

Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Samedi 19 octobre 2024, 8h30 à 11h30

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet lorsque demandé, ou dans le cahier de réponse.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
 - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
 - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
 - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
 - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 6.

Pondération :

Question	Point	Résultat
1	21	
2	20	
3	10	
4	14	
5	11	
6	5	
7	21	
total	102	

Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ CIP : _____

1. (21 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée. **Répondez dans le cahier réponse.**

(a) $\vdash (((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c)) \rightarrow (a \vee c))$

Solution:

$$\frac{\frac{((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c))^{(1)}}{\frac{\frac{(a \wedge \neg b)^{(2)}}{a} (E \wedge) (I \vee) \quad \frac{(b \wedge c)^{(3)}}{c} (E \wedge) (I \vee)}{(a \vee c)} (I \vee)} (E \vee) (2) (3) (I \rightarrow) (1)}{(((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c)) \rightarrow (a \vee c))}$$

(b) $\vdash (\neg(a \wedge \neg b) \rightarrow (a \rightarrow b))$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{a^{(2)} \quad \neg b^{(3)}}{a \wedge \neg b} (I \wedge) \quad \neg(a \wedge \neg b)^{(1)}}{\perp} (I \perp) \quad \neg \neg b \quad (I \neg) (3) (E \neg)}{(a \rightarrow b)} (I \rightarrow) (2)}{(\neg(a \wedge \neg b) \rightarrow (a \rightarrow b))} (I \rightarrow) (1)$$

(c) $\vdash ((\neg(a \vee b) \wedge b) \rightarrow a)$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{(\neg(a \vee b) \wedge b)^{(1)}}{b} (E \wedge) (I \vee) \quad \frac{(\neg(a \vee b) \wedge b)^{(1)}}{\neg(a \vee b)} (E \wedge)}{\perp} (I \perp) \quad a \quad (E \perp)}{((\neg(a \vee b) \wedge b) \rightarrow a)} (I \rightarrow) (1)$$

2. (20 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski. **Répondez dans le cahier réponse.**

Solution: Voir q2.json

- (a) La carré **a** est le plus petit objet de sa ligne.
- (b) Les petits triangles sont sur la même colonne si, et seulement si, tous les pentagones sont plus grands que tous les carrés.
- (c) Une condition nécessaire pour que les triangles soient triés en ordre croissant de taille, de gauche à droite, est que les triangles soient tous sur la même ligne.
- (d) Il y a deux carrés sur une même colonne qui sont plus grands que tous les autres objets.
- (e) Soit tous les carrés sont grands, soit tous les triangles sont grands.

3. (10 pts) Considérez les trois formules suivantes :

$$\neg(A \Rightarrow B) \tag{1}$$

$$(\neg A) \Leftrightarrow C \tag{2}$$

$$\neg(A \wedge B) \tag{3}$$

- (a) Donnez la table de vérité de ces trois formules, en remplissant le tableau ci-dessous.

Solution:

no	A	B	C	\neg	(A \Rightarrow B)	(\neg A) \Leftrightarrow C	\neg	(A \wedge B)	Modèle
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	0	1	0	0
7	1	1	0	0	1	1	0	1	0
8	1	1	1	0	1	0	0	1	0

- (b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 5 seulement.

- (c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

Solution: Oui, à cause de la ligne 5 : c'est la seule ligne où (1) et (2) sont vraies, et (3) est vraie.

- (d) Est-ce que la formule (1) est une conséquence logique de (3)? Justifiez.

Solution: Non, car lorsque (3) est vraie (lignes 1 à 4), (1) est fausse.

- (e) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1)? Justifiez.

Solution: Oui, car lorsque (1) est vraie (lignes 5 et 6), (3) est vraie.

4. (14 pts) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple. **Répondez dans le cahier réponse.**

- (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg((\neg A \Rightarrow B) \vee \neg(\neg A \wedge B))$$

Solution: Voir q4a.txt

- (b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$\neg((\neg A \Rightarrow B) \vee (\neg A \wedge B))$$

Solution: Voir q4b.txt

5. (11 pts) Soit les définitions suivantes :

```

MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t3), (s1,t1), (s2,t1), (s3,t2), (s4,t3)}
  ∧ r2 = {(t1,u1), (t1,u2), (t2,u2), (t2,u3), (t3,u1)}
  ∧ r3 = {(s1,s3), (s1,s2), (s2,s3), (s3,s4), (s4,s3)}
  ∧ r4 = (r1;r2)
  ∧ r5 = {s1} ◁ r1
  ∧ r6 = r1 ▷ {t1}
  ∧ r7 = r1 ▷ {t1}
  ∧ r8 = closure1(r3) ▷ {s4}
  ∧ r9 = (r1-1;r3)
  ∧ r10 = r1 ◁+ {s1↦t3}
  ∧ r11 = iterate(r3,2)
  ∧ S1 = T - dom(r1-1)
  ∧ T1 = ran(r1-1) ∩ S
  ∧ T2 = r3[{s1,s2}]
END

```

Donnez la valeur des symboles suivants:

r4,
 r5,
 r6,
 r7,
 r8,
 r9,
 r10,
 r11,
 S1,
 T1,
 T2.

Solution: Voir q5-sol.txt

6. (5 pts) Répondez dans le questionnaire. Soit les définitions suivantes :

```

MACHINE Q6
SETS
  S = {s1,s2,s3,s4}
  ; T = {t1,t2,t3}

CONSTANTS
  r1,r2,r3,r4,r5

PROPERTIES
  r1 = { s1 ↦ t1, s2 ↦ t1, s3 ↦ t1 }
  ∧ r2 = { s1 ↦ t1, s2 ↦ t1, s3 ↦ t1, s4 ↦ t2 }
  ∧ r3 = { s1 ↦ t3, s2 ↦ t2, s3 ↦ t1 }
  ∧ r4 = { s1 ↦ t1, s2 ↦ t2, s3 ↦ t1, s1 ↦ t2 }
  ∧ r5 = { s1 ↦ t1, s2 ↦ t2, s3 ↦ t1, s4 ↦ t3 }
END

```

Indiquez la classe la plus spécifique à laquelle r1, r2, r3, r4 et r5 appartiennent.

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$
r1									
r2									
r3									
r4									
r5									

Solution:

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \nrightarrow T$	$S \rightarrow T$
r1		X							
r2			X						
r3								X	
r4	X								
r5							X		

7. (21 pts) Soit les définitions suivantes, dans le style du devoir 3 :

MACHINE Q7
SETS

```
Cours = {c1,c2,c3,c4,c5}
; Etudiant = {e1,e2,e3,e4}
; Salle = {s1,s2,s3,s4}
; Plage = {p1,p2,p3,p4}
; Prof = {m1,m2}
```

CONSTANTS

```
Inscrit      /* x ↦ y ∈ Inscrit ⇔ l'étudiant x est inscrit au cours y */
, Prealable  /* x ↦ y ∈ Prealable ⇔ le cours x est préalable au cours y */
, Horaire    /* x ↦ (y ↦ z) ∈ Horaire ⇔ le cours x a lieu dans la salle y
              à la plage horaire z */
, Réussi     /* x ↦ y ∈ Réussi ⇔ l'étudiant x a réussi le cours y */
, Enseigne   /* x ↦ y ∈ Enseigne ⇔ le professeur x enseigne le cours y */

, q1         /* x ↦ y ∈ q1 ⇔ x n'a pas réussi ni n'est inscrit au cours y,
              et x peut s'inscrire au cours y
              car il a réussi tous les préalables de y */
, q2         /* x ∈ q2 ⇔ x est un cours que personne n'a réussi et
              auquel personne n'est inscrit */
, q2_alt
, q3         /* x ↦ y ∈ q3 ⇔ x et y sont inscrits aux mêmes cours */
, q4_alt     /* x ↦ y ∈ q4 ⇔ x et y sont inscrits à au moins un cours
              ensemble */
, q5         /* x ∈ q5 ⇔ x est inscrit à au moins deux cours qui se donnent
              à la même plage horaire */
, q6_alt     /* x ↦ y ∈ q6 ⇔ x n'est inscrit à aucun cours donné par
              le professeur y */
```

PROPERTIES

```
Inscrit = { e1↦c3, e1↦c4, e2↦c3, e2↦c4, e3↦c1, e4↦c2, e4↦c1 }
^ Prealable = {c1↦c3, c2↦c3, c3↦c4}
^ Horaire = { c1↦(s1↦p1), c2↦(s1↦p2), c3↦(s2↦p1), c4↦(s3↦p1) }
^ Réussi = { e1↦c1, e1↦c2, e2↦c1, e2↦c2, e3↦c3 }
^ Enseigne = { m1↦c1, m2↦c2, m2↦c3 }

^ q1 = {e1↦c5, e2↦c5, e3↦c2, e3↦c4, e3↦c5, e4↦c5}
^ q2 = {c5}
^ q2_alt = {c5}
^ q3 = {e1↦e2, e2↦e1}
^ q4_alt = {e1↦e2, e2↦e1, e3↦e4, e4↦e3}
^ q5 = {e1, e2}
^ q6_alt = { e1↦m1, e2↦m1, e3↦m2 }
```

Définissez par compréhension les ensembles ou relations $q1$, $q2$, $q3$, et $q5$, en utilisant seulement les opérateurs de la logique, \in et \mapsto .

Définissez $q2_alt$, $q4_alt$, et $q6_alt$ en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

Répondez dans le cahier réponse.

Solution: Voir fichier q7.mch

Fin de l'examen