

Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Samedi 14 octobre 2023, 9h à 12h

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet lorsque demandé, ou dans le cahier de réponse.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
 - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
 - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
 - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
 - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 7.

Pondération :

Question	Point	Résultat
1	21	
2	20	
3	10	
4	14	
5	11	
6	4	
7	21	
total	101	

Nom : _____ Prénom : _____

Signature : _____ CIP : _____

1. (21 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée. **Répondez dans le cahier réponse.**

(a) $\vdash (((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c})) \rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}))$

Solution:

$$\frac{\frac{\frac{((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (E \wedge) \quad \frac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{c})} (I \vee) \quad \frac{\frac{\frac{((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c})} (E \wedge) \quad \mathbf{b}^{(3)}}{\mathbf{c}} (E \rightarrow) (I \vee)}{(\mathbf{a} \vee \mathbf{c})} (E \vee) (2)(3)}{(((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c})) \rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}))} (I \rightarrow) (1)$$

(b) $\vdash ((\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \rightarrow \neg (\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{b}))$

Solution:

$$\frac{\frac{(\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{b})^{(2)} \quad \mathbf{a}^{(3)} \quad \frac{(\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{(1)}}{\neg \mathbf{a}} (E \wedge) (I \perp)}{\perp} \quad \frac{\frac{(\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{(1)}}{\mathbf{b}} (E \wedge) \quad \neg \mathbf{b}^{(4)}}{\perp} (I \perp) (E \vee) (3)(4)}{\neg (\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{b})} (I \neg) (2)}{((\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \rightarrow \neg (\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{b}))} (I \rightarrow) (1)$$

(c) $\vdash (\neg (\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \rightarrow \neg (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}))$

Solution:

$$\frac{\frac{(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(2)} \quad \frac{\mathbf{a}^{(3)} \quad \neg \mathbf{a}^{(5)}}{\perp} (I \perp)}{\mathbf{b}} (E \perp) \quad \frac{\mathbf{b}^{(4)}}{(\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b})} (I \rightarrow) (6)}{(\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b})} (E \vee) (3)(4)}{\neg (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})} (I \neg) (2)}{(\neg (\neg \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \rightarrow \neg (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}))} (I \rightarrow) (1)$$

2. (20 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski. **Répondez dans le cahier réponse.**

Solution: Voir q2.json

- (a) Il existe un carré situé entre deux pentagones situés sur la même ligne, et entre deux triangles situés sur la même colonne.
- (b) Les triangles sont à gauche des carrés si, et seulement si, tous les pentagones sont petits.
- (c) Une condition suffisante pour que les pentagones soient plus petits que les carrés est que les carrés sont grands.
- (d) Une seule des deux propositions suivantes est vraie : (i) Soit les carrés sont grands, (ii) soit les pentagones sont petits.
- (e) Il existe un objet plus grand que les autres et ce n'est pas un carré.

3. (10 pts) Considérez les trois formules suivantes :

$$A \Rightarrow \neg B \quad (1)$$

$$B \Leftrightarrow \neg C \quad (2)$$

$$\neg(A \vee B) \quad (3)$$

- (a) Donnez la table de vérité de ces trois formules, en remplissant le tableau ci-dessous.

no	A	B	C		A	\Rightarrow	\neg	B		B	\Leftrightarrow	\neg	C		\neg	(A	\vee	B)
1	0	0	0																	
2	0	0	1																	
3	0	1	0																	
4	0	1	1																	
5	1	0	0																	
6	1	0	1																	
7	1	1	0																	
8	1	1	1																	

Solution:

no	A	B	C		A	\Rightarrow	\neg	B		B	\Leftrightarrow	\neg	C		\neg	(A	\vee	B)		Modèle
1	0	0	0		0	1	1	0		0	0	1	0		1		0	0	0			0
2	0	0	1		0	1	1	0		0	1	0	1		1		0	0	0			1
3	0	1	0		0	1	0	1		1	1	1	0		0		0	1	1			0
4	0	1	1		0	1	0	1		1	0	0	1		0		0	1	1			0
5	1	0	0		1	1	1	0		0	0	1	0		0		1	1	0			0
6	1	0	1		1	1	1	0		0	1	0	1		0		1	1	0			0
7	1	1	0		1	0	0	1		1	1	1	0		0		1	1	1			0
8	1	1	1		1	0	0	1		1	0	0	1		0		1	1	1			0

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 2 seulement.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

Solution: Non, à cause des lignes 3 et 6 : dans ces lignes, (1) et (2) sont vraies, mais (3) est fausse.

(d) Est-ce que la formule (1) est une conséquence logique de (3)? Justifiez.

Solution: Oui, car lorsque (3) est vraie (lignes 1 et 2), alors (1) est vraie.

(e) Est-ce que les formules (1) et (2) sont équivalentes? Justifiez.

Solution: Non, car leurs valeurs de vérité diffèrent pour les lignes 1, 4, 5, 7.

4. (14 pts) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple. **Répondez dans le cahier réponse.**

(a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$(A \Rightarrow \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$$

Solution: Voir q4a.txt

(b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$A \wedge B \Rightarrow C \vee D$$

Solution: Voir q4b.txt

5. (11 pts) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t2), (s1,t3), (s2,t1), (s3,t1)}
  r2 = {(t1,u1), (t2,u2), (t2,u3), (t3,u3)}
  r3 = {(s1,s1), (s2,s3), (s3,s4), (s4,s1), (s4,s2)}
  r4 = (r1;r2)
  r5 = {s1} < r1
  r6 = r1 > {t1}
  r7 = r1 > {t1}
  r8 = closure1(r3) > {s4}
  r9 = (r1-1;r3)
  r10 = r1 <+ {s1↦t3}
  r11 = iterate(r3,2)
  S1 = T - dom(r1-1)
  T1 = ran(r1-1) ∩ S
  T2 = r3[{s1,s2}]
END
```

Donnez la valeur des symboles suivants:

r4,	
r5,	
r6,	
r7,	

r8,	
r9,	
r10,	
r11,	
S1,	
T1,	
T2.	

Solution: Voir q5-sol.txt

6. (4 pts) Répondez dans le questionnaire. Soit les définitions suivantes :

MACHINE Q6

SETS

$S = \{s1, s2, s3\}$

; $T = \{t1, t2, t3\}$

CONSTANTS

$r1, r2, r3, r4$

PROPERTIES

$r1 = \{ s1 \mapsto t1, s2 \mapsto t2, s3 \mapsto t3 \}$

$\wedge r2 = \{ s1 \mapsto t1, s1 \mapsto t2, s3 \mapsto t1 \}$

$\wedge r3 = \{ s1 \mapsto t1, s2 \mapsto t2, s2 \mapsto t2 \}$

$\wedge r4 = \{ s1 \mapsto t1, s2 \mapsto t2, s3 \mapsto t1 \}$

END

Indiquez la classe la plus spécifique à laquelle $r1$, $r2$, $r3$ et $r4$ appartiennent.

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \rightarrow T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$	$S \mapsto T$
r1									
r2									
r3									
r4									

Solution:

Symbol	$S \leftrightarrow T$	$S \leftrightarrowdot T$	$S \rightarrow T$	$S \rightarrowdot T$	$S \rightharpoonup T$	$S \nrightarrow T$	$S \twoheadrightarrow T$	$S \twoheadrightarrowdot T$	$S \rightharpoonupdot T$
r1									X
r2	X								
r3				X					
r4			X						

7. (21 pts) Soit les définitions suivantes, dans le style du devoir 3 :

```

MACHINE Q7
SETS

    Livre = {l1,l2,l3,l4}
    ; Membre = {m1,m2,m3,m4}
    ; Personne = {p1,p2,p3,p4}

CONSTANTS

    Auteur /* x ↦ y ∈ Auteur ⇔ la personne y est l'auteur du livre x */
    , Pret /* x ↦ y ∈ Pret ⇔ le membre y a emprunté le livre x */
    , q1 /* x ↦ y ∈ q1 ⇔ les livres distincts x et y ont au moins un auteur en commun */
    , q1_alt
    , q2 /* x ∈ q2 ⇔ x est un livre que personne n'a lu */
    , q2_alt
    , q3 /* x ↦ y ∈ q3 ⇔ les livres x et y ont exactement les mêmes auteurs */
    , q4 /* x ↦ y ∈ q4 ⇔ il existe au moins un auteur que les membres x et y ont lu */
    , q4_alt

PROPERTIES

    Auteur = { l1 ↦ p2, l2 ↦ p1, l2 ↦ p2, l3 ↦ p1, l3 ↦ p2, l4 ↦ p1 }

    ∧ Pret = { l1 ↦ m1, l2 ↦ m1, l3 ↦ m1, l3 ↦ m2, l2 ↦ m2, l3 ↦ m4 }

    /* Valeur de q1, q2, q3 et q4 pour ces valeurs de Auteur et Pret */
    ∧ q1 = {l1↦l2, l1↦l3, l2↦l1, l2↦l3, l2↦l4, l3↦l1, l3↦l2, l3↦l4, l4↦l2, l4↦l3}

    ∧ q2 = {l4}

    ∧ q3 = {l2↦l3, l3↦l2}

    ∧ q4 = {m1↦m2, m1↦m4, m2↦m1, m2↦m4, m4↦m1, m4↦m2}

```

Définissez par compréhension les ensembles ou relations **q1**, **q2**, **q3**, et **q4** , en utilisant seulement les opérateurs de la logique, \in et \mapsto .

Définissez **q1_alt**, **q2_alt**, et **q4_alt** qui contiennent les mêmes éléments que **q1**, **q2**, et **q4**, respectivement, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles. **Répondez dans le cahier réponse.**

Solution: Voir fichier q7.mch

Fin de l'examen