

Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Vendredi 16 octobre 2020, 13 h 30 à 16 h 30.

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
 - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
 - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
 - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
 - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 10.

Pondération :

Question	Point	Résultat
1	30	
2	15	
3	10	
4	10	
5	15	
6	20	
total	100	

Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ CIP : _____

1. (30 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

(a) $\vdash (((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \neg \mathbf{b}) \rightarrow \neg \mathbf{a})$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \neg \mathbf{b})^{(1)}}{(\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (E \wedge) \quad \frac{\mathbf{a}^{(2)} \quad \neg \mathbf{a}^{(3)}}{\perp} (I \perp) \quad \frac{\mathbf{b}^{(4)} \quad \frac{((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \neg \mathbf{b})^{(1)}}{\neg \mathbf{b}} (E \wedge)}{\perp} (I \perp)}{\perp} (E \vee) (3) (4) \quad \frac{\neg \mathbf{a}}{((\neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \neg \mathbf{b}) \rightarrow \neg \mathbf{a}} (I \rightarrow) (2)}{(I \rightarrow) (1)}$$

(b) $\vdash (((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{b})^{(1)}}{((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c})} (E \wedge) \quad \frac{\frac{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{b})^{(1)}}{\mathbf{b}} (E \wedge)}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (I \vee)}{\mathbf{c}} (E \rightarrow) \quad \frac{\mathbf{c}}{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}} (I \rightarrow) (1)}$$

(c) $\vdash ((\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a})$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a})^{(1)} \quad \neg \mathbf{a}^{(2)}}{\mathbf{a}} (E \rightarrow) \quad \neg \mathbf{a}^{(2)}}{\perp} (I \perp) \quad (I \neg)^{(2)} \quad (E \neg)}{\frac{\neg \neg \mathbf{a}}{((\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a})} (I \rightarrow)^{(1)}}$$

2. (15 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

Solution: Voir q2.json

- (a) Il existe une ligne avec un pentagone. Sur cette ligne, tous les triangles sont à gauche des carrés.
- (b) Il existe un carré et un pentagone de même taille qui sont situés sur la même colonne.
- (c) L'absence de pentagone est une condition suffisante pour l'existence d'un petit carré.

- (d) Une condition nécessaire et suffisante, pour que les pentagones soient grands, est que les carrés sont grands.
- (e) Le plus petit objet est un carré.

3. (10 pts) Considérez les trois formules suivantes :

$$A \wedge \neg B \quad (1)$$

$$A \Rightarrow C \quad (2)$$

$$B \vee C \quad (3)$$

(a) Donnez la table de vérité de ces trois formules.

Solution:

no	A	B	C		A	\wedge	\neg	B		A	\Rightarrow	C		B	\vee	C
1	0	0	0		0	0	1	0		0	1	0		0	0	0
2	0	0	1		0	0	1	0		0	1	1		0	1	1
3	0	1	0		0	0	0	1		0	1	0		1	1	0
4	0	1	1		0	0	0	1		0	1	1		1	1	1
5	1	0	0		1	1	1	0		1	0	0		0	0	0
6	1	0	1		1	1	1	0		1	1	1		0	1	1
7	1	1	0		1	0	0	1		1	0	0		1	1	0
8	1	1	1		1	0	0	1		1	1	1		1	1	1

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 6 seulement.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

Solution: Oui, à cause de la ligne 6: c'est la seule ligne où (1) et (2) sont vraies, et (3) est aussi vraie.

(d) Est-ce que ces trois formules sont cohérentes? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 6 est un modèle pour les trois formules.

4. (10 pts) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

- (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$(A \Rightarrow \neg(B \vee C)) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
& (A \Rightarrow \neg(B \vee C)) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-22} \} \\
& (\neg A \vee \neg(B \vee C)) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-18} \} \\
& (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C)) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-12} \} \\
& (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge \neg(\neg D \vee \neg E) \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-18} \} \\
& (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge \neg\neg D \wedge \neg\neg E \\
\Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-21 2 fois} \} \\
& (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge D \wedge E
\end{aligned}$$

(b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(A \wedge B))$$

Solution:

$$\begin{aligned}
 & \neg(\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(A \wedge B)) \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-18} \} \\
 & \neg\neg(A \Rightarrow B) \wedge \neg\neg(A \wedge B) \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-21 2 fois} \} \\
 & (A \Rightarrow B) \wedge A \wedge B \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-22} \} \\
 & (\neg A \vee B) \wedge A \wedge B \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-13} \} \\
 & (\neg A \wedge A \wedge B) \vee (B \wedge A \wedge B) \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-19} \} \\
 & (\text{faux} \wedge B) \vee (B \wedge A \wedge B) \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-1} \} \\
 & \text{faux} \vee (B \wedge A \wedge B) \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-4} \} \\
 & B \wedge A \wedge B \\
 \Leftrightarrow & \quad \{ \text{LP-5} \} \\
 & A \wedge B
 \end{aligned}$$

5. (15 pts) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t1), (s1,t3), (s3,t2), (s4,t2)}
  ∧ r2 = {(t1,u1), (t2,u2), (t2,u3), (t3,u1)}
  ∧ r3 = {(s1,s2), (s1,s4), (s2,s3), (s3,s4), (s4,s3)}
  ∧ r4 = (r1;r2)
  ∧ r5 = {s1}◁r1
  ∧ r6 = r1▷{t1}
  ∧ r7 = r1▷={t1}
  ∧ r8 = closure1(r3) ▷ {s4}
  ∧ r9 = (r1-1;r3)
  ∧ r10 = r1 <+ {s1↦t3}
  ∧ r11 = iterate(r3,2)
  ∧ S1 = dom(r1)
  ∧ T1 = ran(r1)
  ∧ T2 = r1[{s2}]
END
```


Donnez la valeur des expressions suivantes:

- (a) $r4$
- (b) $r5$
- (c) $r6$
- (d) $r7$
- (e) $r8$
- (f) $r9$
- (g) $r10$
- (h) $r11$
- (i) $S1$
- (j) $T1$
- (k) $T2$

Solution:

$$r4 = \{s1 \mapsto u1, s3 \mapsto u2, s3 \mapsto u3, s4 \mapsto u2, s4 \mapsto u3\}$$

$$r5 = \{s1 \mapsto t1, s1 \mapsto t3\}$$

$$r6 = \{s1 \mapsto t1\}$$

$$r7 = \{s1 \mapsto t3, s3 \mapsto t2, s4 \mapsto t2\}$$

$$r8 = \{s1 \mapsto s4, s2 \mapsto s4, s3 \mapsto s4, s4 \mapsto s4\}$$

$$r9 = \{t1 \mapsto s2, t1 \mapsto s4, t2 \mapsto s3, t2 \mapsto s4, t3 \mapsto s2, t3 \mapsto s4\}$$

$$r10 = \{s1 \mapsto t3, s3 \mapsto t2, s4 \mapsto t2\}$$

$$r11 = \{s1 \mapsto s3, s2 \mapsto s4, s3 \mapsto s3, s4 \mapsto s4\}$$

$$S1 = \{s1, s3, s4\}$$

$$T1 = \{t1, t2, t3\}$$

$$T2 = \{\}$$

6. (20 pts) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3 :

MACHINE q6

SETS

Personne={h1,h2,h3,h4,f1,f2,f3,f4}

CONSTANTS

Homme,Femme,Parent,petitNeveu,petitNeveu_alt

PROPERTIES

Homme={h1,h2,h3,h4}

\wedge Femme=Personne-Homme

\wedge Parent = {(f1,h1),(f2,f1),(h2,f2),(h2,f3),(f3,h3),(h3,f4),(h3,h4)}

- (a) Définissez par compréhension la relation **petitNeveu**, qui contient les couples $x \mapsto y$ tels que x est un petit-neveu de y . On dit que x est un petit-neveu de y ssi x est le fils de z et z est un neveu ou une nièce de y . On dit que z est un neveu ou une nièce de y ssi le père ou la mère de z est un frère ou une soeur de y . v et w sont des frères ou des soeurs s'ils ont un parent en commun. Dans l'exemple ci-dessus, **h1** est un petit-neveu de **f3**.
- (b) Définissez **petitNeveu_alt**, qui contient les mêmes éléments que **petitNeveu**, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

Solution: Voir fichier q6.mch

Fin de l'examen