

Dozent: Marc Kegel

Referent: Konstantin Krenz

Thema:

Reguläre Werte und der Brouwersche Fixpunktsatz

Teil 1: Reguläre Werte

Definition: Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten der selben Dimension. Wir sagen, dass $x \in M$ ein regulärer Punkt von f ist, falls die Ableitung Df_x nicht singulär ist.

- Satz v. der inversen Funktion $\Rightarrow f$ bildet eine Umgebung um x in M diffeomorph auf eine offene Menge in N ab.

Def.: Der Punkt $y \in N$ heißt regulärer Wert, falls $f^{-1}(y)$ nur reguläre Punkte enthält.

Falls Df_x singulär ist, heißt x kritischer Punkt v. f und $f(x)$ kritischer Wert.

- Jedes $y \in N$ ist entweder ein kritischer oder regulärer Wert, je nachdem, ob $f^{-1}(y)$ einen kritischen Punkt beinhaltet oder nicht.

- Falls M kompakt und $y \in N$ ein regulärer Wert ist, dann ist $f^{-1}(y)$ eine endliche (möglicherweise leere) Menge:

 - $f^{-1}(y)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge v. M kompakt $\Rightarrow f^{-1}(y)$ ist kompakt

 - alle $x \in f^{-1}(y)$ sind reg. Punkte; Satz v. inverse Funktion $\Rightarrow \exists f|_{U_x}$ ~~glatte~~ diffeomorph, insb. injektiv, d.h. $\forall x, x' \in U_x: f|_{U_x}(x) = f|_{U_x}(x') = y$, aber es gilt $\forall x \in f^{-1}(y): f(x) = y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x, x' \in f^{-1}(y): d(x, x') \geq \varepsilon$ oder $f^{-1}(y) = \emptyset$.

 - $\Rightarrow f^{-1}(y)$ ist diskret.

(2)

Notation: Für glattes $f: M \rightarrow N$, N kompakt, $y \in N$ regulär \Rightarrow sei $\#f^{-1}(y)$ die Anzahl der Punkte in $f^{-1}(y)$

• $\#f^{-1}(y)$ ist lokal konstant als Funktion über alle reg. Werte y :

D.h. $\exists V \subset N$ Umgebung v. y : $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$ $\forall y' \in V$:

Seien x_1, \dots, x_k die Punkte in $f^{-1}(y)$. Wie oben geschen können wir paarweise disjunkte Umgebungen U_1, \dots, U_k zu x_1, \dots, x_k wählen, die diffeomorph auf Umgebungen V_1, \dots, V_k abgebildet werden (in N). Setze nun

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_k - f(M - U_1 - \dots - U_k).$$

Die Existenz einer $y' \in V$ mit $\#f^{-1}(y) \neq \#f^{-1}(y')$ würde auf ein x_{k+1} führen mit $f(x_{k+1}) = y \not\in \#f^{-1}(y) = k$.

(Teil 2: Der Fundamentalsatz der Algebra)

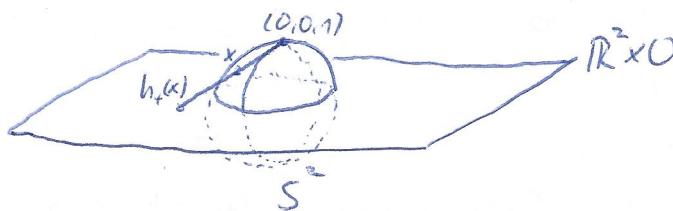
Aussage: Jedes nicht-konstante, komplexe Polynom $P(z)$ muss eine Nullstelle haben.

Beweis über Anwendung v. obigem:

• Komplexe Ebene zu kompakter Mannigfaltigkeit: Betrachte die Einheitsosphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und die stereographische Projektion

$$h_+: S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$$

vom "Nordpol" $(0,0,1)$ v. S^2 .



• Wir identifizieren die komplexe Ebene mit $\mathbb{R}^2 \times 0$. Das Polynom P von $\mathbb{R}^2 \times 0$ auf sich selbst korrespondiert mit einer Abb. f v. S^2 auf sich selbst, wobei

$$f(x) = h_+^{-1} P h_+(x) \quad \text{für } x \neq (0,0,1)$$

$$f(0,0,1) = (0,0,1).$$

• Verknüpfungen von glatten Funktionen sind glatt; h_+ ist glatt, bijektiv; h_+^{-1} ist glatt; P ist glatt; bleibt z.B. dass f in einer Umgebung von $(0,0,1)$

(3)

glatt ist.

- Betrachte die stereographische Projektion $\overset{h}{\sim}$ vom "Südpol" $(0,0,-1)$ und setze $Q(z) = h \circ h^{-1}(z)$. Wir zeigen die Gleichheit $h \circ h^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2}$, indem wir zeigen, dass beide Seiten die eindeutige Def. der Inversion aus der Einheitsosphäre erfüllen, welche lautet: z' ist das Inverse von z bezüglich der Einheitsosphäre, wenn gilt

z' liegt auf der Geraden \overrightarrow{Oz}

$$\circ |z| \cdot |z'| = 1$$

rechte Seite:

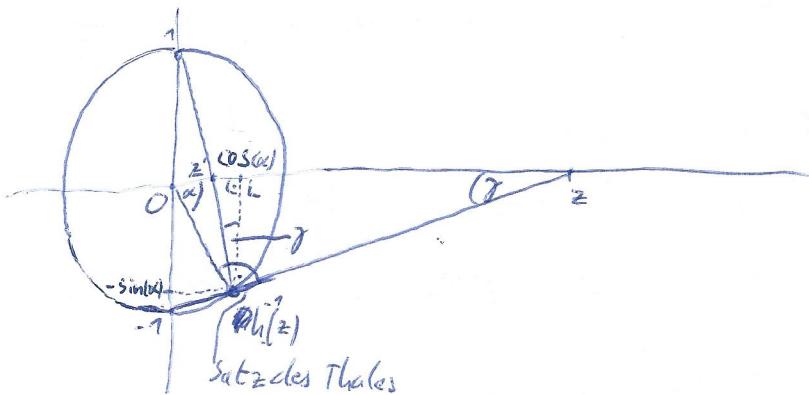
- ~~Höchstwinkel~~ liegt z'/c auf \overrightarrow{Oz}

- mit $z = x + iy$ gilt, dass $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, woraus folgt, dass

$$\left| \frac{z}{|z|^2} \right| \cdot |z| = 1$$

$$\Rightarrow z' = \frac{z}{|z|^2}$$

Linke Seite: folgende Skizze bezieht sich auf die Hyperebene des \mathbb{R}^3 , in der die senkrechte Achse und \overrightarrow{Oz} liegen:



- im rechtwinkligen $\triangle 1Oz$ erhalten wir $\tan(\gamma) = \frac{1}{|\overrightarrow{Oz}|}$ (1)

- über den Strahlensatz erhalten wir in den Dreiecken $\triangle 1Oz'$ und $\triangle 1 - \sin(\alpha) h^{-1}(z)$

$$\frac{\cos(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} = \frac{|\overrightarrow{Oz'}|}{1} \quad (2)$$

- im $\triangle h^{-1}(z) L z'$ haben wir

$$\tan(\gamma) = \frac{|\overrightarrow{z'L}|}{\sin(\alpha)}, \text{ wobei } |\overrightarrow{z'L}| = \cos(\alpha) - |\overrightarrow{Oz'}|, \text{ sodass}$$

④

$$\tan(\gamma) = \frac{\cos(\alpha) - |\overrightarrow{Oz'}|}{\sin(\alpha)} \quad (3)$$

- aus (2), (3) folgt

$$\frac{\gamma}{|\overrightarrow{Oz}|} = \frac{\cos(\alpha) - |\overrightarrow{Oz'}|}{\sin(\alpha)}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{\cos(\alpha) - \frac{\cos(\alpha)}{\gamma + \sin(\alpha)}}{\sin(\alpha)} = \frac{\gamma}{|\overrightarrow{Oz}|}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{Oz}| = \frac{\sin(\alpha) \cdot (\gamma + \sin(\alpha))}{\cos(\alpha) \cdot (\gamma + \sin(\alpha)) - \cos(\alpha)} \quad (4)$$

- z' liegt nach Konstruktion auf \overline{Oz}

- nach (2) und (4) haben wir

$$|\overrightarrow{Oz}| \cdot |\overrightarrow{Oz'}| = \frac{\sin(\alpha) \cdot (\gamma + \sin(\alpha))}{\cos(\alpha) \cdot (\gamma + \sin(\alpha)) - \cos(\alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\gamma + \sin(\alpha)} \\ = \gamma$$

• mit $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ folgt

$$\frac{|z|}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\gamma}{\bar{z}}, \text{ also auch } h_+ h_-^{-1}(z) = \frac{\gamma}{\bar{z}}.$$

• Durch Achsensymmetrie haben wir insb.

$$h_- h_+^{-1}(z) = h_+ h_-^{-1}(z) = \frac{\gamma}{\bar{z}}. \quad (*)$$

• Falls $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ w.R.K mit $a_0 \neq 0$, dann

gilt $Q(z) \stackrel{\text{Def. } Q}{=} h_- f h_+^{-1}(z)$

$$\stackrel{\text{Def. } f}{=} h_- h_+^{-1} P h_+ h_-^{-1}(z)$$

$$\stackrel{(*)}{=} h_- h_+^{-1} P\left(\frac{\gamma}{\bar{z}}\right)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \gamma / \overline{P(1/\bar{z})}$$

$$\stackrel{\text{Def. } P}{=} \gamma / \overline{\sum_{i=0}^n a_i (\gamma/\bar{z})^{n-i}}$$

$$= \gamma / \sum_{i=0}^n \bar{a}_i (\gamma/z)^{n-i} = z^n / \sum_{i=0}^n \bar{a}_i z^i$$

5

$\Rightarrow Q$ ist glatt um 0

$\Rightarrow f = h^{-1}Qh$ ist glatt um $(0,0,0)$.

f hat nur endlich viele kritische Punkte: Nur an den Nullstellen von $P'(z) = \sum a_{n-j} z^{j-1}$ ist P kein lokaler Diffeomorphismus. P' hat nur endlich viele Nullstellen, da nicht identisch mit 0.

\Rightarrow Die Menge der regulären Werte v. f ist eine Sphäre, der endlich viele (kritische) Punkte entnommen wurden.

\Rightarrow Die Menge der reg. Werte v. f ist zusammenhängend.

\Rightarrow Die lokale konstante Funktion $\#f^{-1}(y)$ muss auf der gesamten Menge der reg. Werte v. f konstant sein.

\Rightarrow Da $\#f^{-1}$ nicht überall null sein kann, schließen wir, dass es nirgends null ist.

\Rightarrow Alle $y \in S^2$ bis auf eine endliche Anzahl von Punkten werden getroffen

$\Rightarrow f$ ist surjektiv $\Rightarrow P$ muss eine Nullstelle haben, da es sich als Verknüpfung von surjektiven Funktionen darstellen lässt:

$$P = h \circ f \circ h^{-1}$$

und surjektive Funktionen alles treffen, auch die null. \square

Annahme: f ist nicht surjektiv, d.h. $\exists y \in S^2$, für welches kein $y' \in S^2$ existiert, sodass $f(y') = y$.

- entweder ist y kritischer oder regulärer Wert.

- falls y reg. ist, dann ex. $y' \in S^2 : f(y') = y$, weil $\#f^{-1}$ als Fkt. über die reg. Werte nirgends null ist.

$\Rightarrow y$ muss kritischer Wert sein

$\Leftrightarrow f^{-1}(y)$ enthält einen kritischen Punkt

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ ist nicht leer \Leftrightarrow

\Rightarrow Die Annahme ist falsch.

⑥

Teil 3: Sard's theorem

- Im Allgemeinen ist die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung nicht endlich, aber sie ist "klein" im folgenden Sinne:

Theorem (Sard, 1942) Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und

$$C := \{x \in U \mid \text{rang}(df_x) < n\}.$$

Dann hat die Bildmenge $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß null.

Beweisidee: Induktion über m

- Induktionsanfang: $m=0, n=1$

- Induktions Schritt: Sei $C_n \subset C$ die Menge aller $x \in U$, wo df_x null ist. Allgemeiner, sei C_i die Menge aller $x \in U$, wo alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Wir erhalten die abnehmende Folge v. abgeschlossenen Mengen

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$$

Der Beweis unterteilt sich in 3 Schritte:

- Schritt 1: $f(C - C_1)$ hat Maß 0

- Schritt 2: $f(C_i - C_{i+1})$ hat Maß 0 für $i \geq 1$

- Schritt 3: $f(C_n)$ hat Maß 0 für n ausreichend groß.

Beispiel 1: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$
 $\Rightarrow C = \{(0, 0)\}$ mit $f(C) = \{(0, 0)\}$

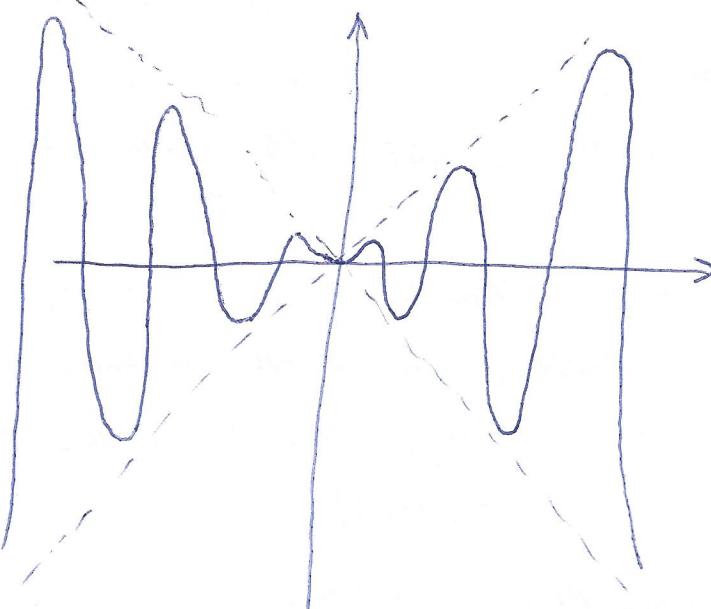
- diskrete, abzählbar unendliche Mengen haben Lebesgue-Maß 0.

Beispiel 2: $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $U := \left\{n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} + (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$\varepsilon = 0,1 \Rightarrow C = \left\{n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ mit $f(C) = \{-1, 1\}$ (Lebesgue-Maß 0).

Beispiel 3: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x)$, $U = \mathbb{R}$ siehe Skizze $\Rightarrow f(C)$ hat abzählbar unendlich viele Elemente, also Lebesgue-Maß 0.

Skizze:



(7)

Beispiel 4: Sei $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit U offen und $m < n$.

$$\Rightarrow \text{rang } df_x \leq m < n \quad \forall x \in U$$

$\Rightarrow C = U$ u. $f(C) = f(U)$ hat Lebesgue-Maß 0.

Wir interessieren uns mehr für den Fall $m \geq n$.

Verallgemeinerung auf (glatte) Mannigfaltigkeiten: Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zw. Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n . Sei C die Menge aller $x \in M$, sodass

$$df_x: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$$

Rang kleiner als n hat. Wir nennen C die Menge der kritischen Punkte und $f(C)$ die Menge der kritischen Werte.

$N - f(C)$ nennen wir die Menge der reg. Werte v. f.

(Dies stimmt mit unserer Def. für $m = n$ überein.)

Korollar (A.B. Brown): Die Menge der regulären Werte einer glatten Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist überall dicht in N .

Beweis: Der Def. kann man M mit einer abzählbaren Menge von Umgebungen überdecken^(*), wobei jede dieser Umgebungen diffeomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m ist. Verdegrade Sard's theorem auf jede dieser Teilmengen an. □

(*) Man stellt sich Menge
bietet in den
 \mathbb{R}^k für passende
Koeffizienten vor.

Um dieses Korollar auszunutzen, benötigen wir folgende Lemmata:

(Satz vom reg. Wert)

⑧ Lemma 7: Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zw. Mannigfaltigkeiten der Dimension $m \geq n$, $y \in N$ reg. Wert. Dann ist $f^{-1}(y) \subset M$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m-n$.

Beweis: Sei $x \in f^{-1}(y)$. Da y reg. Wert ist, muss $df_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ TM_x auf TN_y abbilden und es gilt Spaltenrang $(df_x) = n$ (nach obiger Verallgemeinerung). Nun liefert das Rank-Nullity Theorem (nullity = $\dim(\ker(df_x))$):

$$\text{Spaltenrang}(df_x) + \text{nullity}(df_x) = m$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(df_x)) = m-n$$

$\Rightarrow \ker(df_x) \subset TM_x$ ist ein $(m-n)$ -dim. Vektorraum.

Falls $M \subset \mathbb{R}^k$, wähle eine lin. Abb. $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, die auf $\ker(df_x)$ nicht singulär ist.

$$L \subset TM_x \subset \mathbb{R}^k$$

Definiere $F: M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ über $F(x) = (f(x), L(x))$.

Wir erhalten $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$. Warum ist $dL(v) = L(v)$?

Per Def. ist die Abb. dL die beste affine Approx. an L an einem best. Pkt. a : $L(x) \approx L(a) + dL(x-a) + o(|x-a|)$.

Fkt., die langsamer wächst als ...

L ist linear mit $L(x) = Ax$. Obige Gleichheit wird exakt mit

$$Ax = A \cdot a + dL(x-a)$$

$$\Leftrightarrow A(x-a) = dL(x-a) \Rightarrow dL(x) = Ax = L(x) \text{ ergibt Sinn.}$$

dF_x ist also nicht singulär. Der Satz über die implizite Fkt. liefert folglich, dass F eine Umgebung um x diffeomorph auf eine Umgebung V um $(y, L(x))$ abbildet. Bemerke, dass $f^{-1}(y)$ unter F der Hyperebene $y \times \mathbb{R}^{m-n}$ entspricht und $F(f^{-1}(y)) \cap U$ diffeomorph auf $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$ abbildet.

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dim. $m-n$. \square

Beispiel 5: Sei $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2$. Jedes $y \neq 0$ ist ein reg. Wert und nach Lemma 7 ist $f^{-1}(y)$ eine glatte Mannigf. (Bew. dass die Einheitsfläche eine glatte - " - ist.)

(9)

Notation: Falls M' eine Mannigf. ist, die in M enthalten ist, dann ist $T_{M'_x}$ ein Unterraum von TM_x für $x \in M'$. Das orthogonale Komplement $\perp T_{M'_x}$ von $T_{M'_x}$ in TM_x ist ein Vektorraum der Dimension $m-m'$, genannt "Raum der normalen Vektoren zu M' in M an der Stelle x ".

Lemma 2: Sei $f: M \rightarrow N$ glatt zw. Mannigf. M u. N der Dimension $m \geq n$, $y \in N$ reg. Wert. Sei $M' := f^{-1}(y)$ und $x \in M'$. Dann ist der Kern v. $df_x: TM_x \rightarrow TN_y$ genau der Tangentialraum $TM'_x \subset TM_x$ der Untermannigf. M' . Folglich bildet $df_x|_{\perp TM'_x}$ isomorph auf TN_y ab.

Beweis: Anhand des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\text{id}} & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ y & \xrightarrow{\text{id}} & N \end{array}$$

Seien wir, dass df_x den Unterraum $TM'_x \subset TM_x$ auf null abbildet.

Per Def. haben wir $\dim(TN_y) = n$. Weiter haben wir nach obiger Notation $\dim(\perp(TM'_x)) = m-m'$. (*)

Aus Lemma 7 folgt $\dim(\ker(df_x)) = m-n$. Zusätzlich haben wir $\dim(\ker(df_x)) = \dim(\perp TM'_x) = m'$.

$$(*) \Rightarrow \dim(\perp(TM'_x)) = m-m+n = n$$

Schließlich folgt aus Spaltenrang $(df_x) = n$, dass $df_x|_{\perp(TM'_x)}$ isomorph auf TN_y abbildet.

□

(bij., homomorph (hier lin.))

10

Teil 4: Mannigfaltigkeiten mit Rand

Motivation: Olige Lemmata kann man auch für ^{glatte} ~~Mannigf.~~ mit Rand formulieren.

Def.: Betrachte den ~~grossen~~ abgeschlossenen Halbraum

$$H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

Der Rand ∂H^m ist definiert als die Hyperebene $\frac{\mathbb{R}^{m-1} \times 0}{\subset \mathbb{R}^m}$.

Def.: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^k$ heißt glatte m-Mannigf. mit

Rand, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \cap X$ hat, die diffeomorph zu einer offenen Umgebung $V \cap H^m$ v. H^m ist.

Der Rand ∂X ist die Menge aller Punkten in X , die Punkten v. ∂H^m unter einem Diffeomorphismus entsprechen.

- Ohne Beweis:
 - ∂X ist eine wohldefinierte, glatte Mannigf. der Dim. $m-1$
 - Das Innere $X - \partial X$ ist eine glatte m -Mannigf.
 - T_{X_x} ist ein m -dim. Vektorraum, sogar wenn $x \in \partial X$.

Lemma 3: $\{x \in M : g(x) \geq 0\}$ mit Mannigf. M mit Rand und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit 0 als reg. Wert ist eine glatte Mannigf. mit Rand gleich $g^{-1}(0)$.

Beweis: Wie jener von Lemma 1.

Beispiel 6: Die Einheits Scheibe $D^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum x_i^2 \leq 1\}$ ist eine glatte Mannigf. mit Rand gleich S^{m-1} . Setze hierzu

$$g(x) = 1 - \sum x_i^2. \quad \text{Dann ist } \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \geq 0\} = D^m \text{ und } g^{-1}(0) = S^{m-1}.$$

Lemma 4: Seien X eine m -Mannigf., M eine n -Mannigf., $m > n$, $y \in M$ reg. Wert für f und auch v. $f|_{f^{-1}(y)}$. Dann ist $f^{-1}(y) \cap X$ eine glatte $(m-n)$ -Mannigf. mit Rand. Weiter ist der Rand $\partial(f^{-1}(y))$ genau gleich zu dem Schnitt $f^{-1}(y) \cap \partial X$.

Beweis: Da wir eine lokale Eig. beweisen müssen, genügt es den Spezialfall einer Abb. $f: H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu betrachten mit reg. Wert $y \in \mathbb{R}^n$. Sei $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Falls \bar{x} ein innerer Pkt. ist, dann ist nach Lemma 1 $f^{-1}(y)$ eine glatte Mannigf. in der Umgebung v. \bar{x} .

(77)

Falls \bar{x} ein Randpunkt ist, wähle eine glatte Abb. $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche in der gesamten Umgebung U v. x in \mathbb{R}^m definiert ist und auf $U \cap H^m$ mit f übereinstimmt. Wir können U durch eine kleinere Umgebung ersetzen, falls in $U \cap H^m$ kritische Punkte von g liegen. Wir können so annehmen, dass g keine Krit. Pkt.e in U hat, sodass nach Lemma 1 $g^{-1}(y)$ eine glatte $(m-n)$ -Mannigf. ist.

Sei $\pi: g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenprojektion

$$\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m.$$

(um später Lemma 3 anzuwenden)

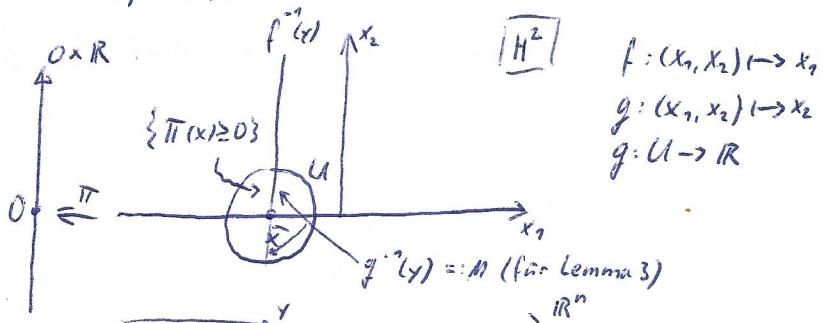
Wir wollen zeigen, dass $\pi(0)$ als reg. Wert hat. (für $\pi(0)$ auswählen)

Nach Lemma 2 ist der Tangentialraum v. $g^{-1}(y)$ am Punkt $x \in f^{-1}(y)$ gleich dem Kern von $dg_x = df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt, dass

$\pi^{-1}(0) \cap U = f^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(y) \cap H^m$. Die Annahme, dass 0 ein kritischer Wert von π ist, wäre äquivalent dazu, dass

$T(g^{-1}(y))_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^{m-n} \times 0 = T(\partial H)_{\bar{x}}$, was wiederum äquivalent dazu wäre, dass $f|_{\partial H}$ y als kritischen Wert hätte, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Folglich muss 0 ein reg. Wert v. π sein.

Beispielsskizze für $m=2, n=1$:



Folglich liefert Lemma 3, dass $g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$, bestehend aus allen $x \in g^{-1}(y)$ mit $\pi(x) \geq 0$, ist eine glatte Mannigf. mit Rand gleich $\pi^{-1}(0)$ ist. \square

(72)

Teil 5: Der Browuer'sche Fixpunktsatz

Wir nutzen nun obige Resultate, um den BFPs zu beweisen.

Lemma 5: Sei X eine kompakte Mannigf. mit Rand. Dann gibt es keine glatte Abb. $f: X \rightarrow \partial X$, die ∂X pkt.-weise fixiert lässt.

Beweis: Ann.: Es existiert eine solche Abb. f .

Sei $y \in \partial X$ ein reg. Wert v. f . Wir haben $\dim(\partial X) = m-1$.

Da y auch ein reg. Wert für die Identität $f|_{\partial X}$ ist, liefert Lemma 4, dass $f^{-1}(y)$ eine glatte Mannigf. (der Dimension $\dim(f^{-1}(y)) = m - m + 1 = 1$) ist mit Rand $f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}$, da dieser Dim. 0 haben muss und $f|_{\partial X}$ die Identität ist.

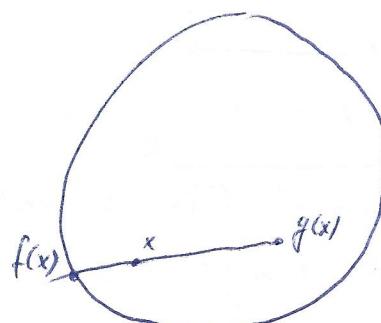
Im Anhang von Milnors Buch findet man den Beweis zu der Aussage: Die einzigen kompakten n -Mannigf. sind endliche, disjunkte Vereinigungen v. Kreisen u. Segmenten.

$\Rightarrow \partial(f^{-1}(y))$ muss aus einer geraden Anzahl Pkt. bestehen. Anzahl von Punkten besteht $\Leftrightarrow \# \partial(f^{-1}(y)) = 1$ \square

Beispiel 7: Die Einheits scheibe D^n ist eine kompakte Mannigf. mit Rand gleich S^{n-1} . Lemma 5 beweist, dass die Identität auf S^{n-1} nicht eine glatte Abb. $D^n \rightarrow S^{n-1}$ erweitert werden kann.

Lemma 6: Jede glatte Abb. $g: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis: Ann.: "g hat keinen Fixpunkt." Für $x \in D^n$, sei $f(x) \in S^{n-1}$ der Punkt näher an x als an $g(x)$ auf der ^{Geraden} durch x und $g(x)$:



Dann ist $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ eine glatte Abb. mit $f(x) = x$ für $x \in S^{n-1}$, was nach Bsp. 7 unmöglich ist und was wir anhand folgender, expliziter Berechnung von $f(x)$ sehen:

$$f(x) = x + t \cdot u, \text{ wobei } u = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \quad \text{und}$$

$$t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2} > 0, \text{ da } g \text{ keinen Fixpunkt hat (nach Annahme).}$$

$$(\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}). \quad \square$$

Brouwerscher Fixpunktsatz: Jede stetige Fkt. $g: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis: Wir reduzieren das Theorem auf das Lemma, indem wir g durch eine glatte Abb. approximieren. Sei $\varepsilon > 0$.

Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz gibt es ein

Polynom $P_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|P_1(x) - G(x)\| \leq \varepsilon$ für $x \in D^n$.

Es ist möglich, dass P_1 Punkte aus D^n aus D^n heraus "schiebt".

Um dies zu korrigieren, setzen wir

$$P(x) = P_1(x)/(1+\varepsilon).$$

$\Rightarrow P$ bildet D^n in D^n ab und $\|P(x) - G(x)\| \leq 2\varepsilon$ für $x \in D^n$.

Ann.: $G(x) \neq x \quad \forall x \in D^n$.

Dann muss die stetige Fkt. $\|G(x) - x\|$ ein Minimum $\mu > 0$ auf D^n annehmen.

Wähle ε so, dass $\mu = 2\varepsilon$. Dann würde ein $x \in D^n$ mit $P(x) = x$ liefern, dass $\mu \geq \|P(x) - G(x)\| = \|x - G(x)\| \geq \mu$. Folglich kann es kein $x \in D^n$ mit $P(x) = x$ geben.

$\Rightarrow P$ ist eine glatte Abb. $D^n \rightarrow D^n$ ohne Fixpunkt.

↙ zu Lemma 6

$$\Rightarrow \exists x \in D^n: G(x) = x \quad \square$$