

Université de Sherbrooke  
Département d'informatique

**MAT115 : Logique et mathématiques discrètes**

**Examen périodique**

Professeur : Marc Frappier

Samedi 22 octobre 2022, 9h à 12h

**Notes importantes :**

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet lorsque demandé, ou dans le cahier de réponse.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 7.

**Pondération :**

Question	Point	Résultat
1	21	
2	15	
3	10	
4	14	
5	11	
6	4	
7	21	
total	96	

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_

Signature : \_\_\_\_\_ CIP : \_\_\_\_\_

1. (21 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

(a)  $\vdash (((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$

**Solution:**

$$\frac{\frac{\frac{((p \rightarrow q) \wedge \neg q)^{(1)}}{(p \rightarrow q)} (E \wedge) \quad p^{(2)}}{q} (E \rightarrow) \quad \frac{((p \rightarrow q) \wedge \neg q)^{(1)}}{\neg q} (E \wedge) \quad \perp (I \perp)}{\neg p} (I \neg)(2) \quad \frac{}{(((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)} (I \rightarrow)(1)$$

(b)  $\vdash ((\neg a \vee b) \rightarrow \neg(a \wedge \neg b))$

**Solution:**

$$\frac{\frac{\neg a \vee b)^{(1)} \quad \frac{\frac{(a \wedge \neg b)^{(2)}}{a} (E \wedge) \quad \neg a^{(3)} \quad \perp (I \perp)}{\neg(a \wedge \neg b)} (I \neg)(2) \quad \frac{b^{(4)} \quad \frac{(a \wedge \neg b)^{(2)}}{\neg b} (E \wedge) \quad \perp (I \perp)}{\neg a \vee b)^{(3)(4)} (E \vee)(3)(4)} (I \rightarrow)(1)$$

(c)  $\vdash (((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)) \rightarrow (\neg a \rightarrow c))$

**Solution:**

$$\frac{\frac{((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c))^{(1)} \quad \frac{\frac{(a \wedge b)^{(3)}}{a} (E \wedge) \quad \neg a^{(2)} \quad \perp (I \perp)}{c} (E \perp) \quad \frac{(\neg a \wedge c)^{(4)}}{c} (E \wedge) \quad \perp (I \perp)}{\neg a \rightarrow c} (I \rightarrow)(2) \quad \frac{}{(((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)) \rightarrow (\neg a \rightarrow c))} (I \rightarrow)(1)$$

2. (15 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

**Solution:** Voir q2.json

- (a) Il existe une ligne où sont situés tous les petits pentagones, et cette ligne contient un grand carré.
- (b) Deux objets de même taille sont sur la même ligne.
- (c) Une condition suffisante pour que les carrés soient tous de la même taille est qu'il existe un pentagone.
- (d) Il existe un pentagone si, et seulement si, tous les carrés sont à gauche des petits triangles.
- (e) Le plus petit objet est un carré, situé à la gauche de tous les autres objets.

3. (10 pts) Considérez les trois formules suivantes :

$$\neg A \vee B \quad (1)$$

$$\neg A \Leftrightarrow C \quad (2)$$

$$\neg B \wedge C \quad (3)$$

(a) Donnez la table de vérité de ces trois formules, en remplissant le tableau ci-dessous.

**Solution:**

no	A	B	C	$\neg$	A	$\vee$	B	$\neg$	A	$\Leftrightarrow$	C	$\neg$	B	$\wedge$	C
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
4	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
5	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
6	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
8	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

**Solution:** Oui, la ligne 2 seulement.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

**Solution:** Non, à cause des lignes 4,5,7: dans ces lignes, (1) et (2) sont vraies, mais (3) est fausse.

(d) Est-ce que ces trois formules sont cohérentes? Justifiez.

**Solution:** Oui, la ligne 2 est un modèle pour les trois formules.

4. (14 pts) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

- (a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \neg(B \vee C)$$

$$\begin{aligned} & \neg(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \neg(B \vee C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-22 >} \\ & \neg\neg(A \Leftrightarrow B) \vee \neg(B \vee C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-21 >} \\ & (A \Leftrightarrow B) \vee \neg(B \vee C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-41 >} \\ & ((A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)) \vee \neg(B \vee C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-18 2 fois >} \\ & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

**Solution:**

- (b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow C)$$

$$\begin{aligned} & \neg(A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-41 >} \\ & \neg((A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)) \wedge \neg(B \Rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-18 >} \\ & (\neg(A \wedge B) \wedge \neg\neg(A \vee B)) \wedge \neg(B \Rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-21 >} \\ & (\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)) \wedge \neg(B \Rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-17 >} \\ & ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)) \wedge \neg(B \Rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & \text{ < LP-25 >} \\ & (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge B \wedge \neg C \end{aligned}$$

**Solution:**

5. (11 pts) Soit les définitions suivantes :

```

MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t2), (s1,t1), (s2,t2), (s3,t3)}
  ∧ r2 = {(t1,u3), (t2,u3), (t2,u1), (t3,u1)}
  ∧ r3 = {(s1,s3), (s2,s4), (s3,s1), (s3,s2), (s4,s1)}
  ∧ r4 = (r1;r2)
  ∧ r5 = {s1} ◁ r1
  ∧ r6 = r1 ▷ {t1}
  ∧ r7 = r1 ▷ {t1}
  ∧ r8 = closure1(r3) ▷ {s4}
  ∧ r9 = (r1-1;r3)
  ∧ r10 = r1 <+ {s1↦t3}
  ∧ r11 = iterate(r3,2)
  ∧ S1 = T - dom(r1-1)
  ∧ T1 = ran(r1-1) ∩ S
  ∧ T2 = r3[{s1,s2}]
END

```

Donnez la valeur des symboles suivants:

r4, r5, r6, r7, r8, r9, r10, r11, S1, T1, T2.

```

r4 = {(s1|→u1),(s1|→u3),(s2|→u1),(s2|→u3),(s3|→u1)}
r5 = {(s1|→t1),(s1|→t2)}
r6(s1) = t1
r7(s1) = t2
r7(s2) = t2
r7(s3) = t3
r8(s1) = s4
r8(s2) = s4
r8(s3) = s4
r8(s4) = s4
r9 = {(t1|→s3),(t2|→s3),(t2|→s4),(t3|→s1),(t3|→s2)}
r10(s1) = t3
r10(s2) = t2
r10(s3) = t3
r11 = {(s1|→s1),(s1|→s2),(s2|→s1),(s3|→s3),(s3|→s4),(s4|→s3)}
S1 = {}
T1 = {s1,s2,s3}
T2 = {s3,s4}

```

Solution:

6. (4 pts) Répondez dans le questionnaire. Soit les définitions suivantes :

MACHINE Q7

SETS

$S = \{s1, s2, s3\}$   
 $; T = \{t1, t2\}$

CONSTANTS

$r1, r2, r3, r4$

PROPERTIES

$r1 = \{ s1 \mapsto t1, s2 \mapsto t2, s3 \mapsto t2 \}$   
 $\wedge r2 = \{ s1 \mapsto t1, s1 \mapsto t2, s3 \mapsto t1 \}$   
 $\wedge r3 = \{ s1 \mapsto t1, s2 \mapsto t2 \}$   
 $\wedge r4 = \{ s1 \mapsto t1, s3 \mapsto t1 \}$   
 END

Indiquez la classe la plus spécifique à laquelle  $r1, r2, r3$  et  $r4$  appartiennent

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$
r1									
r2									
r3									
r4									

**Solution:**

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$
r1							X		
r2	X								
r3								X	
r4		X							

7. (21 pts) Soit les définitions suivantes, dans le style du devoir 3 :

```

MACHINE Q6
SETS
  Livre = {l1,l2,l3,l4}
; Membre = {m1,m2,m3,m4}
; Personne = {p1,p2,p3,p4}
CONSTANTS
  Auteur /* x ↦ y ∈ Auteur ⇔ la personne y est l'auteur du livre x */
, Pret  /* x ↦ y ∈ Pret   ⇔ le membre y a emprunté le livre x */
, q1    /* x ↦ y ∈ q1     ⇔ le membre x a lu un livre de l'auteur y */
, q1_alt
, q2    /* x ∈ q2         ⇔ x est un livre que le membre m1 a lu,
                               mais que le membre m2 n'a pas lu */
, q2_alt
, q3    /* x ↦ y ∈ q3     ⇔ le membre x a lu tous les livres que le membre y a lu */
, q4    /* x ↦ y ∈ q4     ⇔ les auteurs x et y ont au moins un lecteur en commun */
, q4_alt
PROPERTIES
  Auteur = { l1 ↦ p1, l1 ↦ p2, l2 ↦ p2, l3 ↦ p3, l4 ↦ p4 }
∧ Pret = { l1 ↦ m1, l2 ↦ m1, l3 ↦ m1, l3 ↦ m2, l2 ↦ m2, l4 ↦ m4 }

```

Définissez par compréhension les ensembles ou relations  $q1$ ,  $q2$ ,  $q3$ , et  $q4$  , en utilisant seulement les opérateurs de la logique,  $\in$  et  $\mapsto$ .

Définissez  $q1\_alt$ ,  $q2\_alt$ , et  $q4\_alt$  qui contiennent les mêmes éléments que  $q1$ ,  $q2$ , et  $q4$  , respectivement, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles.

Voici un exemple des valeurs de ces ensembles ou relations, pour les valeurs données en exemple pour Livre, Membre, Personne, Auteur et Prêt.

$q1 = \{m1 \mapsto p1, m1 \mapsto p2, m1 \mapsto p3, m2 \mapsto p2, m2 \mapsto p3, m4 \mapsto p4\}$

$q2 = \{l1\}$

$q3 = \{m1 \mapsto m2, m1 \mapsto m3, m2 \mapsto m3, m4 \mapsto m3\}$

$q4 = \{p1 \mapsto p2, p1 \mapsto p3, p2 \mapsto p1, p2 \mapsto p3, p3 \mapsto p1, p3 \mapsto p2\}$

**Solution:** Voir fichier q6.mch

Fin de l'examen