GRO 305 : Mathématiques pour l'ingénieur

Laboratoire #3 - Été 2023 – Nicolas Quaegebeur

On considère dans ce problème les vibrations d'une membrane circulaire de tambour de rayon $a = 10\ cm$. Lorsque l'on excite cette membrane à une certaine fréquence, celle-ci se met à vibrer intensément et l'on appelle ce phénomène une résonance. L'équation qui décrit l'amplitude du déplacement $u(r,\theta)$ à une fréquence particulière par rapport à la distance radiale r et l'angle θ en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$u(r,\theta) = J_2\left(8.4172\,\frac{r}{a}\right)\cos(2\theta)$$

où $J_2(x)$ désigne la fonction de Bessel d'ordre 2 que l'on implémente sous Matlab par la ligne de commande `besselj(2,x)`.On vous rappelle que la transformation des coordonnées cylindriques aux données cartésiennes est donnée par :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \theta = \tan^{-1}(y\,/\,x)$$

a) Transformer l'équation de déplacement $u(r,\theta)$ en une fonction des coordonnées cartésiennes $f(x,y)$.
b) Représenter l'amplitude du déplacement (fonction $f(x,y)$). Bien faire attention à imposer $f(x,y) = 0$ pour les points tels que $r > a$
c) Déterminer graphiquement les points critiques de la fonction $f(x,y)$ et les caractériser graphiquement
d) On s'intéresse au maximum que l'on retrouve sur la ligne $y = 0$. Dans ce cas, reformuler la fonction multivariable $f(x,y)$ dans le cas où on s'intéresse à la ligne $y = 0$ (càd exprimer la fonction $F(x) = f(x,0)$.
e) A l'aide de la méthode de différentiation numérique centrée, représenter numériquement $F'(x)$ pour $0 < x < a$
f) Implémenter la méthode de Newton-Raphson en 1D afin de déterminer le zéros de la fonction $F(x)$ avec une précision de 0.1mm sur la position du zéro.
g) On s'intéresse maintenant à déterminer la position du maximum de la fonction à 2 paramètres $f(x,y)$. A l'aide de la méthode de différentiation numérique centrée, déterminer numériquement et représenter graphiquement $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
h) À l'aide de la méthode de Newton-Raphson en 2D, déterminer la position du maximum absolu de déplacement pour $y > 0$ avec une précision absolue de 0.1mm sur les coordonnées du maximum.