatible indeterminat. La solució és $x = -z$,

$y = z$.
b) Si $\alpha \neq 0$ i 1, compatible determinat. La solució és

$$x = \frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha - 1}\,, \qquad y = \frac{\alpha + 1}{2}\,, \qquad z = \frac{2\alpha - 3}{\alpha^2 - \alpha}\,.$$

Si $\alpha = 0$, incompatible. Si $\alpha = 1$, compatible indeterminat. La solució és $x = \dfrac{8}{3} - z$, $y = \dfrac{5}{6}$.
c) Si $\alpha \neq 3$, incompatible. Si $\alpha = 3$, compatible indeterminat. La solució és $x = \dfrac{-z + 11}{2}$, $y = \dfrac{z - 5}{2}$.

21. a) Si $a \neq -2$ i 1, i $b \neq 0$, compatible determinat. La solució és

$$x = \frac{a - b}{(a + 2)(a - 1)}\,, \qquad y = \frac{ab + b - 2}{b(a + 2)(a - 1)}\,, \qquad z = \frac{a - b}{(a + 2)(a - 1)}\,.$$

b) Si $b = 0$, incompatible.
c) Si $a = -2$ i $b \neq -2$, incompatible.
d) Si $a = -2$ i $b = -2$, compatible indeterminat. La solució és $x = z$, $y = \dfrac{-z - 1}{2}$.
e) Si $a = 1$ i $b \neq 1$, incompatible.
f) Si $a = 1$ i $b = 1$, compatible indeterminat. La solució és $x = 1 - y - z$.

22. a) Si $a = 3$ i $b = 2$, compatible indeterminat. La solució és $x = 2 + z$, $y = -3 - 4z$.
b) Si $a \neq 3$ i $b = 2$, compatible determinat. La solució és $x = 0$, $y = 5$, $z = -2$.
c) Si $b \neq 2$, incompatible.

23. $p(x) = -3x^3 + 20x^2 - 43x + 33$.

24. S'ha de combinar el 60% de A, el 20% de B i el 20% de C.

25. Es fabriquen 3 unitats del primer producte i 1 unitat de cada un dels altres tres productes.

26. a) $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ i $5/3 \leq z \leq 8/3$, on x, y i z representen els kg. de I, II i III, respectivament.
b) Entre 550 i 2200 pts/kg.

27. a) Amb 12 monedes, 2 a la primera pila, 3 a la segona i 7 a la tercera.
b) El nombre total de monedes ha de ser múltiple de 12.

28. Si a, b i c són els partits guanyats, empatats i perduts, respectivament, tenim que $a = x - y$, $b = 3y - 2x$ i $c = 38 + x - 2y$.

29. 4 i 3.

30. El nombre era 1 i la solució $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

31. La primera aixeta en 6 hores, la segona en 3 i la tercera en 6.

32. Una aixeta A l'omple en 4 hores, una B en 6 i un desguàs el buida en 3 hores.

33. $p(x) = x^2 - 10x + 1$.

34. a) $y = p(x) = 0.2x^2 + 0.4x + 5$.
b) $p(0.5) = 5.25$ i $p(1.5) = 6.05$.
c) $y = 6.368$ quan $x = 1.8$.
c) $y = 7.25$ quan $x = 2.5$.

11.2 Matrius i determinants

1. a) $4ab$. b) 1. c) 0.

2. a) 40. b) 5. c) 4.

3. a) $x = 2$, $x = 3$. b) $x = 0$, $x = 1$. c) $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

5. a) 4. b) 0. c) 12.

6. a) -8. b) -3. c) 4. d) -6.

7. a) 2. b) 3. c) 2. d) 2.

8. a) 2. El menor format per les files 1 i 2 i les columnes 1 i 2.
b) 3. El menor format per les files 1, 2 i 3 i les columnes 1, 2 i 3.
c) 2. El menor format per les files 1 i 2 i les columnes 2 i 3.
d) 2. El menor format per les files 1 i 2 i les columnes 1 i 2.

9. a) Si $\alpha \neq 1$, el rang és 3. Si $\alpha = 1$, el rang és 1.
b) Si $\alpha \neq 0$ i 1, el rang és 3. Si $\alpha = 0$ o 1, el rang és 2.
c) a) Si $\alpha \neq 0$, el rang és 3. Si $\alpha = 0$, el rang és 2.

10. a) Si $a \neq -2$ i 1, el rang és 3. Si $a = -2$ i $b \neq -2$, el rang és 3. Si $a = -2$ i $b = -2$, el rang és 2. Si $a = 1$ i $b \neq 1$, el rang és 2. Si $a = 1$ i $b = 1$, el rang és 1.
b) Si $0 \neq a \neq b$ i 0, el rang és 3. Si $a = b$, el rang és 1. Si $a = 0$, el rang és 1.

11. Són regulars les matrius b, c, i d. Les seves inverses són:

$$\text{b)}\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \qquad \text{c)}\quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} ; \qquad \text{d)}\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

12. Les inverses són:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

13. a) $\lambda \neq -1/3$. b) $\lambda \neq 0$ i 1. c) $\lambda \neq -2$ i 1.

14. a) “`ONNAO,N_T_NE_ECN_RSE`”.
b) “`AIXÒ MOLA CANTIDUBI, TIO!`”.

15. $(A+B)C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}$, $CAC = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, $AC^2 = \begin{pmatrix} -15 & -12 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ -38 & 46 \end{pmatrix}$.

16. En general, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ i $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$. Es compleixen les igualtats de l'enunciat si, i només si, A i B *commuten*, és a dir, $AB = BA$.

17. $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

19. $A^{10} = \begin{pmatrix} -19 & -10 \\ 40 & 21 \end{pmatrix}$.

20. $A^{12} = 1365A + 1366I$.

21. $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$.

22. $(AB)^t = B^t A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

23. a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{cases} z_1 = -3x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 5x_4 \\ z_2 = 24x_1 + 14x_2 + 14x_3 - 2x_4 \end{cases}$

24. $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

25. $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $X = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & 2-2\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, amb α , $\beta \in \mathbb{R}$ arbitraris.

27. En general, $X = ABA^{-1}$. Amb les matrius de l'enunciat,

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 16 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} .$$

28. a) No és regular perquè $\det(A) = 0$.
b) $X = \begin{pmatrix} 2-x & 3-y & 3-z \\ x & -2+y & -1+z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, amb $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitraris.
c) Com que A no és regular, podem prendre $C = I$.

29. No té solució.

30. $X = A^t (C^{-1})^t B^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

11.3 Espais vectorials

1. $a = -1$ i $b = -3$.

2. $a = \frac{-15}{17}$, $b = \frac{20}{17}$. Aleshores, $w = \frac{17}{4}u - \frac{3}{4}v$.

3. $a = -\dfrac{11}{4}$.

4. a i c linealment independents. b linealment dependents.

5. Es compleix que $a - 2b + 2c - d = 0$. D'aquesta relació es pot aïllar qualsevol dels quatre vectors.

6. No és una contradicció, ja que si quatre vectors són linealment dependents un, com a mínim, es pot posar com a combinació lineal dels altres, però no és cert en general que cada un es pugui posar com a combinació lineal dels altres.

7. a, c i d són bases de $\mathbb{R}^3$.

8. En la base a és $u = (19, -9, -3)$, en la base c és $u = (-7, -5, -14)$ i en la d és $u = (19, 6, 8)$.

9. Els vectors $(4, 2, 3)$, $(0, 4, -3)$ i $(4, -2, 1)$ formen base de $\mathbb{R}^3$.

10. Les components són $(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2})$.

11. $a = 1$ i $b = 2$.

12. $a = -4$ i $b = 7$.

13. $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

14. a) $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.
b) Sí, per inducció.

15. $\{(5, 3, -1, 2), (1, 0, 3, 2), (2, 1, -2, 4), (1, -2, 0, 3)\}$.

16. Si $a \neq 0, 1$, S té dimensió 4. Si $a = 0$, la dimensió és 2 i, si $a = 1$, la dimensió és 3.

17. Són subespais E_2, E_4 i E_5. Aleshores:
$E_2 = \langle(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle$.
$E_4 = \langle(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle$.
$E_5 = \langle(1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.

18. a) $4x - 5y - 2z = 0$.
b) $13x - 2y - 5z = 0$, $x - y - t = 0$.
c) $3x + 11y - 4z + 5t = 0$.

19. a) $F_1 = \langle\, (1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\,\rangle$. $x - z - t = 0$ i $x + y - 2t = 0$.
b) $F_2 = \langle\, (2, 3, -1), (1, 2, 2)\,\rangle$. $8x - 5y + z = 0$.
c) $F_3 = \langle\, (1, 1, 1), (-2, 1, 2)\,\rangle$. $x - 4y + 3z = 0$.
d) $F_4 = \langle\, (1, -2, -2), (1, -1, -2), (1, 0, -1)\,\rangle = \mathbb{R}^3$. No té equacions implícites.
e) $F_5 = \langle\, (1, -1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 0, 3)\,\rangle$. Equacions:

$$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ x - y + 2t &= 0 \\ 2x + y - u &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

20. a) $\langle\,(1,0,2),(0,1,3)\,\rangle$.
b) $\langle\,(3,-2,1)\,\rangle$.
c) $\langle\,(13,8,-11)\,\rangle$.
d) El subespai és $\{\,\vec{0}\,\}$ i no hi ha base.

21. a) $\langle\,(3,-2,1,0),(7,-3,0,1)\,\rangle$.
b) $\langle\,(-3,-2,3,0),(-1,0,0,1)\,\rangle$,
c) $\langle\,(0,1,2,0),(-2,1,0,2)\,\rangle$.

22. a) 3. b) 2. c) $S=\langle b,d\rangle=\langle b,e\rangle=\langle d,e\rangle$.

23. $\dim(S)=2$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$ i $\{d,e\}$ són bases de S i les seves equacions implícites són

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+t&=0 \end{aligned}\right\}.$$

24. $\dim(H)=2$. Si $u_1=2a+b$ i $u_2=a-b$, $\mathcal{B}=\{u_1,u_2\}$ és una base de H i $a=\frac{1}{3}\,u_1+\frac{1}{3}\,u_2$.

25. a) $\dim(S\cap T)=1$ i $S\cap T=\langle(1,1,1,1)\rangle$.
b) $\dim(S+T)=3$ i $S+T\colon x-y-z+t=0$.

26. a) $F=\langle\,(1,-2,0,3),(2,1,-2,4),(0,2,-1,1)\,\rangle$ i té equació implícita $5x+4y+9z+t=0$. $G=\langle\,(1,0,2,-1),(2,-3,0,1)\,\rangle$ i té equacions implícites $6x+4y-3z=0$, $x+y+t=0$. Les equacions implícites de $F\cap G$ són la reunió de les equacions implícites de F i G. $F\cap G=\langle\,(45,-66,2,21)\,\rangle$. $F+G=\mathbb{R}^4$.
b) F té equació implícita $x-y-z=0$ i $G=\langle\,(1,0,1),(0,1,1)\,\rangle$. $F+G=\mathbb{R}^3$. $F\cap G=\langle(1,0,1)\rangle$ i té equacions implícites $x=z$, $y=0$.
c) $F+G=G=\langle\,(0,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,0,1)\,\rangle$. $F\cap G=F$ i té equacions implícites $x-y+t=0$, $x-z=0$.
d) $F=\langle\,(-1,1,2,0),(1,0,-2,1)\,\rangle$. $G=\langle\,(3,1,0,0),(-2,0,1,0),(-3,0,0,1)\,\rangle$. $F\cap G=F$ i $F+G=G$.

28. $G=\langle\,(2,0,5,2),(3,-1,9,3),(3,2,5,7)\,\rangle$.

29. Com que $S\cap T=\{\,0\,\}$, $\dim(S)=2$ i $\dim(T)=1$, resulta que $S\oplus T=\mathbb{R}^3$.

30. $u_1=(4,5,4)$ i $u_2=(2,3,-1)$.

31. a) $R=\langle\,(5,-1,7)\,\rangle$ i $S=\langle\,(13,-7,5)\,\rangle$.
b) $2x+3y-z=0$.

32. $\{u_1=(3,1,0),u_2=(2,0,1)\}$ és una base de P_2, $w=(5,-1,4)$ i $w=-u_1+4u_2$.

33. $\alpha=4$.

34. $\alpha=\dfrac{1}{3}$.

35. Només si $\alpha=2$. Aleshores, $P\cap Q=\langle(1,2,3,1)\rangle$ i $\dim(P\cap Q)=1$.

36. a) $\alpha=-1$.
b) $F\cap G=\langle\,(3,2,-14,-15)\,\rangle$ i té equacions implícites $2x-3y=0$, $14x+3z=0$, $5x+t=0$.

37. b) $\alpha=-1$ i $\alpha={}^{-1}\!/_{3}$.

38. Si $\lambda=1$, $S=T=S\cap T=S+T$.
Si $\lambda\neq 1$, $S\cap T=\langle(1,1,0)\rangle$ i $S+T=\mathbb{R}^3$.

39. $2x' + y' + 3z' = 0$.

40. L'expressió matricial del canvi és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

i les equacions de S en la nova base $x' + 2y' + 3z' + 4t' = 0$, $x' + z' = 0$.

41. Han de complir les equacions

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 + 15x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 34x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

42. $e_1 = -4u_1 + 5u_2 + 3u_3$, $e_2 = -7u_1 + 8u_2 + 5u_3$ i $e_3 = -u_1 + u_2 + u_3$.

43. $e_1 = 9u_1 - 4u_2 - 2u_3$, $e_2 = u_1 + u_2 - u_3$ i $e_3 = -2u_1 + u_3$.

44. b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

c) $x - 3y + z = 0$.

45. $x + y = 0$.

46. Les equacions són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

47. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

48. a) $C = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $2x' + 2y' + z' = 0$ i $3x'' + 2y'' + z'' = 0$ respectivament.

49. a) La relació és

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -11y_1 - 13y_2 - 23y_3 \\ x_2 &= 18y_1 + 21y_2 + 38y_3 \\ x_3 &= 28y_1 + 33y_2 + 59y_3 \end{aligned}\right\} \qquad \text{o bé} \qquad \left.\begin{aligned} y_1 &= -15x_1 + 8x_2 - 11x_3 \\ y_2 &= 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ y_3 &= 6x_1 - x_2 + 3x_3 \end{aligned}\right\} .$$

b) $(-1, 1, 2)$.

50. R està inclosa en el pla.

51. $u_1 = (5, 6)$ i $u_2 = (-1, -1)$.

52. $u_1 = (8, -4, -9)$, $u_2 = (-13, 7, 14)$ i $u_3 = (-1, 0, 2)$.

11.4 Estructura euclidiana de \rnn

1. a) $\| u \| = 6$ i $\alpha(u, v) = 70^\circ\, 31'\, 44''$.
b) $\| u_1 \| = \sqrt{10}$, $\| u_2 \| = 3$, $\| u_3 \| = \sqrt{3}$.
$\alpha(u_1, u_2) = 58.193^\circ$, $\alpha(u_1, u_3) = 43.088^\circ$ i $\alpha(u_2, u_3) = 78.904^\circ$.

2. $\| a \| = 5$, $\| b \| = \sqrt{52}$ i $a \cdot b = 2$.

3. a) $\| u \| = 4\sqrt{21}$.
b) $\alpha = 46.102^\circ$.

7. $\mathcal{B} = \{ \frac{1}{2}u_1, \frac{1}{\sqrt{12}}(-u_1 + 2u_2) \}$.

8. $\mathcal{B} = \{ \frac{1}{2}\, u, \, -\frac{1}{\sqrt{12}}\, u + \frac{4}{\sqrt{12}}\, v \}$.

9. $\mathcal{B}' = \{ v_1, \ v_2, \ v_3 \}$, on $v_1 = \frac{1}{2}\, e_1$, $v_2 = \frac{1}{3}\, e_3$ i $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\, e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\, e_3$.

10. $\mathcal{B}' = \{ \frac{1}{2}\, u_1, \ \frac{1}{\sqrt{12}}(-u_1 + 2u_2), \ \frac{1}{\sqrt{24}}(2u_1 - u_2 + 6u_3) \}$.

11. a) $\dim(S) = 1$.
b) $S^\perp = \langle (1, 0, 0), (0, -1, 1) \rangle$.

12. $\beta = 1$. $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, -2, 2)$ i $v_3 = (-4, -1, 1)$.

13. $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, 2, 3, -2)\}$ és una base ortonormal de S.
$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{21}}(-2, 2, 3, -2), \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -1, 2, 1)\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

14. a) $\{\frac{1}{3}(1, 2, 2), \ \frac{1}{3}(2, -2, 1)\}$.
b) $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, 1), \ \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1), \ \frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, 3, 0)\}$.
c) $\{\frac{1}{\sqrt{30}}(2, 4, 3, -1), \ \frac{1}{\sqrt{1095}}(-2, 11, -3, 31)\}$.

15. $\{\frac{1}{\sqrt{14}}(0, 1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{70}}(7, 4, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{20}}(1, -3, 3, 1)\}$.

16. a) $\mathcal{B}_1 = \{(1, -2, 0), (2, 1, 1)\}$ és una base ortogonal del pla i $\mathcal{B}_1' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)\}$ és una base ortonormal.
b) $\mathcal{B}_2 = \{(-1, 1, 0, 1), (1, 2, 3, -1)\}$ és una base ortogonal del subespai.
$\mathcal{B}_2' = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, 3, -1)\}$ és base ortonormal del subespai.

17. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, 1, -3)\}$.

18. a) $F_1^\perp = \langle\, (-11, 2, 5)\, \rangle$ i té equacions implícites $x - 2y + 3z = 0$, $2x + y + 4z = 0$.
b) $F_2^\perp = \langle\, (1, -8, 2, 0), (-2, 5, 0, 1)\, \rangle$ i té equacions implícites $2x+y+3z-t = 0$, $4x+y+2z+3t = 0$.

19. a) $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 3, 0), (18, 15, 1, 11)\}$. b) $S^\perp = \langle\, (1, -2, 1, 1), (2, -1, 1, -2)\, \rangle$ i té equacions implícites $-x + y + 3z = 0$, $5x + 4y + 3t = 0$.

20. $F = \langle (1, 0, -1, 0), (1, -1, 1, 1) \rangle$ i $F^\perp = \langle (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, -1) \rangle$.

21. La recta és ortogonal al pla.

22. R no és ortogonal al pla P.

23. $u_1 = (3, -2, 4)$ i $u_2 = (4, 2, -2)$.

24. a) $P_1(1,2,-2) = \frac{-1}{6}(1,2,5)$.
b) $P_2(1,2,-2) = \frac{1}{7}(9,15,-11)$.
c) $P_3(1,2,-2) = \frac{13}{21}(1,4,-2)$.

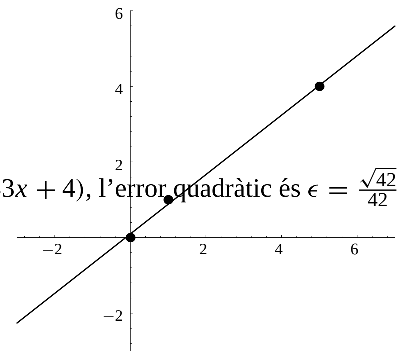
25. a) $S_1(1,3,-3) = \frac{1}{3}(-7,-11,1)$.
b) $S_2(1,3,-3) = \frac{1}{7}(15,25,-9)$.
c) $S_3(1,3,-3) = \frac{1}{21}(17,89,-13)$.

26. La projecció ortogonal és $(1,0,0,1)$ i el simètric $(1,0,-1,1)$.

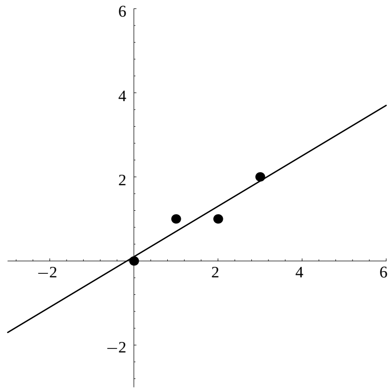
27. $u = (3,2,2)$. La projecció ortogonal de u sobre el pla és $(2,1,-1)$ i R' té equacions $x - 2y = 0$, $x + 2z = 0$.

28. a) $T = \langle (0,1,2), (5,2,-1) \rangle$.
b) $T = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2), \frac{1}{\sqrt{30}}(5,2,-1) \rangle$.
c) $T^{\perp} = \langle (1,-2,1) \rangle$.
d) $\frac{2}{3}(1,1,1)$.
e) $\frac{1}{3}(1,4,1)$.

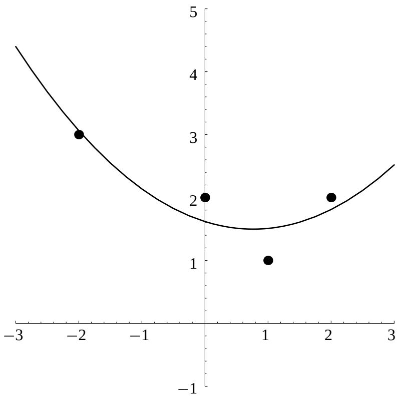
29. La recta de regressió és $y = \frac{1}{42}(33x+4)$, l'error quadràtic és $\epsilon = \frac{\sqrt{42}}{42}$ i el gràfic



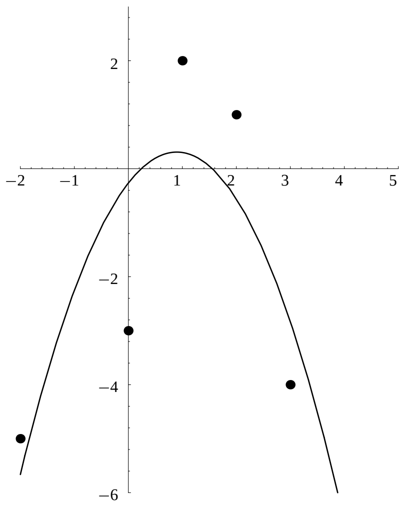
30. a) $y = \frac{1}{10}(6x+1)$.
b) L'error quadràtic de la recta de regressió és $\epsilon = \frac{\sqrt{5}}{5}$, i el de la recta $y = x/2$, que passa pels punts $(0,0)$ i $(2,1)$, és $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) El gràfic és



31. $y = \frac{1}{220}(45x^2 - 69x + 356)$, $\epsilon = \frac{7\sqrt{110}}{110}$.



32. $y = -0.70987x^2 + 1.27393x - 0.26362$.

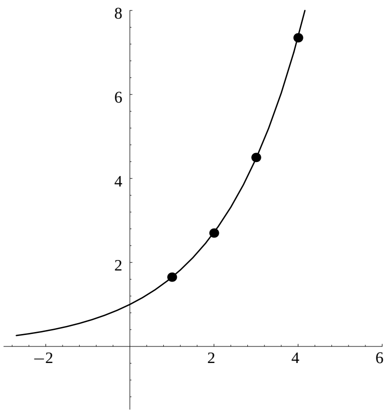


33. $z = \frac{1}{10}(-15x - 35y + 78)$.

34. $z = \frac{1}{8}(-5x + 9y + 12)$.

35. $x = \dfrac{7 - 3z}{9}$, $y = \dfrac{12z + 17}{9}$. L'error quadràtic és $\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$ per a totes les solucions.

36. $y = 1.000051e^{0.499260x}$.



37. Tenen orientació positiva les bases a i c.

38. a) $(-4, -3, 1)$, $(-10, -9, 1)$ i $(0, 0, 0)$.
b) $(-4, 4, 8)$ i $(-7, 7, -7)$.

39. $S^{\perp}$ té equació $2x + 3y + z = 0$.
$u = (-4, 1, 5)$.

11.5 Transformacions lineals

1. Són transformacions lineals a i d.

2. Són lineals a i c.

3. $f(1, 2, -3) = (1, 2, -12, -5)$. $f(2, 3, -5) = (4, 4, -20, -8)$. $(-3, 2, -8, 5)$ no té antiimatge.
$f^{-1}(5, 2, -4, -1) = \{\, (-2\lambda - 1, -3\lambda - 3, \lambda) \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \,\}$.

4. $f(2, 5) = (-14, -89, 43)$. $f(3, 1) = (5, 16, -7)$. $f^{-1}(-1, 7, -4) = (-3, -2)$. $(3, -4, 2)$ no té antiimatge.

5. $f(1, 0, 0) = (36, -8)$. $f(0, 1, 0) = (23, -5)$. $f(0, 0, 1) = (-104, 23)$. La matriu associada a f en les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 36 & 23 & -104 \\ -8 & -5 & 23 \end{pmatrix}$$

6. $f(1, 6) = (17, 41)$. $f(-2, 4) = (14, 46)$. $f^{-1}(3, 6) = (\frac{6}{13}, \frac{15}{13})$.

7. a) $f(1, 4) = (20, -33)$.
b) $f^{-1}(-1, 2) = (1, -3)$.
c) $M(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

9. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definit en la base canònica per la matriu

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} .$$

En general, tots els endomorfismes que tenen associada en la base canònica una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 2a - 6b & 3b - 2a \\ 10b - 3a & 3a - 5b \end{pmatrix} \qquad (\text{amb} \quad a, b \in \mathbb{R}) .$$

10. Una de les possibles és

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$

i, en general,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a + b & 2a \end{pmatrix}$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$ i determinant no nul.

11. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

en la base canònica.

13. $f(F) = \langle (3, -1, 1), (4, -3, 2) \rangle$ i té equació $x - 2y - 5z = 0$.
$f^{-1}(G) = \langle\, (1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 0), (0, 0, 1, 0)\, \rangle$ i té equació implícita $x - t = 0$.

14. $F = \langle\, (1, 0, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 0)\, \rangle$.
$G = \langle\, (1, 0, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (1, -4, 0, 1)\, \rangle$.

Aquests subespais no són els únics que compleixen aquestes propietats.

15. $M(f, \mathcal{B}') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

16. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -24 & 21 \\ -3 & -2 & 6 \\ -6 & -18 & 20 \end{pmatrix}$, on $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ i $B = C^{-1}AC$.

17. $A = \begin{pmatrix} 14 & 61 & 61 \\ -19 & -80 & -81 \end{pmatrix}$.

18. a) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. b) $A'' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 & -11 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} -23 & 17 \\ -31 & 23 \end{pmatrix}$.

21. $M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

22. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -18 & -19 & 7 \end{pmatrix}$.

23. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

24. $M(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$.

25. a) La matriu de f en la base $\{(1, 0, 1), (2, -1, 3), (1, 1, -4)\}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) La matriu de f en la base canònica és

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \\ 12 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

26. a) $T(-1, 2) = (-3, -2, -3)$.
b) $M(T, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

27. Nuc $f = \langle\, (0, 1, 1, 1)\, \rangle$ i té equacions implícites $x = 0$, $y = t$, $z = t$.
Im $f = \langle\, (2, -1, -1, 0), (-1, 1, 0, -1), (1, 0, 1, -1)\, \rangle$ i té equació implícita $x + 2y + t = 0$.
b) No és injectiu ni exhaustiu.

28. Nuc $f = \langle (7, 5, 1) \rangle$ i té equacions implícites $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{5} = z$.
Im $f = \langle (2, 1, 0), (-3, -2, 1) \rangle$ i té equació $x - 2y - z = 0$.

29. Nuc $f = \langle (-1, 1, -1, 1) \rangle$ i Im f té equació $28x - 4y - 20z + 13t = 0$.

30. a) Nuc $f = \{\, 0 \,\}$, Im $f = \mathbb{R}^3$ i és bijectiva.
b) Nuc $f = \langle\, (-1, -1, 1, 0), (-4, 2, 0, 7)\, \rangle$, Im $f = \mathbb{R}^2$, és exhaustiva i no és injectiva.
c) Nuc $f = \langle\, (1, 1, -1, 0, 0), (0, -1, -1, 0, 1)\, \rangle$.
Im $f = \langle\, (1, 3, -1, 2), (4, -2, 0, 3), (0, 0, 0, 1)\, \rangle$. No és injectiva ni exhaustiva.

31. a) $T(x,y,z) = (x+z, -2x+3z)$.
b) $\operatorname{Nuc} T = \langle (0,1,0) \rangle$ i $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

32. Nuc f té equació $x+y=0$ i Im f té equació $x-2y=0$.

33. Im f té equació $z=0$ i Nuc f equacions $x=0$, $y-z=0$.
$M(f, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

34. L'equació del pla és $6x-y-3z=0$ i $\operatorname{Nuc} T = \langle (1,1,-1,0) \rangle$.

35. La projecció és $(2,4,3)$.

36. En ser el rang igual a 3, la transformació és exhaustiva, però no injectiva.

37. Im f té equació $x-3y-2z=0$. Es injectiva però no exhaustiva.

38. Si $a \neq 0$, 1 i 2, f és bijectiu. Si $a=0$, 1 o 2, f no és injectiu ni exhaustiu.
Si $a=0$, Nuc $f = \langle\, (2,1,-2) \,\rangle$ i Im $f = \langle\, (-2,2,0), (2,0,2) \,\rangle$.
Si $a=1$, Nuc $f = \langle\, (1,0,-1) \,\rangle$ i Im $f = \langle\, (-1,2,2), (2,1,4) \,\rangle$.
Si $a=2$, Nuc $f = \langle\, (-3,1,2) \,\rangle$ i Im $f = \langle\, (0,2,4), (2,2,6) \,\rangle$.

39. a) No és injectiva per a cap valor de a i b. Si $a=-3/2$ i $b=1/3$ no és exhaustiva. Per als altres valors de a i b és exhaustiva.
b) Si $b \neq 0$ i $a \neq -2$ i 1, és bijectiva. Per als altres valors de a i b no és injectiva ni exhaustiva.
c) Si $\alpha \neq 0$, 1 i 6, és bijectiva. Per als altres valors de α no és injectiva ni exhaustiva.
d) No és exhaustiva per a cap valor de a. Si $a \neq -1$ i 1, és injectiva. Si $a=-1$ o 1, no és injectiva.
e) Si $t \neq 1$, 2 i 3, és bijectiva. Per als altres valors de t no és injectiva ni exhaustiva.

40. Si $\alpha = 1$ o $3/2$, f no és bijectiu. Per als altres valors de α és bijectiu.
Per a $\alpha = 1$, Nuc $f = \langle (2,0,-1) \rangle$ i dim Im $f = 2$.

41. $M(T, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

42. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \\ -27 & -9 & -15 \end{pmatrix}$$

en la base canònica. Hi ha infinites solucions.

43. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

44. Les matrius associades als endomorfismes $f \circ g$, $g \circ f$ i $f+g$ en la base canònica són

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -11 & 8 & -5 \\ 18 & -11 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 17 & 2 & 10 \\ 29 & 1 & 18 \\ -12 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & -2 \\ 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

respectivament. Cap d'aquests endomorfismes és injectiu ni exhaustiu.

45. La matriu és
$$A = \begin{pmatrix} -5 & -31 & 8 \\ 6 & 26 & -4 \\ -6 & -12 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Nuc}(g \circ f) = \langle\, (3, -1, -2)\, \rangle$ i $\mathrm{Im}(g \circ f) = \langle\, (5, -6, 6, 2), (-8, 4, 3, 1)\, \rangle$. Per tant, la transformació no és injectiva ni exhaustiva.

46. a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) L'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que té associada la matriu
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ 10 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$
en les bases canòniques.

47. $A = \begin{pmatrix} 23 & 63 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}$.

49. $M(P, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

50. $M(P, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

51. $M(P, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

52. Nuc $P = \langle (2, 1, 1) \rangle$ i la projecció de la recta té equacions $x + y = 0$, $x + z = 0$.

53. $M(G, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & -7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}$.

54. $M(S, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

55. a) $\dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{pmatrix}$. b) $\dfrac{1}{75}\begin{pmatrix} -63 & 14 & 26 & -28 \\ 14 & -17 & -28 & -66 \\ 26 & -28 & 63 & -14 \\ -28 & -66 & -14 & 17 \end{pmatrix}$. c) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

56. $M(S, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

57. $M(R, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

58. $M(R,\mathcal{B}_c)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

59. a) $M(R,\mathcal{B}_c)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $M(R,\mathcal{B}_c)=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{6} & -1+2\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 4 & -2-\sqrt{6} \\ -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$.

c) $M(R,\mathcal{B}_c)=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2 & 2-\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 2-\sqrt{2} & 2 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$. d) $M(R,\mathcal{B}_c)=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -11 & 6\sqrt{5} & -18 \\ -6\sqrt{5} & -20 & -3\sqrt{5} \\ -18 & 3\sqrt{5} & 16 \end{pmatrix}$.

60. Els possibles angles són $\alpha = 60^\circ$ i $\alpha = 300^\circ$.
Les matrius corresponents són

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

61. Un angle de 120° o de 240°.

62. L'angle és de 120°, i la matriu de la rotació en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

63. $F = \langle(3,-2)\rangle$ i la matriu de la simetria és

$$M(S,\mathcal{B}_c)=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}.$$

64. $M(R,\mathcal{B}_c)=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

65. a) $M(P\circ S,\mathcal{B}_c)=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $\text{Nuc}(P\circ S)=\langle(1,2,-1)\rangle$ és el simètric de $\text{Nuc}\, P=\langle(1,2,1)\rangle$ respecte a l'eix OZ.

66. La matriu associada a $f\circ g$ en la base canònica és

$$A=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Per veure que $f\circ g$ és una isometria, és suficient comprovar que $A^tA=I$.

67. Indicació: calculeu en primer lloc la matriu de f en la base canònica.

69. a) No.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

71. La isometria de $\mathbb{R}^3$ que té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en la base canònica.

72. Hi ha dues possibilitats: a) $f(-7,3,4) = (-4,3,7)$.
b) $f(-7,3,4) = \frac{1}{77}(276, -499, -337)$.

11.6 Diagonalització

1. Els dos endomorfismes són diagonalitzables. Per a la matriu A, tenim que

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A' = C^{-1}AC\,.$$

La diagonalització de B dóna les matrius

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B' = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad B' = C^{-1}BC\,.$$

2. a) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.
b) $p(x) = x^3$.
c) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
d) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.
e) $p(x) = x^3 + x$.
f) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
g) $p(x) = x^4 - 4x^3$.
h) $p(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 17x + 12$.

3. Les matrius a, c, g i h són diagonalitzables sobre els reals. La matriu e és diagonalitzable sobre els complexos, però no ho és sobre els reals. Les matrius b, d i f no són diagonalitzables. A continuació hi ha una base de vectors propis i la matriu diagonal corresponent en cada cas:
a) $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (3,2,1), (1,3,1)\}$. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
c) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,1,-1), (1,0,-1)\}$. $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
e) $\mathcal{B} = \{(3,2,-2), (7+i, 2+i, -5), (7-i, 2-i, -5)\}$. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.
g) $\mathcal{B} = \{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1), (1,1,1,1)\}$. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

h) $\mathcal{B} = \{ (1,0,1,1), (0,-1,3,3), (3,1,-1,0), (3,1,-1,1) \}$. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. a) No és diagonalitzable.
b) És diagonalitzable sobre els complexos, però no sobre els reals.
c) És diagonalitzable sobre els reals.

6. a) Els vectors $(1,-1,0)$ i $(1,0,-1)$ són vectors propis amb valor valor propi 0 i el vector propi $(1,1,1)$ té valor propi 3.
b) El vector $(0,0,1)$ és de valor propi 1 i el $(0,1,0)$ és de valor propi 2.
c) El vector $(0,0,1)$ té valor propi 3, $(i,1,0)$ té valor propi i i $(-i,1,0)$ té valor propi $-i$.

7. Les matrius a, d i f són diagonalitzables. A continuació hi ha una base de vectors propis i la matriu diagonal corresponent:

a) $\mathcal{B} = \{ (1,-2,-2), (-2,2,3), (-1,1,1) \}$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $\mathcal{B} = \{ (1,2,1), (1,2,2), (1,3,2) \}$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f) $\mathcal{B} = \{ (1,-1,0), (0,1,-1), (1,-1,1) \}$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. No són diagonalitzables.

9. a) La base és $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (-4, 1-i, 8), (-4, 1+i, 8)\}$, i la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 \\ 0 & 0 & -1-2i \end{pmatrix}.$$

b) La base és $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (-3-i, 1, 6+2i), (-3+i, 1, 6-2i)\}$, i la matriu

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 \\ 0 & 0 & -2-i \end{pmatrix}.$$

c) La base és $\mathcal{B} = \{(-1,0,2+i,1+i), (0,1,1-2i,3-i), (-1,0,2-i,1-i), (0,1,1+2i,3+i)\}$, i la matriu

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

10. f diagonalitza en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,1,1), (1,-1,1)\}$, és a dir, $\mathcal{B} = \{e_3, e_1 - e_2, e_1 + e_2\}$. La matriu de f en la base $\mathcal{B}$ és

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

11. a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.
b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ i $B^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \dfrac{(-2)^n}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad$ i $\quad A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 7^n + 2 & 7^n - 1 & 7^n - 1 \\ 7^n - 1 & 7^n + 2 & 7^n - 1 \\ 7^n - 1 & 7^n - 1 & 7^n + 2 \end{pmatrix}$.

13. $A^n = 3^n \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. N'hi ha infinites.

15. a) Si $\alpha = 0$, és diagonalitzable. Si $\alpha \neq 0$, no ho és.
b) Si $\alpha < 0$, és diagonalitzable sobre $\mathbb{C}$, però no ho és sobre $\mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, no és diagonalitzable. Si $\alpha > 0$, és diagonalitzable sobre els reals.

16. $a \neq 1, 2$.

17. És diagonalitzable en dos casos: i) $a \neq 3$, $b \neq 3$ i $a \neq b$. ii) $a = 3$ i $b = 5$.

18. És diagonalitzable en tres casos: i) $a \neq 1$, $b \neq 1$ i $a \neq b$. ii) $a = 0$ i $b = 0$. iii) $a = 0$ i $b = 1$.

19. $\alpha = -1$, $\alpha = 1/2$ i $\alpha = 2$. En cap dels tres casos és diagonalitzable.

20. $M(T, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

21. a) Els valors propis són $\alpha = 2$ i $\beta = -3$.
b) $a = -8$ i $b = -5$.
c) $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, 1)\}$.

22. $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ i $e = 1$. Els valors propis són $\lambda_1 = -1$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = 2$.

23. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

24. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ i $A^n = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

26. A diagonalitza en la base $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1), (1, -3)\}$, B diagonalitza en la base $\mathcal{B}_2 = \{(1, -2), (1, -3)\}$ i en els dos casos la matriu diagonal és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{mentre que} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\}$. $A' = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix}$.

28. $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

29. a) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A' = P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $A' = P^t AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

c) $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $A' = P^t AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

30. b) $\mathcal{B} = \{(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\}$.

c) $A' = M(T, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

31. a) $\mathcal{B} = \{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \dfrac{1}{3}(2,1,2), \dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-4,1)\}$. $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

b) $\mathcal{B} = \{\dfrac{1}{3}(2,2,1), \dfrac{1}{3}(1,-2,2), \dfrac{1}{3}(-2,1,2)\}$. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

32. a) $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $D = A'$ i $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

33. a) $\mathcal{B}' = \{(1,-1,0), (1,1,-2), (1,1,1)\}$ és base ortogonal de vectors propis de A. A més,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,1,-1), (0,1,1)\}$ és base ortogonal de vectors propis de B. A més,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

34. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2), \frac{1}{3}(-1,1,1)\}$ i $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

35. a) $C = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ i $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $D = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

36. a) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)\}$.
b) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{12}}(-1, -1, 3, 1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)\}$.

37. Com que A és simètrica, és diagonalitzable per a tot $b \in \mathbb{R}$. A més, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1-1)\}$ és una base de vectors propis de A per a quasevol $b \in \mathbb{R}$, amb valors propis b (doble) i $-b$ (simple) si $b \neq 0$ o $b = 0$ triple.

38. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

39. $M(f, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

40. $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{\sqrt{2}}{6}(-4, 1, 1)\}$ i $M(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

41. $M(T, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

43. a) Gir d'angle 60°.
b) Simetria respecte a la recta $F = \langle (1, 3 - 2\sqrt{2}) \rangle$.
c) Simetria respecte a la recta $F = \langle (2, 1) \rangle$.
d) Gir d'angle 36.869°.

44. A representa una simetria axial d'eix $x + y = 0$.
B representa un gir d'angle 270°.

45. a) Simetria axial respecte al subespai $F = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
b) Simetria plana respecte al subespai $F = \langle (1, 0, 1), (-3, 1, 0) \rangle$.
c) Simetria axial respecte al subespai $F = \langle (2, 2, 1) \rangle$.
d) Rotació d'angle 270° al voltant del vector $(-3, 0, 4)$.
e) Rotació d'angle 36.869° al voltant del vector $(1, 2, -2)$.
f) Composició de la rotació d'angle 70.52° al voltant del vector $(0, -1, 1)$ amb la simetria respecte al pla $-y + z = 0$.

46. a) $A^t A = I$ i $\det(A) = 1$.
b) $R(u) = \frac{1}{13}(1, 8, -4)$.
c) $R(u) = \frac{1}{9}(-7, 4, 4)$.

47. a) $A = M(f, \mathcal{B}) = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ i és immediat que $A^t A = I$.
b) Formen el pla d'equació $x + y + z = 0$.

c) És la simetria plana respecte al subespai d'equació $x + y + z = 0$ (equació expressada en la base $\mathcal{B}$).

48. Les tres matrius són ortogonals.
a) Simetria plana respecte al subespai d'equació $x - y - z = 0$.
b) Simetria axial respecte a la recta $x = y = z$.
c) Simetria plana respecte al subespai d'equació $x + y - z = 0$.

49. Simetria axial respecte a la recta d'equació $x = 0$, $y = z$.

50. T és un endomorfisme bijectiu, i és una simetria respecte al pla d'equació $y - z = 0$.

51. $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i l'apartat correcte és e.

52. La matriu associada a f en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

És la simetria plana respecte al subespai $F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$.

53. $M(f, \mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ i és una simetria axial d'eix $\langle (1, 2, 1) \rangle$.

54. a) $A = M(T, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
b) No.
c) El pla $z = 0$.

55. La matriu associada a $f \circ g$ en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es tracta de la composició de la rotació de 60° al voltant del vector $(1, -1, 1)$ amb la simetria respecte al pla $x - y + z = 0$.

56. $A = M(R, B_c) = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^2 = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $A^{-1} = A^t$.

A^2 representa la rotació de 180° al voltant del mateix vector $w = (1, 1, 1)$, és a dir, la simetria axial d'eix $x = y = z$. La inversa A^{-1} representa la rotació de 270° al voltant de $(1, 1, 1)$.

57. a) $a = \pm 1$ i $b = 0$.
b) Si $a = 1$, f és la rotació de 90° al voltant del vector $(1, 0, 0)$; si $a = -1$, f és la simetria axial d'eix $x = 0$, $y + z = 0$. Per a $b = 0$, g és la simetria respecte al pla d'equació $y - z = 0$.

58. a) $a = -2$ i $b = 1$. Aleshores, f és una rotació.
b) $10x - y + 5z = 0$.

59. Hi ha quatre isometries de $\mathbb{R}^2$ que compleixen aquesta condició. Les seves matrius en la base canònica són:

$$\text{a)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

60. Isometria directa: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Isometria inversa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Endomorfisme no isomètric: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hi ha quatre isometries que transformen l'eix OX en l'eix OY, dues directes i dues inverses.

61. Hi ha vuit isometries que compleixen les condicions de l'enunciat. Una d'elles és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa una simetria plana. Les matrius de les vuit isometries són

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

62. Hi ha sis isometries, i les seves matrius respecte a la base canònica són:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{e)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Identitat.
b) Simetria respecte al pla $F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$.
c) Simetria respecte al pla $F = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$.
d) Rotació de 120° al voltant del vector $(1, 1, 1)$.
e) Simetria respecte al pla $F = \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.
f) Rotació de 240° al voltant del vector $(1, 1, 1)$.

64. Les matrius d'aquestes isometries respecte a la base canònica són:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ \frac{1}{29}\begin{pmatrix} -12 & 24 & 11 \\ 21 & 16 & -12 \\ 16 & -3 & 24 \end{pmatrix}.$$

a) Rotació de 120° al voltant del vector $(1, 1, 1)$.
b) Composició de la rotació de 10.654° al voltant del vector $(9, -5, -3)$ amb la simetria respecte al pla $9x - 5y - 3z = 0$.

65. a) $y = Ce^{3x}$. b) $y = Ce^{-x}$. c) $y = C5^x$.

66. a) $y = xe^x + Ce^x$. b) $y = Ce^x - x - 1$. c) $y = Ce^{2x} + \frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$.

67. a) $y = \dfrac{e^x - 16e^{-4x}}{5}$.

b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$.

c) $y = 4e^{2x} - \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$.

d) $y = \dfrac{ab(e^{-ax} - e^{-cx})}{c - a}$.

68. a) $\begin{cases} x(t) = A\cos t + B\sin t \\ y(t) = A\sin t - B\cos t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = Ae^{-4t} + Be^{2t} \\ y(t) = -Ae^{-4t} + Be^{2t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = -5e^{2t}\sin t \\ y(t) = e^{2t}(\cos t - 2\sin t) \end{cases}$

69. a) $\begin{cases} x(t) = Ae^{6t} + Be^{3t} + Ce^{2t} \\ y(t) = Be^{3t} - 2Ae^{6t} \\ z(t) = Ae^{6t} + Be^{3t} - Ce^{2t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t} \\ y(t) = Ce^{-t} + Be^{2t} \\ z(t) = -(A + C)e^{-t} + Be^{2t} \end{cases}$

70. a) $x(t) = e^{-2t} - 1$, $y(t) = -2e^{-2t} - 6t$.

b) $x(t) = (A + t)e^t$, $y(t) = 1 + (A + t - \frac{1}{2})e^t + Be^{-t}$.

71. $\begin{cases} x(t) = A_1e^t + B_1\sin t + B_2\cos t \\ y(t) = -A_1e^t + B_1\cos t - B_2\sin t + t \\ z(t) = B_1\sin t + B_2\cos t + 1 \end{cases}$

72. a) $\begin{cases} x(t) = 2e^t + e^{-t} - 2 \\ y(t) = 2e^t + 3e^{-t} + 2t - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = 2e^{-3t} + t^2 + t \\ y(t) = \dfrac{e^{-3t} - t^2}{2} \end{cases}$

11.7 Tensors i formes quadràtiques

1. a) $q(x,y) = x^2 - 2xy - y^2$.
b) $q(x,y) = -6x^2 - 4xy + 22y^2$.
c) $q(x,y,z) = -2xz - 2yz$.
d) $q(x,y,z,t) = 2x^2 + 4y^2 - 2yz + 8yt$.

2. $M = (10, 65, -25)$ i $E = 45$.

3. $T(u,v) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2$.
$q(w) = T(w,w) = x^2 + 4xy + y^2$.

4. $M(T, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

5. $q(x', y', z') = -2x'^2 - y'^2 + 4z'^2 + 18x'y' + 2x'z' - 14y'z'$.

6. a) $q(t) = 17t^2$ en la base $\{u\}$.
b) $q(x', y') = 9x'^2 + 14x'y' + 7y'^2$ en la base $\{(1,0,1), (0,1,1)\}$.

7. a) $q(x', y') = 10x'^2$, on

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{aligned} \right\} .$$

b) $q(x', y') = 2x'^2 - 2y'^2$, on

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{aligned} \right\} .$$

8. a) $q(x', y', z') = 2x'^2 + 5y'^2 - z'^2$, on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

b) $q(x', y', z') = 7x'^2 + 7y'^2 - 2z'^2$, on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

9. a) Semidefinida positiva amb índexs d'inèrcia 1 i 0.
b) No definida amb índexs 1 i 1.

10. a) Definida positiva amb índexs 3 i 0.
b) No definida amb índexs 1 i 1.
c) Semidefinida negativa amb índexs 0 i 2.

11. Semidefinida negativa amb índexs 0 i 3.

12. a) No definida amb índexs 2 i 1.
b) Definida positiva amb índexs 3 i 0.

13. $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$ i la forma és definida positiva.

14. a) Definida positiva.
b) Definida positiva.
c) No definida.

15. a) Els índexs d'inèrcia són 2 i 1.
b) La forma és no definida.

16. $q(x', y', z') = 9x'^2 + 9y'^2$ on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

La forma és semidefinida positiva.

17. a) Definida positiva: $q(x', y', z') = x'^2 + y'^2 + z'^2$ en la base

$$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\} .$$

b) No definida: $q(x', y', z') = x'^2 + y'^2 - 2z'^2$ en la base

$$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)\} .$$

c) Semidefinida negativa: $q(x', y', z') = -3x'^2 - 3y'^2$ en la base

$$\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\} .$$

18. La forma és no definida.

19. f té un mínim en el punt $(2, 1)$ i un màxim en el punt $(-2, -1)$, amb $f(2, 1) = -28$ i $f(-2, -1) = 28$.

20. a) f té un mínim en el punt $(1, 0)$ amb $f(1, 0) = 0$.
b) g no té extrems locals.

21. f té un mínim en el punt $(3, 2)$ amb $f(3, 2) = 108$.

22. f té un mínim en el punt $(^{-2}/_3, {}^{-1}/_3, 1)$ amb $f(^{-2}/_3, {}^{-1}/_3, 1) = -{}^4/_3$.

11.8 Geometria lineal

1. Hi ha dues rectes: a) $\sqrt{3}\,x - y = 3\sqrt{3} + 1$. b) $\sqrt{3}\,x + y = 3\sqrt{3} - 1$.

2. Les dues rectes són: a) $3x - 7y = 27$. b) $7x + 3y = 5$.

3. a) Equacions de la recta. Equació vectorial: $(x, y, z) = (5, -2, 3) + \lambda(-1, 3, -1)$.

Equacions paramètriques: $\left.\begin{array}{l} x = 5 - \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$.

Equació contínua: $\dfrac{x-5}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Equacions cartesianes: $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 13 \\ y + 3z = 7 \end{array}\right\}$.

b) Equació del pla: $15x + 5y + 21z = 38$.

4. $x + y - z = 0$.

5. a) $3x - 14y - 21z + 31 = 0$.
b) $2x - z = 1$.

6. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

7. $a = 5/2$ i $5x - 7y - 3z = 11$.

8. $a = -1$.

9. $\alpha = -\dfrac{17}{4}$ i es tallen en el punt $(3/2, -1/4, 21/4)$.

10. $\alpha = 7$ i $\vec{u} = (2, -1, -1)$.

11. $8x - 5y = 1$.

12. Equació vectorial: $(x, y, z) = (5, -1, 6) + \lambda(1, -1, -3)$.

Equacions paramètriques: $\left.\begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{array}\right\}$.

Equació contínua: $x - 5 = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-6}{-3}$.

Equacions implícites: $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3y - z = -9 \end{array}\right\}$.

13. $13x - 20y + 7z = 7$.

14. $x + 2y - 8z = 3$.

15. $2y - z = 5$.

16. $x - 1 = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{-5}$ i $\left.\begin{array}{r} 4x + y = 4 \\ 5y - 4z = 4 \end{array}\right\}$.

17. $x + z - 1 = 0$.

18. $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z-2}{2}$ i $\left.\begin{array}{r} 6x + 7y = 13 \\ y + 3z = 7 \end{array}\right\}$.

19. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+1}{3}$ i $\left.\begin{aligned}7x+2y=11\\3y-7z=13\end{aligned}\right\}.$

20. $x+1=\dfrac{y-1}{4}=-z$ i $\left.\begin{aligned}4x-y=-5\\y+4z=1\end{aligned}\right\}.$

21. $x-1=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{-1}$ i $\left.\begin{aligned}x+z=1\\y=1\end{aligned}\right\}.$

22. $\dfrac{x-1}{5}=y-1=\dfrac{z}{3}.$

23. $5x-4y+2z+2=0.$

24. $a=11$ i $b=-4$. $\dfrac{x}{-7}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+8}{5}.$

25. $a=2$, $b=-2$ i $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{1}.$

26. a) S'encreuen i formen un angle de 73.790°.
b) Es tallen en el punt $(6, 3, 8)$ i són perpendiculars.
c) S'encreuen i són perpendiculars.
d) Són paral·leles.

27. a) Es tallen en una recta i formen un angle de 84.044°.
b) Es tallen en una recta i són perpendiculars.
c) Són paral·lels.

28. Es tallen en el punt $({}^4\!/\!_5, {}^{13}\!/\!_5, {}^6\!/\!_5)$ i formen un angle de 33.061°.

29. a) $\alpha\neq-5$ i β qualsevol.
b) $\alpha=-5$ i $\beta=3$.
c) $\alpha=-5$ i $\beta\neq3$.

30. a) La recta $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{3}.$
b) $6x+4y+3z=5$.

31. a) $a=0$.
b) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{0}.$

32. $3x-y-z-11=0.$

33. a) Si $a=5$, es tallen formant un angle de $36^\circ35'12''$. Si $a\neq5$, s'encreuen, i són perpendiculars si $a=-2$.
b) $a=2$ i l'equació del pla és $y+z+1=0$.

34. Si $a={}^{-3}\!/\!_2$, es tallen formant un angle de $23^\circ11'55''$. Si $a\neq{}^{-3}\!/\!_2$ s'encreuen, i són perpendiculars si $a=2$.

35. $9x+8y=20.$

36. $({}^{-31}\!/\!_{11}, {}^{13}\!/\!_{11}, {}^{27}\!/\!_{11}).$

37. a) $(-1, -8, 5)$.
b) $(2, 2, 4)$.

38. $\dfrac{x-1}{-10} = \dfrac{y-3}{5} = z-2$.

39. És la recta $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = z+3$.

40. P té equació $3x - 2y + z + 3 = 0$.

41. Existeixen dos plans que compleixen aquesta condició: $x + y - z = 1$ i $4x - y + 3z = 4$.

42. b) Les rectes es tallen en el punt $(1, 3, -2)$ i les seves bisectrius són

$$x - 1 = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{2} \qquad \text{i} \qquad x - 1 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}\,.$$

43. El pla separa els punts p i q.

44. Arriba al punt $(8, 7, 0)$ i, en el pla $z = 0$, segueix la trajectòria definida per la recta $x - y = 1$.

45. $d(p, R) = \sqrt{26}$, $d(p, P) = \frac{9\sqrt{14}}{14}$ i $d(R, P) = \frac{\sqrt{14}}{14}$.

46. $p = (1, 1, 3)$, P té equació $x + 2y + 2z - 3 = 0$ i $d(p, P) = 2$.

47. $d = \frac{3\sqrt{26}}{13}$.

48. $d = \dfrac{57\sqrt{251}}{251}$.

49. $d = \dfrac{8\sqrt{17}}{51} \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ 2x + 2y - 3z &= 9 \end{aligned}\right\}.$

50. a) $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z-2}{2}$.
b) $d(R, S) = \dfrac{\sqrt{1513}}{17}$.

51. $a = 1$ i la distància és $d = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

52. $t = 3$ i $d = 5\sqrt{6}$.

53. $x + 2y - 2z - 6 = 0$ i $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

54. $x + 3y - 2z + 2 = 0$ i $3x - y + 2 = 0$.

55. Hi ha dues possibilitats. a) $(11, -3)$. b) $(2, 6)$.

56. $A = \dfrac{3\sqrt{14}}{40}$.

57. $A = \dfrac{5\sqrt{42}}{2}$ i $l = \sqrt{89}$.

58. $A = 6\sqrt{26}$.

59. $A = 3\sqrt{5}$, $p = 6 + 2\sqrt{5}$ i $l = \sqrt{14}$.

60. b) $A = 27$, $p = 24$ i $l = 3\sqrt{10}$.

61. $x + 2y - 2z = 9$.

62. $V = \dfrac{7}{6}$ i $d = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

63. a) Els punts de la base són $(0, 3, 2)$, $(0, 0, 0)$, $(2, 4, 0)$ i $(2, 7, 2)$.
b) $V = \dfrac{40}{3}$.

64. a) N'hi ha dos: $x + 2y + 2z - 6 = 0$ i $x + 2y - 2z - 6 = 0$.
b) $x + 2y - 6 = 0$.

65. $V = 27$.

66. Hi ha dues possibilitats: $4x + 4y \pm z - 12 = 0$.

67. Si (x', y') són les coordenades en el sistema $\mathcal{S}_1$ i (x'', y'') en el sistema $\mathcal{S}_2$, aleshores

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

68. $6x' + 17y' + 5 = 0$.

69. Si (x', y') són les coordenades en el sistema $\mathcal{S}_1$ i (x'', y'') en el sistema $\mathcal{S}_2$, aleshores

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

70. Les tres rectes són $x - y = 0$, $x + 2y = 1$ i $2x + y = 1$.

71. Les equacions són $x - y = 0$ i $x + y = 1$.

73. $(-32, 20, 8)$.

74. $11x' - 16y' + 3z' + 6 = 0$.

75. $x' + y' + z' + 2 = 0$.

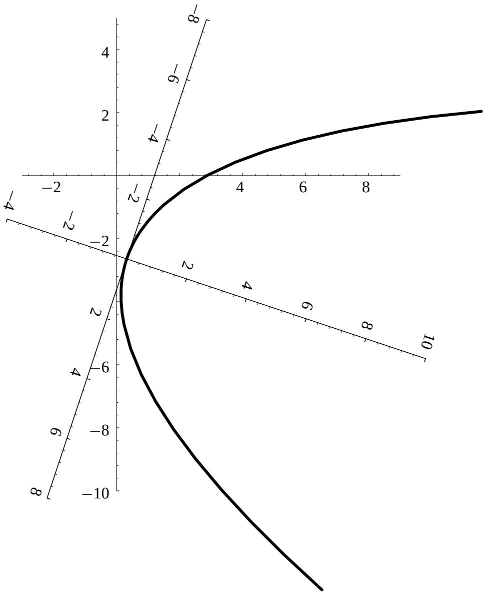
76. $x + y + z = 1$.

77. a) Són perpendiculars i es tallen en el punt $(1, 2, 0)$.
b) Una possibilitat és $p = (1, 2, 0)$, $\vec{u}_1 = (2, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, -5)$ i $\vec{u}_3 = (1, 2, 2)$.

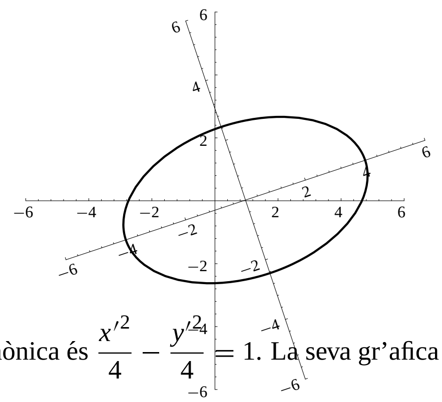
78. $d = \sqrt{6}$ m.

11.9 Corbes i superfícies de segon grau

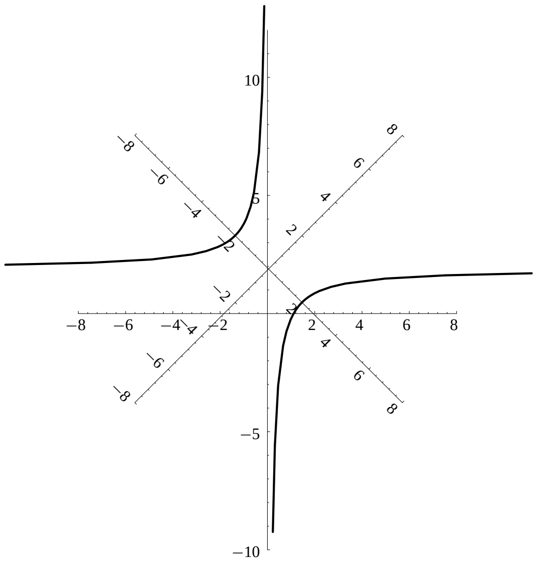
1. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 52x + 64y + 126 = 0$. L'equació canònica és $y' = \dfrac{\sqrt{10}\,x^2}{22}$.



2. $7x^2 - 6xy + 15y^2 - 14x + 6y - 89 = 0$. L'equació canònica és $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{6} = 1$. La seva gràfica és



3. $xy - 2x + 2 = 0$. L'equació canònica és $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$. La seva gr'afica és



4. $2x^2 - xy - y^2 - 3x + 3y + 4 = 0$.

5. a) Paràbola. Vèrtex: $(3, 2)$. Equació reduïda: $5x'^2 + 20\sqrt{5}\, y' = 0$.
Eix x': $2x - y = 4$. Eix y': $x + 2y = 7$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

b) Hipèrbola. Centre: $(1, -1)$. Equació reduïda: $x'^2 - y'^2 + 1 = 0$.
Eix x': $3x - y = 4$. Eix y': $x + 3y = -2$.
Asímptotes: $x - 2y = 3$ i $2x + y = 1$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

c) Parell de rectes secants. Les seves equacions són $x + y - 2 = 0$ i $x - 2y + 3 = 0$.
d) Hipèrbola. Centre: $(1, 0)$. Equació reduïda: $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.
Eix x': $x - 2y = 1$. Eix y': $2x + y = 2$.
Asímptotes: $x = 1$ i $3x + 4y = 3$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

6. a) El·lipse. Centre: $(2, 0)$. Equació reduïda: $2x'^2 + 4y'^2 - 8 = 0$.
Eix x': $x - y = 2$. Eix y': $x + y = 2$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

b) Hipèrbola. Centre: $(2, -1)$. Equació reduïda: $x'^2 - 4y'^2 + 26 = 0$.
Eix x': $x - 2y = 4$. Eix y': $2x + y = 3$.
Asímptotes: $y = -1$ i $4x - 3y = 11$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

c) Parell de rectes paral·leles imaginàries. Les seves equacions són

$$x + y - 2 + 3i = 0 \qquad \text{i} \qquad x + y - 2 - 3i = 0\,.$$

d) Paràbola. Vèrtex: $(0,-1)$. Equació reduïda: $x'^2 - 4\sqrt{10}\, y' = 0$.
Eix x': $3x + y = -1$. Eix y': $x - 3y = 3$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

7. a) Recta doble. La seva equació és $x + y - 2 = 0$.

b) Parell de rectes secants. Les seves equacions són

$$x + 4y + 2 = 0 \qquad \text{i} \qquad 3x - 2y + 2 = 0\,.$$

c) Paràbola. Vèrtex: $(0,2)$. Equació reduïda: $x'^2 - 4\sqrt{2}\, y' = 0$.
Eix x': $x + y = 2$. Eix y': $x - y = -2$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

d) Parell de rectes paral·leles. Les seves equacions són

$$x + 4y + 3 = 0 \qquad \text{i} \qquad x + 4y + 5 = 0\,.$$

8. a) El·lipse. Centre: $(-1,0)$. Equació reduïda: $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$.
Eix x': $x - 2y = -1$. Eix y': $2x + y = -2$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

b) Paràbola. Vèrtex: $(2,3)$. Equació reduïda: $5x'^2 - y' = 0$.
Eix x': $3x + 4y = 18$. Eix y': $4x - 3y = -1$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

c) Hipèrbola. Centre: $(0,1)$. Equació reduïda: $x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.
Eix x': $x - y = -1$. Eix y': $x + y = 1$.
Asímptotes: $x = 0$ i $y = 1$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

d) Parell de rectes imaginàries amb vèrtex real. Les seves equacions són

$$y = -(3+i)x + 2 - 3i \qquad \text{i} \qquad y = (-3+i)x + 2 + 3i\,.$$

El vèrtex és el punt $(-3, 11)$.

e) El·lipse. Centre: $(0,0)$. Equació reduïda: $x'^2 + 2y'^2 - 16 = 0$.
Eix x': $x + y = 0$. Eix y': $x - y = 0$.
Canvi de coordenades: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

9. a) Paràbola.
b) Hipèrbola.

10. a) $y = 1 - x$ i $y = -x$.
b) $y = -x$ i $y = x - 1$.

11. Si $\lambda < -1$, $-1 < \lambda < 0$ o $\lambda > 1$, la cònica és una hipèrbola. Si $0 < \lambda < 1$, és una el·lipse real. Si $\lambda = -1$, és un parell de rectes secants. Si $\lambda = 0$, és una paràbola. Si $\lambda = 1$, és una recta doble.

12. Si $\lambda < -2$, és una el·lipse real. Si $-2 < \lambda < 1$ o $\lambda > 1$, és una hipèrbola. Si $\lambda = -2$, és un parell de rectes reals paral·leles. Si $\lambda = 1$, és un parell de rectes reals secants.

13. $t = 1$ i $t = -1$.
En els dos casos, l'equació reduïda és $2x'^2 \pm \sqrt{2}\, y' = 0$. (El signe depèn del sentit dels vectors del canvi de coordenades.)

14. $(5, -2)$ i $(-1, 2)$.

15. Els vèrtexs de l'el·lipse són $(0, -2)$, $(-4, -4)$, $(0, -7)$ i $(-4, 1)$.
Els vèrtexs de la hipèrbola són $(3, 2)$ i $(-1, -2)$.

16. $2x - 3y + 4 = 0$.

17. $2x - y + 3 = 0$ i $10x - 9y + 43 = 0$.

18. $x - y - 1 = 0$ i $41x - 41y + 39 = 0$.

19. $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. És una circumferència.

20. $3x^2 + 2xy + 6y^2 - x - 3y = 0$. És una el·lipse real.

21. $y^2 - 8x - 8 = 0$. És una paràbola.

22. $x^2 - 16xy - 11y^2 - 2x + 46y + 46 = 0$. És una hipèrbola.

23. $9x^2 + 9y^2 - 18x - 54y + 74 = 0$. És una circumferència.

24. $3x^2 - 4xy - 5y^2 + 6x = 0$. És una hipèrbola.

25. $x^2 + y^2 + 2x = 0$. És una circumferència.

26. $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 2 = 0$. És una circumferència.

27. $4y^3 + 4x^2y + x^2 - 12xy - 6x + 9 = 0$.

28. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. Ès una circumferència.

29. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$.

30. El centre és $(-2, 1, 0)$ i el radi 2.

31. El centre és $(2, 2, 1)$ i el radi 3.

32. a) Cilindre hiperbòlic. Equació reduïda: $\sqrt{2}\, x'^2 - \sqrt{2}\, y'^2 - 2 = 0$.
Eix x': $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = y = z$. Eix y': $\dfrac{x}{-\sqrt{2}} = y = z$. Eix z': $\dfrac{x}{0} = -y = z$.
b) Hiperboloide de dos fulls. Centre: $(0, 0, 0)$. Equació reduïda: $-x'^2 - y'^2 + 2z'^2 - 1 = 0$.
Eix x': $x = -y = \dfrac{z}{0}$. Eix y': $x = y = \dfrac{z}{-2}$. Eix z': $x = y = z$.

33. a) El·lipsoide real. Centre: $(1, 0, 1)$. Equació reduïda: $x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 - 2 = 0$.
Eix x': $x - 1 = y = \dfrac{z-1}{0}$. Eix y': $x - 1 = -y = z - 1$. Eix z': $x - 1 = -y = \dfrac{z-1}{-2}$.
b) Hiperboloide d'un full. Centre: $(0, 2, 0)$. Equació reduïda: $3x'^2 + y'^2 - z'^2 - 2 = 0$.
Eix x': $x = \dfrac{y-2}{0} = -z$. Eix y': $\dfrac{x}{0} = y - 2 = \dfrac{z}{0}$. Eix z': $x = \dfrac{y-2}{0} = z$.

34. a) Con real. Vèrtex: $(-1, 1, -2)$. Equació reduïda: $3x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$.
Eix x': $\dfrac{x+1}{0} = y - 1 = \dfrac{z+2}{0}$. Eix y': $x + 1 = \dfrac{y-1}{0} = z + 2$. Eix z': $x + 1 = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{-1}$.

b) Paraboloide el·líptic. Vèrtex: $(2, -1, 0)$. Equació reduïda: $2x'^2 + y'^2 - 4\sqrt{2}\,z' = 0$.
Eix x': $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(1, -1, -1)$. Eix y': $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(2, 1, 1)$. Eix z': $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \lambda(0, 1, -1)$.

35. La quàdrica està formada pels plans paral·lels d'equacions $x + y - z + 2 = 0$ i $x + y - z - 2 = 0$.

36. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, és un paraboloide hiperbòlic. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, és un hiperboloide d'un full.

37. Si $a < -1$, és un paraboloide hiperbòlic. Si $a = -1$, és un cilindre parabòlic. Si $-1 < a < 0$ o $a > 0$, és un paraboloide el·líptic. Si $a = 0$, és un cilindre el·líptic real.

38. $4y - 3z + 7 = 0$ i $4x - 3y - 20 = 0$.

39. $x^2 + y^2 + z^2 + 8xy + 8xz + 8yz = 0$. És un con real.

40. $4x^2 - 4y^2 - 12xy - 78z + 117 = 0$. És un paraboloide hiperbòlic.

41. $\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2 - 10z + 25) - 25(x^2 + y^2) = 0$.
Si $\lambda = 0$, és un parell de plans imaginaris amb recta secant real. Si $0 < \lambda < 5$, és un con real. Si $\lambda = 5$, és un pla doble. Si $\lambda > 5$, és un con imaginari.

42. $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$. És un con real.

43. $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

44. $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 8x - 8y + 8z - 2\lambda^2 + 8 = 0$. És un paraboloide el·líptic.

11.10 Qüestionari

Bibliografia

[1] **Amer, R. i Carreras, F.**
Curs d'Àlgebra Lineal.
Ed. Cardellach Còpies. Terrassa. 1997.

[2] **Amer, R.**
Àlgebra Lineal. Problemes resolts.
`http://ruth.upc.es/algebra/probelemes_resolts.pdf`

[3] **Anton, H.**
Introducción al álgebra lineal.
Ed. Limusa. México. 1989.

[4] **Burgos, J. de**
Algebra Lineal.
Ed. McGraw Hill. Madrid. 1993.

[5] **Castellet, M. i Llerena, I.**
Àlgebra lineal i geometria.
Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. 1988.

[6] **Granero, F.**
Algebra y geometría analítica.
Ed. McGraw. Madrid. 1985.

[7] **Lang, S.**
Algebra lineal.
Ed. Addison–Wesley. México. 1986.

[8] **Moreno, J. M.**
Una introducción al álgebra lineal elemental.
Dep. de Matemáticas. U.A.B. Bellaterra. 1988.

[9] **Xambó, S.**
Algebra lineal y geometrías lineales (Tomos I y II).
Ed. Eunibar. Barcelona. 1977.