Resposta Impulsional

Marc Franco Meca

22 February 2020

1 Delta de Dirac

La funció delta de Dirac δ(x) és una construcció matemàtica introduïda pel físic britànic Paul Dirac. Abans de definir la funció delta de Dirac δ(x) cal destacar que aquesta no és esctrictament una funció, tot i que amb molts propòsits es pot manipular com a tal. Formalment es pot definir com una funció generalitzada o com una distribució amb valor zero a tot arreu excepte a x=0, on el seu valor és infinitament gran, i és tal que la seva integral total és 1. Matemàticament es pot expressar de la següent manera [1]

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

i que també es limita a satisfer la identitat [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2}$$

A continuació es pot visualitzar una representació gràfica de la funció delta de Dirac,

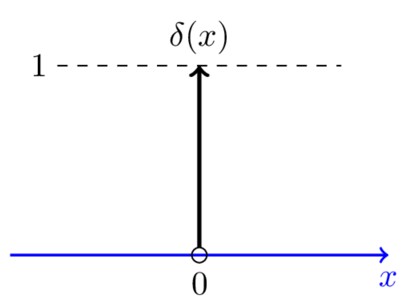

Figure 1: Representació gràfica de la funció delta de Dirac

2 Sistemes Lineals Invariants en el Temps (LTI)

Un sistema lineal invariant en el temps (LTI) és un tipus de sistema que com el seu propi nom indica és lineal i invariant en el temps. El fet que aquests sistemes disposin de les propietats de linealitat i invariància en el temps simplifiquen el seu estudi i faciliten la seva representació gràfica per a entendre'ls.

2.1 Propietats dels sistemes LTI

2.1.1 Linealitat

La propietat de linealitat enuncia l'existència d'una relació lineal entre la sortida i l'entrada del sistema, provocant que un canvi lineal a l'entrada impliqui un canvi lineal a la sortida. Aquesta propietat acompleix el principi de superposició la qual comprèn la propietat de proporcionalitat i additivitat. La primera formula que si l'entrada d'un sistema és escalada per un factor, la sortida d'aquest també serà escalada per el mateix factor. D'altra banda, la propietat de additivitat promulga el fet que si l'entrada és la suma de dos senyals, al passar per un sistema lineal provoca una sortida que resulta ser la suma de cada una de les entrades individuals. Per tant, per un sistema lineal T i un temps t amb dos senyals d'entrada x_1(t) i x_2(t) que produeixen les sortides y_1(t) i y_2(t),

$$T\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]=\alpha T[x_1(t)]+\beta T[x_2(t)]=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t) \tag{3}$$

on α i β són constants.

Aquesta propietat es pot visualitzar de forma gràfica com

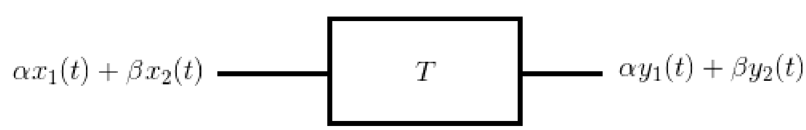

Figure 2: Representació gràfica de la propietat de linealitat d'un sistema LTI

2.1.2 Invariància en el temps

La propietat d'invariància en el temps declara que el sistema té una funció que no depèn directament del temps i tant el seu comportament com característiques són fixes. Aquesta propietat fa que la sortida del sistema donada una entrada no canviï depenent de quan s'ha aplicat l'entrada. La propietat d'invariància en el temps d'un sistema es pot expressar matemàticament com [3]

Donat un sistema amb una funció de sortida depenent del temps $y(t)$, i una funció d'entrada depenent del temps $x(t)$, el sistema T es considera invariant en el temps si quan s'introdueix un retard en el temps en l'entrada $x(t+\delta)$, *equival directament a un retard en el temps de la funció de sortida $y(t+\delta)$. Per exemple, si el temps t és el "temps transcorregut", aleshores la "invariància de temps" implica que la relació entre la funció d'entrada $x(t)$ i la funció de sortida $y(t)$ és constant respecte al temps t:*

$$y(t) = f(x(t), t) = f(x(t)) \tag{4}$$

Gràficament es pot interpretar la propietat d'invariància en el temps com

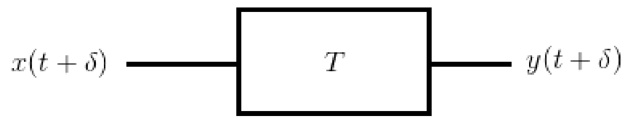

Figure 3: Representació gràfica de la propietat d'invariància en el temps d'un sistema LTI

3 Convolució

La convolució és una operació matemàtica que a partir de dues funcions d'entrada produeixen una funció de sortida que expressa com una de les funcions d'entrada es modificada per l'altra entrada. Donades dues funcions d'entrada f i g la convolució, denotada com $f * g$, es defineix com la integral del producte de dos funcions després que una d'elles sigui revertida i desplazada una distància τ .

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{5}$$

4 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier FT és una eina matemàtica que enuncia que qualsevol senyal o funció continua $f(x)$ pot representar-se com la suma de funcions sinusoïdals. D'aquesta manera la FT descompon la funció en les freqüències que la constitueixen i ens permet calcular la contribució de cada valor de freqüència a la formació del senyal. D'altra banda proporciona una representació de la funció diferent caracteritzada per les funcions periòdiques cosinus i sinus. D'aquesta manera la FT fa referència tant a la representació de la funció en el domini freqüencial com a l'operació matemàtica que associa la funció del temps a la seva representació en freqüència.

Definim la transformada de Fourier FT d'una funció f com [4]

$$F(k) = F_x[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx \tag{6}$$

De manera anàloga es defineix la transformada inversa de Fourier com

$$f(x) = F_k^{-1}[F(k)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{2\pi i k x} dk \quad (7)$$

5 Resposta a l'impuls

Assumint la immobilitat de l'emissor i el receptor, el recinte acústic o sala en el qual estàn inmersos es pot considerar com un sistema lineal i invariant en el temps caracteritzat per la seva resposta a l'impuls $h(t)$. Com el seu propi nom indica es defineix la resposta a l'impuls com el senyal de sortida d'un sistema quan s'ha excitat amb un senyal d'entrada corresponent a un impuls. El fet d'utilitzar com a senyal d'entrada un impuls fa que totes les propietats d'un sistema LTI estiguin presents en la seva resposta. D'aquesta manera es pot emprar la resposta a l'impuls per a descriure el sistema LTI i predir la sortida per a qualsevol senyal d'entrada. Això es degut a què l'impuls conté totes les freqüències i, llavors, defineix la resposta d'un sistema LTI per a totes les freqüències, fent possible observar el comportament del sistema en funció del temps.

Centrant-nos en acústica, aquest sistema es correspon a una sala o un recinte acústic. Quan un so és emès cap al receptor, el so que es rep en la posició del receptor $y(t)$ és la convolució del senyal emès $x(t)$ i la resposta impulsional del sistema $h(t)$ com s'expressa a continuació,

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (8)$$

La relació entre el senyal d'excitació i el senyal mesurat es pot representar en el domini freqüencial fent ús de la transformada de Fourier com

$$Y(w) = X(w) \cdot H(w) \quad (9)$$

on $H(w)$ és la funció de transferència del sistema.

En l'àmbit de l'acústica, la mesura de la resposta a l'impuls és un afer important ja que a partir d'aquesta es poden descriure paràmetres acústics que són de gran rellevància. Un mètode habitual per a mesurar-la consisteix en aplicar un senyal conegut a l'entrada del sistema i mesurar la sortida d'aquest. El fet que es conegui el senyal d'excitació facilita la mesura de la resposta a l'impuls a partir de la deconvolució entre senyal mesurat i el senyal d'excitació. Per tant, l'elecció del senyal d'excitació del sistema acústic i de la tècnica de deconvolució per obtenir la resposta impulsional són dos elements de gran importància. Cal destacar que el senyal emisor ha de ser reproduïble perfectament. A més, tant el senyal d'excitació com la tècnica de deconvolució han de maximitzar la relació senyal soroll de la resposta a l'impuls així com eliminar possibles aparicions d'artefactes no lineals.

5.1 L'impuls ideal

L'impuls acústic ideal es defineix com a un senyal impulsional de duració infinitament petita, amb molta intensitat i d'energia unitària. Dit d'una altra manera ha de tenir un espectre pla, és a dir, que la seva energia sigui igual per a totes les freqüències, que no tingui discontinuïtats i tingui un factor de cresta baix, que fa referència a un valor baix per la relació entre el el pic d'amplitud i el valors RMS del senyal. A més, s'ha d'utilitzar un senyal d'excitació que permeti la seva repetició i, com s'ha dit anteriorment, amb un nivell suficientment alt per obtenir una bona relació senyal soroll (SNR).

Teoricament, qualsevol senyal d'entrada $x(t)$ que disposi d'un cert ample de banda pot ser utilitzat per estimar la resposta impulsional $h(t)$ d'un sistema, tot i que el senyal més simple per fer-ho és la funció delta de Dirac δ explicada amb anterioritat. Fent ús d'aquesta funció, l'impuls a l'entrada produeix un impuls idèntic a la sortida. D'aquesta manera tots els senyals que passen a través del sistema no experimenten cap canvi. Aleshores, coneixent el senyal d'entrada $x(t)$ i el senyal mesurat a la sortida $y(t)$ del sistema T es pot expressar aquesta idea de deconvolució matemàticament com

$$y * x^{-1} = h * x * x^{-1} = h * \delta = h \tag{10}$$

Recordem que la funció delta de Dirac conté totes les freqüències amb la mateixa intensitat i ens permet obtenir la resposta del sistema per a totes les freqüències. A nivell teòric aquesta formulació es simple, pero a la pràctica ocasiona certes dificultats per a dur-la a terme.

5.2 Aproximació de l'impuls ideal

Principalment es pot pensar en reproduir un impuls mitjançant un dispar d'una pistola, explosionar un globo o aplaudir. La principal avantatge d'aquest mètode és el seu cost baix. Tot i que aquests són capaços de generar un senyal impulsional d'alta intensitat sobre un gran rang freqüencial, ens proporcionen un baix control de la directivitat i d'una duració més llarga que no pas una mostra, com serìa el cas ideal de la funció delta de Dirac. Això ocasiona que no es pugui assegurar la correcta distribució d'energia per a sobrepassar el soroll de fons en tot l'espectre d'interès. A més, aquest mètodes no són repetitius i un senyal d'excitació difereix d'un altre. D'aquesta manera es perd fiabilitat en la mesura de la resposta impulsional perquè no es pot assegurar les mateixes característiques per a tots els senyals d'excitació.

També, es pot pensar en sintetitzar digitalment l'impuls i reproduir-lo a través d'un altaveu ja que aquests tenen bones propietats de reproductibilitat i directivitat. Tot i això és gairebé impossible reproduir-lo a alt nivell i per un temps molt curt sense ocasionar distorsions de fase i freqüència que impossibilitin un càlcul correcte de la resposta impulsional.

5.3 Soroll rosa i soroll blanc

La següent tècnica aprofita el fet que la resposta a l'impuls es pot calcular amb un altre senyal sempre hi quan aquesta estigui ben definida i tingui l'energia suficient a cada freqüència.

Aquesta segona tècnica proposa fer ús dels senyals soroll rosa o soroll blanc. El soroll blanc o white noise és un senyal aleatori que proporciona el mateix nivell d'intensitat per a totes les freqüències, fent així que la seva densitat espectral sigui constant o plana si s'expressa de forma lineal. De manera similar, el soroll rosa o pink noise també proporciona el mateix nivell d'intensitat per a totes les freqüències, però té el mateix nivell d'energia per a cada octava. D'aquesta manera aquest senyal mostra un espectre pla si es visualitza mitjançant una escala logarítmica o exponencial.

El fet d'escollir un senyal que conté la difusió d'energia en funció del temps permet que una font sonora com l'altaveu sigui capaç de reproduir-la. Mitjançant una operació matemàtica entre el senyal d'excitació i el senyal mesurat es pot calcular la resposta impulsional.

La riquesa del contingut freqüencial que proporcionen aquestes dues senyals contraresten amb l'aleatorietat de les mostres generades. Aquest fet provoca entre d'altres factors que l'espectre sigui discontinu, que no es determini correctament la fase, i que la resposta a l'impuls mostri soroll residual, fent aquesta tècnica inapropiada per obtenir uns resultats fiables.

5.4 El senyal MLS

Un altra tècnica que es proposa és utilitzar soroll pseudo-aleatori per a evitar el problema de les senyals aleatòries. Aquest soroll és un senyal determinista que procura simular un so aleatori que en realitat no ho és. Aquest tipus de senyal consisteix en una seqüència periódica de soroll de llargada inversa a la freqüència a la que es repeteix. El senyal més utilitzat és el senyal denominat maximum length sequences (MLS) que és una seqüència periòdica binària d'enters generada per registres de torns digitals i una porta lògica XOR. D'aquesta manera s'obté un tren d'impulsos format per impulsos discrets que prenen normalment els valors enters +1 i -1, i s'ajusten a 0 i 1 respectivament per a que la seqüència sigui simètrica.

El senyal MLS proporciona diversos avantatges que el fan de gran utilitat per varies aplicacions d'àudio. Aquest té un espectre pla com el d'un impuls ideal i una fase erràtica que varia pseudo-aleatòriament si la freqüència té una densitat de probabilitat uniforme. D'aquesta manera el senyal MLS té el mínim factor de cresta, l'energia del senyal és màxima i la relació senyal soroll és òptima.

Ara bé, aquest senyal té un principal inconvenient i és que té una forta dependència amb la linealitat del sistema. Aquesta tècnica requereix d'un sistema lineal i invariant en el temps perfecte que no ocasioni problemes de fase que poden aparèixer amb petites no-linealitats. En el nostre cas es vol mesurar la resposta impulsional d'una sala i la mesura ha de ser precisa, per tant l'ús d'aquesta tècnica no és adequada degut a aquest problema.

5.5 Escombrat logarítmic

La darrera tècnica i la més efectiva i eficient per al càlcul de respostes a l'impuls és la que fa ús d'un escombrat freqüencial o sweep. Per a fer l'escombrat s'utilitza una funció sinusoidal o to pur que incrementa la seva freqüència amb el temps, anant aquesta de freqüències baixes a altes. Aquest escombrat es pot fer de manera lineal o logarítmica, tot i que la més utilitzada és la logarítmica perquè fa possible proporcionar més energia a la zona crítica, és a dir, a baixes freqüències i anar més ràpid a alta freqüència.

Formalment es defineix l'escombrat logarítmic com

$$x(t) = sin\left[\frac{2\pi f_{inf} T}{ln(\frac{2\pi f_{sup}}{2\pi f_{inf}})} \cdot \left(e^{\frac{t}{T}\cdot ln(\frac{2\pi f_{sup}}{2\pi f_{inf}})} - 1\right)\right] \tag{11}$$

on f_{inf} és la freqüència inicial, f_{sup} la freqüència final i T la duració.

Un dels avantatges que ens proporciona aquest senyal d'excitació és que el seu senyal invers es correspon amb el propi senyal d'excitació pero invertit sobre l'eix temporal. Per tant, es pot calcular la resposta impulsional mitjançant l'operació de deconvolució explicada anteriorment. Un altre punt a favor és el fet que aquest senyal permet excitar només una freqüència alhora, a diferència d'altres senyals d'excitació com el soroll o l'impuls on totes les freqüències són excitades simultàniament i l'energia es distribueix uniformement en tot l'ample de banda. El fet d'excitar només una freqüència permet concentrar tota l'energia del senyal en un ample de banda estret, i tanmateix aconseguir una millor relació senyal soroll millor amb la mateixa quantitat d'energia a canvi d'un alt cost computacional. L'eficiència computacional d'aquesta tècnica és inferior en vers a les tècniques descrites anteriorment. D'altra banda, amb aquest senyal d'excitació existeix la possibilitat d'analitzar una única finestra temporal i ignorar els efectes de les reflexions i modes normals analitzant només el so directe com si fós una sala anecoica.

References

[1] Paul Adrien Maurice Dirac. *The principles of quantum mechanics.* Number 27. Oxford university press, 1981.

[2] IM Gel'fand and GE Shilov. Generalized functions vol 1 properties and operations (ny–london, 1968.

[3] Alan V Oppenheim. Alan s. willsky with s hamid nawab," signals and systems, 1997.

[4] Jean Baptiste Joseph baron Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. F. Didot, 1822.