

Université de Sherbrooke  
Département d'informatique

**MAT115 : Logique et mathématiques discrètes**

**Examen périodique**

Professeur : Marc Frappier

Jeudi 11 octobre 2018, 15 h 30 à 18 h 20.

**Notes importantes :**

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 11.

**Pondération :**

Question	Point
1	30
2	15
3	10
4	10
5	15
6	20
total	100

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_

Signature : \_\_\_\_\_ Matricule : \_\_\_\_\_

1. (30 pts) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

(a)  $\vdash (((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{c})$

(b)  $\vdash ((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \Rightarrow \neg(\neg\mathbf{a} \wedge \neg\mathbf{b}))$

(c)  $\vdash (\neg(\neg\mathbf{a} \wedge \neg\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}))$

A large empty rectangular box, likely intended for a proof or derivation. It is a simple rectangle with a thin black border, occupying the central portion of the page below the problem statement.

2. (15 pts) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

(a) Il existe un triangle plus grand que tous les carrés.


(b) Si un carré est à la gauche d'un triangle grand, sur la même ligne, alors le carré est petit.


(c) Une condition suffisante pour que les triangles soient grands est que les carrés soient grands.


(d) Une condition nécessaire pour que les carrés soient grands est que les triangles soient grands.


(e) Il existe exactement un carré, et il est plus grand que tous les autres objets.


3. (10 pts) Considérez les formules suivantes :

$$\neg(X_3 \Leftrightarrow X_1) \wedge (X_2 \vee \neg X_3) \quad (1)$$

$$\neg X_2 \Rightarrow \neg X_1 \quad (2)$$

(a) Donnez la table de vérité de ces deux formules.

no	X1	X2	X3		$\neg$ (	X3	$\Leftrightarrow$	X1)	$\wedge$	(X2	$\vee$	$\neg$	X3)		$\neg$	X2	$\Rightarrow$	$\neg$	X1
1	0	0	0																
2	0	0	1																
3	0	1	0																
4	0	1	1																
5	1	0	0																
6	1	0	1																
7	1	1	0																
8	1	1	1																

(b) Existe-t-il un modèle pour ces deux formules? Justifiez.


(c) Est-ce que la formule (2) est une conséquence logique de (1)? Justifiez.


(d) Est-ce que ces deux formules sont cohérentes? Justifiez.

4. (**10 pts**) Pour les deux sous-questions suivantes, prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Justifiez chaque étape de votre preuve par une loi. Pour raccourcir la preuve, vous pouvez invoquer la même loi plusieurs fois dans une même étape. Vous pouvez aussi invoquer commutativité et associativité en même temps qu'une autre loi dans une étape. Donnez la formule la plus simple.

(a) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive.

$$\neg(X_1 \vee (X_2 \Rightarrow \neg X_3)) \Rightarrow \neg(X_1 \wedge X_2)$$

(b) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive.

$$(X_1 \vee \neg X_2) \Rightarrow \neg(X_2 \Rightarrow \neg X_3)$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no text or other markings on the paper.

5. (15 pts) Soit les définitions suivantes :

```
MACHINE q5
SETS S={s1,s2,s3,s4} ; T={t1,t2,t3} ; U={u1,u2,u3}
CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2
PROPERTIES
  r1 = {(s1,t2), (s2,t2), (s3,t2), (s4,t2)}
& r2 = {(t1,u3), (t2,u3), (t3,u3)}
& r3 = {(s1,s2), (s2,s3), (s3,s1)}
& r4 = (r1;r2)
& r5 = {s1}<|r1
& r6 = r1|>{t1}
& r7 = r1|>>{t1}
& r8 = closure1(r3) |> {s4}
& r9 = (r1~;r3)
& r10 = r1 <+ {s1|->t3}
& r11 = iterate(r3,3)
& S1 = dom(r1)
& T1 = ran(r1)
& T2 = r1[{s2}]
END
```



Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a)  $r_4$

(b)  $r_5$

(c)  $r_6$

(d)  $r_7$

(e)  $r_8$

(f)  $r_9$

(g)  $r_{10}$

(h)  $r_{11}$

(i)  $s_1$

(j)  $t_1$

(k)  $t_2$

6. (20 pts) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3 :

MACHINE q6

SETS

Personne={h1,h2,h3,h4,f1,f2,f3}

CONSTANTS

Homme,Femme,Parent,BeauFrere,BeauFrere\_alt

PROPERTIES

Homme={h1,h2,h3,h4}

& Femme=Personne-Homme

& Parent = {(h1,f1),(h1,f3),(h2,f2),(f1,f2),(f3,h4),(h3,h4)}

- 
- This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

- [illegible]