Prof. Dr. Leif Kobbelt Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Übung 2

Tutoraufgabe 1 (Stacks):

Betrachten Sie folgenden Stack, welcher mit einem Array implementiert wurde.

1	4	6	8	3	7	2

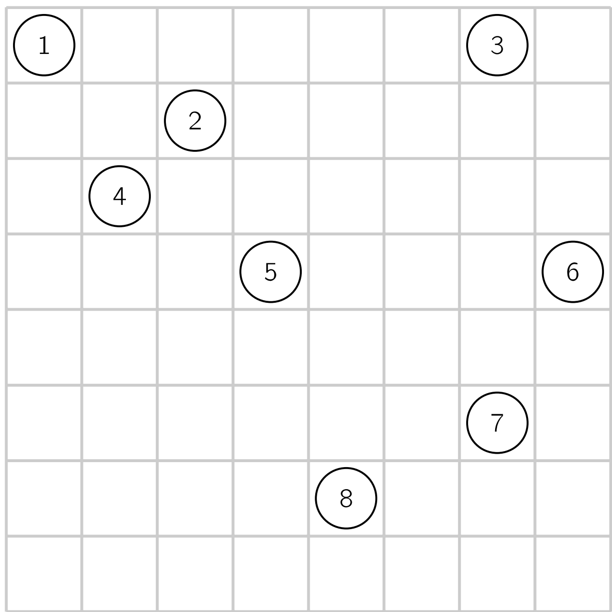
a) Welche Zahl wird durch Top als nächstes ausgegeben?

b) Geben Sie alle Zahlen an, welche nach der Zahl 6 in den Stack eingefügt wurden.

c) Zeichnen Sie den Stack erneut nachdem Sie die Zahl 5 eingefügt haben.

Tutoraufgabe 2 (Quadtrees):

Betrachten Sie folgende Karte, auf der wichtige Sehenswürdigkeiten mit Nummern markiert worden sind:

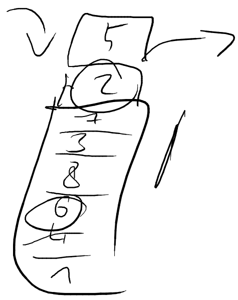


a) Zeichnen Sie einen Quadtree für diese Karte, welcher die Sehenswürdigkeiten auf der Karte lokalisiert. Dabei sollen alle notwendigen Knoten gezeichnet werden, es können also auch leere Blätter vorkommen, jedoch muss der Baum nicht vollständig sein. Tragen Sie die Nummern der Sehenswürdigkeiten in den entsprechenden Blättern ein.

b) Welche Höhe hat ihr Quadtree?

c) Wäre es möglich mit einem Quadtree, dessen Höhe um eins geringer ist, den Ort der Sehenswürdigkeiten mit geringerer Genauigkeit ebenfalls anzugeben? Falls ja, zeichnen Sie den entsprechenden Quadtree.

Übung 2



Tutoraufgabe 1 (Stacks):

Betrachten Sie folgenden Stack, welcher mit einem Array implementiert wurde.

1	4	6	8	3	7	2

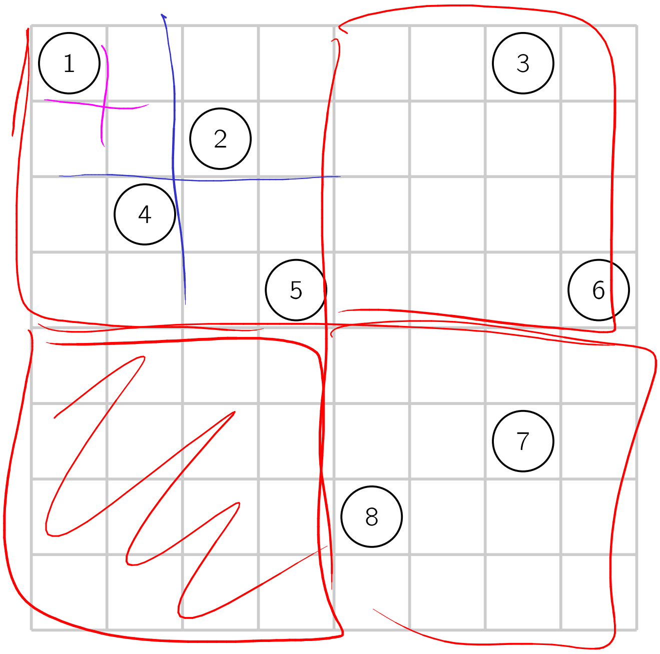
a) Welche Zahl wird durch Top als nächstes ausgegeben? 2

b) Geben Sie alle Zahlen an, welche nach der Zahl 6 in den Stack eingefügt wurden.

c) Zeichnen Sie den Stack erneut nachdem Sie die Zahl 5 eingefügt haben.

Tutoraufgabe 2 (Quadtrees):

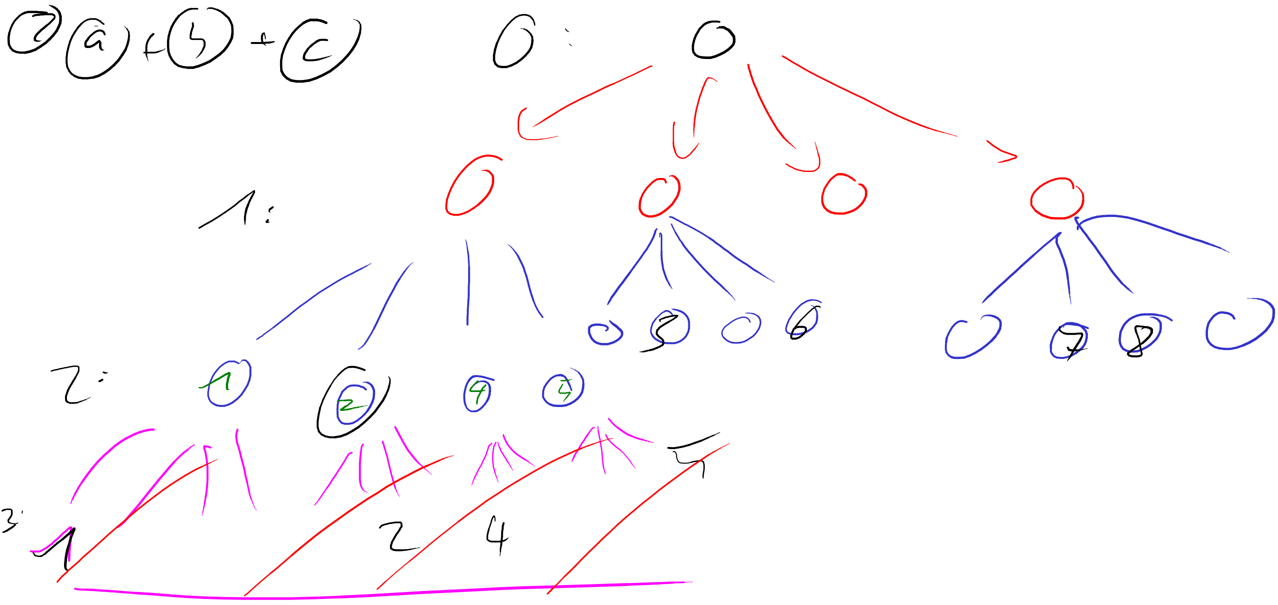
Betrachten Sie folgende Karte, auf der wichtige Sehenswürdigkeiten mit Nummern markiert worden sind:



a) Zeichnen Sie einen Quadtree für diese Karte, welcher die Sehenswürdigkeiten auf der Karte lokalisiert. Dabei sollen alle notwendigen Knoten gezeichnet werden, es können also auch leere Blätter vorkommen, jedoch muss der Baum nicht vollständig sein. Tragen Sie die Nummern der Sehenswürdigkeiten in den entsprechenden Blättern ein.

b) Welche Höhe hat ihr Quadtree? 3

c) Wäre es möglich mit einem Quadtree, dessen Höhe um eins geringer ist, den Ort der Sehenswürdigkeiten mit geringerer Genauigkeit ebenfalls anzugeben? Falls ja, zeichnen Sie den entsprechenden Quadtree.



(a) + (b) + (c)
0:
1:
2:
3:
1
2
4
5
3
6
7
8

Tutoraufgabe 3 (Adjazenzlisten):

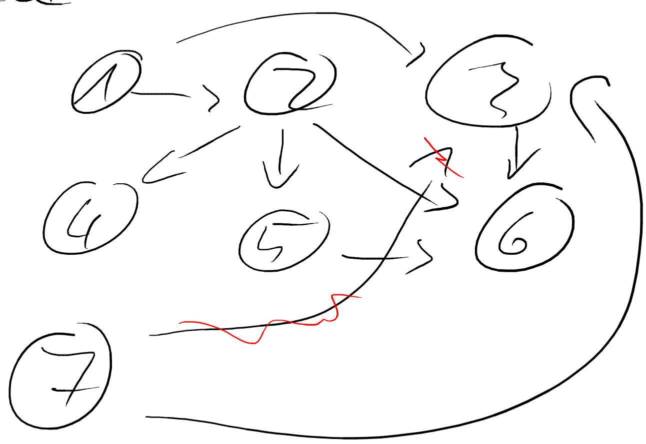
Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzliste gespeichert wird:

1 : 2, 3
2 : 4, 5, 6
3 : 6
4 :
5 : 6
6 :
7 : 3

a) Ist der Graph G (schwach) zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort. Ja

b) Ist der Graph G stark zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort. Nein

c) Ist der Graph G planar? Begründen Sie ihre Antwort. Ja



Tutoraufgabe 4 (O-Notation):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \in O(n^5)$

b) $\log_2(n) \in O(n)$

c) $\forall \epsilon > 0\colon \sqrt{n} \in O\left(n^{\epsilon}\right)$

d) Wenn $g \in O(f)$ gilt, dann auch $f \in \Omega(g)$.

4c) $\forall_\varepsilon = \sqrt{n} \in O(n^\varepsilon)$

$n > n_0$ sodass $\exists_n : \sqrt{n} \geq c \cdot n^{0.25}$

$n = (c + n_0 + k)^4 \quad k \in \mathbb{N}_0$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{(c+n_0+k)^4} = (c+n_0+k)^2$$

$$= c^2 + 2c(n_0+k) + (n_0+K)^2 \qquad (\text{da } (n_0+k) \geq 0)$$

$$\geq c^2 + 2c \cdot (n_0+k)$$

$$\geq c^2 + c(n_0+k)$$

$$c \cdot (c+n_0+k)^1$$

$$= c \cdot (c+n_0+k)^{4 \cdot 0.25}$$

$$= c \cdot n^{0.25}$$

Tutoraufgabe 3 (Adjazenzlisten):

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzliste gespeichert wird:

$$\begin{aligned}1&: 2, 3\\ 2&: 4, 5, 6\\ 3&: 6\\ 4&:\\ 5&: 6\\ 6&:\\ 7&: 3\end{aligned}$$

a) Ist der Graph G (schwach) zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist der Graph G stark zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist der Graph G planar? Begründen Sie ihre Antwort.

Tutoraufgabe 4 (O-Notation):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \in O(n^5)$

b) $\log_2(n) \in O(n)$

c) $\forall \epsilon > 0\colon \sqrt{n} \in O\left(n^{\epsilon}\right)$

d) Wenn $g \in O(f)$ gilt, dann auch $f \in \Omega(g)$.

$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$

a) $4n^4 - 7n + 14 \in O(n^5)$

i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 7n + 14}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}(4 - \overset{\to 0}{\frac{7}{n^3}} + \overset{\to 0}{\frac{14}{n^4}})}{\cancel{n^4}(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$$

ii) $-7n + 14$: $-14 + 14$, $-21 + 14$ ≤ 0

$4n^4 - 7n + 14 \leq 4n^4$

Wähle $n_0 = 2$, $c = 4$, z.Z $4n^4 - 7n + 14 \leq 4n^5$

$4n^4 - 7n + 14 \leq 4n^4 - 7n + 7n$

$= 4n^4 \leq 4n^5$

$\log_2(n) \in O(n)$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n)}{n}$

$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

(ii) Zeige $n \leq 2^n$ ~~für~~ $n \in \mathbb{N}$

IA $1 \leq 2$ ✓

IV ...

IS $n+1$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{IV}}{\geq} 2n \geq n+1$

$\log_2(n) \in O(n)$

$c=1$ $n_0 = 1$

$\log_2(2^n) = n$

$\log_2(n) \leq n$

$\log_2(n) \overset{\text{Induktion}}{\leq} \log_2(2^n) = n$

c)

i) $\forall \varepsilon: \sqrt{n} \in O(n^{\varepsilon})$

Wähle $\varepsilon = 0{,}25$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{2}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{5}{4}}}{n} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{4}} = \infty$$

d) $\underline{g(n) \in O(f)} \Rightarrow f(n) \in \Omega(g)$

$\exists c > 0, \exists n_0 > 0, \forall n > n_0$

$$g(n) \leq c \cdot f(n)$$

$$\Rightarrow \frac{g(n)}{c} \leq \frac{\cancel{c} \cdot f(n)}{\cancel{c}}$$

da $c > 0$, ist auch $\frac{1}{c} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} g(n) \leq f(n)$$

Also gilt für $c' := \frac{1}{c}$, $n_0' := n_0$

dass $c' g(n) \leq f(n)$ $\square$