Informatique en MP(2)I

Marc de Falco

# Langages réguliers et automates finis - Exercices



## I Exercices

### I.1 Exercices d'application

**Exercice 1** Si $L = \{a\}$ et $L' = \{b\}$, déterminer les langages suivants : $L^*, L'^*, LL', L + L', (LL')^*, (L + L')^*, L^*L'^*, L^* + L'^*$.

**Exercice 2** Déterminer des expressions régulières dénotant les langages suivants.

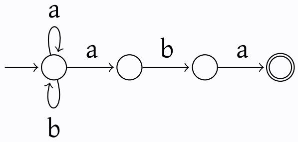
1. L'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant au moins un a et au moins un b.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la dixième lettre en partant de la fin est un $b$.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ contenant au plus deux b consécutifs.
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ tels qu'aucun facteur $aa$ ne soit précédé d'un facteur $bb$. $aabaabb$ convient mais pas $aabbaa$.
5. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont le nombre de $a$ est divisible par $5$.

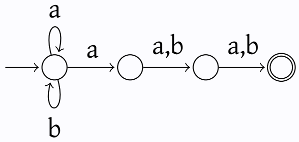
**Exercice 3** Décrire informellement les langages dénotés par les expressions régulières suivantes.

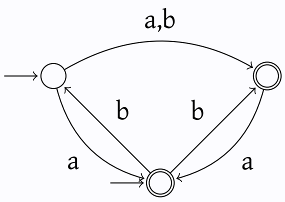
1. $(a|\epsilon)(aa^*b)^*a^*$
2. $(a^*b^*)^*aaa(a|b)^*$
3. $(a + ba)^*b^*$

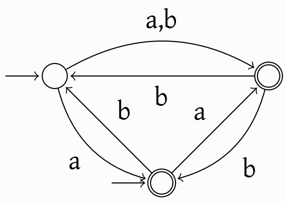
**Exercice 4** Montrer qu'il n'existe que deux langages dont l'étoile est finie.

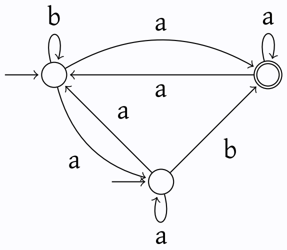
**Exercice 5** Déterminiser les automates suivants :

(a 

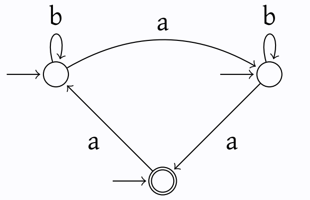

(b 


(c 

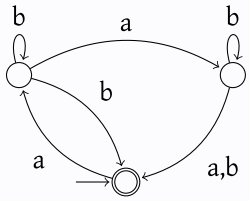

(d 



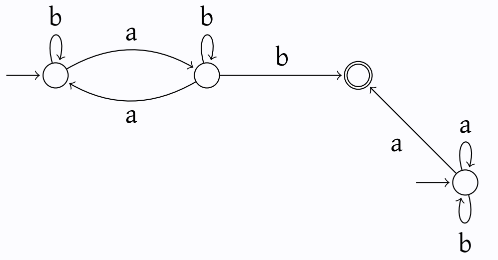
(e



(f



(g



(h

**Exercice 6** Pour chacune des expressions régulières suivantes, déterminez un automate fini non déterministe avec transitions spontanées qui reconnait le langage qu'elle dénote, éliminez les transitions spontanées pour en déduire un automate non déterministe, puis, déterminez un automate directement par Berry-Sethi.

1. $ab^*$
2. $(a|b)ab$
3. $aa(a|b)^*$

**Exercice 7** On considère la table de transition :

| | | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_1$ |
| | $q_2$ | $q_3$ | $q_1$ |
| $*$ | $q_3$ | $q_3$ | $q_2$ |

1. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(0)}$.
2. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(1)}$ en la simplifiant.
3. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(2)}$ en la simplifiant.
4. En déduire une expression régulière dénotant le langage reconnu par l'automate.
5. Appliquer la méthode d'élimination des états pour obtenir une expression régulière.

**Exercice 8** Montrer que les langages suivants ne sont pas réguliers.

1. L'ensemble des expressions bien parenthésées : $P$ défini par induction avec $\epsilon \in P, \forall e_1, e_2 \in P, e_1e_2 \in P$ et $\forall e \in P, (e) \in P$.
2. $\{ a^n b c^n \mid n \geq 1 \}$.
3. $\{ a^n b^m c^n \mid n, m \in \mathbb{N} \}$
4. $\{ a^n b^m \mid n \leq m \}$
5. $\{ a^n b^{2n} \mid n \geq 1 \}$

**Exercice 9** Même exercice que le précédent, mais les preuves sont plus délicates.

1. $\left\{ a^{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $\{ a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$
3. $\{ w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, |w| = n^2 \}$
4. $\{ w^2 \mid w \in \Sigma^* \}$
5. $\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ est l'écriture d'un premier en binaire $\}$
6. $\{ a^i b^j \mid i \wedge j = 1 \}$.

## I.2 Lemme d'Arden

**Théorème I.1** Soit $A, B$ deux langages sur $\Sigma$.

Le langage $L = A^*B$ est le plus petit langage solution de l'équation

$$X = AX \cup B$$

De plus, si $\epsilon \notin A$, cette solution est unique.

**Exercice 10** Démontrer ce théorème.

## I.3 Explosion exponentielle de la déterminisation

**Exercice 11** On va montrer dans cet exercice, qu'il est possible de trouver un automate à $n$ états dont le déterminisé par l'automate des parties contient $O(2^n)$ états.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, définir un automate fini non-déterministe à $n+1$ états sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui reconnait les mots de la forme $waw'$ avec $|w'| = n-1$, c'est-à-dire les mots qui ont un $a$ en n-ième position en partant de la fin.
2. Montrer que le déterminisé de cet automate contient au moins $2^n$ états.

## I.4 Miroir d'un langage

**Exercice 12** Soit $\Sigma$ un alphabet fini.

Si $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ est un mot non vide, on note $w^R = a_n \dots a_1$ le mot $w$ lu *à l'envers*. On l'appelle le miroir de $w$.

Soit $L \subset \Sigma^*$ un langage. On note $L^R = \left\{ w^R \;\middle|\; w \in L \right\}$ le miroir de $L$.

1. Montrer que le langage des palindromes
$$P = \{ w \in \Sigma^* \mid w = w^R \}$$
n'est pas régulier.
2. On va donner deux preuves du fait que les langages réguliers sont stables par miroir.
   1. Soit $L$ un langage régulier et $A$ un automate reconnaissant $L$, en déduire un automate non déterministe avec transitions spontanées $A^R$, en renversant les transitions, permettant de reconnaitre $L^R$.
   2. Soit $e$ une expression régulière, déterminer par induction une expression régulière $e^R$ dénotant $lang(e)^R$.

# II Exercices de colle

## II.1 Moitié d'un langage

**Exercice 13** Soit $L \subset \Sigma^*$, on note

$$\frac{1}{2}L = \{\ u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L\ \}$$

■ **Preuve**

Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ un automate déterministe reconnaissant $L$. L'idée ici est que si $u \in \frac{1}{2}L$ et que $\delta^*(i, u) = q$, unique car $A$ est déterministe, alors il existe un chemin de longueur $|u|$ tel que $q \rightsquigarrow q' \in F$.

Donc, pour déterminer un automate reconnaissant $\frac{1}{2}L$, on peut simuler **tous les chemins possibles** depuis tous les états en même temps qu'on lit $u$. Quand on a finit de lire, on a qu'à vérifier si dans les chemins enumérés il y en a un issu de $q$ qui aboutit sur un état dans $F$.

On va ainsi noter $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ et supposer que $i = q_1$. On suppose de plus que $A$ est complet, quitte à ajouter un état puits.

On pose

$$A' = (\Sigma, Q \times Q^n, \delta', (q_1, (q_1, \dots, q_n)), F')$$

avec

$$\forall (q, (s_1, \dots, s_n)) \in Q \times Q^n, \forall a \in \Sigma, \delta'((q, (s_1, \dots, s_n)), a) = \{\ (\delta(q, a), (\delta(s_1, b), \dots, \delta(s_n, b))) \mid b \in \Sigma\ \}$$

ce qui revient à faire exactement comme $A$ sur la première composante et à faire tous les chemins possibles sur la seconde de manière non déterministe. On remarque que

$$\delta'^*((q_1, (q_1, \dots, q_n)), u) = \{\ (\delta^*(q_1, u), (\delta^*(q_1, v), \dots, \delta^*(q_n, v))) \mid v \in \Sigma^*, |v| = |u|\ \}$$

Pour les états finaux, on pose

$$F' = \{\ (q_i, (s_1, \dots, s_n)) \mid s_i \in F\ \}$$

ce sont les états tels qu'on puisse atteindre un état final depuis ceux-ci en prenant le même temps que pour arriver sur l'état.

Soit $u \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned}
u \in lang(A') &\iff \delta'^*((q_1, (q_1, \dots, q_n)), u) \cap F' \neq \emptyset \\
&\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } (\delta^*(q_1, u), (\delta^*(q_1, v), \dots, \delta^*(q_n, v))) \in F' \\
&\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(\delta^*(q_1, u), v) \in F \\
&\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(q_1, uv) \in F \\
&\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } uv \in L \\
&\iff u \in \tfrac{1}{2}L
\end{aligned}$$

■

**Exercice 14** Soit $L, L' \subset \Sigma^*$, on note

$$L : L' = \left\{\ u \in L \mid \exists v \in L', |u| = |v|\ \right\}$$

Montrer que si $L$ et $L'$ sont réguliers, alors $L : L'$ est régulier.

■ **Preuve**

C'est un peu comme l'exercice précédent, on va considérer $A$ et $A'$ déterministes et complets reconnaissant respectivement $L$ et $L'$, et simuler tous les chemins possibles dans $A'$ pendant qu'on lit un mot dans $A$. Si on peut aboutir en même temps sur deux états finaux, on aura reconnu le mot.

On pose donc $A'' = (\Sigma, Q \times Q', \delta'', (i, i'), F \times F')$ et

$$\delta''((q, q'), a) = \left\{\ (\delta(q, a), \delta'(q', b)) \mid b \in \Sigma\ \right\}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} u \in lang(A'') &\iff \delta''^*((i,i'),u) \cap F \times F' \neq \emptyset \\ &\iff \{\ (\delta^*(i,u), \delta'^*(i',v)) \mid v \in \Sigma^*, |v| = |u|\ \} \cap F \times F' \neq \emptyset \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(i,u) \in F, \delta'^*(i',v) \in F' \\ &\iff u \in L \text{ et } \exists v \in L', |u| = |v| \\ &\iff u \in L : L' \end{aligned}$$

■

**Exercice 15** Soit $L \subset \Sigma^*$.

1. Soit $a \in \Sigma$, on pose $L \backslash a = \{\ w \in \Sigma^* \mid wa \in L\ \}$.
2. $\min(L) = \{\ w \in L \mid \forall w = uv, v \neq \emptyset \Rightarrow u \notin L\ \}$ les mots de $L$ dont aucun préfixe propre n'est pas dans $L$.
3. $\max(L) = \{\ w \in L \mid \forall u \in \Sigma^*, u \neq \epsilon \Rightarrow wu \notin L\ \}$ les mots de $L$ qui ne sont préfixes propres d'aucun mot de $L$.

Montrer que si $L$ est régulier, alors $L \backslash a$, $\min(L)$ et $\max(L)$ sont réguliers.

■ **Preuve**

Dans tous les cas, on va procéder de la même manière : on part d'un AFD complet $A$ reconnaissant $L$ et on en déduit un AFD $A'$ reconnaissant le langage qui nous intéresse.

Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ reconnaissant $L$.

**Construction 1** On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta, i, F')$ où

$$F' = \{\ q \in Q \mid \delta(q,a) \in F\ \}$$

Montrons que $lang(A') = L \backslash a$ :

Soit $w \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} w \in lang(A') &\iff \delta^*(i,w) \in F' \\ &\iff \delta(\delta^*(i,w),a) = \delta^*(i,wa) \in F \\ &\iff wa \in L \\ &\iff w \in L \backslash a \end{aligned}$$

On a bien $lang(A') = L \backslash a$ donc ce langage est régulier.

**Construction 2** On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta', i, F)$ où

$$\forall q \in Q \backslash F, \forall a \in \Sigma, \delta'(q,a) = \delta(q,a)$$

On supprime ainsi les transitions issues d'un état final.

Comme $q \to q'$ dans $A'$ entraine $q \notin F$, on remarque qu'un chemin dans $A'$ passe au plus dans un état final,et nécessairement comme dernier état du chemin.

Soit $w \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} w \in lang(A') &\iff \delta'^*(i,w) \in F \\ &\iff \delta^*(i,w) \in F \text{ et } \forall w = uv, v \neq \epsilon \Rightarrow \delta^*(i,u) \notin F \\ &\iff w \in L \text{ et } \forall w = uv, v \neq \epsilon \Rightarrow u \notin L \\ &\iff w \in \min(L) \end{aligned}$$

On a bien $lang(A') = \min(L)$ donc ce langage est régulier.

**Construction 3** On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta, i, F')$ où

$$F' = \{\ q \in F \mid \forall q' \in Q, q \neq q' \wedge q \rightsquigarrow q' \Rightarrow q' \notin F\ \}$$

les états finaux desquels on ne peut pas rejoindre un autre etat final.

Soit $w \in \Sigma^*$, on va noter $q = \delta^*(i,w)$.

Supposons $q \in F'$ et soit $u \in \Sigma^*$ tel que $u \neq \epsilon$. On pose $q' = \delta^*(q,u)$, on a $q \rightsquigarrow q'$ donc $q' \notin F$ or $q' = \delta^*(i,wu)$ donc $wu \notin L$. Ainsi $w \in \max(L)$.

Réciproquement, si $w \in \max(L)$, soit $q' \in Q$ tel que $q \neq q'$ et $q \rightsquigarrow q'$. On note $u$ l'étiquette de ce chemin, $u \neq \epsilon$ car $q \neq q'$, on a $\delta^*(q,u) = q' = \delta^*(i,wu)$ or $wu \notin L$ par hypothèse sur $w$. Donc $q' \notin F$. On vient de montrer que $q \in F'$.

On a donc,

$$w \in lang(A') \iff q \in F' \iff w \in \max(L)$$

On a bien $lang(A') = \max(L)$ donc ce langage est régulier.

■