Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Samedi 19 octobre 2019, 9 h 00 à 12 h 00.

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 8.

Pondération :

Question	Point	Résultat
1	30	
2	15	
3	10	
4	10	
5	15	
6	20	
total	100	

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**30 pts**) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

   (a) $\vdash ((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}) \to \mathbf{b}$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge\mathbf{a})^{(1)}}{(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(E\wedge) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{((\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge\mathbf{a})^{(1)}}{\mathbf{a}}(E\wedge) \quad \neg\mathbf{a}^{(2)}}{\bot}(I\bot)}{\mathbf{b}}(E\bot) \quad \mathbf{b}^{(3)}}{\mathbf{b}}(E\vee)(2)(3)}{(((\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge\mathbf{a})\to\mathbf{b})}(I\to)(1)$$

   (b) $\vdash ((\neg \mathbf{a} \to \mathbf{c}) \wedge (\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{c})) \to \mathbf{c}$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\neg\mathbf{a}\to\mathbf{c})\wedge(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{c}))^{(1)}}{(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{c})}(E\wedge) \quad \dfrac{\dfrac{((\neg\mathbf{a}\to\mathbf{c})\wedge(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{c}))^{(1)}}{(\neg\mathbf{a}\to\mathbf{c})}(E\wedge) \quad \neg\mathbf{a}^{(2)}}{\mathbf{c}}(E\to) \quad \mathbf{c}^{(3)}}{\mathbf{c}}(E\vee)(2)(3)}{(((\neg\mathbf{a}\to\mathbf{c})\wedge(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{c}))\to\mathbf{c})}(I\to)(1)$$

   (c) $\vdash \neg (\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \to (\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b})$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\mathbf{a}^{(2)}}{(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee) \quad \neg(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})^{(1)}}{\bot}(I\bot)}{\neg\neg\mathbf{a}}(I\neg)(2)}{\mathbf{a}}(E\neg) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{b}^{(3)}}{(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee) \quad \neg(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})^{(1)}}{\bot}(I\bot)}{\neg\mathbf{b}}(I\neg)(3)}{(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b})}(I\wedge)}{(\neg(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b}))}(I\to)(1)$$

2. (**15 pts**) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

   (a) Il existe un carré à la gauche de tous les triangles.
   Solution:
   $\exists x(\mathsf{Square}(x) \land \forall y(\mathsf{Triangle}(y) \Rightarrow \mathsf{LeftOf}(x,y)))$

   (b) Si deux carrés sont sur la même ligne, alors ils sont de même taille.
   Solution:
   $\forall x \forall y(\mathsf{Square}(x) \land \mathsf{Square}(y) \land \mathsf{SameRow}(x,y) \Rightarrow \mathsf{SameSize}(x,y))$

   (c) Une condition suffisante pour que les carrés soient petits est que les pentagones soient petits.
   Solution:
   $\forall x(\mathsf{Pentagon}(x) \Rightarrow \mathsf{Small}(x)) \Rightarrow \forall x(\mathsf{Square}(x) \Rightarrow \mathsf{Small}(x))$

   (d) Une condition nécessaire pour que pentagones soient petits est que les carrés soient petits.
   Solution:
   $\forall x(\mathsf{Pentagon}(x) \Rightarrow \mathsf{Small}(x)) \Rightarrow \forall x(\mathsf{Square}(x) \Rightarrow \mathsf{Small}(x))$

   (e) L'objet le plus grand est un carré.
   Solution:
   $\exists x(\mathsf{Square}(x) \land \forall y(x \neq y \Rightarrow \mathsf{Smaller}(y,x))$

3. (**10 pts**) Considérez les formules suivantes :

$$\neg(X_3 \Rightarrow X_1) \vee (X_2 \wedge \neg X_3) \tag{1}$$

$$\neg X_2 \wedge \neg X_1 \tag{2}$$

(a) Donnez la table de vérité de ces deux formules.

Solution:

no	X1	X2	X3		¬(	X3	⟹	X1)	∨	(X2	∧	¬	X3)		¬	X2	∧	¬	X1
1	0	0	0		0	0	1	0	0	0	0	1	0		1	0	1	1	0
2	0	0	1		1	1	0	0	1	0	0	0	1		1	0	1	1	0
3	0	1	0		0	0	1	0	1	1	1	1	0		0	1	0	1	0
4	0	1	1		1	1	0	0	1	1	0	0	1		0	1	0	1	0
5	1	0	0		0	0	1	1	0	0	0	1	0		1	0	0	0	1
6	1	0	1		0	1	1	1	0	0	0	0	1		1	0	0	0	1
7	1	1	0		0	0	1	1	1	1	1	1	0		0	1	0	0	1
8	1	1	1		0	1	1	1	0	1	0	0	1		0	1	0	0	1

(b) Existe-t-il un modèle pour ces deux formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 2 seulement.

(c) Est-ce que la formule (2) est une conséquence logique de (1)? Justifiez.

Solution: Non, à cause des lignes 3,4,7.

(d) Est-ce que ces deux formules sont cohérentes? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 2 est un modèle pour les deux formules.

4. (**10 pts**) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

   (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$$

Solution:

$$\begin{array}{ll} & \neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-22 } \} \\ & \neg\neg(\neg A \Rightarrow B) \lor (A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\ & (\neg A \Rightarrow B) \lor (A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-22 } \} \\ & (\neg\neg A \lor B) \lor (A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\ & A \lor B \lor (A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-41 } \} \\ & A \lor B \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg\neg B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\ & A \lor B \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-14 } \} \\ & A \lor B \lor (\neg A \land B) \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-14 } \} \\ & A \lor B \end{array}$$

   (b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$

Solution:

$$\begin{array}{ll} & \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-22 } \} \\ & \neg\neg(A \Rightarrow B) \lor C \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\ & (A \Rightarrow B) \lor C \\ \Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-22 } \} \\ & \neg A \lor B \lor C \end{array}$$

5. (**15 pts**) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t1), (s1,t2), (s2,t1), (s2,t1)}
& r2 = {(t1,u1), (t2,u2), (t3,u3)}
& r3 = {(s1,s3), (s2,s1), (s2,s3)}
& r4 = (r1;r2)
& r5 = {s1}<|r1
& r6 = r1|>{t1}
& r7 = r1|>>{t1}
& r8 = closure1(r3) |> {s4}
& r9 = (r1~;r3)
& r10 = r1 <+ {s1|->t3}
& r11 = iterate(r3,3)
& S1 = dom(r1)
& T1 = ran(r1)
& T2 = r1[{s2}]
END
```

Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a) `r4`
(b) `r5`
(c) `r6`
(d) `r7`
(e) `r8`
(f) `r9`
(g) `r10`
(h) `r11`
(i) `S1`
(j) `T1`
(k) `T2`

Solution: $r1 = \{(s1 \mapsto t1), (s1 \mapsto t2), (s2 \mapsto t1)\}$
$r2(t1) = u1$
$r2(t2) = u2$
$r2(t3) = u3$
$r3 = \{(s1 \mapsto s3), (s2 \mapsto s1), (s2 \mapsto s3)\}$
$r4 = \{(s1 \mapsto u1), (s1 \mapsto u2), (s2 \mapsto u1)\}$
$r5 = \{(s1 \mapsto t1), (s1 \mapsto t2)\}$
$r6(s1) = t1$
$r6(s2) = t1$
$r7(s1) = t2$
$r8 = \{\}$
$r9 = \{(t1 \mapsto s1), (t1 \mapsto s3), (t2 \mapsto s3)\}$
$r10(s1) = t3$
$r10(s2) = t1$
$r11 = \{\}$
$S1 = \{s1, s2\}$
$T1 = \{t1, t2\}$
$T2 = \{t1\}$

6. (**20 pts**) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3 :

```
MACHINE q6
SETS
  Personne={h1,h2,f1,f2,f3}
CONSTANTS
  Homme,Femme,Parent,BelleMere,BelleMere_alt
PROPERTIES
  Homme={h1,h2}
& Femme=Personne-Homme
& Parent = {(f1,f2),(h1,f2),(h1,h2),(h1,f3)}
```

(a) Définissez par compréhension la relation BelleMere, qui contient les couples $x \mapsto y$ tels que x est la belle-mère de y. On dit que x est la belle-mère de y ssi x est une femme dont le conjoint est le père de y, mais x n'est pas la mère de y. On dit que x est la conjointe de y ssi x et y ont eu un enfant ensemble. Dans l'exemple de Parent ci-dessus, `f1` est la belle-mère de `h2` et `f3`.

```
BelleMere = { x,y |
     x : Femme
   & #(z1,z2).
       (
          x |-> z2 : Parent
       & z1 |-> z2 : Parent
       & x /= z1
       & z1 |-> y : Parent
       & not(x |-> y : Parent )
       )
  }
END
```

(b) Définissez BelleMere_alt, qui contient les mêmes éléments que BelleMere, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

```
BelleMere_alt = Femme <| ((((Parent ; Parent~) -id(Personne));Parent) - Parent)
```

Fin de l'examen