GRO 305 : Mathématiques pour l'ingénieur

Laboratoire #1 - Été 2023 – Nicolas Quaegebeur

Exercice 1

On considère la fonction multi-variables suivante :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy - 3y + 100\, e^{-y^2}$$

a) Calculer analytiquement les dérivées partielles de $f(x,y)$ que l'on note $F_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $F_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$
b) Décrire le système à résoudre afin de trouver les points critiques
c) Calculer analytiquement les dérivées secondes partielles de $f(x,y)$ que l'on note $F_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $F_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $F_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
d) Comment caractériser la nature des points critiques ?
e) Linéariser la fonction $f(x,y)$ autour du point $(x,y) = (1,2)$ et calculer cette fonction $f_l(x,y)$.
f) Calculer sous Matlab la fonction $f(x,y)$ pour toutes les valeurs comprises entre $x = (-10, 10)$ et $y = (-10, 10)$.
g) Représenter cette fonction des quatre façons décrites dans les notes de cours.
h) Identifier graphiquement les points critiques de $f(x,y)$.
i) Représenter graphiquement les dérivées partielles $F_x(x,y)$ et $F_y(x,y)$.
j) Calculer, à l'aide des outils de différentiation numérique la dérivées partielle $F_x(x,y)$. Comparer par rapport à la valeur analytique (facultatif)
k) Déterminer graphiquement le signe de $F_{xx}(x,y)F_{yy}(x,y) - (F_{xy}(x,y))^2$ (utiliser la fonction `sign` sous Matlab)
l) Caractériser les différents points critiques (maximum, minimum, selle de cheval ou autre)
m) Représenter la fonction $f_l(x,y)$ pour $x = (-10, 10)$ et $y = (-10, 10)$ et comparer avec $f(x,y)$ sur un même graphique.

Exercice 2

On considére les relevés suivants pour la fonction $h_n = h(x_n)$

x_n	1.0	3.0	4.0	6.0	7.0
h_n	-1.6	4.8	6.1	14.6	15.1

a) Trouver, sans utiliser la commande `polyfit`, l'approximation linéaire g(x) = mx+ b, des données discrètes
b) Calculer l'erreur quadratique, l'erreur RMS ainsi que le facteur R^2
c) Réaliser la même approche avec des polynômes d'ordre 2 et 3 à l'aide de la commande `polyfit` de MATLAB
d) Conclure sur la meilleure approximation possible.

Exercice 3

On considère la suite de relevés suivants pour la fonction

x_n	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_n	11.4	6.1	3.6	3.3	2.1

a) Faire l'approximation des données suivantes avec les fonctions candidates :

$$y = mx + b, \qquad y = \alpha e^{\beta x} \qquad y = \alpha + \frac{\beta}{x}.$$

b) Calculer et comparer l'erreur quadratique dans chaque cas.
c) Conclure sur la meilleure approximation possible

Exercice 4 (facultatif)

À la fin de sa phase de propulsion, la fusée d'un feu d'artifice décrit approximativement une trajectoire parabolique (on néglige la trainée aérodynamique). Quelques mesures de son altitude *h* en fonction de son déplacement horizontal *x* ont été obtenues dans le tableau ci-dessous.
Écrire un code MATLAB qui calcule la fonction parabolique $h(x)$ (polynôme d'ordre 2) représentant la trajectoire et qui en fait le graphique. Calculer (et non pas lire sur le graphique !) aussi la hauteur maximum de sa trajectoire et calculer à quel point de son déplacement *x* ce maximum se trouve.

x_n	2.3	14.7	29.7	31.9	45.7	58.6
h_n	184	860	1345	1385	1360	965