Guide de l’étudiant

APP7 – Session S3

Mathématiques pour l’ingénieur

Faculté de génie
Université de Sherbrooke

Été 2023

Note : En vue d’alléger le texte, le masculin est utilisé pour désigner les femmes et les hommes.

Document GRO-S3-APP7-Guide_étudiant-E23.docx
Rédigé par Nicolas Quaegebeur, juillet 2022
Mise à jour par Abdelaziz Ramzi, juillet 2023

Table des matières

1. Activités pédagogiques et compétences

GRO305 : Mathématiques pour l'ingénieur – Compétence C2

- Développer ses aptitudes à résoudre numériquement une équation algébrique ou multi-variables non-linéaire

2. Synthèse de l'évaluation

La note attribuée aux activités pédagogiques de l'APP est une note individuelle, sauf pour le rapport d'APP qui est une note par équipe de deux. L'évaluation porte sur les compétences figurant dans la description des activités pédagogiques de l'APP à la section 1.

ACTIVITÉ PÉDAGOGIQUE	GRO305 – C2
VALIDATION / PRÉSENTATION	60
ÉVALUATION SOMMATIVE	120
ÉVALUATION FINALE	120
TOTAL	**300**

L'évaluation sommative porte sur tous les objectifs d'apprentissage de l'unité, tandis que l'évaluation finale sera propre à chacune des activités pédagogiques concernées.

3. Qualités de l'ingénieur

Les qualités de l'ingénieur visées par cette unité d'APP sont les suivantes. D'autres qualités peuvent être présentes sans être visées ou évaluées dans cette unité d'APP.

	Q01	Q02	Q03	Q04	Q05	Q06	Q07	Q08	Q09	Q10	Q11	Q12
Touchée	X	X			X							
Évaluée		X			X							

Les qualités de l'ingénieur sont les suivantes. Pour une description détaillée des qualités et leur provenance, consultez le lien suivant : http://www.usherbrooke.ca/genie/etudiants-actuels/au-baccalaureat/bcapg/.

4. Énoncé de la problématique

Analyse de résultats expérimentaux : Pendule bifilaire

En tant qu'ingénieur de test pour la compagnie U-AV-US, spécialisée dans la conception de drones (UAVs), vous êtes en charge de l'estimation expérimentale des paramètres régissant la dynamique de vol du dernier prototype. Pour ce faire, votre équipe réalise des tests expérimentaux à l'aide d'un montage classique de pendule bifilaire tel que suggéré dans un article scientifique de l'American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) et décrit à la Fig. 1. L'idée est de suspendre à une hauteur h le drone de masse m en deux points à l'aide de deux câbles de même longueur espacés d'une distance D. Ensuite, on soumet le drone à une rotation d'angle initial $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}$ au temps $t = 0$, puis on mesure l'évolution dans le temps de l'angle de rotation $\theta(\mathrm{t})$ à l'aide d'une caméra et de marqueurs.

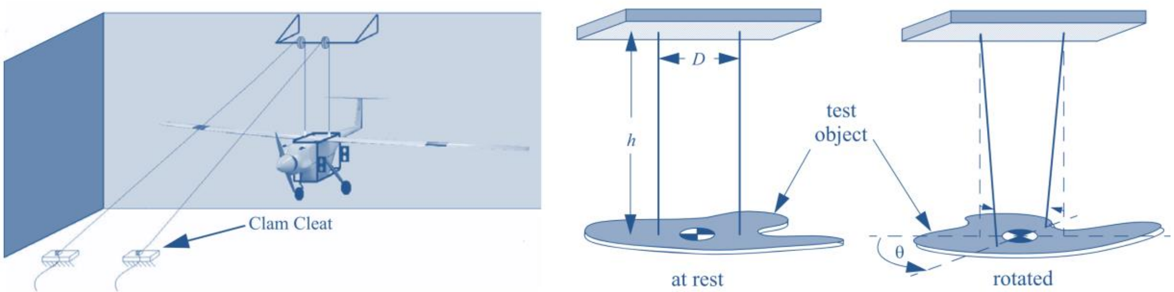

Figure 1: Schéma du dispositif expérimental (gauche). Notation et Paramètres du test (droite).

Les essais ont été réalisés dans deux conditions expérimentales différentes, à savoir sous une cloche à vide et dans l'air. Les résultats de mesure d'une durée totale de 5 secondes sont représentés à la Fig.2 et disponible sous Matlab. Dans les deux cas, les mesures sont fortement bruitées en raison de vibrations parasites du support de la caméra et de l'estimation de l'angle de rotation à partir des marqueurs. Votre but est de retrouver, à partir des mesures expérimentales bruitées de l'évolution temporelle de $\theta(\mathrm{t})$ dans les deux configurations, la valeur I_{UAV} du moment d'inertie suivant l'axe de rotation ainsi que celle du coefficient $\mathrm{K_{UAV}}$ de trainée aérodynamique en rotation (les paramètres en translation ayant été identifiés en soufflerie).

Pour réaliser cela, on vous suggère de modéliser le système dynamique et de retrouver les paramètres du modèle permettent de reproduire au mieux les résultats des expériences réalisées. L'analyse détaillée de la dynamique du système vous révèle que l'évolution de l'angle $\theta(\mathrm{t})$ est en théorie la solution de l'équation différentielle suivante:

$$I\,\ddot{\theta}(\mathrm{t}) + K\dot{\theta}(\mathrm{t})\left|\dot{\theta}(\mathrm{t})\right| + \left(\frac{m\,g\,D^2}{4\,h}\right)\frac{\sin\theta(\mathrm{t})}{\sqrt{1 - 0.5\,\left(\frac{D}{h}\right)^2\,(1 - \cos\theta(\mathrm{t}))}} = 0$$

avec la condition initiale $\theta(t=0) = \theta_0$. Les paramètres du moment d'inertie I et du coefficient de trainée aérodynamique en rotation K sont inconnus, mais toutes les autres grandeurs géométriques sont connues.

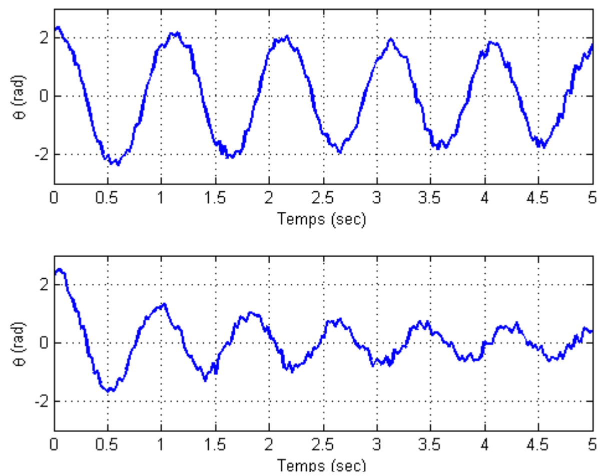

Figure 2: Évolution temporelle pour l'expérience dans le vide (haut) et dans l'air (bas).

Vous avez l'idée, dans un premier temps, de travailler sur les données obtenues dans le vide pour lesquelles la trainée est limitée (mais pas nulle !), càd $K_{UAV} \approx 0$. Un de vos collègue vous suggère de calculer pour différentes valeurs de I, la réponse théorique du système $\theta(t)$ et d'analyser l'erreur quadratique (E) et l'erreur RMS (E_{RMS}) entre la solution mesurée et la solution estimée pour chaque valeur de I. Cette fonction $E(I)$ possède donc un minimum local pour $I = I_{UAV}$ que vous pouvez dans un premier temps estimer graphiquement, puis de manière plus précise par l'utilisation d'outils d'approximation de données discrètes.

Cependant, vous n'êtes toujours pas certain de la qualité de l'approximation de données, et vous souhaitez augmenter la précision de l'estimation du paramètre d'inertie en rotation I_{UAV}. Afin de raffiner cette analyse et de connaître la valeur de I_{UAV} avec une précision donnée, vous avez l'idée de d'utiliser la méthode itérative de Newton-Raphson afin de déterminer la valeur du minimum local de la fonction $E(I)$, avec une précision relative de 0.1%. Cette méthode, très efficace et robuste, n'est cependant pas acceptable, car même si le coefficient K_{UAV} de trainée aérodynamique est faible, il n'est cependant pas nul, ce qui pourrait avoir un effet sur l'estimation du paramètre I_{UAV} !

Après discussion avec l'équipe R&D, on vous suggère donc d'étendre les deux méthodes précédentes (évaluation graphique et itérative) dans le cas de l'expérience dans l'air. Il s'agit donc de calculer à nouveau pour différentes valeurs de I et K, la réponse théorique du système $\theta(t)$ et d'analyser l'erreur RMS entre la solution théorique et la solution mesurée dans l'air. Vous définissez ainsi une fonction multi-variables $E(I,K)$ qui possède un minimum global lorsque les valeurs des paramètres I et K sont égales aux valeurs réelles de l'expérience I_{UAV} et K_{UAV}. Vous décidez dans un premier temps de représenter graphiquement la fonction $E(I,K)$ et d'identifier grossièrement les valeurs de I_{UAV} et K_{UAV}. Cette méthode graphique simple, dite de force brute, s'avère malheureusement très coûteuse en temps de calcul car elle requiert de résoudre l'équation différentielle représentant la dynamique du système à de nombreuses reprises.

Vous avez donc l'idée d'appliquer une méthode itérative dans le but de trouver les valeurs du minimum local, correspondant à un point critique de la fonction à deux variables $E(I,K)$. Ce minimum (I_{UAV}, K_{UAV}) est défini comme le zéro des deux fonctions $F_I(I,K)$ et $F_K(I,K)$ définies comme les dérivées partielles de la fonction $E(I,K)$ par rapport aux deux variables de I et K :

$$F_I(I,K) = \frac{\partial E(I,K)}{\partial I} \qquad\qquad F_K(I,K) = \frac{\partial E(I,K)}{\partial K}$$

Sachant que vous ne disposez pas de la formulation analytique des fonctions $F_I(I,K)$ et $F_K(I,K)$, il est nécessaire d'effectuer ce calcul numériquement à l'aide des outils de différentiation numérique. Il s'agit donc de déterminer de manière itérative les coordonnées du point (I_{UAV}, K_{UAV}) tel que :

$$F_I(I_{UAV}, K_{UAV}) = 0 \qquad\qquad F_K(I_{UAV}, K_{UAV}) = 0$$

La méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce système non-linéaire de deux équations à deux variables est sélectionnée par l'équipe de R&D afin de déterminer simultanément, après convergence, les valeurs de I_{UAV} et K_{UAV} avec une précision choisie. Votre supérieur approuve bien évidemment cette approche élégante et vous demande de communiquer à l'équipe de R&D les valeurs de I_{UAV} et K_{UAV} avec une précision relative de 0.1 % ainsi que de partager une courte présentation Powerpoint résumant les résultats, accompagnée d'un code Matlab fonctionnel pour la semaine prochaine !

Paramètres de l'expérience :

Masse du drone	m	10 kg
Distance entre câbles	D	1 m
Hauteur des câbles	h	3 m
Accélération de la pesanteur	g	9.81N/kg
Angle initial	θ_0	$3\pi / 4$

Moment d'inertie	I	$0 < \mathrm{I} < 1 \quad \mathrm{kg.m}^2$
Coefficient de trainée aéro	K	$0 < \mathrm{K} < 0.1 \quad \mathrm{kg.m}^2.s^{-1}$

Indications :

- Sachant que vous n'avez pas de formulation analytique pour la fonction $E(I,k)$, vous devrez procéder au calcul des dérivées numériques des fonctions $F_I(I,K) = \frac{\partial E(I,K)}{\partial I}$ et $F_K(I,K) = \frac{\partial E(I,K)}{\partial K}$ et de leurs dérivées pour pouvoir implanter la méthode de Newton-Raphson.

- Aussi, cela vous fera un petit rafraichissement des méthodes de différentiation numérique (rappel : si possible, utiliser le schéma centré et un pas le plus petit possible !)

- Afin de pouvoir passer des arguments à la fonction utilisée pour appeler l'ode, référez-vous aux notes de cours. 2 méthodes sont possibles en utilisant des variables globales (sous Matlab `global I`) ou via l'utilisation de fonctions alias (sous Matlab `@`). Référez-vous aux fichiers d'aide de Matlab pour ces deux cas.

5. Connaissances nouvelles

Connaissances déclaratives : ***Quoi***

- Définition d'une fonction de plusieurs variables
- Définition de la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables
- Définition de la notion d'erreur (quadratique, RMS)
- Définition de point critique d'une fonction à plusieurs variables
- Méthode récursive pour déterminer les zéros d'une fonction algébriques
- Méthode récursive pour déterminer les extrema d'une fonction à plusieurs variables

Connaissances procédurales : ***Comment***

- Comment représenter une fonction à plusieurs variables
- Comment calculer les dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables
- Comment quantifier la qualité d'une approximation
- Comment mettre en équation une méthode itérative pour résoudre une équation algébrique
- Comment mettre en équation une méthode itérative pour résoudre une équation à plusieurs variables

Connaissances conditionnelles : ***Quand***

- Choisir l'outil pour estimer la qualité d'approximation des données expérimentales
- Choisir l'outil de représentation d'un problème à plusieurs variables

6. Guide de lecture

6.1. Références essentielles à consulter

Volume obligatoire: Mathématiques pour l'ingénieur : GRO 305 – Nicolas Quaegebeur E2020

6.2. Séquence d'étude suggérée

- Il est très fortement conseillé de réaliser les lectures des chapitres 5 et 7 avant le laboratoire #1 et celle du Chapitre #6 avant le laboratoire #2 pour ne pas perdre de temps car l'APP s'étend uniquement sur 1 semaine !

- **Chapitre 5 - Fonctions multi-variables - 19 pages**
  - se concentrer sur les sections 5.1 à 5.3. La section 5.4 servira à la linéarisation d'équations en S4.
  - Bien regarder l'implantation sur Matlab des fonctions multi-variables en suivant ce lien
  - Vous devez être à l'aise avec le calcul analytique et numérique (savoir dérivée numériquement une fonction à deux variables)
  - Pour vous aider, des vidéos très bien faites sont disponibles sur le site de Khan Academy ou sur Youtube (par le génial 3Blue1Brown)

- **Chapitre 7 : Approximation discrète de données – 8 pages**
  - Le calcul de régression linéaire à 1 et 2 coefficients doit être maîtrisé analytiquement
  - L'approximation polynomiale avec transformations sous Matlab doit être bien maîtrisée
  - Vous devez être capables de calculer les indicateurs d'erreur entre une prédiction et des relevés (section 7.5)

- **Chapitre 6 - Résolution numérique d'équations non-linéaires - 9 pages**
  - La méthode de Newton-Raphson est celle qui sera étudiée et utilisée dans la problématique et en laboratoire (labs #2 et #3)
  - Vous devez être capable de l'implanter en Matlab (ou Python ou C++ d'ailleurs !) rapidement et efficacement dans le cas d'un problème 1D (trouver le zéro ou les points critiques d'une fonction) et 2D (système de 2 équations à 2 inconnues)

7. Logiciels et matériel

Logiciel de référence pour la représentation des données et la résolution des équations algébriques et à plusieurs variables : **MATLAB –** www.mathworks.com

8. Sommaire des activités liées à l'unité

- 1re rencontre de tutorat en 2 groupes
- Étude personnelle et exercices
- Formation à la pratique en laboratoire #*1 – Fonctions multi-variables – Approximation*
- Formation à la pratique en laboratoire #*2 - Méthodes itératives*
- Formation à la pratique en laboratoire #*3 – Problème intégrateur*
- Rencontre collaborative pour la résolution de la problématique
- 2e rencontre de tutorat en 2 groupes
- Évaluation formative
- Consultation facultative
- Évaluation sommative

9. Productions à remettre

Les équipes sont formées de 2 étudiant(e)s et l'inscription des équipes se fait en ligne

Présentation

Une **courte** présentation Powerpoint sera réalisée comme si vous deviez synthétiser les résultats pour une équipe de R&D. Cette présentation de 10 slides max devra comporter les éléments suivants :

- Résolution numérique du problème avec ode45 (mise en équation)
- Détermination « à la main » du minimum local de la fonction à un paramètre (expérience sous vide)
- Méthode itérative à un paramètre
- Résolution du problème à deux paramètres par la force brute (calcul d'erreur, représentation de fonction multi-variable)
- Méthode itérative à deux paramètres (expérience dans l'air)
- Conclusion.

Fichiers de code

Le fichier de code est à remettre sur le site du cours en même temps que la présentation Powerpoint avant le vendredi 30 juillet 13h30.

Procédure de dépôt

Le dépôt du fichier de code Matlab et de la Présentation s'effectue sur le site de l'APP. Inscrire votre nom, numéro de matricule et groupe de tutorat sur chaque livrables. Tout retard sur la remise de livrable entraîne une pénalité de 20 % par jour.

10. Évaluations

La grille d'évaluation pour l'activité pédagogique est la suivante :

Cote au bulletin	W / E		D	D+	C-	C	C+	B-	B	B+	A-	A	A+
Note	<50%		50%	54%	58%	62%	66%	70%	74%	78%	82%	86%	90%
Correspondance de la cote	0		1	1.3	1.7	2	2.3	2.7	3	3.3	3.7	4	4.3
Note (6 niveaux)	0	Insuffisant (25%)	Passable (58%)			Bien (70%)			Cible (82%)			Excellent (100%)	
Qualité (niveaux)	0	1	2			3			4			5	

10.1. Présentation et fichier de code

Compétence	GRO305 – C2	
Qualité	Q02	Q05
Critère	2	2
Description	Élaborer une procédure de résolution	Utiliser les techniques, ressources et outils sélectionnés selon les protocoles établis
Note	20	20
Insuffisant (1) 25 %	N'est pas capable de transformer un problème mathématique sous forme algébrique	N'est pas capable de représenter une fonction multi variable
Passable (2) 58 %	Est capable de transformer un problème sous forme algébrique mais pas d'implémenter une méthode de résolution itérative 1D.	Se trompe dans les calculs d'erreurs sous Matlab. N'est pas capable de faire une interpolation polynomiale
Bien (3) 70 %	Est capable de transformer un problème sous forme algébrique mais pas d'implémenter une méthode de résolution itérative 1D mais pas en ND.	Est capable d'effectuer des calculs d'erreurs sous Matlab et une interpolation polynomiale. Commet des erreurs mineures pour implanter un problème de minimisation d'erreur en 1D
Cible (4) 82 %	Est capable de transformer un problème sous forme algébrique en 1D et ND mais pas de manière optimale (contrôle de l'erreur)	Est capable d'implanter sous Matlab le problème de minimisation d'erreur en 1D et de le faire converger mais pas en 2D
Excellent (5) 100 %	Est capable de sélectionner et de justifier le choix du meilleur outil pour la résolution de problèmes algébriques ND	Est capable d'implanter sous Matlab le problème de minimisation d'erreur en 2D et de le faire converger

10.2. Évaluation sommative

L'évaluation sommative porte sur les objectifs spécifiques d'apprentissage de l'APP. C'est un examen pratique (Matlab) de 1h30 qui se fait sans documentation autre que le formulaire distribué en classe.

10.3. Évaluation finale

L'évaluation sommative porte sur tous les objectifs d'apprentissage de l'unité. C'est un examen théorique et pratique (Matlab) de 3h qui se fait sans documentation autre que le formulaire distribué en classe.

Organisation de l'Activité Pédagogique :

Formation à la pratique en laboratoire #1

Buts de l'activité :

- Mettre en pratique la représentation de données de fonctions multi-variables
- Se familiariser avec les outils d'approximation discrète de données

Formation à la pratique en laboratoire #2

Buts de l'activité :

- Mettre en pratique la méthode de Newton-Raphson dans le cas de fonctions à un paramètre
- Application de la dérivation numérique

Formation à la pratique en laboratoire #3

Buts de l'activité :

- Mettre en pratique la méthode de Newton-Raphson dans le cas de fonctions à 2 paramètres