Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Lösung - Übung 2

Tutoraufgabe 1 (Stacks):

Betrachten Sie folgenden Stack, welcher mit einem Array implementiert wurde.

1	4	6	8	3	7	2

a) Welche Zahl wird durch Top als nächstes ausgegeben?

b) Geben Sie alle Zahlen an, welche nach der Zahl 6 in den Stack eingefügt wurden.

c) Zeichnen Sie den Stack erneut nachdem Sie die Zahl 5 eingefügt haben.

Lösung

a) Im Array werden neue Einträge am Ende eingefügt und entfernt. Top gibt also als nächstes die Zahl 2 aus.

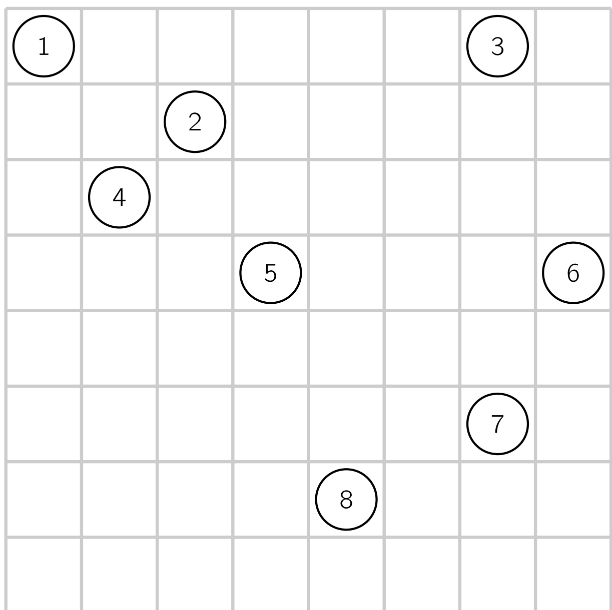
b) Die Einträge, welche nach der 6 in den Stack eingefügt wurden stehen rechts von der 6. Es wurden also die Elemente 8, 3, 7 und 2 nach der 6 eingefügt.

c) Neue Einträge werden am Ende eingefügt. Nach dem Einfügen der 5 sieht das Array also wie folgt aus:

1	4	6	8	3	7	2	5

Tutoraufgabe 2 (Quadtrees):

Betrachten Sie folgende Karte, auf der wichtige Sehenswürdigkeiten mit Nummern markiert worden sind:



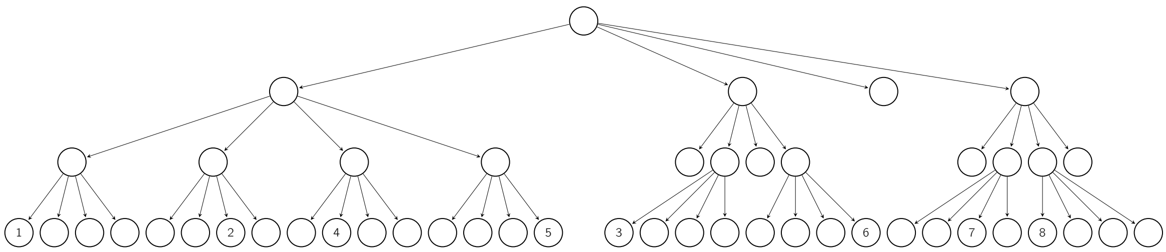
a) Zeichnen Sie einen Quadtree für diese Karte, welcher die Sehenswürdigkeiten auf der Karte lokalisiert. Dabei sollen alle notwendigen Knoten gezeichnet werden, es können also auch leere Blätter vorkommen, jedoch muss der Baum nicht vollständig sein. Tragen Sie die Nummern der Sehenswürdigkeiten in den entsprechenden Blättern ein.

b) Welche Höhe hat ihr Quadtree?

c) Wäre es möglich mit einem Quadtree, dessen Höhe um eins geringer ist, den Ort der Sehenswürdigkeiten mit geringerer Genauigkeit ebenfalls anzugeben? Falls ja, zeichnen Sie den entsprechenden Quadtree. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort.

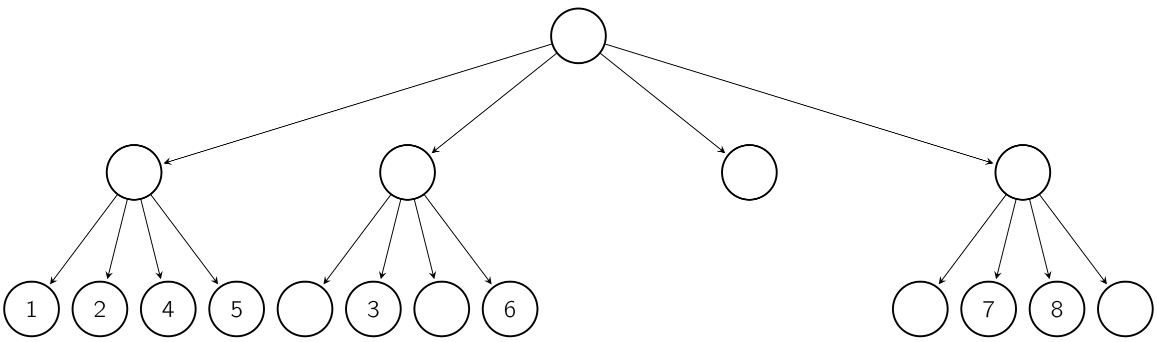
Lösung

a) Für den Quadtree wählen wir folgende Reihenfolge für die Quadranten: Oben Links, Oben Rechts, Unten Links, Unten Rechts. Es entsteht folgender Quadtree:



b) Der Quadtree hat die Höhe 3.

c) Ja dies ist möglich, da auf der letzten Ebene jeweils nur einer von vier Knoten genutzt wird. Der um eins weniger hohe Quadtree sieht dann wie folgt aus:



Tutoraufgabe 3 (Adjazenzlisten):

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzliste gespeichert wird:

$1 : 2, 3$
$2 : 4, 5, 6$
$3 : 6$
$4 :$
$5 : 6$
$6 :$
$7 : 3$

a) Ist der Graph G (schwach) zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Ist der Graph G stark zusammenhängend? Begründen Sie ihre Antwort.

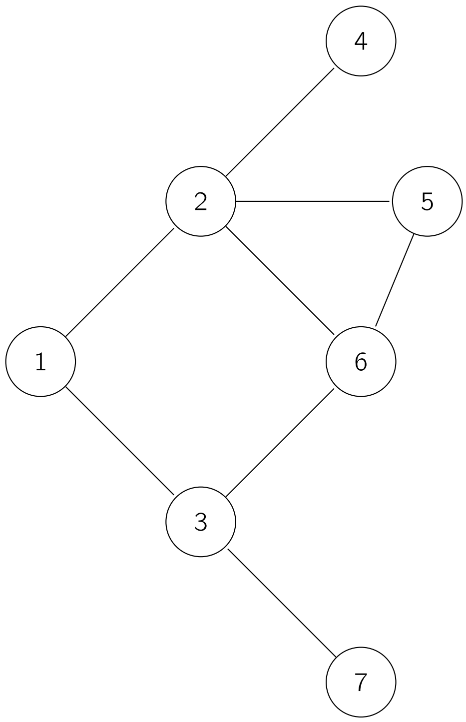
c) Ist der Graph G planar? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung

a) Ja der Graph ist schwach zusammenhängend. 1 ist mit 2 und 3 verbunden. Also müssen wir nur noch zeigen, dass der Rest mit 2 oder 3 verbunden ist. 6 und 7 ist mit 3 verbunden. Damit fehlen nur noch 4 und 5, beide sind jedoch mit 2 verbunden.

b) Nein der Graph ist nicht stark zusammenhängend. Von 1 lässt sich die 7 nicht erreichen, da es keine Kante zur 7 gibt.

c) Der Graph ist tatsächlich planar. Eine Einbettung in die Ebene ohne Überkreuzung von Kanten wäre zum Beispiel die folgende:



Tutoraufgabe 4 (O-Notation):

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \in O(n^5)$

b) $\log_2(n) \in O(n)$

c) $\forall \epsilon > 0\colon \sqrt{n} \in O\left(n^\epsilon\right)$

d) Wenn $g \in O(f)$ gilt, dann auch $f \in \Omega(g)$.

Lösung

a) Um die Aussage zu beweisen, müssen wir ein c und ein n_0 finden, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 \leq c \cdot n^5$ gilt.

Dafür wählen wir $n_0 = 2$ und $c = 4$ und rechnen:

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 14 & \\
\leq\ & 4 \cdot n^4 - 7 \cdot n + 7 \cdot n & \text{(Da } n \geq 2\text{)} \\
\leq\ & 4 \cdot n^4 & \text{(Vereinfachen)} \\
\leq\ & 4 \cdot n^5 & \text{(Da Exponentiation monoton ist)}
\end{aligned}$$

b) Um die Aussage zu beweisen, müssen wir ein c und ein n_0 finden, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\log(n) \leq c \cdot n$ gilt.

Dafür zeigen wir zuerst, dass $n \leq 2^n$ per vollständiger Induktion gilt. Dafür haben wir im Induktionsanfang dass $1 \leq 2^1 = 2$. Nun nehmen wir an die Aussage gilt für ein beliebiges aber festes n. Für den Induktionsschritt haben wir

$$\begin{aligned}
& 2^{n+1} & \\
=\ & 2^n \cdot 2 & \text{(Potenzregeln)} \\
\geq\ & n \cdot 2 & \text{(Induktions Hypothese)} \\
\geq\ & n + 1 & \text{(Da } n \geq 1\text{)}
\end{aligned}$$

Nun wählen wir $n_0 = 1$ and $c = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
& n \leq 2^n & \text{(siehe oben)} \\
\Rightarrow\ & \log_2(n) \leq \log_2(2^n) = n & \text{(Logarithmus ist invers zur Potenz)}
\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist.

c) Die Aussage gilt nicht. Um sie zu widerlegen, zeigen wir dass $\sqrt{n} \notin O(n^{0.25})$ gilt. Dafür müssen wir für jedes n_0 und c ein $n \geq n_0$ finden, sodass $\sqrt{n} > c \cdot n^{0.25}$. Wir wählen nun stets n sodass $n = (c + n_0 + k)^4$ ist. Für jedes n_0 ist n somit größer oder gleich. Weiterhin ist es stets möglich ein $k > 0$ zu finden, sodass n eine natürliche Zahl ist. Nun zeigen wir:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} & \\
=\ & \sqrt{(c + n_0 + k)^4} & \text{(Annahme)} \\
=\ & (c + n_0 + k)^2 & \text{(Kürzen)} \\
=\ & c^2 + 2 \cdot c \cdot (n_0 + k) + (n_0 + k)^2 & \text{(Binominal)} \\
>\ & c^2 + 2 \cdot c \cdot (n_0 + k) & \text{(Da } (n_0 + k)^2 > 0\text{)} \\
\geq\ & c^2 + c \cdot (n_0 + k) & \text{(Da Multiplikation monoton ist)} \\
=\ & c \cdot (c + (n_0 + k)) & \text{(Ausmultiplizieren von } c\text{)} \\
=\ & c \cdot (c + n_0 + k)^{4 \cdot 0.25} & \text{(Identität anwenden)} \\
=\ & c \cdot n^{0.25} & \text{(Annahme)}
\end{aligned}$$

d) Die Aussage gilt. Da $g \in O(f)$, gibt es ein n_0 und ein c sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $g(n) \leq c \cdot f(n)$ gilt. Dann haben wir jedoch auch $\frac{1}{c} \cdot g(n) \leq f(n)$, wobei $\frac{1}{c} > 0$. Damit haben wir jedoch auch ein $n_0' = n_0$ und ein $c' = \frac{1}{c}$ gefunden, damit auch $f \in \Omega(g)$ gilt.