Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Lösung - Übung 8

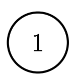
Tutoraufgabe 1 (AVL-Baum):

Führen Sie die folgenden Operationen beginnend mit einem anfangs leeren *AVL-Baum* aus und geben Sie die entstehenden Bäume nach jeder *Einfüge-* und *Löschoperation* sowie jeder *Rotation* an. Markieren Sie außerdem zu jeder Rotation, welcher Knoten in welche Richtung rotiert wird:

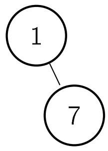
1. 1 einfügen
2. 7 einfügen
3. 6 einfügen
4. 5 einfügen
5. 4 einfügen
6. 3 einfügen
7. 2 einfügen
8. 8 einfügen
9. 10 einfügen
10. 9 einfügen
11. 11 einfügen
12. 1 löschen
13. 3 löschen
14. 2 löschen

Lösung

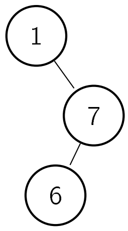
füge 1 ein



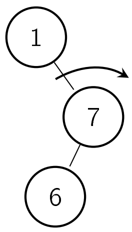
füge 7 ein

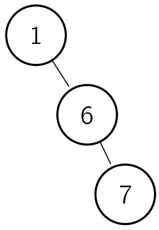


füge 6 ein

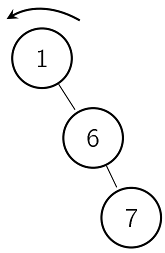


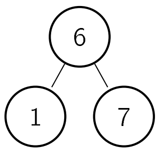
rotiere 7 nach rechts



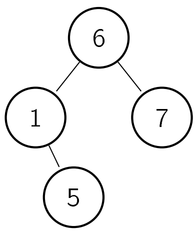


rotiere 1 nach links

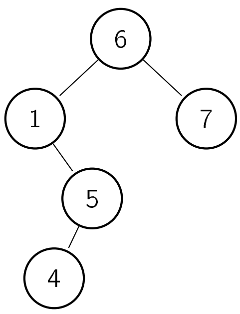




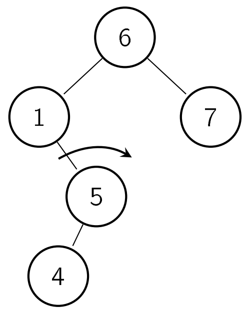
füge 5 ein

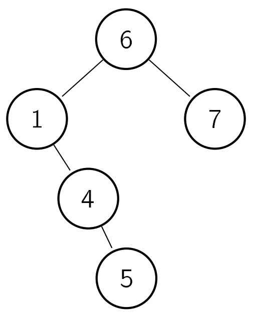


füge 4 ein

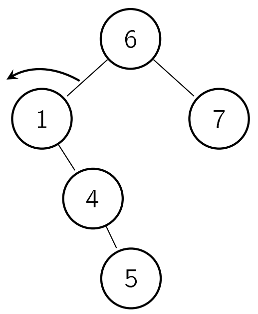


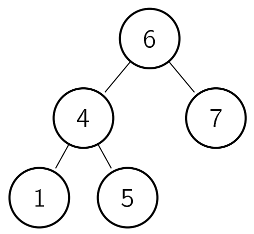
rotiere 5 nach rechts



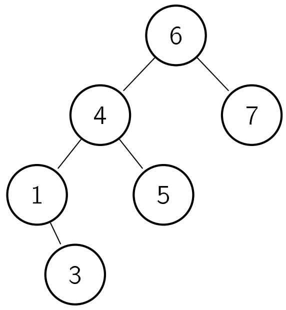


rotiere 1 nach links

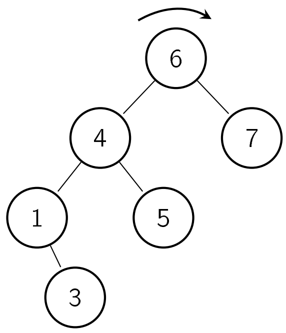


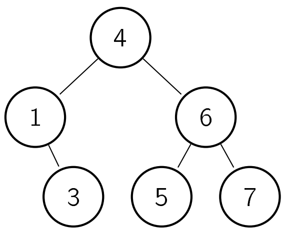


füge 3 ein

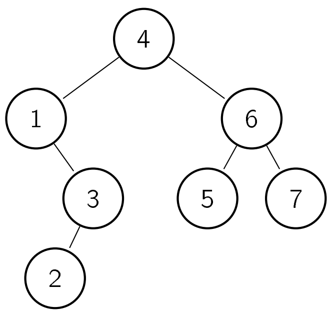


rotiere 6 nach rechts

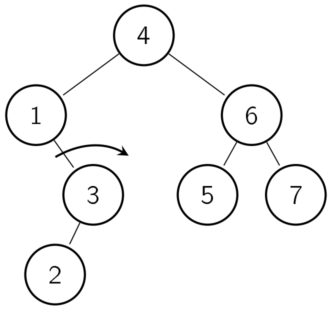


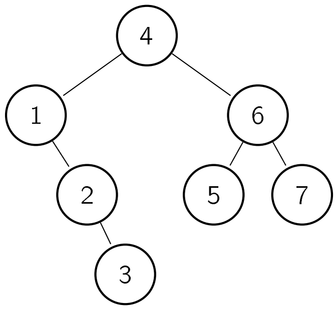


füge 2 ein

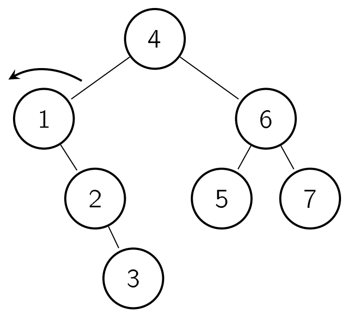


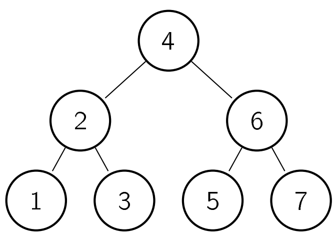
rotiere 3 nach rechts



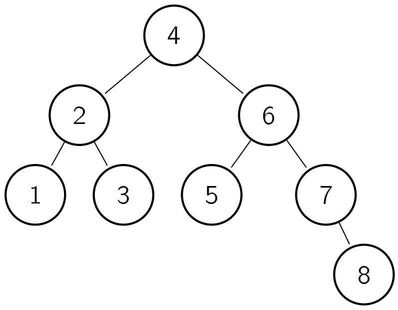


rotiere 1 nach links

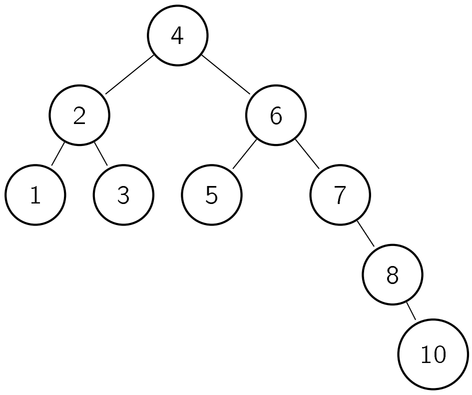




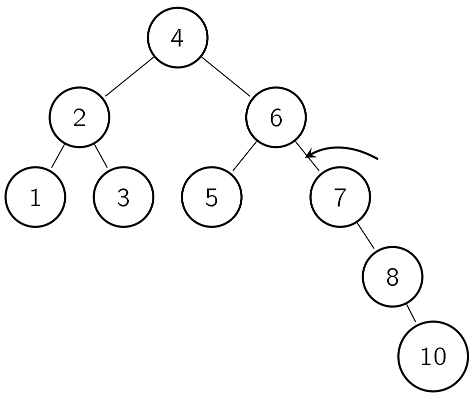
füge 8 ein

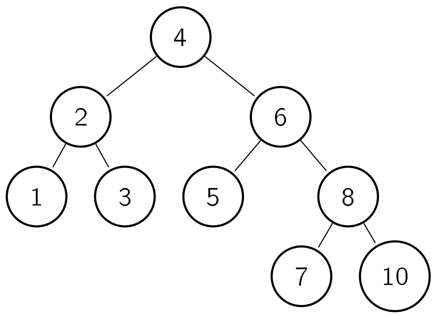


füge 10 ein

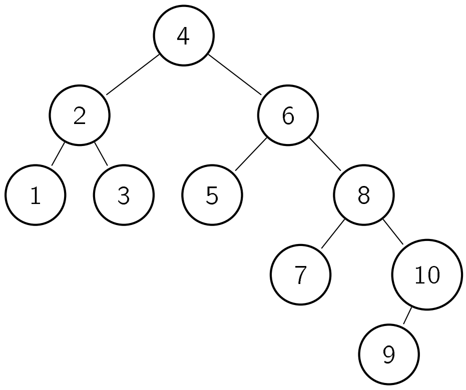


rotiere 7 nach links

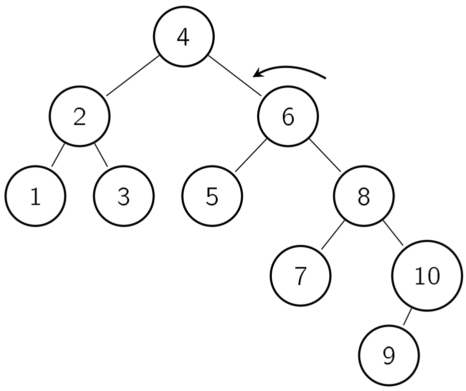


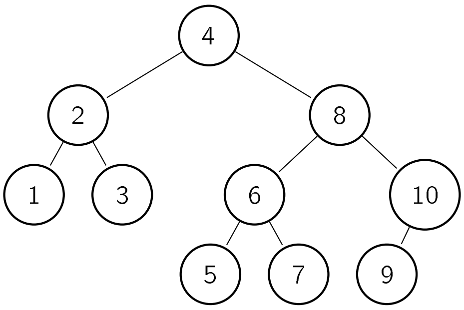


füge 9 ein

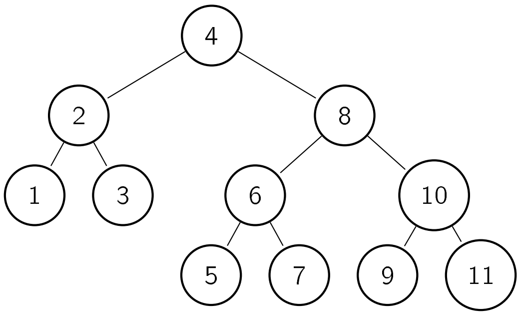


rotiere 6 nach links

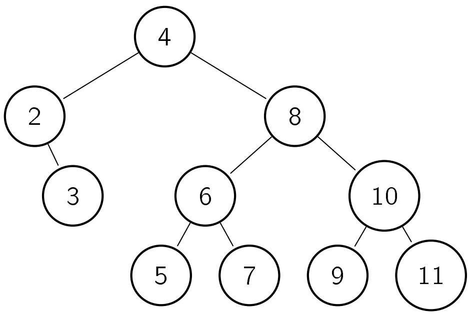




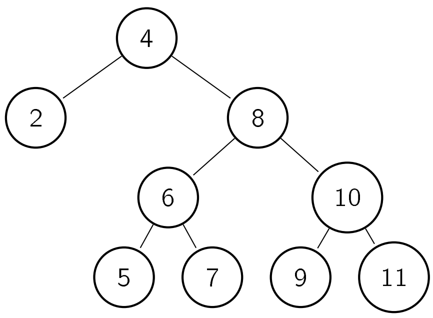
füge 11 ein



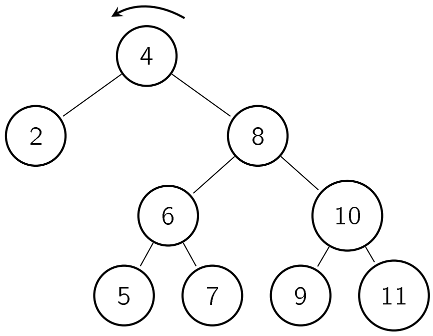
entferne 1

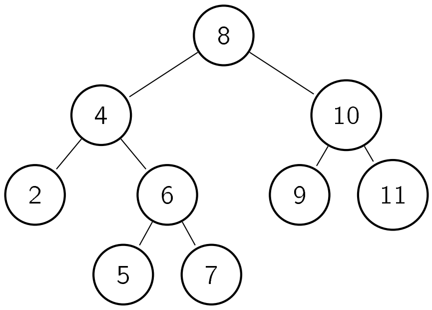


entferne 3

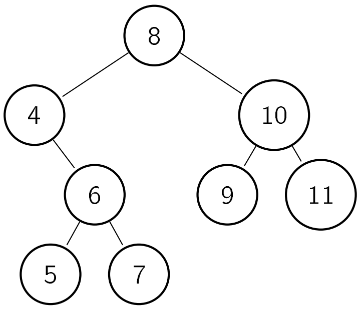


rotiere 4 nach links

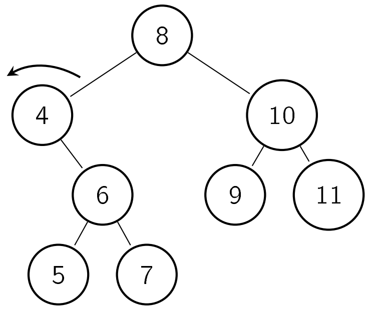


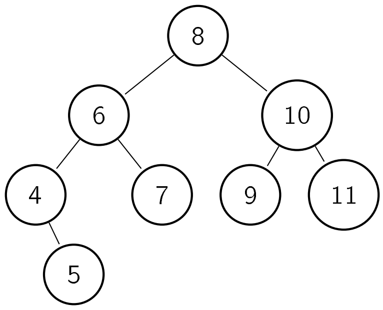


entferne 2



rotiere 4 nach links





Tutoraufgabe 2 (B-Baum):

Führen Sie folgenden Operationen beginnend mit einem anfangs leeren *B-Baum* mit Grad $t = 3$ aus und geben Sie die dabei jeweils entstehenden Bäume an:

1. 1 einfügen
2. 7 einfügen
3. 6 einfügen
4. 5 einfügen
5. 4 einfügen
6. 3 einfügen
7. 2 einfügen
8. 8 einfügen

9. 10 einfügen

10. 9 einfügen

11. 11 einfügen

12. 7 löschen

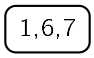
13. 8 löschen

Lösung

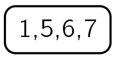
Schritt 1: Füge 1 ein

Schritt 2: Füge 7 ein

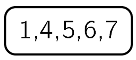
Schritt 3: Füge 6 ein



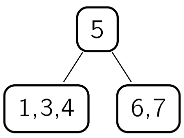
Schritt 4: Füge 5 ein



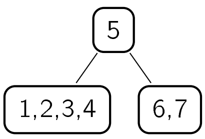
Schritt 5: Füge 4 ein



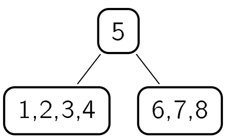
Schritt 6: Füge 3 ein



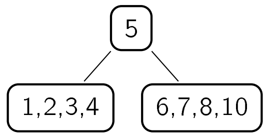
Schritt 7: Füge 2 ein



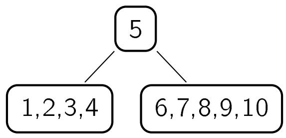
Schritt 8: Füge 8 ein



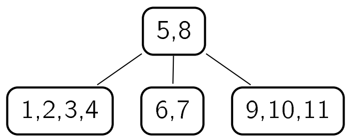
Schritt 9: Füge 10 ein



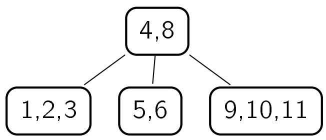
Schritt 10: Füge 9 ein



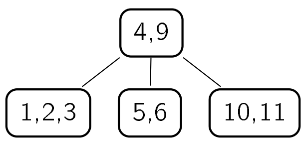
Schritt 11: Füge 11 ein



Schritt 12: Lösche 7



Schritt 13: Lösche 8



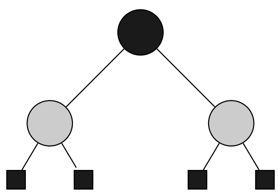
Tutoraufgabe 3 (Rot-Schwarz Bäume – Theorie):

Die Anzahl der schwarzen Knoten auf einem Pfad von der Wurzel eines Rot-Schwarz Baums bis zu einem Blatt (exclusive der Wurzel), ist für einen gegebenen Rot-Schwarz Baum immer dieselbe, unabhängig vom gewählten Pfad. Die Schwarzhöhe eines Rot-Schwarz Baums ist definiert als eben diese Anzahl.

Beweisen Sie (per Induktion) die folgende Aussage:
Ein Rot-Schwarz-Baum der Schwarzhöhe h hat maximal $rot(h) = \frac{2}{3} \cdot 4^h - \frac{2}{3}$ rote Knoten.

Lösung

Beweis durch vollständige Induktion über die Schwarzhöhe h.
Induktionsverankerung für $h = 1$:
Der Rot-Schwarz Baum mit Schwarzhöhe $h = 1$ mit maximaler Anzahl an roten Knoten ist der folgende:

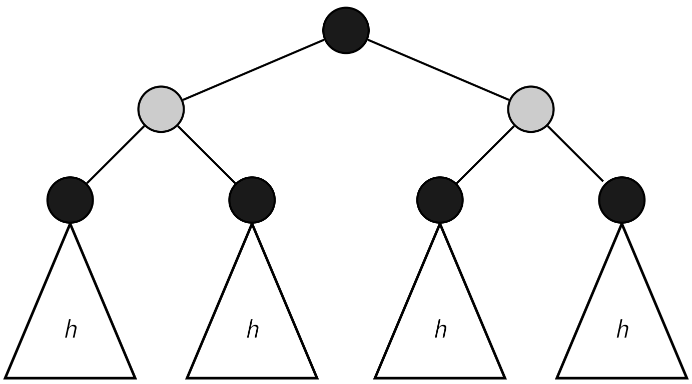


Dieser Baum besitzt zwei rote Knoten. Ebenfalls ergibt sich $rot(1) = \frac{2}{3} \cdot 4^1 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$.

Induktionsverankerung für $h = 0$ (alternativ):
Es gibt nur einen Rot-Schwarz Baum mit Schwarzhöhe $h = 0$. Dieser besteht nur aus der Wurzel. Da diese Schwarz ist enthält er keine roten Knoten. Aus der zu beweisenden Formel ergibt sich ebenfalls $rot(0) = \frac{2}{3} \cdot 4^0 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$.

Induktionsvoraussetzung:
In einem Rot-Schwarz Baum der Schwarzhöhe h gibt es $rot(h) = \frac{2}{3} \cdot 4^h - \frac{2}{3}$ viele rote Knoten.

Induktionsschritt von h nach $h + 1$:
Um einen Baum mit maximaler Anzahl an roten Knoten zu erhalten, müssen die beiden Kinder des Wurzelknotens rot sein. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir einen roten Knoten dazwischen packen, ohne die Schwarzhöhe zu verändern. Um einen Baum der Schwarzhöhe $h + 1$ mit maximaler Anzahl an Rotknoten zu erhalten, bilden wir den folgenden Baum:

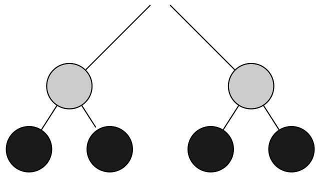


Die Anzahl der roten Knoten in diesem Baum berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} rot(h+1) &= \overbrace{4 \cdot rot(h)}^{\text{rote Knoten in den Teilbäumen}} + \overbrace{2}^{\text{Knoten auf der 1. Ebene}} \\ &\overset{I.V.}{=} 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4^h - \frac{2}{3}\right) + 2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 4^{h+1} - \frac{8}{3} + \frac{6}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 4^{h+1} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage bewiesen.

Konstruktiver Beweis
Ein konstruktiver Beweis funktioniert wie folgt:
Um einen Baum mit maximaler Anzahl an roten Knoten zu erhalten, müssen die beiden Kinder jedes schwarzen Knotens rot sein. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir einen roten Knoten dazwischen packen, ohne die Schwarzhöhe zu verändern. Wir können den zu untersuchenden Rot-Schwarz Baum also so konstruieren, dass wir mit der Wurzel beginnen und jede weitere Ebene des Baums daraus entsteht, dass an jedes Blatt folgende Struktur angehängt wird:



Bis auf die Wurzel besteht der Baum also nur aus obigen Strukturen. In der Struktur ist die Anzahl der schwarzen Knoten doppelt so groß wie die Anzahl der roten Knoten. Wird also die Anzahl der schwarzen Knoten im gesamten Baum um eins reduziert (die Wurzel), so erhalten wir eine Zahl die doppelt so groß ist wie die Anzahl der roten Knoten im gesamten Baum ($rot(h)$).
Berechnen wir nun die Anzahl der schwarzen Knoten im gesamten Baum mit Schwarzhöhe h. Wir erkennen, dass dies Äquivalent ist zu der Frage wie viele Knoten in einem vollständigen Baum der Höhe h mit Grad 4 sind. Der Grad 4 ergibt sich daraus, dass wir obige Struktur an jeden schwarzen Knoten anhängen und wir somit an jeden schwarzen Knoten vier weitere schwarze Knoten anhängen. Auf der obersten Ebene haben wir $4^0 = 1$ Knoten, darunter $4^1 = 4$ Knoten, darunter $4^2 = 16$ Knoten bis wir auf der letzten Ebene mit 4^h Knoten schließen. Summieren wir dies auf, so ergibt sich mithile der geometrischen Reihe folgende Knotenanzahl für den gesamten Baum:

$$\sum_{i=0}^{h} 4^i = \frac{4^{h+1} - 1}{4 - 1}$$

$\frac{4^{h+1}-1}{3}$ ist also die Anzahl der schwarzen Knoten im untersuchten Rot-Schwarz Baum. Daraus ergibt sich nun sofort die Anzahl der roten Knoten im untersuchten Baum indem wir, wie oben beschrieben, zunächst eins abziehen und anschließend die Zahl halbieren:

$$rot(h) = \frac{\frac{4^{h+1}-1}{3} - 1}{2} = \frac{\frac{4 \cdot 4^h}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{3}}{2} = \frac{4}{3 \cdot 2} \cdot 4^h - \frac{4}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \cdot 4^h - \frac{2}{3}$$