GRO 305 – FORMULAIRE

DÉRIVÉES USUELLES

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$
$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ où n est un nombre rationnel, $n \neq 1$

$$\int \sin(kx)dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$$
$$\int \cos(kx)dx = \frac{\sin(kx)}{k} + C$$
$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$
$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int e^x dx = e^x dx$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$
$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$$
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

FONCTIONS MULTIVARIABLES

Représentation graphique : `surf, contour3, imagesc, contour`

$$\lim_{(x_1,x_2,\dots x_n)\to(x_1^0,x_2^0,\dots x_n^0)} \frac{f(x_1,x_2,\dots x_i+h,\dots x_n) - f(x_1,x_2,\dots x_i,\dots x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,x_2^0,\dots x_n^0)$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS – NEWTON RAPHSON

Résolution d'un équation à 1 inconnue :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Résolution d'un système de m quations à m inconnues :

$$X_{n+1} = X_n - J_F^{-1}(X_n)\, F(X_n)$$

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(X) \end{bmatrix}$$

APPROXIMATION DISCRÈTE DE DONNÉES

Erreur quadratique : $E = \sum_{n=1}^{N} [g_n - y_n]^2$

Erreur RMS : $E_{RMS} = \sqrt{\frac{E}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} [g(x_n) - y_n]^2}{N}}$

Approximation linéaire de données : $g(x) = a_1 x + a_0$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k & N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} y_k x_k \\ \sum_{k=1}^{N} y_k \end{bmatrix}$$

Coefficient de détermination : $R^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} [g(x_n) - \bar{y}]^2}{\sum_{n=1}^{N} [y_n - \bar{y}]^2}$ avec $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$

CALCUL VECTORIEL INTÉGRAL

Fonction vectorielle : $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

Vecteur tangent : $\vec{r'}(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath} + z'(t)\hat{k}$

Longueur de courbe en 3D : $l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

Longueur de courbe en 2D $y = g(x)$: $l = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$

Intégrale d'une fonction vectorielle $\vec{F}(x, y, z)$ suivant une trajectoire :

$\int_A^B \vec{F}(x, y, z).\ \overrightarrow{dr} = = \int_a^b F_x(t)\, x'(t) + F_y(t)\, y'(t) + F_z(t)\, z'(t)$

DÉRIVATION NUMÉRIQUE

Pas d'une série discrète : $h = x_{k+1} - x_k$

Dérivation avant : $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$ (erreur proportionnelle à *h*)

Dérivation arrière : $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$ (erreur proportionnelle à *h*)

Dérivation centrée : $f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$ (erreur proportionnelle à h^2)

Dérivée seconde : $f''(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) + f(x_{k-1}) - 2f(x_k)}{h^2}$ (erreur proportionnelle à h^2)

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Méthode des rectangles :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\,(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

Erreur : $|\varepsilon_T| \le \frac{h(b-a)}{2} M_T$ avec $\forall c \in [a,b], |f'(c)| \le M_T$

Méthode des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

Erreur : $|\varepsilon_T| \le h^2 \frac{b-a}{12} M_T$ avec $\forall c \in [a,b], |f''(c)| \le M_T$

Méthode de Simpson :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\,(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b))$$

$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h$ (*n* doit être pair)

Erreur : $|\varepsilon_S| \le h^4 \frac{b-a}{180} M_S$ avec $\forall c \in [a,b], |f^{(4)}(c)| \le M_S$

INTÉGRATION D'ODES

Problème aux valeurs initiales d'ordre 1 :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Résolution numérique sous Matlab

```
options = odeset ('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-4)
[t,Y] = ode45(@edofct, TSPAN,Y0,options)
```