Prof. Dr. J. Giesl
D. Cloerkes, S. Dollase, N. Lommen, D. Meier, F. Meyer

Aufgabe 4 (Datenstrukturen): (4+4+4+10+4+10+9+10+10 = 65 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Binärbaume, deren innere Knoten einzelne Werte eines Typs `a` speichern, während die Blätter jeweils einen Wert des Typs `b` speichern. Als Beispiel betrachten wir den Baum in Abbildung 1.
Sie dürfen jederzeit Hilfsfunktionen aus vorherigen Teilaufgaben verwenden, auch wenn Sie diese nicht selbst implementiert haben.

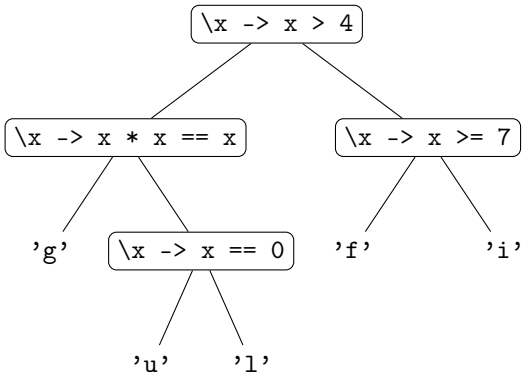

Abbildung 1: Ein beispielhafter Binärbaum.

Der Beispielbaum hat fünf Blätter mit den Zeichen `'g'`, `'u'`, `'l'`, `'f'`, `'i'` vom Typ `Char` und vier weiteren inneren Knoten, die eine einstellige Funktion vom Typ `Int -> Bool` enthalten.
Schreiben Sie zu jeder der im Folgenden zu implementierenden Funktionen auch eine Typdeklaration. Beachten Sie, dass auch die Wurzel eines Baums als innerer Knoten gilt.

a) Implementieren Sie in Haskell einen parametrisierten Datentyp `BinTree a b`, mit dem Binärbäume mit Werten vom Datentyp `a` in den inneren Knoten und mit Werten vom Datentyp `b` in den Blättern dargestellt werden können. Dabei soll sichergestellt werden, dass jeder innere Knoten genau zwei Nachfolger hat.

Hinweise:

- Ergänzen Sie `deriving Show` am Ende der Datentyp-Deklaration, damit `GHCi` die Bäume auf der Konsole anzeigen kann.

b) Definieren Sie den Beispielbaum aus Abb. 1 als `example`:

```
example :: BinTree (Int -> Bool) Char
example = ...
```

Hinweise:

- Importieren Sie das zusätzliche Modul `Text.Show.Functions` durch Einfügen der Zeile `import Text.Show.Functions` am Anfang ihrer Datei, damit `GHCi` auch Bäume wie in Abb. 1 auf der Konsole anzeigen kann, welche Funktionen enthalten.

c) Schreiben Sie die Funktion `countInnerNodes`, die einen Binärbaum vom Typ `BinTree a b` übergeben bekommt und die Anzahl der inneren Knoten als `Int` zurückgibt, d.h. die Anzahl der Knoten, die keine Blätter sind.

Für den Beispielbaum `example` soll der Aufruf `countInnerNodes example` also zu `4` auswerten.

d) Schreiben Sie die Funktion `decodeInt`. Diese bekommt als erstes Argument einen Binärbaum vom Typ `BinTree (Int -> Bool) b` und als zweites Argument einen Wert vom Typ `Int`. Der Rückgabewert dieser Funktion ist vom Typ `b`. Für einen Baum `bt` und eine Zahl `x` gibt `decodeInt bt x` das Zeichen zurück, an das man gelangt, wenn man ausgehend von der Wurzel in jedem inneren Knoten die Funktion vom Typ `Int -> Bool` des jeweiligen Knotens auf die Zahl `x` anwendet, wobei das linke Kind eines Knotens als Nachfolger gewählt wird, falls die Funktion zu `False` auswertet, und das rechte Kind gewählt wird, falls sie zu `True` auswertet. Wird `decodeInt` auf einem Blatt aufgerufen, wird dessen Wert zurückgegeben.

Für den Beispielbaum `example` soll der Aufruf `decodeInt example 0` also `'l'` zurückgeben.

e) Schreiben Sie die Funktion `decode`. Diese bekommt als erstes Argument einen Binärbaum vom Typ `BinTree (Int -> Bool) b` und als zweites Argument eine Liste vom Typ `[Int]` übergeben. Für einen Baum `bt` und eine Liste `xs` sucht `decode bt xs` zu jeder Zahl `x` aus der Liste `xs` den Wert `decodeInt bt x` und fügt die so erhaltenen Werte in einer Liste zusammen.

Für den Beispielbaum `example` soll der Aufruf `decode example [0,1,5,-4,7]` also den `String` `"lufgi"` zurückgeben.

f) Implementieren Sie eine Funktion `insertSorted`. Diese enthält als erstes Argument einen binären Suchbaum `bt` vom Typ `BinTree Int ()` und als zweites Argument eine Zahl vom Typ `Int`. Ein binärer Suchbaum ist ein Binärbaum, sodass für jeden inneren Knoten gilt, dass alle im linken Teilbaum gespeicherten Werte vom Typ `Int` echt kleiner sind als das im Knoten selbst gespeicherte Element, während alle im rechten Teilbaum gespeicherten Werte vom Typ `Int` nicht kleiner sind als der im Knoten selbst gespeicherte Wert. Der Typ `()` ist der Typ des leeren Tupels mit dem einzigen Wert `()::()` und dient hier dazu, zu verhindern, dass Werte vom Typ `Int` auch in den Blättern gespeichert werden. Ein binärer Suchbaum speichert also die in ihm enthaltenen Werte nur in den inneren Knoten, nicht jedoch in den Blättern. Der Aufruf `insertSorted bt x` soll nun den binären Suchbaum berechnen, welcher durch Einfügen des Werts `x` als neuen inneren Knoten aus `bt` entsteht.

Ein solcher binärer Suchbaum `bt` und das Ergebnis des Aufrufs `insertSorted bt 3` sind in Abb. 2 dargestellt.

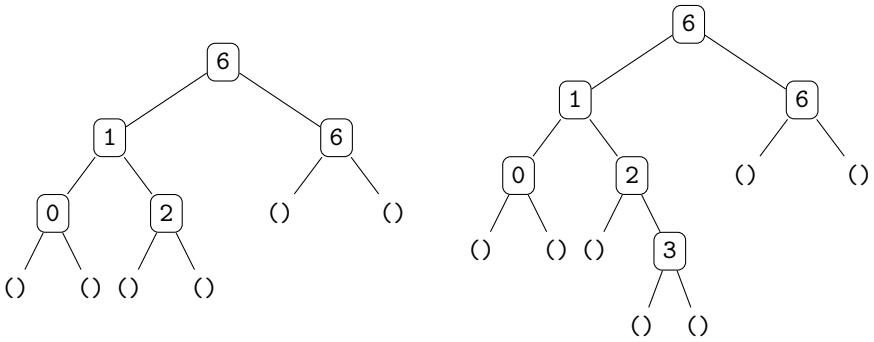

Abbildung 2: Ein binärer Suchbaum `bt` (links), welcher die Zahlen `0,1,2,6,6` speichert und das Ergebnis des Aufrufs `insertSorted bt 3` (rechts).

g) Schreiben Sie eine Funktion `treeSort`, welche eine Liste vom Typ `[Int]` durch geeignete Aufrufe der Funktion `insertSorted` sortiert.

Der Aufruf `treeSort [3,2,1,3,4,5]` soll zu der Liste `[1,2,3,3,4,5]::[Int]` auswerten.

h) Schreiben Sie eine Funktion `mergeTrees`, welche zwei binäre Suchbäume `bt1` und `bt2` vom Typ `BinTree Int ()` als Argumente erhält. Der Rückgabewert von `mergeTrees` ist ein binärer Suchbaum, welcher alle in `bt1` und `bt2` enthaltenen Werte speichert. Ist ein Wert `x` dabei n_1 mal in `bt1` und n_2 mal in `bt2` enthalten, so soll der Wert `x` anschließend $n_1 + n_2$ mal in dem Ergebnis des Aufrufs `mergeTrees bt1 bt2` enthalten sein.

Abb. 3 stellt zwei Suchbäume `bt1` und `bt2` sowie ein mögliches Ergebnis des Aufrufs `mergeTrees bt1 bt2` dar.

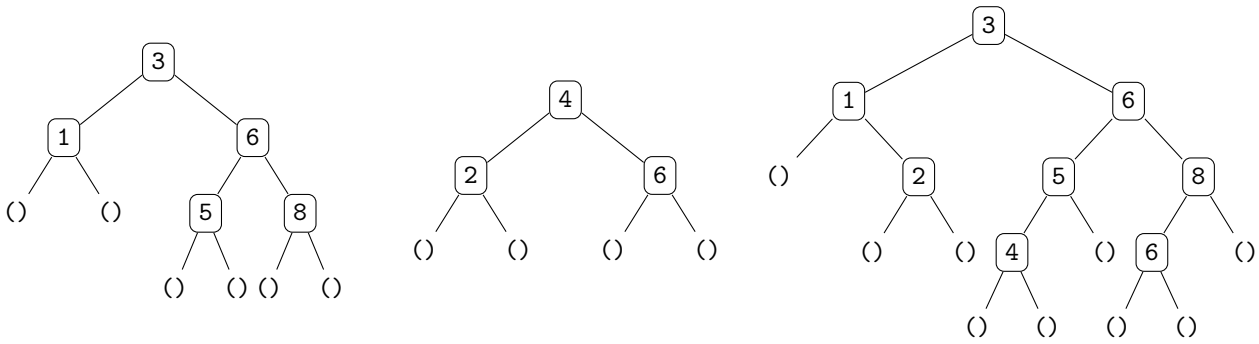

Abbildung 3: Ein Suchbaum `bt1` vom Typ `BinTree Int ()` (links), ein weiterer Suchbaum `bt2` vom Typ `BinTree Int ()` (Mitte) und ein mögliches Ergebnis des Aufrufs `mergeTrees bt1 bt2` (rechts).

Hinweise:

- Benutzen Sie die Funktion `insertSorted` aus Aufgabenteil f).

i) Implementieren Sie eine Funktion `numberOfOccurrences`, welche einen binären Suchbaum `bt` vom Typ `BinTree Int ()` als erstes Argument und einen Wert `x` vom Typ `Int` als zweites Argument erhält. Die Funktion berechnet dann die Anzahl der Vorkommen des Werts `x` im binären Suchbaum `bt`. Nutzen Sie dabei die Suchbaumeigenschaft von `bt` aus, um eine effiziente Vorgehensweise Ihrer Implementierung sicherzustellen.

Für den Suchbaum `bt` aus Abb. 2 wertet der Aufruf `numberOfOccurrences bt 6` zu `2` aus, da der Wert `6` zweimal im Suchbaum `bt` enthalten ist.

Aufgabe 6 (Typen): (8 + 7 + 9 + 11 = 35 Punkte)

Bestimmen Sie zu den folgenden Haskell-Funktionen `f`, `g`, `h`, `i`, `j` und `k` den jeweils allgemeinsten Typ. Geben Sie den Typ an und begründen Sie Ihre Antwort. Gehen Sie hierbei davon aus, dass alle Zahlen den Typ `Int` haben, die Funktion `+` den Typ `Int -> Int -> Int` hat, die Funktion `head` den Typ `[a] -> a`, und die Funktion `==` den Typ `a -> a -> Bool` hat.

a)
```
f xs     y []     = []
f (x:xs) y (z:zs) = if x then y + z : f xs z zs else z : f xs z zs
```
[bool] Int [Int] [Int] [bool] -> Int -> [Int] -> [Int]
[bool] Int [Int] bool Int Int [bool] Int [Int] Int [bool] Int [Int]

b)
```
g x y = g (head y) y
g x y = (\x y -> x) x x
```
a [a] [a] -> a a -> a a a
a [a] -> a a a a

c)
```
h w x []     z = if x == [] then head z else w x []
h w x (y:ys) z = if w x ys then head z else y
```
a [a] [a] bool [a] -> a a
a [a] -> a a
w a [a] -> bool
w a [] -> a

d)
```
i x y z = x z y
j x = x
k = i j
```
?

Hinweise:

- Versuchen Sie diese Aufgabe ohne Einsatz eines Rechners zu lösen. Bedenken Sie, dass Sie in einer Prüfung ebenfalls keinen Rechner zur Verfügung haben.