Implémentation des polynômes

Interface

Marc TURRO

Lycée Jean Baptiste de Baudre
47000 AGEN

Les polynômes sont des « bestioles » mathématiques qui s'écrivent sous la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

où les $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les coefficients du polynôme P avec l'obligation que $a_n \neq 0$, et ce plus grand entier n est appelé **degré** du polynôme.

L'objectif de ce travail est double :

- ➩ proposer une implémentation possible d'un polynôme P.
- ➩ définir puis coder les opérations arithmétiques sur les polynômes.

Nous choisirons le langage Python qui présente l'avantage de proposer des types natifs facilement manipulables. Il ne s'agit en aucun cas de maîtriser ce langage pour réaliser les exercices proposés, d'autant que de l'aide sera régulièrement proposée tout au long de ce cours.
Nous finirons ce travail par quelques applications sur les polynômes.

1 Implémenter !

Implémenter, c'est répondre à la question :

Comment représenter un polynôme en machine ?

Nous allons utiliser naturellement un tableau pour représenter les coefficients du polynôme. Ce type (array) est présent dans de nombreux langage : en python, il se cache sous le nom d'une liste !

On peut utiliser une façon très rapide de créer une liste ne contenant, par exemple, que des 0. Cette méthode est la méthode **par compréhension**.

```python
l = [0 for i in range(10)]#construction d'une liste de 10 éléments égaux à 0
```

Nous allons donc choisir **d'implémenter** un polynôme par une liste. Précisément, le polynôme $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ sera représenté par la liste :

```python
P = [a_0, a_1, a_2,.....,a_n]
```

Exercice 1: Implémenter en python, les polynômes $P_1(x) = 5x^3 + x - 5$, $P_2(x) = x^2 + x + 1$ et $P_3(x) = 2 - 3x + 4x^2$

Nous aurons sans doute besoin d'une **fonction** Python qui prend en paramètre un polynôme P et retourne son degré.

Exercice 2: Quel est le lien entre le nombre de coefficient d'un polynôme et son degré ?

L'instruction Python qui donne la longueur d'une liste L est len(L). D'où la fonction degre :

```python
def degre(P):
    return len(P) - 1
```

Exercice 3: Tester la fonction sur les polynômes précédemment créés

Nous aurons besoin de nombreux polynômes pour tester nos opérations. Le code suivant permet de générer un polynôme de degré n à partir de la fonction gen.

```python
from random import randint
def gen(n):
        P = [randint[-9, 9] for i in range(n)] + [1]
        return P
```

Le « + » utilisé ici sert à concaténer les listes

La première ligne vous demande de saisir un entier égale au degré du polynôme. La deuxième instruction permet de déterminer des coefficients aléatoires entre -9 et 9, **sauf** pour le dernier, choisi à 1 pour qu'il ne soit pas nul !! Le polynôme est alors unitaire...

Exercice 4: Créer trois polynômes $T1$,$T2$ et $T5$ de degré 1, 2 et 5 avec la méthode précédente

2 L'arithmétique des polynômes :

Les polynômes sont des objets mathématiques sur lesquels peuvent agir des **opérations** : essentiellement somme et produit.

2.1 Somme de polynômes :

Voici la règle pour sommer deux polynômes :

On ajoute les coefficients situés au même rang et on recopie les autres!

Voici ce que donne le résultat, en maths :

$P_1(x) = 5x^3 + x - 5$	$P_2(x) = x^2 + x + 1$	$P_1(x) + P_2(x) = 5x^3 + x^2 + 2x - 4$
$P_1(x) = 5x^3 + x - 5$	$P_3(x) = 2 - 3x + 4x^2$	$P_1(x) + P_2(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x - 3$
$P_2(x) = x^2 + x + 1$	$P_3(x) = 2 - 3x + 4x^2$	$P_1(x) + P_2(x) = 5x^2 - 2x + 3$

et le même résultat, en python :

```
somme(P1, P2) = [-4, 2, 1, 5]
somme(P1, P3) = [-3, -2, 4, 5]
somme(P2, P3) = [3, -2, 5]
```

L'objectif est de coder la fonction somme utilisée ci-dessus. Pour y parvenir, laissez vous guider par les exercices suivants.

Exercice 5: Quel est le degré de la somme de deux polynômes ?

Exercice 6: Écrire un programme python qui renvoie **le degré** du polynôme égal à la somme de deux polynômes quelconque.

Ce n'est pas si facile que ça! Il faut faire attention quand les polynômes ont le même degré.

Le code étant écrit, il vaudrait mieux l'utiliser comme un outil qui prend en paramètres deux polynômes et retourne le degré de la somme.

Exercice 7: Transformer ces dernières instructions en une fonction Python deg_somme.

Exercice 8: Compléter puis recopier le code suivant qui retourne un polynôme égal à la somme des deux premiers.

```python
def somme(p1, p2):
    p = []#polynome égal à la somme des deux premiers
    #la méthode append permet d'ajouter les coefficients à la liste.
    if degre(p1) == degre(p2):
        for i in range(.........):
            p.append(p1[i] + p2[i])
    elif degre(p1) > degre(p2):
        for i in range(degre(p2) + 1):
            p.append(p1[i] + p2[i])
        for j in range(degre(p2) + 1, degre(p1) + 1):
            p.append(...........)
    else:
        for i in range(degre(p1) + 1):
            p.append(p1[i] + p2[i])
        for j in range(degre(p1) + 1, degre(p2) + 1):
            p.append(............)
    return p
```

Exercice 9: Tester ce code pour effectuer la somme de deux polynômes que vous avez déjà implémentés.

2.2 Produit de polynômes :

2.2.1 Cas simple :

Avant de s'attaquer au plus gros morceau, à savoir le produit de deux (vrais) polynômes, on va étudier un cas particulier : le produit d'un polynôme par un **monôme** !

Un monôme est un polynôme qui ne contient qu'un seul terme!

Par exemple, les polynômes $P_4(x) = 5x^3$, $P_5(x) = -6x^5$ ou encore $P_6(x) = x$ sont des monômes.

Exercice 10: Comment est alors implémenté un monôme ?

Question: Quel est l'effet de la multiplication d'un monôme sur un polynôme?

Facile ! regardons sur quelques exemples :

- Si $P(x) = 4x^2 - 5x + 8$ et $M(x) = 3x^2$ alors $P(x) \times M(x) = 4 \times 3x^{2+\mathbf{2}} - 5 \times 3x^{1+\mathbf{2}} + 8 \times 3x^{0+\mathbf{2}}$ soit $P(x) \times M(x) = 12x^4 - 15x^3 + 24x^2$
- Si $P(x) = 10x^5 + 2x^3 - 7x + 1$ et $M(x) = 2x$ alors $P(x) \times M(x) = 10 \times 2x^{5+\mathbf{1}} + 2 \times 2x^{3+\mathbf{1}} - 7 \times 2x^{1+\mathbf{1}} + 1 \times 2x^{0+\mathbf{1}}$ soit $P(x) \times M(x) = 10x^6 + 4x^4 + 7x^2 + 2x$

Réponse: on multiplie tous les coefficients du polynôme par celui du monôme et on augmentent les puissances du polynôme de la valeur du degré du monôme

Ce qui donne le résultat suivant en Python :

Le produit de [8, −5, 4] par [0, 0, 3] donne [0, 0, 24, −15, 12]. Pour « sentir » l'algorithme sous jacent, effectuer l'exercice suivant :

Exercice 11: Compléter le tableau suivant :

$P(x)$	$M(x)$	$P(x) \times M(x)$
[1, 5, 6, 0, 1]	[0, 5]	....
[-4, 5]	[0, 0, 0, 0, 6]	......
[1, 1, -4]	....	[0, 0, -3, -3, 12]

Exercice 12: Proposer un code Python qui à partir des deux listes données en entrées (représentant un polynôme et un monôme) donne la liste obtenue à partir du produit des deux entrées.

2.2.2 Cas général :

Pour cela, on va coder d'abord un nouvel outil :

Exercice 13: Déterminer une fonction python transf qui prend un paramètre un polynôme P et un entier i et qui retourne le monôme de P situé au rang i

Pour comprendre, ce que renvoie la fonction transf en fonction des choix de P et i :

P	i	tranfs(P, i)
$P(x) = 2 - x + 3x^2$	2	$3x^2$
$P(x) = 2 - x + 3x^2$	0	2
$P(x) = 2 - x + 3x^2$	1	-x

ou en python,

P	i	tranfs(P, i)
$P = [2, -1, 3]$	2	$[0, 0, 3]$
$P = [2, -1, 3]$	0	$[2]$
$P = [2, -1, 3]$	1	$[0, -1]$

En considérant qu'un polynôme est la combinaison naturelle de monôme, il suffira de répéter le produit précédemment implémenter autant de fois que le polynôme multiplicateur contient de monôme. L'exemple ci-dessous clarifie la situation.

Le produit de $P_1(x) = 5x^3 + x - 5$ par $P_2(x) = x^2 + x + 1$ donnerait $P_1(x) \times x^2 + P_1(x) \times x + P_1(x) \times 1$. Il s'agit alors soit de produit de polynôme par un monôme (on sait faire !) soit de somme(on sait faire aussi !). D'où l'algorithme du produit :

Données : Deux polynômes P et Q à multiplier.
Résultat : Le produit de $P \times Q$.
pour *tous les monômes de Q* **faire**
| multiplier P par ces monômes et le stocker dans un résultat partiel
fin
Ajouter tous les résultats partiels

Algorithme 1 : Le produit de deux polynômes décortiqué !

Exercice 14: Coder enfin le produit de deux polynômes selon l'algorithme donné ci-dessus...