

Exercices sur la preuve en logique propositionnelle

Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Indiquez pour chaque étape de preuve, la règle utilisée et les hypothèses déchargées (s'il y a déchargement avec cette règle). Toutes les hypothèses doivent être déchargées, puisque chaque séquent ci-dessous ne contient aucune hypothèse (c'est-à-dire, chaque séquent est de la forme $\emptyset \vdash \mathcal{A}$, que nous notons simplement $\vdash \mathcal{A}$ par souci de concision).

1. $\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r) \Rightarrow p \vee (q \wedge r)$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{((p \vee q) \wedge (p \vee r))^{(1)}}{(p \vee q)} (E\wedge) \quad \frac{p^{(2)}}{(p \vee (q \wedge r))} (I\vee) \quad \frac{\frac{((p \vee q) \wedge (p \vee r))^{(1)}}{(p \vee r)} (E\wedge) \quad \frac{p^{(4)}}{(p \vee (q \wedge r))} (I\vee) \quad \frac{\frac{q^{(3)} \quad r^{(5)}}{(q \wedge r)} (I\wedge)}{(p \vee (q \wedge r))} (I\vee)}{(p \vee (q \wedge r))} (E\vee)(4)(5)}{\frac{(p \vee (q \wedge r))}{(((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (p \vee (q \wedge r)))} (E\vee)(2)(3)} (I \rightarrow)(1)$$

2. $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{((p \wedge q) \vee (p \wedge r))^{(1)}}{p} (E\wedge) \quad \frac{(p \wedge r)^{(3)}}{p} (E\wedge) (E\vee)(2)(3) \quad \frac{((p \wedge q) \vee (p \wedge r))^{(1)}}{(q \vee r)} (I\vee) \quad \frac{(p \wedge q)^{(4)}}{q} (E\wedge) (I\vee) \quad \frac{(p \wedge r)^{(5)}}{r} (E\wedge) (I\vee)}{(q \vee r)} (E\vee)(4)(5)}{\frac{(p \wedge (q \vee r))}{(((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r)))} (I\wedge)} (I \rightarrow)(1)$$

3. $\vdash p \wedge q \Rightarrow p \wedge (\neg p \vee q)$

Solution:

$$\frac{\frac{(p \wedge q)^{(1)}}{p} (E\wedge) \quad \frac{(p \wedge q)^{(1)}}{q} (E\wedge) (I\vee)}{\frac{(p \wedge (\neg p \vee q))}{((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge (\neg p \vee q)))} (I\wedge)} (I \rightarrow)(1)$$

4. $\vdash \neg\neg p \Rightarrow p$

Solution:

$$\frac{\frac{\neg\neg p^{(1)}}{p}(E\neg)}{(\neg\neg p \rightarrow p)}(I\rightarrow)(1)$$

5. $\vdash p \Rightarrow \neg\neg p$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{p^{(1)}}{\perp}(I\perp)}{\neg\neg p}(I\neg)(2)}{(p \rightarrow \neg\neg p)}(I\rightarrow)(1)$$

6. $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(p \rightarrow q)^{(1)}}{q}(E\rightarrow) \quad \frac{p^{(3)}}{\neg q^{(2)}}(I\perp)}{\neg p}(I\neg)(3)}{(\neg q \rightarrow \neg p)}(I\rightarrow)(2)}{((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))}(I\rightarrow)(1)$$

7. $\vdash (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{p^{(2)}}{\perp}(I\perp)}{\neg\neg q}(I\neg)(3)}{q}(E\neg) \quad \frac{(\neg q \rightarrow \neg p)^{(1)} \quad \neg q^{(3)}(E\rightarrow)}{\neg p}(I\perp)}{(p \rightarrow q)}(I\rightarrow)(2)}{((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))}(I\rightarrow)(1)$$

8. $\vdash \neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$

Solution:

$$\frac{\frac{(p \vee q)^{(2)} \quad p^{(3)} \quad \frac{(\neg p \wedge \neg q)^{(1)}}{\neg p}(E\wedge)}{\perp}(I\perp) \quad \frac{q^{(4)} \quad \frac{(\neg p \wedge \neg q)^{(1)}}{\neg q}(E\wedge)}{\perp}(I\perp)}{\neg(p \vee q)}(E\vee)(3)(4)}{((\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q))}(I\rightarrow)(2)}$$

9. $\vdash \neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

Solution:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{(\neg p \vee \neg q)^{(1)}}{\quad} \quad \frac{\frac{\frac{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^{(2)}}{\mathbf{p}} (E\wedge) \quad \neg \mathbf{p}^{(3)} (I\perp)}{\perp} \quad \frac{\frac{\frac{(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^{(2)}}{\mathbf{q}} (E\wedge) \quad \neg \mathbf{q}^{(4)} (I\perp)}{\perp} (E\vee)(3)(4)}{\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})} (I\rightarrow)(2)}{\perp} (I\rightarrow)(1) \\
 \hline
 ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q))
 \end{array}$$

Pour les deux numéros suivants, vous pouvez utiliser les lois de De Morgan (LP-17, LP-18), vu que nous les avons prouvées en faisant les exercices précédents et en complétant avec les preuves données dans les notes de cours.

1. $\vdash p \vee \neg p$ (loi du tiers exclu, c'est-à-dire la loi LP-20)

Solution:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})} (I\vee) \quad \neg(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})^{(1)} (I\perp)}{\perp} (I\rightarrow)(2) \\
 \hline
 \frac{\neg \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})}{\perp} (I\vee) \quad \neg(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})^{(1)} (I\perp) \\
 \hline
 \frac{\neg \neg(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})}{(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a})} (I\rightarrow)(1) \\
 \hline
 \hline
 (\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a}) (E\rightarrow)
 \end{array}$$

2. $\vdash p \vee q \Rightarrow p \vee (\neg p \wedge q)$ (Utilisez la loi du tiers exclu que vous venez tout juste de prouver)