Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Lösung - Übung 4

Tutoraufgabe 1 (Ordnungen und Sortieren):

a) Wir definieren die Relationen $\sqsubset_2$, $\equiv_2$ und $\sqsubseteq$ auf natürlichen Zahlen als

$$\begin{aligned} n \sqsubset_2 m \quad &\text{genau dann wenn} \quad n \bmod 2 < m \bmod 2\ , \\ n \equiv_2 m \quad &\text{genau dann wenn} \quad n \bmod 2 = m \bmod 2\ , \\ n \sqsubseteq m \quad &\text{genau dann wenn} \quad n \sqsubset_2 m \quad \text{oder} \quad n \equiv_2 m \text{ und } n \leq m \end{aligned}$$

Wobei $n \bmod 2$ den Rest nach Division von n durch 2 angibt.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine totale Ordnung ist.

b) Gegeben folgender Sortieralgorithmus der das Array a sortiert:

```python
from random import shuffle

def is_sorted(a):
    i = 1
    while i < len(a):
        if a[i - 1] > a[i]:
            return False
        i += 1
    return True

def sort(data) -> list:
    """Shuffle data until sorted."""
    while not is_sorted(data):
        shuffle(data)
    return data
```

Ist dieser Sortieralgorithmus sinnvoll?

c) Die Laufzeiten der Sortieralgorithmen Bubblesort, Insertionsort und Selectionsort sind bereits im Bestcase sehr unterschiedlich.

Ist es möglich, die Bestcase Laufzeiten aller drei auf einfache Weise zu optimieren?

Falls ja, welche Konsequenzen hat dies für die Averagecase und Worstcase Laufzeit?

Lösung

a) Um zu zeigen, dass $\sqsubseteq$ eine totale Ordnung ist, müssen wir Reflexivität, Transitivität, Antisymmetrie und Trichotomie zeigen.

- Reflexivität: Für n gilt sowohl $n \bmod 2 = n \bmod 2$ als auch $n \equiv_2 n$. Zusammen mit $n \leq n$ haben wir schließlich $n \sqsubseteq n$.
- Transitivität: Für $n \sqsubseteq m$ und $m \sqsubseteq l$ haben wir vier Fälle:
  - l ist gerade, dann ist $l \bmod 2 = 0$ und somit muss $m \equiv_2 l$, $n \equiv_2 m$ und $n \equiv_2 l$. Dann ist aber auch $m \leq l$ und $n \leq m$, somit ist auch $n \leq l$. Zusammen ist somit $n \sqsubseteq l$.
  - l ist ungerade und m ist gerade. Dann ist $l \bmod 2 = 1$ und $m \bmod 2 = 0$. Somit muss $m \sqsubset_2 l$ und $n \equiv_2 m$, somit ist aber auch $n \sqsubset_2 l$. Schließlich folgt daraus direkt $n \sqsubseteq l$.
  - l ist ungerade, m ist ungerade und n ist gerade. Dann ist $l \bmod 2 = 1 = m \bmod 2$ und $n \bmod 2 = 0$. Also ist $n \sqsubset_2 m$ und $m \equiv_2 l$. Damm muss aber auch $n \sqsubset_2 l$. Schließlich folgt daraus direkt $n \sqsubseteq l$.
  - l ist ungerade, m ist ungerade und n ist ungerade. Dann ist $l \bmod 2 = m \bmod 2 = n \bmod 2 = 1$,

also ist auch $m \equiv_2 l$ und $n \equiv_2 m$ und somit ist auch $n \equiv_2 l$. Weiterhin muss wegen $m \sqsubseteq l$ und $n \sqsubseteq m$ auch $m \leq l$ und $n \leq m$ gelten, womit auch $n \leq l$ gilt. Zusammen folgt daraus $n \sqsubseteq l$.

- Antisymmetrie: Für $n \sqsubseteq m$ und $m \sqsubseteq n$ haben wir zwei Fälle:
  - m ist gerade, dann ist $m \bmod 2 = 0$, somit ist mit $n \sqsubseteq m$ auch $n \bmod 2 = 0$. Daraus folgt dass $n \equiv_2 m$. Dann ist aber weiterhin auch $m \leq n$ und $n \leq m$, woraus aus Antisymmetrie von $\leq$ folgt, dass $n = m$ ist.
  - m ist ungerade, dann ist $m \bmod 2 = 1$, somit ist mit $m \sqsubseteq n$ auch $n \bmod 2 = 1$. Daraus folgt dass $n \equiv_2 m$. Dann ist aber weiterhin auch $m \leq n$ und $n \leq m$, woraus aus Antisymmetrie von $\leq$ folgt, dass $n = m$ ist.
- Trichotomie: Sei $\sqsubset$ der strikte Anteil von $\sqsubseteq$. Hier haben wir vier Fälle:
  - Wenn m gerade und n gerade ist, dann ist $m \bmod 2 = 0 = n \bmod 2$, somit ist auch $m \equiv_2 n$. Da $\leq$ total ist, haben wir entweder $m < n$, $m = n$ oder $m > n$, womit auch entweder $m \sqsubset n$, $m = n$ oder $m \sqsupset n$ gelten muss.
  - Wenn m gerade und n ungerade ist, dann ist $m \bmod 2 = 0 < 1 = n \bmod 2$, womit direkt $m \sqsubset_2 n$ und damit auch $m \sqsubset n$ gilt.
  - Wenn m ungerade und n gerade ist, dann gilt ein symmetrischer Beweis zum 2. Fall.
  - Wenn m ungerade und n ungerade ist, dann gilt ein symmetrischer Beweis zum 1. Fall.

b) Der vorgestellte Sortieralgorithmus heißt in der Literatur Bogosort. Sein Nachteil ist, dass die Zeit seiner Terminierung nicht nach oben sicher abgeschätzt werden kann. Tatsächlich gibt es stets eine positive Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus sich schlechter als eine gegebene Laufzeit verhalten kann. Damit ist der Algorithmus zum Sortieren ungeeignet. Selbst wenn wir dafür die erwartet Laufzeit berechnen würden, käme diese im Worstcase immernoch (ohne Beweis, da dieser sehr aufwändig wäre) auf eine Laufzeit in O((n+1)!).

c) Wir können am Anfang der Sortieralgorithmen stets einfach einmal testen, ob das Array bereits sortiert ist. Damit verbessert sich die Bestcase Laufzeit von allen dreien sofort, da die Anzahl der Vergleiche nur noch $\sim n$ ist, da das überprüfen nur maximal ein Vergleich für jedes Element kostet, und die Anzahl der Kopierungen auf 0, da wir beim überprüfen nichts kopieren müssen.

Im Averagecase ist es wahrscheinlich, dass die Liste bereits früh nicht korrekt sortiert ist, womit nur ein konstanter Mehraufwand besteht.

Im Worstcase wäre eine bis auf die letzten Elemente sortierte Liste für Bubblesort und Selectionsort unvorteilhaft. Hier müsste aber bei unserer Verbesserung erst fast die gesamte Liste überprüft werden, womit sich die Laufzeit um einen $+n$ Term verschlechtert.

Für Insertionsort wäre eine sortierte Liste sehr vorteilhaft, dagegen eine sehr unsortierte Liste unvorteilhaft. Hier wäre die Überprüfung also im Worstcase kein Mehraufwand - sie bringt aber auch im Bestcase kaum etwas.

Tutoraufgabe 2 (Memoization):

Für eine Biologie Präsentation wollen wir eine Menge von Affen als Beispiel heran nehmen, die zwar möglichst berühmt sind, aber auch weit über das Spektrum an Affen verstreut ist.
Wir nehmen dabei an, dass Affen in einem Baum $T = (A, E)$ strukturiert sind, wobei die Affenart a' direkter Nachfahre von a ist, falls $(a, a') \in E$ gilt. Wir suchen nun eine Teilmenge $B \subseteq A$ sodass keine Affenart in B direkter Nachfahre einer anderen Affenart von B ist, oder formal für alle $a, a' \in B$ gilt weder $(a, a') \in E$ noch $(a', a) \in E$. Jede Affenart a hat einen bestimmten Berühmtheitswert $b(a)$. Der Berühmtheitswert einer Teilmenge $B \subseteq A$ ist gegeben als die Summe der Berühmtheitswerte seiner Elemente, also $b(B) = \sum_{a \in B} b(a)$.
Nutzen Sie Memoization um einen Algorithmus zu entwerfen, der eine Menge $B \subseteq A$ findet, sodass keine Affenart in B direkter Nachfahre einer anderen Affenart von B ist und sodass $b(B)$ maximiert wird.

Lösung

Um Memoization zu nutzen, definieren wir zwei Funktionen die auf der Menge der Affenarten A definiert ist. `root_in(a)` gibt die maximale Summe an Berühmtheitswerten des Teilbaumes mit Wurzel a an, falls a ein Beispiel ist. `root_out(a)` gibt entsprechend die maximale Summe an Berühmtheitswerten des Teilbaumes mit Wurzel a an, falls $a \notin B$ ist. Wir können `root_in` und `root_out` rekursiv definieren als:

```
def max_popular(a):
    return max(root_in(a), root_out(a))

def root_in(a):
    sum = b(a)
    for child in a.children:
        sum += root_out(child)
    return sum

def root_out(a):
    sum = 0
    for child in a.children:
        sum += max_popular(child)
    return sum
```

Nun können wir Memoization nutzen, um die Rückgabewerte der Funktion `root_in` und `root_out` für jede Affenart a zu berechnen, wodurch wir jeden Rückgabewert maximal einmal berechnen müssen und damit auch nur drei Werte pro Affenart berechnen müssen.
Das Gesamtergebnis lässt sich nun als `max_popular(r)` berechnen wobei r die Wurzel des Evolutionsbaumes ist.

Tutoraufgabe 3 (Selectionsort):

Sortieren Sie das folgende Array mithilfe von Selectionsort. Geben Sie dazu das Array nach jeder Swap-Operation an.

2	3	9	6	7	4	1	5	8

Lösung

2	3	9	6	7	4	1	5	8
1	3	9	6	7	4	2	5	8
1	2	9	6	7	4	3	5	8
1	2	3	6	7	4	9	5	8
1	2	3	4	7	6	9	5	8
1	2	3	4	5	6	9	7	8
1	2	3	4	5	6	7	9	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Aufgabe 4 (Ordnungen und Sortieren): 3 + 4 + 4 = 11 Punkte

a) Die Quersumme einer Zahl $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$ ist $q(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Wir definieren die Relation $\sqsubseteq$ als

$$n \sqsubseteq m \qquad \text{genau dann wenn} \qquad q(n) \leq q(m) \ .$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine totale Ordnung ist.

b) Gegeben ein Graph $G = (V, E)$. Wir definieren die Relation $\sqsubseteq$ auf V als $v \sqsubseteq w$ genau dann wenn $v = w$ oder ein Pfad von v nach w existiert.

- Wenn G ein Baum ist, welche Form hat dann die Relation $\sqsubseteq$? Begründen Sie ihre Antwort!
- Wenn G eine Liste ist, welche Form hat dann die Relation $\sqsubseteq$? Begründen Sie ihre Antwort!

c) Gegeben ein nicht stabilen Sortieralgorithmus S. Geben Sie ein einfaches Verfahren S' an, welches S beinhaltet, sodass S' stabil ist. Welche Eigenschaften verliert S' aufgrund ihres Verfahrens, die S noch hatte?

Lösung

a) Die Relation $\sqsubseteq$ ist nicht Antisymmetrisch, da z.b. $q(10) = 1 = q(1)$, also ist $10 \sqsubseteq 1$ und $10 \sqsupseteq 1$, aber nicht $10 = 1$.

b)
- Wenn G ein Baum ist, dann gilt:
  - Reflexivität da mit $v = v$ auch $v \sqsubseteq v$ gilt.
  - Antisymmetrie da für $v \sqsubseteq w$ und $w \sqsubseteq v$ entweder $v = w$ oder es gibt ein Pfad von v nach w und ein Pfad von w nach v. Im zweiten Fall existiert aber auch ein Pfad von v nach v und damit würde G ein Zyklus enthalten. Das widerspricht aber der Baumeigenschaft. Also muss $v = w$.
  - Transitivität da für $v \sqsubseteq w$ und $w \sqsubseteq x$ gibt es vier Optionen:
    - $v = w$ und $w = x$, dann auch $v = x$ und $v \sqsubseteq x$,
    - $v = w$ und es gibt ein Pfad von w nach x, also auch einen von v nach x und damit $v \sqsubseteq x$,
    - es gibt ein Pfad von v nach w und $w = x$, also auch einen von v nach x und damit $v \sqsubseteq x$,
    - es gibt ein Pfad von v nach w und einen von w nach x, also auch einen von v nach x und damit $v \sqsubseteq x$.

  Somit ist $\sqsubseteq$ für G als Baum eine partielle Ordnung.

- Wenn G eine (einfach verkettete) Liste ist, dann gilt für $\sqsubseteq$ Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität da G als Liste auch ein Baum ist. Es gilt aber weiterhin, dass $\sqsubseteq$ trichotom ist, da für beliebige Knoten v und w stets entweder ein Pfad von v nach w, von w nach v oder $v = w$ gilt. Somit ist auch $w \sqsubset v$, $v \sqsubset w$ oder $v = w$.

  Somit ist $\sqsubseteq$ eine totale Ordnung.

  Hinweis:

  – Man könnte G auch als doppelt verkettete Liste nehmen. Dabei käme man dann auf eine Äquivalenzrelation für $\sqsubseteq$.

c) Tatsächlich können wir jeden Sortieralgorithmus stabil machen, wenn wir dafür weitere Speicherkomplexität erlauben. Dafür speichern wir neben dem Schlüssel key[i] eines jeden Objekts i seine derzeitige Position pos[i] im Array. Zum Sortieren nutzen wir nun nicht die Ordnung die auf key definiert wurde, sondern die lexikographische Ordnung, d.h. $i \sqsubseteq j$ genau dann wenn $\text{key}[i] < \text{key}[j] \vee (\text{key}[i] = \text{key}[j] \wedge \text{pos}[i] \leq \text{pos}[j]$. Dies garantiert wieder die Stabilität, da zwei Objekte i und j mit gleichem Schlüssel dann nach ihrer ehemaligen Position geordnet werden müssen, um sortiert zu bleiben.

Da wir jedoch weiteren Speicherbedarf haben, würde ein Algorithmus die in-place Eigenschaft verlieren, sowie eine Steigerung der Laufzeit zum Initialisieren und Auslesen des Arrays pos.

Aufgabe 5 (Sortieralgorithmen): 3 + 3 + 3 = 9 Punkte

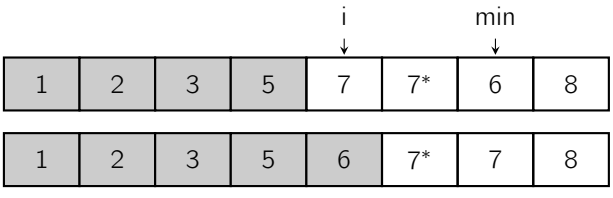
Welche der folgenden Sortieralgorithmen sind stabil? Begründen Sie Ihre Antwort für jeden Sortieralgorithmus.

- Bubblesort
- Selectionsort
- Insertionsort

Lösung

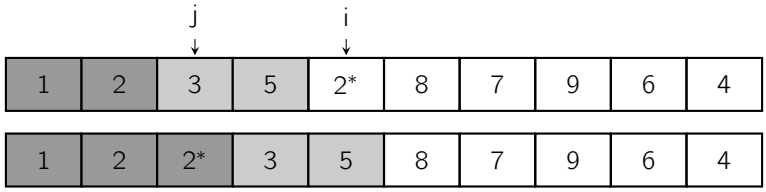
Bubblesort ist stabil. Bubblesort vertauscht immer nur direkt benachbarte Elemente, jedoch nur dann, wenn das linke Element **echt größer** ist, also insbesondere dann nicht, wenn beide Elemente gleich sind. Es wird also nie die Reihenfolge gleicher Elemente vertauscht, was Stabilität bedeutet. Würde Bubblesort benachbarte Elemente n und m tauschen, wenn bereits $n \geq m$ statt nur $n > m$ gilt, dann wäre er nicht stabil.

Selectionsort ist nicht stabil. Selectionsort arbeitet mit einem sortierten Bereich (unten grau) und einem unsortierten Bereich (unten weiß). In jedem Schritt wird das kleinste Element im unsortierten Bereich (unten min) mit dem ersten Element im unsortierten Bereich (unten i) vertauscht. Falls das Element an der Stelle i mehrfach im Array vorkommt, so wird möglicherweise bei dieser Vertauschung die Reihenfolge gleicher Elemente verändert (siehe 7 und 7*).



Insertionsort ist stabil. Insertionsort zieht das erste Element (unten i) aus dem unsortierten Bereich (unten weiß) soweit nach vorne in den sortierten Bereich (unten hell/dunkel grau), dass es im sortierten Bereich an der richtigen Stelle steht (unten j). Dazu wird zunächst die Stelle j gesucht, indem von i ausgehen solange j dekrementiert wird bis das Element direkt links von j nicht mehr **echt kleiner** als das Element an der Stelle i ist. Anschließend wird das Element an der Stelle i an die Stelle j getauscht und der hellgraue Bereich um eins nach rechts verschoben.

Auch hier ist wieder das $<$ für die Stabilität wichtig. Wäre es $\leq$ statt $<$ dann wäre Insertionsort nicht stabil.



Aufgabe 6 (Programmierung in Python - Dynamische Programmierung + Sortieren): 10 + 10 = 20 Punkte

Bearbeiten Sie die Python Programmieraufgaben. In dieser praktischen Aufgabe werden Sie sich mit dem Konzept der dynamischen Programmierung näher vertraut machen. Außerdem werden Sie einfache Sortierverfahren implementieren. Diese Aufgabe dient dazu einige Konzepte der Vorlesung zu wiederholen.
Zum Bearbeiten der Programmieraufgabe können Sie einfach den Anweisungen des Notebooks *blatt04-python.ipynb* folgen. Das Notebook steht in der .zip-Datei zum Übungsblatt im Lernraum zur Vergügung.
Ihre Implementierung soll immer nach dem # *YOUR CODE HERE* Statement kommen. Ändern Sie keine weiteren Zellen.
Laden Sie spätestens bis zur Deadline dieses Übungsblatts auch Ihre Lösung der Programmieraufgabe im Lernraum hoch. Die Lösung des Übungsblatts und die Lösung der Programmieraufgabe muss im Lernraum an derselben Stelle hochgeladen werden. Die Lösung des Übungsblatts muss dazu als .pdf-Datei hochgeladen werden. Die Lösung der Programmieraufgabe muss als .ipynb-Datei hochgeladen werden.

Übersicht der zu bearbeitenden Aufgaben:

a) Dynamische Programmierung

- Matrix-Multiplikation

b) Sortierverfahren

- Selection-Sort
- Insertion-Sort
- Vergleich von Operationen

Lösung

Die Lösung der Programmieraufgaben finden Sie im Lernraum. Die Datei trägt den Namen *blatt02-python-solution.ipynb*.