

## Übung 9

### Aufgabe 4 (Optimaler Suchbaum):

**7 + 2 + 1 = 10 Punkte**

Gegeben sind folgende Knoten mit dazugehörigen Zugriffswahrscheinlichkeiten:

Knoten	$I_0$	$N_1$	$I_1$	$N_2$	$I_2$	$N_3$	$I_3$	$N_4$	$I_4$	$N_5$	$I_5$
Wert	$(-\infty, 1)$	1	(1,2)	2	(2,3)	3	(3,4)	4	(4,5)	5	$(5, \infty)$
Wahrscheinlichkeiten	0.1	0.01	0.1	0.01	0.1	0.04	0.2	0.04	0.2	0.05	0.15

Konstruieren Sie einen optimalen Suchbaum wie folgt.

- a) Füllen Sie untenstehende Tabellen für  $W_{i,j}$  und  $C_{i,j}$  nach dem Verfahren aus der Vorlesung aus. Geben Sie in  $C_{i,j}$  ebenfalls **alle möglichen Wurzeln** des optimalen Suchbaums für  $\{i, \dots, j\}$  an.

$W_{i,j}$	0	1	2	3	4	5
1						
2	–					
3	–	–				
4	–	–	–			
5	–	–	–	–		
6	–	–	–	–	–	

$C_{i,j} (R_{i,j})$	0	1	2	3	4	5
1		( )	( )	( )	( )	( )
2	–		( )	( )	( )	( )
3	–	–		( )	( )	( )
4	–	–	–		( )	( )
5	–	–	–	–		( )
6	–	–	–	–	–	

- b) Geben Sie einen optimalen Suchbaum für die Knoten mit den gegebenen Zugriffswahrscheinlichkeiten und der gegebenen Reihenfolge der Knoten graphisch an.
- c) Ist der optimale Suchbaum für die Knoten mit den gegebenen Zugriffswahrscheinlichkeiten und der gegebenen Reihenfolge der Knoten eindeutig? Geben Sie dazu eine kurze Begründung an.

### Aufgabe 5 (Union Find):

**12 Punkte**

Führen Sie die folgenden Operationen beginnend mit einer anfangs leeren *Union-Find-Struktur* aus und geben Sie die entstehende Union-Find-Struktur nach jeder *MakeSet*, *Union* und *Find* Operation an. Nutzen Sie dabei die beiden Laufzeitverbesserungen: Höhenbalancierung und Pfadkompression. Dabei soll die Union-Operation bei **gleicher Höhe der Wurzeln immer die Wurzel des zweiten Parameters** als neue Wurzel wählen. Es ist nicht notwendig die Höhe der Bäume zu notieren.

1. MakeSet(1)
2. MakeSet(2)
3. Union(1,2)
4. MakeSet(3)
5. Union(1,3)

6. MakeSet(4)
7. MakeSet(5)
8. Union(4,5)
9. Union(1,4)
10. MakeSet(6)
11. Union(3,6)
12. MakeSet(7)
13. MakeSet(8)
14. Union(7,8)
15. Union(2,7)
16. Find(7)

**Aufgabe 6 (Graph Terminology):** **$2 + 2 + 2 + 2 + (4 * 0.5) = 10$  Punkte**

- a) Sei  $V$  eine feste Knotenmenge mit Größe  $|V| = n \in \mathbb{N}$ . Wie viele Kantenmengen  $E$  gibt es, sodass  $(V, E)$  ein *gerichteter* Graph ist? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- b) Sei  $V$  eine feste Knotenmenge mit Größe  $|V| = n \in \mathbb{N}$ . Wie viele Kantenmengen  $E$  gibt es, sodass  $(V, E)$  ein *ungerichteter* Graph ist? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- c) Wie viele einfache Weg der Länge genau  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  hat ein vollständiger ungerichteter Graph mit  $n \in \mathbb{N}$  Knoten? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- d) Ein einfacher Kreis  $v_0 \dots v_{k-1} v_0$  ist ein Kreis, für den  $v_0 \dots v_{k-1}$  einfach ist. Wie viele einfachen Kreise der Länge mindestens 3 hat ein vollständiger ungerichteter Graph mit  $n \in \mathbb{N}$  Knoten? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- e) Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph. Wir definieren die Menge  $E' = \{(i, j) \mid (j, i) \in E\}$ . Betrachten Sie die Graphen  $G^T = (V, E')$  und  $\hat{G} = (V, \hat{E})$  mit  $\hat{E} = E \cup E'$ . Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
  - i)  $\hat{G}$  ist symmetrisch.
  - ii) Falls  $\hat{G}$  stark zusammenhängend ist, dann ist  $G$  oder  $G^T$  stark zusammenhängend.
  - iii) Falls  $G$  oder  $G^T$  stark zusammenhängend ist, dann ist auch  $\hat{G}$  stark zusammenhängend.
  - iv)  $G$  ist schwach zusammenhängend genau dann, wenn  $G^T$  schwach zusammenhängend ist.

**Hinweise:**

- Die Länge eines Kreises  $v_0 \dots v_k$  ist  $k$ .
- Sie dürfen die Anzahlen auch mit  $\sum$  und  $\prod$  Termen angeben.

**Aufgabe 7 (Zykel finden):** **$2 + 2 + 2 + 2 = 8$  Punkte**

Gegeben sei eine einfach verkettete Liste mit  $n$  Elementen, deren Länge Sie nicht kennen. Wir betrachten diese Liste im folgenden als gerichteten Graph.

- a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, mit dem sich testen lässt, ob der Graph einen Zykel enthält.
- b) Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.
- c) Wie ist seine Laufzeit? Begründe Sie Ihre Antwort.
- d) Ist dies auch in Zeit  $O(n)$  möglich? Begründe Sie Ihre Antwort.