

Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Vendredi 16 octobre 2020, 13 h 30 à 16 h 30.

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
 - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
 - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
 - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
 - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 11.

Pondération :

| Question | Point | Résultat |
|----------|-------|----------|
| 1 | 30 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 10 | |
| 4 | 10 | |
| 5 | 15 | |
| 6 | 20 | |
| total | 100 | |

Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ CIP : _____

1. (30 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

(a) $\vdash (((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \neg \mathbf{b}) \rightarrow \neg \mathbf{a})$

(b) $\vdash (((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c})$

(c) $\vdash ((\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a})$

2. (15 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

(a) Il existe une ligne avec un pentagone. Sur cette ligne, tous les triangles sont à gauche des carrés.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

-
- This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is a vertical margin line on the left side, creating a narrow left margin. The paper appears to be from a notebook or a standard ruled document.

-
- This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

3. (10 pts) Considérez les trois formules suivantes :

$$A \wedge \neg B \quad (1)$$

$$A \Rightarrow C \quad (2)$$

$$B \vee C \quad (3)$$

(a) Donnez la table de vérité de ces trois formules.

| no | A | B | C | | A | \wedge | \neg | B | | A | \Rightarrow | C | | B | \vee | C |
|----|---|---|---|--|---|----------|--------|---|--|---|---------------|---|--|---|--------|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | |

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

(d) Est-ce que ces trois formules sont cohérentes? Justifiez.

4. (**10 pts**) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

- (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$(A \Rightarrow \neg(B \vee C)) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E)$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

(b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(A \wedge B))$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

5. (15 pts) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t1), (s1,t3), (s3,t2), (s4,t2)}
  ∧ r2 = {(t1,u1), (t2,u2), (t2,u3), (t3,u1)}
  ∧ r3 = {(s1,s2), (s1,s4), (s2,s3), (s3,s4), (s4,s3)}
  ∧ r4 = (r1;r2)
  ∧ r5 = {s1}◁r1
  ∧ r6 = r1▷{t1}
  ∧ r7 = r1▷={t1}
  ∧ r8 = closure1(r3) ▷ {s4}
  ∧ r9 = (r1-1;r3)
  ∧ r10 = r1 <+ {s1↦t3}
  ∧ r11 = iterate(r3,2)
  ∧ S1 = dom(r1)
  ∧ T1 = ran(r1)
  ∧ T2 = r1[{s2}]
END
```

Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a) r_4

(b) r_5

(c) r_6

(d) r_7

(e) r_8

(f) r_9

(g) r_{10}

(h) r_{11}

(i) s_1

(j) T_1

(k) T_2

6. (20 pts) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3 :

MACHINE q6

SETS

$$\text{Personne}=\{h1,h2,h3,h4,f1,f2,f3,f4\}$$

CONSTANTS

Homme,Femme,Parent,petitNeveu,petitNeveu_alt

PROPERTIES

Homme={h1 ,h2 ,h3 ,h4}

$$\wedge \text{ Femme} = \text{Personne} - \text{Homme}$$
$$\wedge \text{ Parent} = \{(f1, h1), (f2, f1), (h2, f2), (h2, f3), (f3, h3), (h3, f4), (h3, h4)\}$$

- (a) Définissez par compréhension la relation **petitNeveu**, qui contient les couples $x \mapsto y$ tels que x est un petit-neveu de y . On dit que x est un petit-neveu de y ssi x est le fils de z et z est un neveu ou une nièce de y . On dit que z est un neveu ou une nièce de y ssi le père ou la mère de z est un frère ou une soeur de y . v et w sont des frères ou des soeurs s'ils ont un parent en commun. Dans l'exemple ci-dessus, **h1** est un petit-neveu de **f3**.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

- (b) Définissez `petitNeveu_alt`, qui contient les mêmes éléments que `petitNeveu`, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

[illegible]

Fin de l'examen