Prof. Dr. Leif Kobbelt
Stefan Dollase, Ira Fesefeldt, Alexandra Heuschling, Gregor Kobsik

Lösung - Übung 2

Aufgabe 5 (Warteschlangen): 2 + 7 = 9 Punkte

Betrachten Sie folgende Prioritätswarteschlange, welche mit einem Array der Länge 10 implementiert wurde.

↓				↓					
7	6	1	5						

a) Welches Element wird beim Aufruf von Get zurückgegeben?

b) Führen Sie folgende Operationen auf obiger Prioritätswarteschlange aus. Zeichnen Sie das Array nach jeder Änderung erneut. Sie müssen das Array pro Operation also möglicherweise mehrfach zeichnen. Zeichnen Sie außerdem den front und back Pointer ein.

i) Enq(8)
ii) Enq(2)
iii) Enq(3)
iv) Enq(9)
v) Deq()
vi) Deq()

Um die Notation zu verdeutlichen haben wir die ersten beiden Operationen bereits für Sie dargestellt. Zusätzlich zu dieser Notation kann es hilfreich sein sich die Prioritätswarteschlange als Binärbaum aufzuzeichnen. Es wird jedoch ausschließlich die Array-Notation gewertet.

↓				↓					
7	6	1	5						

i) Enq(8)

↓					↓				
7	6	1	5	8					

↓					↓				
7	8	1	5	6					

↓					↓				
8	7	1	5	6					

ii) Enq(2)

↓						↓			
8	7	1	5	6	2				

↓						↓			
8	7	2	5	6	1				

Lösung

a) Get gibt immer das Element mit der höchsten Priorität zurück. Bei der Arrayimplementierung der Prioritätswarteschlange steht dieses immer ganz links im Array. Es wird also die 7 zurückgegeben.

b)

7	6	1	5						

i) Enq(8)

7	6	1	5	8					
7	8	1	5	6					
8	7	1	5	6					

ii) Enq(2)

8	7	1	5	6	2				
8	7	2	5	6	1				

iii) Enq(3)

8	7	2	5	6	1	3			
8	7	3	5	6	1	2			

iv) Enq(9)

8	7	3	5	6	1	2	9		
8	7	3	9	6	1	2	5		
8	9	3	7	6	1	2	5		
9	8	3	7	6	1	2	5		

v) Deq()

	8	3	7	6	1	2	5		
5	8	3	7	6	1	2			
8	5	3	7	6	1	2			
8	7	3	5	6	1	2			

vi) Deq()

	7	3	5	6	1	2			
2	7	3	5	6	1				
7	2	3	5	6	1				
7	6	3	5	2	1				

Aufgabe 6 (Binärbaum): 4 + 2 + 5 = 11 Punkte

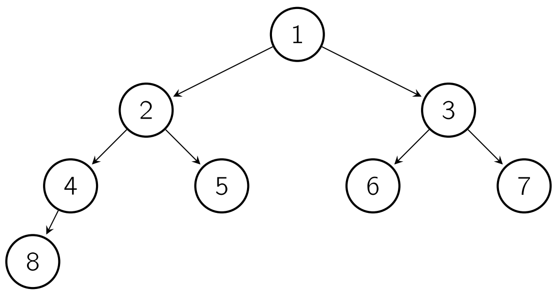
a) Zeichnen Sie einen Binärbaum mit 8 Knoten, welcher eine möglichst geringe Höhe hat. Wie hoch ist Ihr Baum?

b) Wie viele Knoten kann ein Binärbaum mit der Höhe 12 maximal haben?

c) Zeichnen Sie einen balancierten Binärbaum mit der Höhe 4 mit möglichst wenigen Knoten. Wie viele Knoten hat ihr Baum?

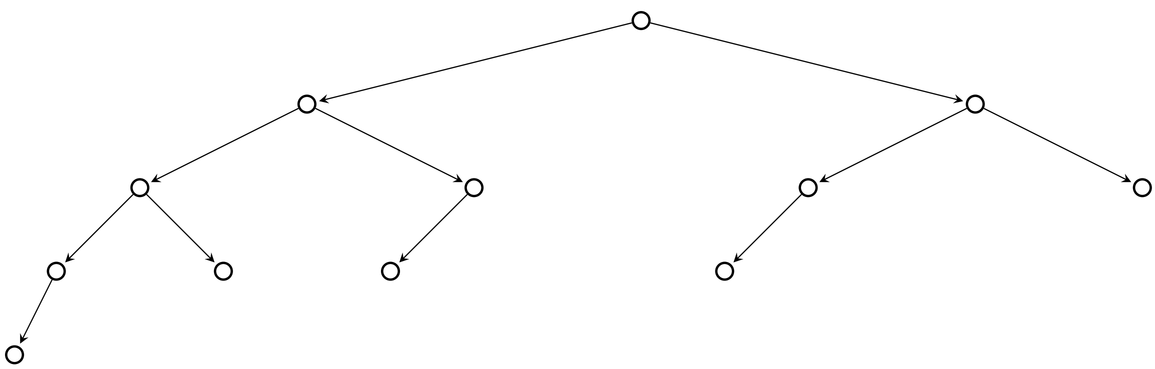
Lösung

a) Wir zeichnen zunächst einen vollständigen Binärbaum der Höhe 2 mit 7 Knoten. Anschließend hängen wir den achten Knoten in die nächste Ebene. Der Baum hat also mindestens die Höhe 3.



b) Die maximale Anzahl an Knoten in einem Binärbaum der Höhe h beträgt $2^{h+1} - 1$. Mit $h = 12$ ergibt sich eine maximale Anzahl von $2^{12+1} - 1 = 8191$ Knoten.

c) Bei balancierten Binärbäumen darf sich die Höhe des linken und rechten Teilbaums jedes Knotens um maximal 1 unterscheiden. Für einen Baum der Höhe 4 ergibt sich somit mindestens folgender Baum mit 12 Knoten.



Aufgabe 7 (Adjazenzmatrix): 3 + 3 + 4 = 10 Punkte

Gegeben sei ein Graph G der als folgende Adjazenzmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Graph G graphisch an.

b) Berechnen Sie alle Knoten in G, die von dem ersten Knoten in genau 3 Schritten erreichbar sind. Geben Sie auch Zwischenschritte an.

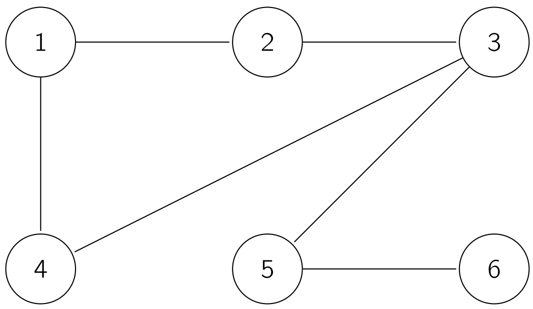
c) Sei G' der Graph der als folgende Adjanzentmatrix gespeichert wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist G isomorph zu G'? Falls ja, geben Sie den Isomorphismus, d.h. die Permutation der Knoten, an. Falls nein, begründen Sie ihre Antwort!

Lösung

a) Die Matrix ist symmetrisch, daher ist der Graph auch ungerichtet und wir schreiben keine Rückkanten auf.



b) Wir lösen diese Aufgabe mittels Matrixmultiplikation. Sei A dafür die Adjazenzmatrix von G und I_1 die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $I_1 \cdot A^3$ die Matrix deren nicht-null Stellen die Knoten angeben, die in drei Schritt erreichbar sind. Wir berechnen nun nacheinander:

$I_1 \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_1 \cdot A \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_1 \cdot A \cdot A \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Knoten 2, 4 und 5 in genau drei Schritten erreichbar.

c) Die Graphen sind nicht isomorph. Die Matrix von G ist symmetrisch, daher ist der Graph auch ungerichtet. Die Matrix von G' ist jedoch nicht symmetrisch (Die Einträg (2,4) und (4,2) sind nicht identisch).

Aufgabe 8 (O-Notation): **2 + 2 + 3 + 3 = 10 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $5 \cdot n^2 + 13 \cdot n - 16 \in O(n^2)$

b) $\sqrt{n} \in O(n)$

c) $n^3 \in O(\sum_{i=0}^{n} i)$

d) $f(n) \in \Omega(g(n))$ und $f(n) \in O(h(n))$ impliziert $g \in \Theta(h(n))$

Lösung

a) Die Aussage gilt. Wir zeigen dafür, dass es ein n_0 und ein c gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $5 \cdot n^2 + 13 \cdot n + 1 \leq c \cdot n^2$ gilt. Dafür wählen wir $n_0 = 1$ und $c = 18$ und rechnen:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n - 16 & \\ \leq\ & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n^2 - 16 & \text{(Da } n \leq n^2\text{)} \\ \leq\ & 5 \cdot n^2 + 13 \cdot n^2 & \text{(Da } -16 \leq 0\text{)} \\ =\ & 18 \cdot n^2 & \text{(Vereinfachen)} \end{aligned}$$

b) Die Aussage gilt. Wir zeigen dafür, dass es ein n_0 und ein c gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\sqrt{n} \leq c \cdot n$ gilt. Dafür wählen wir $n_0 = 1$ und $c = 1$ und haben dank Monotonität der Exponentiation dass $\sqrt{n} = n^{0.5} \leq n^1 = n$.

c) Die Aussage gilt nicht. Zuerst einmal berechnen wir $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$ nach dem kleinen Gauss. Dann zeigen wir dafür den Limit in der alternativen Definition:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{n^2+n}{2}} \\
\geq\ &\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\frac{n^2+n^2}{2}} && \text{(Da } n \leq n^2\text{)} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} && \text{(Vereinfachung)} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} n && \text{(Vereinfachung)} \\
=\ &\infty && (n \text{ divergiert gegen unendlich)}
\end{aligned}$$

d) Die Aussage gilt nicht. Wähle $f(n) = n$, $g(n) = 1$ und $h(n) = n^2$, dann ist $f \in \Omega(g)$ da $1 \leq n$ für alle $n > 0$ und $g \in O(h)$ da $1 \leq n^2$ für alle $n > 0$, aber nicht $g \in \Theta(h)$ da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.