

Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Jeudi 11 octobre 2018, 15 h 30 à 18 h 20.

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
 - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
 - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
 - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
 - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 8.

Pondération :

Question	Point
1	30
2	15
3	10
4	10
5	15
6	20
total	100

Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ Matricule : _____

1. (30 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

(a) $\vdash (((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{c})$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a})^{(1)}}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}} (E \wedge)}{\mathbf{c}} (E \wedge)}{\frac{\frac{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a})^{(1)}}{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} (E \wedge)}{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} (I \vee)}{\frac{\mathbf{c}}{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{c}} (E \rightarrow)} (I \rightarrow)(1)$$

(b) $\vdash ((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \Rightarrow \neg(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b}))$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(1)}}{\mathbf{a}^{(3)}} \quad \frac{(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b})^{(2)}}{\neg \mathbf{a}} (E \wedge)}{\perp} (I \perp)}{\frac{\frac{\mathbf{b}^{(4)}}{\neg \mathbf{b}} \quad \frac{(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b})^{(2)}}{\neg \mathbf{b}} (E \wedge)}{\perp} (I \perp)} (E \vee)(3)(4)} \frac{\perp}{\neg(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b})} (I \neg)(2)}{\frac{\perp}{((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \neg(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b}))} (I \rightarrow)(1)}$$

(c) $\vdash (\neg(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}))$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{a}^{(3)}}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (I \vee)}{\neg \mathbf{a}} \quad \frac{\neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(2)}}{\neg \mathbf{a}} (I \perp)}{\perp} (I \neg)(3)}{\frac{\perp}{\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b}}} (I \wedge)}{\frac{\perp}{\neg \neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})}} (I \perp)} \frac{\frac{\frac{\mathbf{b}^{(4)}}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (I \vee)}{\neg \mathbf{b}} \quad \frac{\neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(2)}}{\neg \mathbf{b}} (I \perp)}{\perp} (I \neg)(4)}{\perp} (I \wedge)}{\frac{\perp}{\neg \neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})}} (I \perp)} \frac{\frac{\perp}{\neg \neg(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})}}{\frac{\perp}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})}} (E \neg)}{\frac{\perp}{(\neg(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b}) \rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}))}} (I \rightarrow)(1)}$$

2. (15 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

- (a) Il existe un triangle plus grand que tous les carrés.

Solution:

$$\exists x(\text{Triangle}(x) \wedge \forall y(\text{Square}(y) \Rightarrow \text{Smaller}(y, x)))$$

- (b) Si un carré est à la gauche d'un triangle grand, sur la même ligne, alors le carré est petit.

Solution:

$$\forall x \forall y (\text{Square}(x) \wedge \text{Triangle}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{SameRow}(x, y) \wedge \text{Large}(y) \Rightarrow \text{Small}(x))$$

- (c) Une condition suffisante pour que les triangles soient grands est que les carrés soient grands.

Solution:

$$\forall x (\text{Square}(x) \Rightarrow \text{Large}(x)) \Rightarrow \forall x (\text{Triangle}(x) \Rightarrow \text{Large}(x))$$

- (d) Une condition nécessaire pour que les carrés soient grands est que les triangles soient grands.

Solution:

$$\forall x (\text{Square}(x) \Rightarrow \text{Large}(x)) \Rightarrow \forall x (\text{Triangle}(x) \Rightarrow \text{Large}(x))$$

- (e) Il existe exactement un carré, et il est plus grand que tous les autres objets.

Solution:

$$\exists x (\text{Square}(x) \wedge \neg \exists y (x \neq y \wedge \text{Square}(y))) \wedge \forall y (y \neq x \Rightarrow \text{Smaller}(y, x))$$

3. (10 pts) Considérez les formules suivantes :

$$\neg(X_3 \Leftrightarrow X_1) \wedge (X_2 \vee \neg X_3) \quad (1)$$

$$\neg X_2 \Rightarrow \neg X_1 \quad (2)$$

- (a) Donnez la table de vérité de ces deux formules.

Solution:

no	X1	X2	X3		\neg (X3	\Leftrightarrow	X1)	\wedge	(X2	\vee	\neg	X3)		\neg	X2	\Rightarrow	\neg	X1
1	0	0	0		0	0	1	0	0	0	1	1	0		1	0	1	1	0
2	0	0	1		1	1	0	0	0	0	0	0	1		1	0	1	1	0
3	0	1	0		0	0	1	0	0	1	1	1	0		0	1	1	1	0
4	0	1	1		1	1	0	0	1	1	1	0	1		0	1	1	1	0
5	1	0	0		1	0	0	1	1	0	1	1	0		1	0	0	0	1
6	1	0	1		0	1	1	1	0	0	0	0	1		1	0	0	0	1
7	1	1	0		1	0	0	1	1	1	1	1	0		0	1	1	0	1
8	1	1	1		0	1	1	1	0	1	1	0	1		0	1	1	0	1

- (b) Existe-t-il un modèle pour ces deux formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 4 et la ligne 7.

- (c) Est-ce que la formule (2) est une conséquence logique de (1)? Justifiez.

Solution: Non, à cause de la ligne 5.

- (d) Est-ce que ces deux formules sont cohérentes? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 4 et la ligne 7 sont des modèles pour les deux formules.

4. (**10 pts**) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

- (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \Rightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
& \neg(X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \Rightarrow \neg(X_1 \wedge X_2) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-22} \} \\
& \neg\neg(X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \vee \neg(X_1 \wedge X_2) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-21} \} \\
& (X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \vee \neg(X_1 \wedge X_2) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-17} \} \\
& (X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-22} \} \\
& X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_1 \vee \neg X_2 \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-6} \} \\
& X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_1 \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-20} \} \\
& \mathbf{true} \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-2} \} \\
& \mathbf{true}
\end{aligned}$$

- (b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$(X_1 \vee \neg X_2) \Rightarrow \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
& (X_1 \vee \neg X_2) \Rightarrow \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-22} \} \\
& \neg(X_1 \vee \neg X_2) \vee \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-18} \} \\
& (\neg X_1 \wedge \neg\neg X_2) \vee \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-21} \} \\
& (\neg X_1 \wedge X_2) \vee \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-25} \} \\
& (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge \neg\neg X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-21} \} \\
& (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-12} \} \\
& (\neg X_1 \wedge X_2) \vee X_2 \wedge ((\neg X_1 \wedge X_2) \vee X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-12} \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (X_2 \vee X_2) \wedge ((\neg X_1 \wedge X_2) \vee X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-12} \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (X_2 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3) \\
& \quad \{ \text{LP-6} \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2) \wedge X_2 \wedge (\neg X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3)
\end{aligned}$$

5. (15 pts) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t2), (s2,t2), (s3,t2), (s4,t2)}
& r2 = {(t1,u3), (t2,u3), (t3,u3)}
& r3 = {(s1,s2), (s2,s3), (s3,s1)}
& r4 = (r1;r2)
& r5 = {s1}<|r1
& r6 = r1|>{t1}
& r7 = r1|>>{t1}
& r8 = closure1(r3) |> {s4}
& r9 = (r1~;r3)
& r10 = r1 <+ {s1|->t3}
& r11 = iterate(r3,3)
& S1 = dom(r1)
& T1 = ran(r1)
& T2 = r1[{s2}]
END
```

Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a) **r4**

Solution: $\{(s1 \mapsto u3), (s2 \mapsto u3), (s3 \mapsto u3), (s4 \mapsto u3)\}$

(b) **r5**

Solution: $\{(s1 \mapsto t2)\}$

(c) **r6**

Solution: $\{\}$

(d) **r7**

Solution: $\{(s1 \mapsto t2), (s2 \mapsto t2), (s3 \mapsto t2), (s4 \mapsto t2)\}$

(e) **r8**

Solution: $\{\}$

(f) **r9**

Solution: $\{(t2 \mapsto s1), (t2 \mapsto s2), (t2 \mapsto s3)\}$

(g) **r10**

Solution: $\{(s1 \mapsto t3), (s2 \mapsto t2), (s3 \mapsto t2), (s4 \mapsto t2)\}$

(h) **r11**

Solution: $\{(s1 \mapsto s1), (s2 \mapsto s2), (s3 \mapsto s3)\}$

(i) **S1**

Solution: $\{s1, s2, s3, s4\}$

(j) **T1**

Solution: $\{t2\}$

(k) **T2**

Solution: $\{t2\}$

6. (20 pts) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3 :

MACHINE q6

SETS

Personne={h1,h2,h3,h4,f1,f2,f3}

CONSTANTS

Homme,Femme,Parent,BeauFrere,BeauFrere_alt

PROPERTIES

Homme={h1,h2,h3,h4}

& Femme=Personne-Homme

& Parent = {(h1,f1),(h1,f3),(h2,f2),(f1,f2),(f3,h4),(h3,h4)}

- (a) Définissez par compréhension la relation **BeauFrere**, qui contient les couples $x \mapsto y$ tels que x est le beau-frère de y . On dit que x est le beau-frère de y ssi x est un homme dont la conjointe est la soeur de y . On dit que z est la conjointe de x si x et z ont eu un enfant ensemble. Dans l'exemple de **Parent** ci-dessus, **h2** est le beau-frère de **f3** et **h3** est le beau-frère de **f1**.

Solution:

```
BeauFrere =
{ x,y |
  x : Homme
  & #(z1,z2,z3).
    (
      (z1,z2) : Parent
      & (z2,z3) : Parent
      & (x,z3) : Parent
      & (z1,y) : Parent
      & z2 /= x
      & z2 /= y
    )
}
```

- (b) Définissez **BeauFrere_alt**, qui contient les mêmes éléments que **BeauFrere**, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

Solution: BeauFrere_alt =

```
Homme <| (((Parent;Parent~)-id(Personne));((Parent~;Parent)-id(Personne))))
```