Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Lösung - Übung 2

Tutoraufgabe 1 (Stacks):

Betrachten Sie folgenden Stack, welcher mit einem Array implementiert wurde.

1	4	6	8	3	7	2

a) Welche Zahl wird durch Top als nächstes ausgegeben?

b) Geben Sie alle Zahlen an, welche nach der Zahl 6 in den Stack eingefügt wurden.

c) Zeichnen Sie den Stack erneut nachdem Sie die Zahl 5 eingefügt haben.

Lösung

a) Im Array werden neue Einträge am Ende eingefügt und entfernt. Top gibt also als nächstes die Zahl 2 aus.

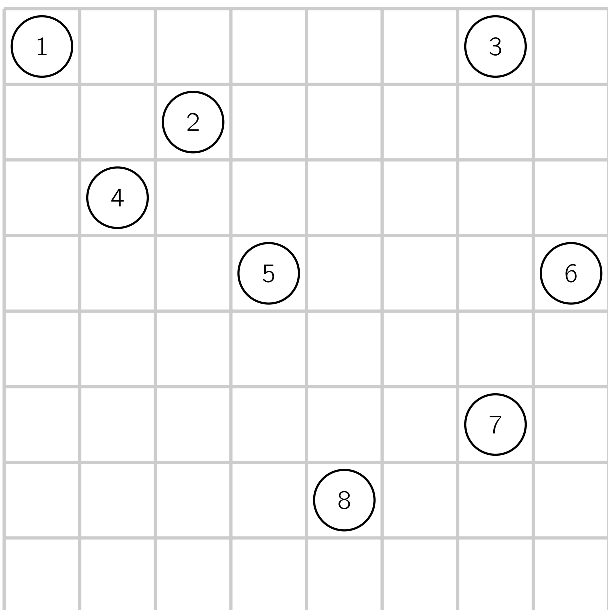
b) Die Einträge, welche nach der 6 in den Stack eingefügt wurden stehen rechts von der 6. Es wurden also die Elemente 8, 3, 7 und 2 nach der 6 eingefügt.

c) Neue Einträge werden am Ende eingefügt. Nach dem Einfügen der 5 sieht das Array also wie folgt aus:

1	4	6	8	3	7	2	5

Tutoraufgabe 2 (Quadtrees):

Betrachten Sie folgende Karte, auf der wichtige Sehenswürdigkeiten mit Nummern markiert worden sind:



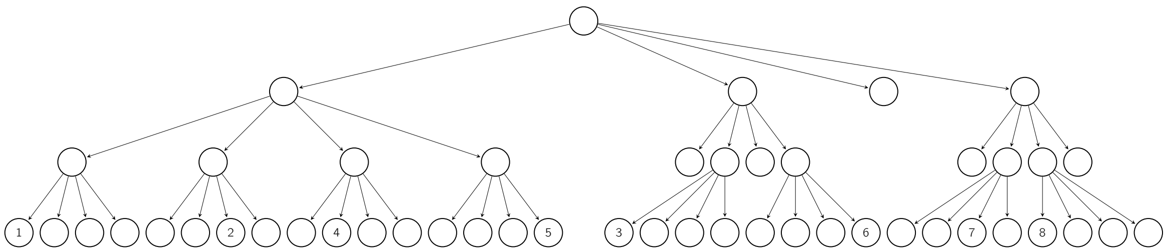
a) Zeichnen Sie einen Quadtree für diese Karte, welcher die Sehenswürdigkeiten auf der Karte lokalisiert. Dabei sollen alle notwendigen Knoten gezeichnet werden, es können also auch leere Blätter vorkommen, jedoch muss der Baum nicht vollständig sein. Tragen Sie die Nummern der Sehenswürdigkeiten in den entsprechenden Blättern ein.

b) Welche Höhe hat ihr Quadtree?

c) Wäre es möglich mit einem Quadtree, dessen Höhe um eins geringer ist, den Ort der Sehenswürdigkeiten mit geringerer Genauigkeit ebenfalls anzugeben? Falls ja, zeichnen Sie den entsprechenden Quadtree. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort.

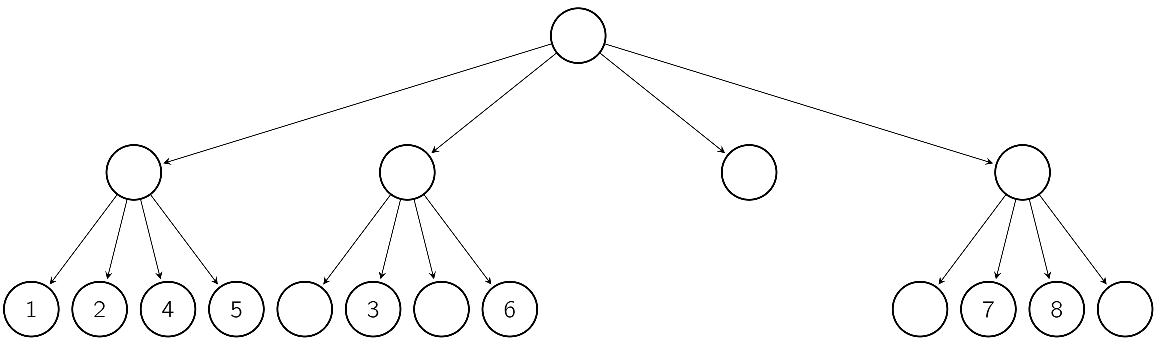
Lösung

a) Für den Quadtree wählen wir folgende Reihenfolge für die Quadranten: Oben Links, Oben Rechts, Unten Links, Unten Rechts. Es entsteht folgender Quadtree:



b) Der Quadtree hat die Höhe 3.

c) Ja dies ist möglich, da auf der letzten Ebene jeweils nur einer von vier Knoten genutzt wird. Der um eins weniger hohe Quadtree sieht dann wie folgt aus:



Tutoraufgabe 3 (Adjazenzlisten):

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzliste gespeichert wird:

1 : 2, 3
2 : 4, 5, 6
3 : 6
4 :
5 : 6
6 :
7 : 3

a) Ist der Graph G (schwach) zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist der Graph G stark zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

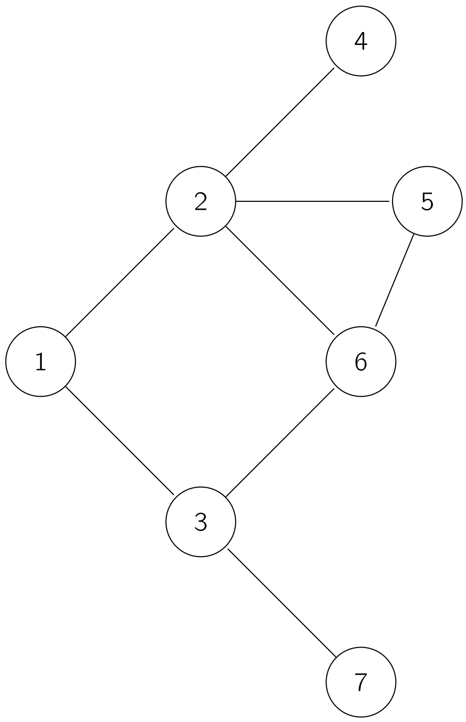
c) Ist der Graph G planar? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung

a) Ja der Graph ist schwach zusammenhängend. 1 ist mit 2 und 3 verbunden. Also müssen wir nur noch zeigen, dass der Rest mit 2 oder 3 verbunden ist. 6 und 7 ist mit 3 verbunden. Damit fehlen nur noch 4 und 5, beide sind jedoch mit 2 verbunden.

b) Nein der Graph ist nicht stark zusammenhängend. Von 1 lässt sich die 7 nicht erreichen, da es keine Kante zur 7 gibt.

c) Der Graph ist tatsächlich planar. Eine Einbettung in die Ebene ohne Überkreuzung von Kanten wäre zum Beispiel die folgende:



Tutoraufgabe 4 (O-Notation):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \in O(n^5)$

b) $\log_2(n) \in O(n)$

c) $\forall \epsilon > 0 \colon \sqrt{n} \in O\left(n^\epsilon\right)$

d) Wenn $g \in O(f)$ gilt, dann auch $f \in \Omega(g)$.

Lösung

a) Um die Aussage zu beweisen, müssen wir ein c und ein n_0 finden, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \leq c \cdot n^5$ gilt.

Dafür wählen wir $n_0 = 2$ und $c = 4$ und rechnen:

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \\
\leq\ & 4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 7 \cdot n && \text{(Da } n \geq 2\text{)} \\
\leq\ & 4 \cdot n^4 && \text{(Vereinfachen)} \\
\leq\ & 4 \cdot n^5 && \text{(Da Exponentiation monoton ist)}
\end{aligned}$$

b) Um die Aussage zu beweisen, müssen wir ein c und ein n_0 finden, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\log(n) \leq c \cdot n$ gilt.

Dafür zeigen wir zuerst, dass $n \leq 2^n$ per vollständiger Induktion gilt. Dafür haben wir im Induktionsanfang dass $1 \leq 2^1 = 2$. Nun nehmen wir an die Aussage gilt für ein beliebiges aber festes n. Für den Induktionsschritt haben wir

$$\begin{aligned}
& 2^{n+1} \\
=\ & 2^n \cdot 2 && \text{(Potenzregeln)} \\
\geq\ & n \cdot 2 && \text{(Induktions Hypothese)} \\
\geq\ & n + 1 && \text{(Da } n \geq 1\text{)}
\end{aligned}$$

Nun wählen wir $n_0 = 1$ and $c = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
& n \leq 2^n && \text{(siehe oben)} \\
\Rightarrow\ & \log_2(n) \leq \log_2(2^n) = n && \text{(Logarithmus ist invers zur Potenz)}
\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist.

c) Die Aussage gilt nicht. Um sie zu widerlegen, zeigen wir dass $\sqrt{n} \notin O(n^{0.25})$ gilt. Dafür müssen wir für jedes n_0 und c ein $n \geq n_0$ finden, sodass $\sqrt{n} > c \cdot n^{0.25}$. Wir wählen nun stets n sodass $n = (c + n_0 + k)^4$ ist. Für jedes n_0 ist n somit größer oder gleich. Weiterhin ist es stets möglich ein $k > 0$ zu finden, sodass n eine natürliche Zahl ist. Nun zeigen wir:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} \\
=\ & \sqrt{(c + n_0 + k)^4} && \text{(Annahme)} \\
=\ & (c + n_0 + k)^2 && \text{(Kürzen)} \\
=\ & c^2 + 2 \cdot c \cdot (n_0 + k) + (n_0 + k)^2 && \text{(Binominal)} \\
>\ & c^2 + 2 \cdot c \cdot (n_0 + k) && \text{(Da } (n_0 + k)^2 > 0\text{)} \\
\geq\ & c^2 + c \cdot (n_0 + k) && \text{(Da Multiplikation monoton ist)} \\
=\ & c \cdot (c + (n_0 + k)) && \text{(Ausmultiplizieren von } c\text{)} \\
=\ & c \cdot (c + n_0 + k)^{4 \cdot 0.25} && \text{(Identität anwenden)} \\
=\ & c \cdot n^{0.25} && \text{(Annahme)}
\end{aligned}$$

d) Die Aussage gilt. Da $g \in O(f)$, gibt es ein n_0 und ein c sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $g(n) \leq c \cdot f(n)$ gilt. Dann haben wir jedoch auch $\frac{1}{c} \cdot g(n) \leq f(n)$, wobei $\frac{1}{c} > 0$. Damit haben wir jedoch auch ein $n_0' = n_0$ und ein $c' = \frac{1}{c}$ gefunden, damit auch $f \in \Omega(g)$ gilt.

Aufgabe 5 (Warteschlangen): 2 + 7 = 9 Punkte

Betrachten Sie folgende Prioritätswarteschlange, welche mit einem Array der Länge 10 implementiert wurde.

↓				↓					
7	6	1	5						

a) Welches Element wird beim Aufruf von Get zurückgegeben?

b) Führen Sie folgende Operationen auf obiger Prioritätswarteschlange aus. Zeichnen Sie das Array nach jeder Änderung erneut. Sie müssen das Array pro Operation also möglicherweise mehrfach zeichnen. Zeichnen Sie außerdem den front und back Pointer ein.

i) Enq(8)
ii) Enq(2)
iii) Enq(3)
iv) Enq(9)
v) Deq()
vi) Deq()

Um die Notation zu verdeutlichen haben wir die ersten beiden Operationen bereits für Sie dargestellt. Zusätzlich zu dieser Notation kann es hilfreich sein sich die Prioritätswarteschlange als Binärbaum aufzuzeichnen. Es wird jedoch ausschließlich die Array-Notation gewertet.

↓				↓					
7	6	1	5						

i) Enq(8)

↓					↓				
7	6	1	5	8					
↓					↓				
7	8	1	5	6					
↓					↓				
8	7	1	5	6					

ii) Enq(2)

↓						↓			
8	7	1	5	6	2				
↓						↓			
8	7	2	5	6	1				

Lösung

a) Get gibt immer das Element mit der höchsten Priorität zurück. Bei der Arrayimplementierung der Prioritätswarteschlange steht dieses immer ganz links im Array. Es wird also die 7 zurückgegeben.

b)

↓				↓					
7	6	1	5						

i) Enq(8)

7	6	1	5	8					

7	8	1	5	6					

8	7	1	5	6					

ii) Enq(2)

8	7	1	5	6	2				

8	7	2	5	6	1				

iii) Enq(3)

8	7	2	5	6	1	3			

8	7	3	5	6	1	2			

iv) Enq(9)

8	7	3	5	6	1	2	9		

8	7	3	9	6	1	2	5		

8	9	3	7	6	1	2	5		

9	8	3	7	6	1	2	5		

v) Deq()

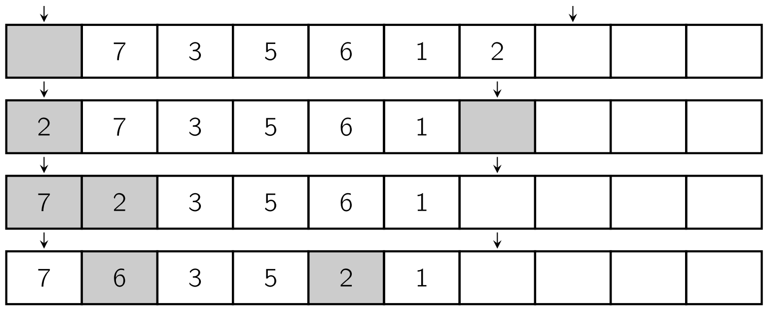
	8	3	7	6	1	2	5		

5	8	3	7	6	1	2			

8	5	3	7	6	1	2			

8	7	3	5	6	1	2			

vi) Deq()



Aufgabe 6 (Binärbaum): 4 + 2 + 5 = 11 Punkte

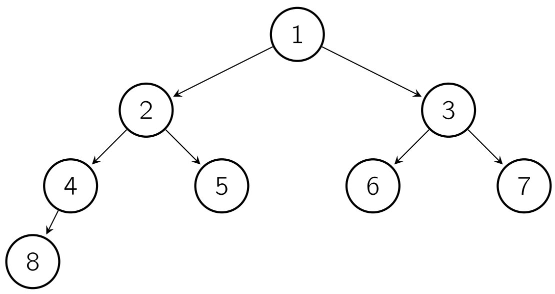
a) Zeichnen Sie einen Binärbaum mit 8 Knoten, welcher eine möglichst geringe Höhe hat. Wie hoch ist Ihr Baum?

b) Wie viele Knoten kann ein Binärbaum mit der Höhe 12 maximal haben?

c) Zeichnen Sie einen balancierten Binärbaum mit der Höhe 4 mit möglichst wenigen Knoten. Wie viele Knoten hat ihr Baum?

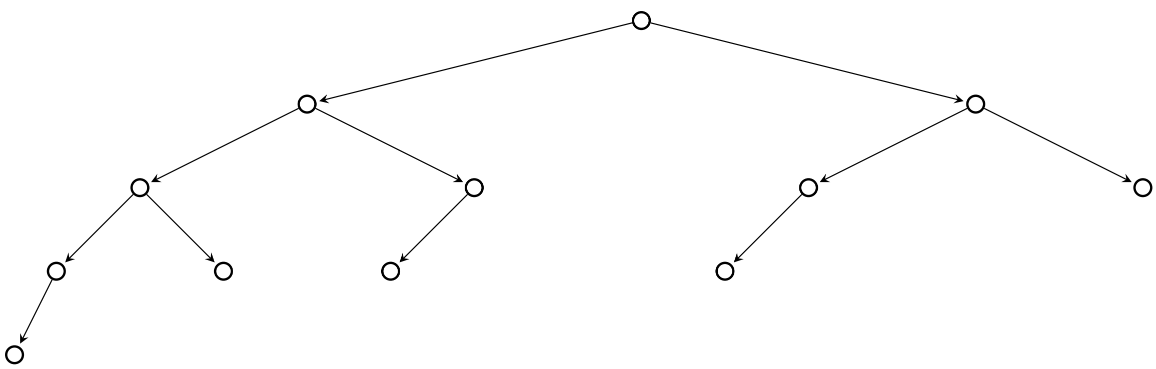
Lösung

a) Wir zeichnen zunächst einen vollständigen Binärbaum der Höhe 2 mit 7 Knoten. Anschließend hängen wir den achten Knoten in die nächste Ebene. Der Baum hat also mindestens die Höhe 3.



b) Die maximale Anzahl an Knoten in einem Binärbaum der Höhe h beträgt $2^{h+1} - 1$. Mit $h = 12$ ergibt sich eine maximale Anzahl von $2^{12+1} - 1 = 8191$ Knoten.

c) Bei balancierten Binärbäumen darf sich die Höhe des linken und rechten Teilbaums jedes Knotens um maximal 1 unterscheiden. Für einen Baum der Höhe 4 ergibt sich somit mindestens folgender Baum mit 12 Knoten.



Aufgabe 7 (Adjazenzmatrix): 3 + 3 + 4 = 10 Punkte

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Graph G graphisch an.

b) Berechnen Sie alle Knoten in G, die von dem ersten Knoten in genau 3 Schritten erreichbar sind. Geben Sie auch Zwischenschritte an.

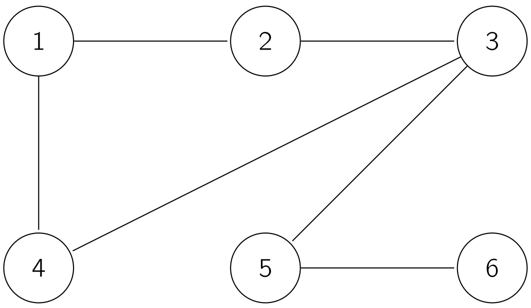
c) Sei G' der Graph der als folgende Adjanzentmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist G isomorph zu G'? Falls ja, geben Sie den Isomorphismus, d.h. die Permutation der Knoten, an. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort!

Lösung

a) Die Matrix ist symmetrisch, daher ist der Graph auch ungerichtet und wir schreiben keine Rückkanten auf.



b) Wir lösen diese Aufgabe mittels Matrixmultiplikation. Sei A dafür die Adjazenzmatrix von G und I_1 die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $I_1 \cdot A^3$ die Matrix deren nicht-null Stellen die Knoten angeben, die in drei Schritt erreichbar sind. Wir berechnen nun nacheinander:

$I_1 \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_1 \cdot A \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_1 \cdot A \cdot A \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Knoten 2, 4 und 5 in genau drei Schritten erreichbar.

c) Die Graphen sind nicht isomorph. Die Matrix von G ist symmetrisch, daher ist der Graph auch ungerichtet. Die Matrix von G' ist jedoch nicht symmetrisch (Die Einträg (2,4) und (4,2) sind nicht identisch).

Aufgabe 8 (O-Notation): 2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $5 \cdot n^2 + 13 \cdot n - 16 \in O(n^2)$

b) $\sqrt{n} \in O(n)$

c) $n^3 \in O(\sum_{i=0}^{n} i)$

d) $f(n) \in \Omega(g(n))$ und $f(n) \in O(h(n))$ impliziert $g \in \Theta(h(n))$

Lösung

a) Die Aussage gilt. Wir zeigen dafür, dass es ein n_0 und ein c gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $5 \cdot n^2 + 13 \cdot n + 1 \leq c \cdot n^2$ gilt. Dafür wählen wir $n_0 = 1$ und $c = 18$ und rechnen:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n - 16 & \\ \leq\ & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n^2 - 16 & \text{(Da } n \leq n^2\text{)} \\ \leq\ & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n^2 & \text{(Da } -16 \leq 0\text{)} \\ =\ & 18 \cdot n^2 & \text{(Vereinfachen)} \end{aligned}$$

b) Die Aussage gilt. Wir zeigen dafür, dass es ein n_0 und ein c gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\sqrt{n} \leq c \cdot n$ gilt. Dafür wählen wir $n_0 = 1$ und $c = 1$ und haben dank Monotonität der Exponentiation dass $\sqrt{n} = n^{0.5} \leq n^1 = n$.

c) Die Aussage gilt nicht. Zuerst einmal berechnen wir $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$ nach dem kleinen Gauss. Dann zeigen wir dafür den Limit in der alternativen Definition:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{n^2+n}{2}} \\
\geq\ &\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{n^2+n^2}{2}} && \text{(Da } n \leq n^2\text{)} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} && \text{(Vereinfachung)} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} n && \text{(Vereinfachung)} \\
=\ &\infty && (n \text{ divergiert gegen unendlich})
\end{aligned}$$

d) Die Aussage gilt nicht. Wähle $f(n) = n$, $g(n) = 1$ und $h(n) = n^2$, dann ist $f \in \Omega(g)$ da $1 \leq n$ für alle $n > 0$ und $g \in O(h)$ da $1 \leq n^2$ für alle $n > 0$, aber nicht $g \in \Theta(h)$ da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.