Marc de Falco

Recherche par Force brute

Source image : https://www.flickr.com/photos/x6e38/3440634940/

I Principe

I.1 Problème de décision et exploration exhaustive

Considérons un problème du type trouver un $x \in V$ vérifiant une propriété $P(x)$.

Exemple

- V est l'ensemble des chaînes de caractères et P vérifié si si une chaîne est un mot de passe qu'on cherche.
- V est l'ensemble des indices possibles dans un tableau `t` et P vérifie si la valeur à l'indice i est une valeur x que l'on cherche.
- V est l'ensemble des grilles complétées d'un problème de Sudoku et P vérifie si la grille est valide.
- V est l'ensemble d'assemblages de pièces d'un puzzle et P vérifie si le puzzle est correcte, c'est-à-dire si deux pièces côtes à côtés ont des côtés compatibles.

Dans certains problèmes, un tel x n'est pas unique et on cherche à tous les énumérer.

Une recherche par force brute ou recherche exhaustive, consiste à énumérer l'ensemble V jusqu'à obtenir une solution en testant P pour chaque valeur rencontrée.

Des problèmes précédents, la recherche linéaire est le plus simple et le programme suivant est caractéristique d'une recherche exhaustive :

OCaml
```ocaml
exception Trouve of int

let recherche t x =
  try
    for i = 0 to Array.length t - 1 do
      if t.(i) = x
      then raise (Trouve i)
    done;
    raise Not_found
  with Trouve i -> i
```

La forme usuelle sera alors

```
pour chaque v dans V
    si P(v) est vérifié
       s'arrêter avec la solution v
```

On rappelle que pour pouvoir s'arrêter au cours de l'énumération en `OCaml`, si on programme en impératif, on utilise en général des exceptions comme dans le chapitre Exceptions en OCaml.

Cela pose naturellement la question de l'énumération des éléments de V. Si c'est immédiat dans l'exemple peu pertinent de la recherche dans un tableau, c'est beaucoup plus complexe pour l'énumération des assemblages de pièces d'un puzzle, par exemple.

Pour la recherche du mot de passe, on pourrait commencer par énumérer les chaînes de longueur 1, puis de longueur 2, et ainsi de suite.

Le plus souvent, l'ensemble V est fini (pour les mots de passe, cela peut consister à limiter la longueur maximale du mot de passe). Ainsi, une recherche par force brute effectue $O(|V|)$ itérations.

I.2 Problème d'optimisation et exploration exhaustive

On retrouve la notion d'exploration exhaustive ou force brute pour des problèmes d'optimisation. Il s'agit de problèmes de la forme : déterminer $x \in V$ tel que $f(x)$ soit minimale ou maximale.

L'exploration exhaustive consiste alors à calculer toutes les images par f des éléments de V afin de déterminer un extremum.

II Recherche par retour sur trace (backtracking)

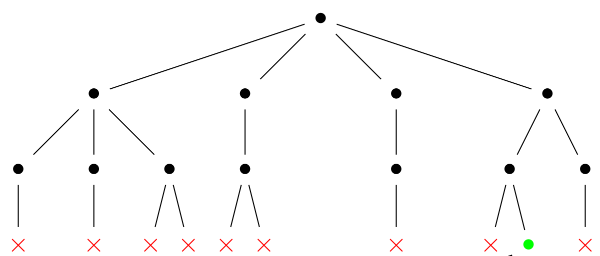
II.1 Construction itérative de candidats

Dans de nombreux cas, l'ensemble V peut se décrire une processus itératifs de construction de ses éléments. Une manière de voir cela est de parler de positions et de mouvements, ou coups.

Par exemple, considérons un puzzle comme le puzzle Eternity II constitué de 256 pièces carrées. Une configuration finale du puzzle consiste à avoir placé les 256 pièces. Parmi celles-ci, les configurations valides sont celles satisfaisant les contraintes de chaque côté.

Comme pour tous les puzzles, la position initiale est un plateau vide et chaque mouvement consiste à placer une pièce disponible dans un emplacement disponible. Cela correspond à la manière dont on procéderait à la main :

Ainsi, on peut représenter la construction de V sous la forme d'un arbre dont les nœuds sont les positions et les arêtes les mouvements. Les positions complètes sont les feuilles de l'arbre, elles correspondent aux éléments de V et ce sont donc celles-ci qu'on va explorer pour y trouver une solution.



L'avantage de cette représentation arborescente est qu'elle découle naturellement d'un parcours récursif des positions.

Tout d'abord, il va falloir définir un type de positions partielles comme on a pu le voir dans le chapitre Options en OCaml.

Comme indiqué dans ce chapitre, si le type d'une grille de Sudoku remplie est `int array array`, pour pouvoir représenter des grilles en cours de remplissage, on va utiliser le type `int option array array`. On rappelle que l'utilisation de la valeur `None` permettra de représenter une partie non construite comme une case vide.

On considère ainsi un type `position` des positions partielles, un type `mouvement` et des fonctions

OCaml
```ocaml
(* les mouvements accessibles depuis une position.
  [] si la position est complète *)
val mouvements : position -> mouvement list
(* applique un mouvement *)
val applique : position -> mouvement -> position
```

```
(* vérifie si une position est complete *)
val complete : position -> bool
(* vérifie si une position complete est valide *)
val valide : position -> bool
```

Schématiquement, un algorithme d'énumération aura la structure suivante en `OCaml` :

```ocaml
exception Solution of position

let rec enumere pos =
    if complete pos
    then begin
        if valide pos
        then raise (Solution pos)
    end else
        List.iter (fun mouv -> enumere (applique pos mouv))
            (mouvements pos)
```

Remarque Ici, l'usage de `List.iter` permet de faire l'équivalent d'une boucle for mais sur une liste. Pour s'en passer, on peut écrire une fonction auxiliaire récursive ou, quand les mouvements sont en petit nombre, une conversion en `array` suivie d'une boucle `for`.

Si la position initiale est `pos0`, on pourra résoudre le problème ainsi :

```ocaml
let resout () =
    try
        enumere pos0;
        raise Not_found
    with Solution pos -> pos
```

Cet algorithme de parcours des solutions est appelé le *retour sur trace*, ou *backtracking* en anglais. Il tire partie de la récursivité pour remonter les positions après avoir essayé en vain une construction.

Remarque Il est possible de reprendre la construction précédente avec des données mutables et une manière de *défaire* les mouvements :

```ocaml
val applique : position -> mouvement -> unit
val defaire : position -> mouvement -> unit

let rec enumere pos =
    if complete pos
    then begin
        if valide pos
        then raise (Solution pos)
    end else
        List.iter (fun mouv ->
                applique pos mouv;
                enumere pos;
                defaire pos mouv)
            (mouvements pos)
```

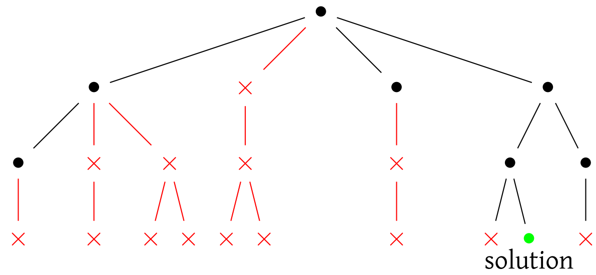
II.2 Évaluation partielle et raccourcis

Si on reprend la construction itérative précédente, on se rend compte qu'elle n'est pas très intelligente : faut-il remplir l'intégralité d'un puzzle avant de se rendre compte qu'il est invalide en raison des deux premières pièces ?

On peut donc raffiner l'approche précédente en introduisant une notion de mouvements valides qui sont les mouvements qui préservent la correction partielle.

En pratique, il suffit de remplacer la fonction `mouvements` par une fonction `mouvements_valides`.

C'est un changement réduit qui peut avoir un grand impact sur l'arbre des positions. En reprenant l'illustration précédente, on peut imaginer que cela reviendrait à ne pas parcourir les mouvements rouges et les sous-arbres associés :



II.2.i Problème : résolution de Sudoku

La recherche par retour sur trace se prête très bien à la résolution de problèmes comme le Sudoku. On va ici tout simplement tenter de remplir chaque case du haut vers le bas tant qu'on satisfait les contraintes du Sudoku. Le programme sera ainsi très proche de la résolution des huit reines.

Commençons par rappeler le principe du Sudoku :

- On part d'une grille de 81 cases réparties en une grille de 3x3 sous-grilles de 3x3 cases et comportant des chiffres de 1 à 9 dans certaines cases.

1								6
		6		2		7		
7	8	9	4	5		1		3
			8		7			4
				3				
	9				4	2		1
3	1	2	9	7			4	
	4			1	2		7	8
9		8						

- L'objectif est de remplir chaque case avec un chiffre de 1 à 9 de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque sous-grille 3x3 comporte une et une seule fois chaque chiffre.
- Un sudoku admet une unique solution.

Pour représenter une grille de Sudoku en `OCaml` on utilise un `(int option) array array`, la valeur `None` signifiant que la case est vide et la valeur `Some x` qu'elle est remplie avec la valeur x.

```ocaml
type grille = (int option) array array
```

On fait le choix de représenté la grille par un tableau de lignes, ce qui signiie que pour accèder à la case de coordonnée (x, y) dans g il faut écrire `g.(y).(x)`.

Le problème donné précédemment est alors représenté par la valeur suivante :

```ocaml
let probleme = [|
    [| Some 1; None; None;    None; None; None;    None; None; Some 6 |];
    [| None; None; Some 6;    None; Some 2; None;    Some 7; None; None |];
    [| Some 7; Some 8; Some 9;    Some 4; Some 5; None;    Some 1; None; Some 3 |];

    [| None; None; None;    Some 8; None; Some 7;    None; None; Some 4 |];
    [| None; None; None;    None; Some 3; None;    None; None; None |];
    [| None; Some 9; None;    None; None; Some 4;    Some 2; None; Some 1 |];

    [| Some 3; Some 1; Some 2;    Some 9; Some 7; None;    None; Some 4; None |];
    [| None; Some 4; None;    None; Some 1; Some 2;    None; Some 7; Some 8 |];
    [| Some 9; None; Some 8;    None; None; None;    None; None; None |];
    |]
```

Afin de définir la fonction de résolution, on définit une première fonction `suivant` de signature :

```ocaml
val suivant : grille -> (int * int) -> (int * int) option
```

telle que l'appel à `suivant g (x,y)` renvoie `Some (xi,yi)` quand (x_i, y_i) sont les coordonnées de la prochaine case libre, dans l'ordre gauche à droite puis haut vers bas, après (x, y) ou `None` quand il n'existe pas de telle case libre. Cela signifie alors que la grille est entièrement remplie.

```ocaml
let rec suivant g (x,y) =
  if y > 8
  then None
  else if g.(y).(x) = None
  then Some (x,y)
  else if x < 8 then suivant g (x+1, y)
  else suivant g (0, y+1)
```

On définit également une fonction `valide` de signature

```ocaml
val valide : grille -> int -> int -> bool
```

telle que l'appel à `valide g x y` renvoie `true` si et seulement si la valeur placée en coordonnée (x, y) n'invalide pas la grille. Ne pas prendre cette valeur en paramètre permettant d'écrire un peu plus simplement cette fonction. La fonction est assez directe, étant donné (x, y) on va parcourir sa ligne, sa colonne et sa sous-grille pour vérifier qu'un nombre n'a pas été placé deux fois à l'aide d'un tableau de drapeaux :

```ocaml
let valide g x y =
  let v = ref true in
  let vus_colonne = Array.make 9 false in
  for y0 = 0 to 8 do
    match g.(y0).(x) with
    | None -> ()
    | Some k ->
        if vus_colonne.(k-1)
        then v := false;
        vus_colonne.(k-1) <- true
  done;
  let vus_ligne = Array.make 9 false in
  for x0 = 0 to 8 do
    match g.(y).(x0) with
    | None -> ()
    | Some k ->
        if vus_ligne.(k-1)
        then v := false;
        vus_ligne.(k-1) <- true
  done;
  let vus_grille = Array.make 9 false in
  let xb = (x / 3) * 3 in
  let yb = (y / 3) * 3 in
  for xd = 0 to 2 do
    for yd = 0 to 2 do
      match g.(yb+yd).(xb+xd) with
      | None -> ()
      | Some k ->
          if vus_grille.(k-1)
          then v := false;
          vus_grille.(k-1) <- true
    done
  done;
  !v
```

On peut alors définir la fonction `resout` qui va résoudre le Sudoku en effectuant tous les remplissages tant qu'on a une grille valide. Dès qu'une solution est trouvée, on s'arrête. Pour cela, on utilise le mécanisme des exceptions pour permettre une sortie prématurée. On a fait le choix de travailler en place dans la grille, ainsi à la fin de l'exécution de la fonction, la grille correspond à la solution.

OCaml
```
exception Solution

let resout g =
    let rec aux xi yi = match suivant g (xi, yi) with
        | None -> raise Solution
        | Some (x,y) ->
            for i = 1 to 9 do
                g.(y).(x) <- Some i;
                if valide g x y
                then begin
                    aux x y
                end
            done;
            g.(y).(x) <- None
    in
    try
        aux 0 0
    with Solution -> ()
```

II.3 Énumération de toutes les solutions

Le problème précédent du Sudoku n'avait par définition qu'une unique solution. Cependant, il existe des problèmes pour lesquels plusieurs solutions existent et pour lesquels on souhaite les énumérer.

La fonction précédente pourra alors devenir :

OCaml
```
let rec enumere pos =
    if complete pos
    then begin
        if valide pos
        then [ pos ]
        else []
    end else
        List.concat
            (List.map (fun mouv -> enumere (applique pos mouv))
                (mouvements_valides pos))
```

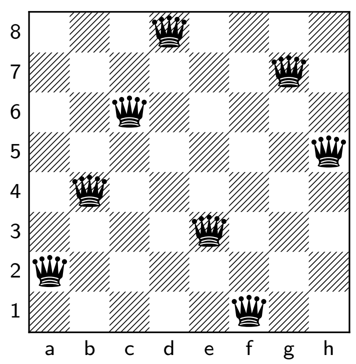
Remarque La fonction `List.concat` permet de concaténer une `'a list list` d'un coup comme dans :

OCaml
```
# List.concat [ [1;2]; [3]; []; [4;5;6] ];;
- : int list = [1; 2; 3; 4; 5; 6]
```

II.3.i Problèmes des huit reines

L'exemple classique de ce problème est celui des huit reines : étant donné un échiquier, peut-on placer huit reines de sorte qu'aucune reine ne puisse prendre une autre reine ? Plus précisément : sur un plateau de 8x8 cases, peut-on placer huit pions tels que deux pions quelconques ne soient jamais sur la même ligne ou la même diagonale ?

Exemple de solution :



Ce problème admet effectivement des solutions partielles en ne considérant que k reines à placer. Pour énumérer les solutions, on peut même se contenter de solutions partielles où les k reines sont placées sur les k premières rangées.

Voici ainsi un algorithme pour énumérer les solutions :

- Supposons que k reines aient été placées et qu'on dispose d'une solution partielle.
  - ⋆ Si $k = 8$ alors toutes les reines sont placées et la solution est complète, on la comptabilise
  - ⋆ Sinon, on continue la recherche pour chaque position de la $k+1$ reine sur la $k+1$ rangée qui préserve le fait d'être une solution partielle.

Ici, quand on dit qu'on continue la recherche, ce qu'on signifie, c'est qu'on effectue un appel récursif.

Pour programmer cette méthode, on va définir une fonction récursive de signature :

OCaml
```
val resout_reines : (int * int) list -> (int * int) list list
```

Un appel à `resout_reines part` va ainsi renvoyer la liste des solutions complètes construites à partir de la solution partielle `part`. Les solutions sont représentées par des listes de couples de coordonnées sur l'échiquier, donc dans $[|0;7|]^2$

Voici une implémentation où on explore les solutions à l'aide d'une boucle impérative dans l'appel récursif. La fonction `valide` permet de tester si le placement d'une reine est possible avant d'effectuer un appel.

OCaml
```
let rec valide (x1,y1) l =
    match l with
    | [] -> true
    | (x2,y2)::q ->
        x1 <> x2 && abs (x2-x1) <> abs(y2-y1) && valide (x1,y1) q

let rec resout_reines part =
    let k = List.length part in
    if k = 8
    then [ part ]
    else begin
        let resultats = ref [] in
        for x = 0 to 7 do
            let essai = (x,k) :: part in
            if valide (x,k) part
            then begin
                resultats := (resout_reines essai) @ !resultats;
            end
        done;
        !resultats
    end
```

et, ici, une autre implémentation purement récursive à l'aide d'une fonction récursive.

OCaml
```
let rec resout_reines part =
    let k = List.length part in
    if k = 8
    then [ part ]
    else
        let rec aux x acc =
            if x < 0
            then acc
            else let essai = (x,k) :: part in
                let nacc = if valide (x,k) part
                           then (resout_reines essai) @ acc
                           else acc in
                  aux (x-1) nacc
        in
        aux 7 []
```

Une partie de l'arbre de recherche est présenté sur l'image suivante :

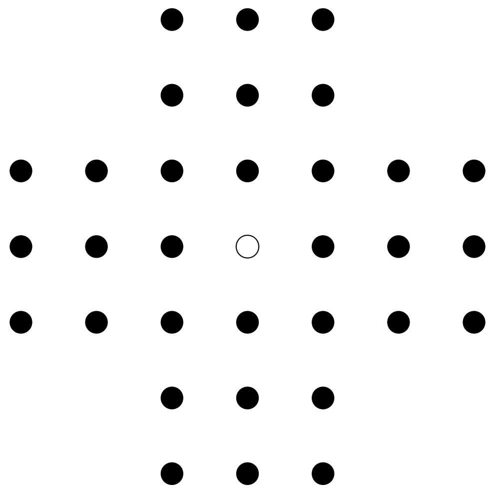
Arbre de recherche pour les huit reines

L'arbre complet comporte 2057 nœuds dont 92 feuilles correspondant aux solutions du problème. À titre de comparaison, l'arbre exhaustif correspondant à faire tous les choix de placement à raison d'une reine par ligne compterait $8^8 = 16777216$ nœuds. On voit bien que le backtracking est plus économe en exploration.

II.4 TP : tours du cavalier

II.5 TP : jeu du solitaire

On considère ici le jeu du solitaire. On a un plateau comportant 33 emplacements et initialement 32 pions, représenté par des ronds blancs, et un emplacement vide au centre :



Les différents mouvements possibles consiste à passer d'une configuration • • ○ à ○ ○ • et ainsi à diminuer d'un pion le nombre total de pions. Ces configurations peuvent être rencontrées dans les directions horizontales ou verticales.

On considère que la partie est gagnée quand il n'y a plus qu'un pion sur le plateau.

II.5.i Première implémentation naïve

On va représenter un plateau par le type `OCaml` :

OCaml
```
type case = Vide | Pion | Invalide
type plateau = case array array
let n = 7
(* Un plateau est une matrice 7x7 avec des cases invalides aux coins *)
```

Question II.1 Définir une fonction `print_plateau` qui affiche un plateau sous un format textuel lisible.

■ **Preuve**

OCaml
```
let print_plateau p =
  for j = 0 to n-1 do
    for i = 0 to n-1 do
      let c = match p.(i).(j) with
      | Invalide -> ' '
      | Vide -> '.'
      | Pion -> '#'
      in Printf.printf "%c" c
    done;
    print_newline ()
  done;
  print_newline ()
```

■

Question II.2 Écrire une fonction `plateau_initial : unit -> plateau` qui renvoie un plateau correspondant à la configuration de départ.

■ **Preuve**

OCaml
```
let plateau_initial () =
  [|
    [| Invalide; Invalide; Pion; Pion; Pion; Invalide; Invalide |];
    [| Invalide; Invalide; Pion; Pion; Pion; Invalide; Invalide |];
    [| Pion; Pion; Pion; Pion; Pion; Pion; Pion |];
```

```
    [| Pion ; Pion ; Pion ; Vide ; Pion ; Pion ; Pion |] ;
    [| Pion ; Pion ; Pion ; Pion ; Pion ; Pion ; Pion |] ;
    [| Invalide ; Invalide ; Pion ; Pion ; Pion ; Invalide ; Invalide |] ;
    [| Invalide ; Invalide ; Pion ; Pion ; Pion ; Invalide ; Invalide |]
  |]
```

■

Un mouvement peut être assimilé à un triplet de coordonnées décrivant, dans l'ordre • • ○ les trois cases concernées. Il se trouve que la case centrale est toujours le milieu des deux autres, on peut donc se contenter de donner un couple de coordonnées pour décrire un mouvement.

OCaml
```ocaml
type mouvement = (int * int) * (int * int)
```

Question II.3 Écrire une fonction `mouvements : plateau -> mouvement list` qui renvoie la liste des mouvements possibles sur le plateau passé en paramètre.

■ **Preuve**

OCaml
```ocaml
let possible p (i1,j1) (i3,j3) =
    let i2, j2 = (i1+i3)/2, (j1+j3)/2 in
    p.(i1).(j1) = Pion && p.(i2).(j2) = Pion && p.(i3).(j3) = Vide

let mouvements p =
    (* on utilise une pile *)
    let l = ref [] in
    for i = 0 to n-1 do
        for j = 0 to n-3 do
            if possible p (i,j) (i,j+2)
            then l := ( (i,j), (i,j+2) ) :: !l;
            if possible p (i,j+2) (i,j)
            then l := ( (i,j+2), (i,j) ) :: !l;
            if possible p (j+2,i) (j,i)
            then l := ( (j+2,i), (j,i) ) :: !l;
            if possible p (j,i) (j+2,i)
            then l := ( (j,i), (j+2,i) ) :: !l
        done
    done;
    !l
```

■

Question II.4 Écrire une fonction `compte_pions : plateau -> int` qui renvoie le nombre de pions sur un plateau.

En déduire une fonction `valide : plateau -> bool` qui indique si un plateau correspond à une partie gagnante.

■ **Preuve**

OCaml
```ocaml
let compte_pions p =
    let c = ref 0 in
    for i = 0 to n-1 do
        for j = 0 to n-1 do
            if p.(i).(j) = Pion
            then incr c
        done
    done;
    !c

let valide p = compte_pions p = 1
```

■

Question II.5 Écrire deux fonctions `faire` et `defaire` de type `plateau -> mouvement -> unit` permettant de faire et défaire un mouvement.

■ **Preuve**

```ocaml
let applique p mouv =
  let (i1,j1), (i3,j3) = mouv in
  let i2, j2 = (i1+i3)/2, (j1+j3)/2 in
  p.(i1).(j1) <- Vide;
  p.(i2).(j2) <- Vide;
  p.(i3).(j3) <- Pion

let defaire p mouv =
  let (i1,j1), (i3,j3) = mouv in
  let i2, j2 = (i1+i3)/2, (j1+j3)/2 in
  p.(i1).(j1) <- Pion;
  p.(i2).(j2) <- Pion;
  p.(i3).(j3) <- Vide
```

■

Question II.6 Écrire une fonction `enumere : plateau -> mouvement list -> unit` telle que `enumere pos chemin` énumère les plateaux accessibles depuis `pos` jusqu'à obtenir une solution et sachant que `chemin` est la liste de mouvements, du plus récent au plus ancien, qui ont conduit jusqu'à `pos`.

En cas de succès, on produira une exception `Solution of mouvement list` renvoyant la liste des mouvements ayant conduits à une solution.

En déduire une fonction `resout : unit -> mouvement list` qui renvoie une liste de mouvement permettant de résoudre le solitaire. On prendra garde à renverser le chemin obtenu pour que le premier mouvement de la liste soit le premier mouvement effectué.

■ **Preuve**

```ocaml
exception Solution of mouvement list

let rec enumere pos chemin =
  if valide pos
  then raise (Solution chemin)
  else let l = mouvements pos in
    List.iter (fun mouv ->
          applique pos mouv;
          enumere pos (mouv :: chemin);
          defaire pos mouv) l

let resout () =
  let pos = plateau_initial () in
  try
    enumere pos [];
    raise Not_found
  with Solution l -> List.rev l
```

■

Ce code ne permet pas de calculer la solution car il prend beaucoup trop de temps en raison du nombre de positions étudiées.

II.5.ii Cache des mauvaises positions

On se rend compte que de nombreuses positions sont réetudiées alors qu'on sait déjà qu'elles ne peuvent permettre d'aboutir à une solution. En effet, il y a souvent des coups indépendants pouvant être joués au même moment, ce qui fait qu'on peut aboutir à une même position de beaucoup de manière différente, ce qui augmente exceptionnellement le nombre d'appels récursifs.

Une stratégie consiste a maintenir un ensemble de configurations mauvaises. Pour réaliser un tel ensemble, on va utiliser une table de hâchage dont les clés sont les positions et les valeurs `unit`. Si une position a une valeur associée dans la table, c'est qu'elle sera mauvaise.

Cela pose la question de la représentation persistante et immuable des positions. Une première stratégie peut consister à transformer le plateau en `case list list`. Cette stratégie est beaucoup trop coûteuse et elle ne permet pas de répondre instantanément. On va profiter du fait qu'il n'y est que 49 cases dans le plateau pour le représenter par un entiers sur 49 bits : $a_{00} + a_{10}2 + a_{20}2^2 + \ldots + a_{60}2^6 + a_{01}2^7 + \ldots + a_{66}2^{48}$ où a_{ij} vaut 1 lorsqu'il y a un pion sur la jième ligne et la ième colonne, c'est-à-dire quand `p.(i).(j) = Pion`.

Indication l'entier `1 lsl n` est 2^n. `lsl` signifie qu'on décale le chiffre `1` de `n` bits vers la droite dans son écriture binaire.

Question II.7 Écrire une fonction `code : plateau -> int` qui renvoie le numéro associé à un plateau.

■ **Preuve**

OCaml
```
let code p =
    let c = ref 0 in
    for j = 0 to 6 do
    for i = 0 to 6 do
        if p.(i).(j) = Pion
        then c := !c + 1 lsl (7*j+i)
    done
    done;
    !c
```

■

Pour manipuler un ensemble, on va définir

OCaml
```
let mauvaises = Hashtbl.create 42
let ajoute x = Hashtbl.add mauvaises x ()
let contient x = Hashtbl.mem mauvaises x
```

L'appel à `ajoute x` rajoute `x` dans l'ensemble des mauvaises positions et `contient x` vérifie si `x` est dans cet ensemble.

Question II.8 Reprendre la fonction `enumere` avec un ensemble de mauvais codes.

■ **Preuve**

OCaml
```
let rec enumere pos chemin =
    if valide pos
    then raise (Solution chemin)
    else
        let c = code pos in
        if not (contient c)
        then begin
            let l = mouvements pos in
            List.iter (fun mouv ->
                        applique pos mouv;
                        enumere pos (mouv :: chemin);
                        defaire pos mouv) l;
            (* Si on est ici c'est que le noeud ne permet pas de trouver
               une solution *)
            ajoute c
        end
```

■

Normalement, le code doit pouvoir permettre de réaliser la résolution instantanément.

Remarque Possibles extensions :
- rajouter un affichage de la résolution
- déterminer la proportion de recalculs évités
- gérer les symétries des plateaux

III Stratégies d'énumération

III.1 Combinatoire élémentaire

produits, combinaisons, permutations

III.2 Enumération d'arbres

Imaginons que l'on souhaite énumérer des arbres binaires non étiquetés pour trouver le premier arbre binaire à n nœuds vérifiant une certaine propriété. On suppose ainsi défini un type

```ocaml
type arbre = Nil | Noeud of arbre * arbre
```

et une fonction pour tester le prédicat :

```ocaml
val : valide : arbre -> bool
```

Une première possibilité est d'effectuer un simple parcours récursif :

```ocaml
let rec recherche a =
   valide a
   || ( match a with
        Nil -> false
        | Noeud(g,d) -> recherche g || recherche d)
```

Cette fonction n'est pas récursive terminale et elle va donc échouer, faute d'emplacement suffisant sur la pile, si l'arbre passé en entrée et trop grand et qu'il est nécessaire de l'explorer pleinement.

TODO : par passage de continuation

IV Droite de balayage

IV.1 Principe

Il est parfois possible d'ordonner V pour tirer pour permettre de trouver une solution plus vite, voir d'ordonner des données basique pour ne pas énumérer V mais énumérer un $V' \subset V$ plus petit.

C'est un procédé classique dans le contexte de la géométrie algorithmique dans le plan : étant donné un ensemble V de candidats qu'on déduit d'un ensemble de points du plan, par exemple l'ensemble des paires de points, on va énumérer V à l'aide d'un parcours des points de gauche à droite (ou tout autre direction géométrique) pour ne pas énumérer tout V mais seulement une partie plus petite. Tout se passe comme si on balayait avec un droite l'ensemble des points, d'où le nom de droite de balayage.

Du point de vue de la complexité temporelle, on obtient le plus souvent un algorithme en $O(n \log n)$ où n est le nombre de points. Cela signifie que l'étape la plus coûteuse en temps est le tri initial.

On va présenter ici deux exemples d'utilisation d'une droite de balayage. Il est assez clair qu'il sera nécessaire dans ces cas de réfléchir géométriquement. Les exemples présentés sont donc assez simples d'un point de vue informatique, mais plutôt complexes d'un point de vue mathématiques.

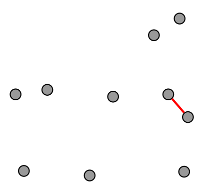
IV.2 Plus proche paire

On considère le problème

Problème - PLUSPROCHEPAIRE
- Entrées :
  Un ensemble P de n points dans le plan.
- Sortie :
  Une paire $\{p, p'\}$ de points telle que $dist(p, p') = ||\vec{pp'}||$ soit minimale.

IV.2.i Recherche exhaustive

Considérons le problème *PlusProchePaire* qui, étant donné un ensemble de n points ($n \geq 2$), détermine la paire constituée des deux points les plus proches.



Une implémentation naïve de la recherche par force brute consiste à énumérer les $\frac{n(n-1)}{2}$ paires et donc à effectuer $O(n^2)$ itérations.

OCaml
```
let plus_proche_paire points =
    let n = Array.length points in
    let min_paire = ref (distance points.(0) points.(1), (0, 1)) in
    for i = 0 to n - 1 do
        for j = i+1 to n - 1 do
            let d = distance points.(i) points.(j) in
            if d < fst !min_paire
            then min_paire := (d, (i, j))
        done
    done;
    snd !min_paire
```

IV.2.ii Raffinement : droite de balayage

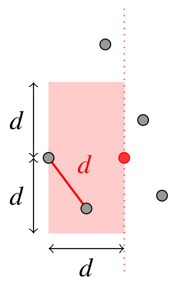
Il est parfois possible d'accélérer la recherche par force brute en ordonnant le parcours des candidats pour pouvoir éviter de tester certains d'entre eux.

En géométrie algorithmique, une approche classique consiste à ordonner les objets selon leur abscisse et à parcourir les objets par abscisse croissante. On parle alors de **droite de balayage** (en anglais, *sweep line*) car cela revient à balayer le plan par une droite verticale en ne traitant que les objets avant cette ligne.

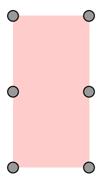
Reprenons le problème précédent, on considère que les points sont triés par abscisse croissante : $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-}$
On va parcourir les points dans cet ordre en maintenant un ensemble de points à gauche du point courant, appelés *points actifs*, et en ne calculant que les intersections avec les points actifs.

Si on a parcouru les N premiers points et qu'on a obtenu que la plus petite distance était d, lorsqu'on considère le point (x_N, y_N), il est inutile de tester les points qui sont forcément à distance $> d$ de celui-ci. C'est-à-dire qu'on peut éliminer les points qui ne sont pas dans le rectangle $[x_N - d, x_N] \times [y_N - d, y_N + d]$ du test. Les points dont l'abscisse est $< x_N - d$ peuvent être éliminés définitivement vu que l'on raisonne par abscisse croissante, par contre, les points d'ordonnées invalides doivent être conservés pour les points ultérieurs.

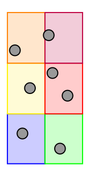
Ce rectangle est représenté sur le schéma suivant ainsi qu'une ligne imaginaire qui correspond à l'abscisse du point courant et qu'on peut imaginer parcourant le plan de gauche à droite pour traiter les points au fur et à mesure.



Afin de déterminer la complexité de cet algorithme, il est nécessaire de connaitre le nombre maximal de points dans le rectangle. Comme ces points ont été pris en compte précédemment, ils sont forcément à distance au moins d les uns des autres. Il s'agit donc de déterminer le nombre maximum de points qu'on peut placer dans ce rectangle à distance au moins d. On remarque tout d'abord qu'on peut placer six points ainsi :



Si jamais on avait au moins sept points, on peut voir qu'il y a forcément un des six sous-rectangles suivants qui contiendrait au moins deux points :



Or, ces sous-rectangles sont de longueur $\frac{1}{2}d$ et de hauteur $\frac{2}{3}d$, donc la distance maximale entre deux de leurs points correspond à la longueur des diagonales : $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}}d = \frac{5}{6}d < d$.

Comme un de ces six points est le point courant, il y a toujours au plus 5 points dans l'ensemble des points actifs.

Voici le principe de l'algorithme que l'on va implémenter :

- On trie le tableau `points` par ordre croissant. **Complexité :** $O(n \log n)$
- On initialise la plus petite distance d courante à la distance entre les deux premiers points
- On crée un ensemble `actifs`, ordonné par les ordonnées, de points contenant initialement les deux premiers points
- Pour chaque point (x, y) en partant du deuxième :
  - ⋆ On supprime les points (x', y') tels que $x' < x - d$ de `actifs`. **Complexité :** sur l'ensemble des itérations on ne pourra jamais supprimer deux fois un point, donc on effectue au maximum n suppressions chacune en $O(\log n)$ donc $O(n \log n)$.
  - ⋆ On parcourt les points de `actifs` dont les ordonnées sont comprises entre $y-d$ et $y+d$. **Complexité :** pour récupérer le premier point de l'ensemble, il faut $O(\log n)$ en pire cas (tous les points actifs) et ensuite on effectue au plus 5 itérations comme on vient de le prouver.

On remarque ainsi que la complexité en temps et en pire cas de cet algorithme est de $O(n \log n)$. Ici, le fait d'avoir la structure `actifs` ordonnée par les ordonnées est crucial pour garantir la complexité. Pour la réalisation d'une structure d'ensemble ordonnée ayant ces complexités, voir le chapitre FIXME.

Ici, on utilise le module `Set` d'OCaml pour réaliser la structure d'ensemble, pour cela on commence par créer le module `PointSet` pour les ensembles de points :

OCaml
```ocaml
module Point = struct
  type t = float * float
  let compare (x1,y1) (x2,y2) = Stdlib.compare y1 y2
end

module PointSet = Set.Make(Point)
```

Puis on définit une fonction permettant de parcourir les points entre deux ordonnées :

OCaml
```ocaml
let set_iter_entre f set bas haut =
  try
    let e = PointSet.find_first (fun p -> snd p >= bas) set in
    let seq = PointSet.to_seq_from e set in
    let rec aux seq =
      match seq () with
      | Seq.Nil -> ()
      | Seq.Cons (p, seq_suite) ->
          if snd p <= haut
          then begin
            f p;
            aux seq_suite
          end
    in aux seq
  with Not_found -> ()
```

On implémente alors assez directement l'algorithme décrit précédemment :

OCaml
```ocaml
let plus_proche_paire_balayage points =
  let compare (x1,y1) (x2,y2) =
    if x1 = x2
    then if y1 < y2 then -1 else 1
    else if x1 < x2 then -1 else 1
  in
  Array.sort compare points;
  let n = Array.length points in
  let d = ref (distance points.(0) points.(1)) in
  let couple = ref (points.(0), points.(1)) in
  let actifs = ref (PointSet.empty
      |> PointSet.add points.(0) |> PointSet.add points.(1)) in

  let gauche = ref 0 in
```

```
  for i = 2 to n-1 do
    let xi, yi = points.(i) in

    while fst points.(!gauche) < xi -. !d do
      actifs := PointSet.remove points.(!gauche) !actifs;
      incr gauche
    done;

    set_iter_entre (fun pj ->
      let dip = distance points.(i) pj in
      if dip < !d
      then begin
        couple := (points.(i), pj);
        d := dip
      end) !actifs (yi -. !d) (yi +. !d);

    actifs := PointSet.add points.(i) !actifs
  done;
  !d
```

IV.2.iii Problème : test d'intersection pour un ensemble de segments

Considérons le problème suivant *IntersectionEnsemble* : étant donné n segments dans le plan, il s'agit de déterminer si au moins deux des segments s'intersectent.

Remarque On peut considérer ici que l'on dispose d'une fonction

OCaml
```
intersecte : (float * float) * (float * float)
  -> (float * float) * (float * float) -> bool
```

qui teste l'intersection entre deux segments.

Cependant, il est possible d'écrire une telle fonction avec un peu de géométrie élémentaire.

Si on considère que les deux segments sont $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$, avec $A_1 \neq B_1$ et $A_2 \neq B_2$, alors chaque point du segment $[A_1B_1]$ est de la forme $A_1 + t\overrightarrow{A_1B_1}$ où $t \in [0,1]$. De même les points du segment $[A_2B_2]$ sont de la forme $A_2 + u\overrightarrow{A_2B_2}$ où $u \in [0,1]$.

S'il y a une intersection, c'est qu'il existe $(t,u) \in [0,1]^2$ tel que

$$A_1 + t\overrightarrow{A_1B_1} = A_2 + u\overrightarrow{A_2B_2} \iff \overrightarrow{A_2A_1} + t\overrightarrow{A_1B_1} = u\overrightarrow{A_2B_2}$$

L'idée est alors d'utiliser une opération appelée **produit vectoriel** sur les vecteurs. Comme ici, tout est plan, le produit vectoriel est uniquement déterminé par sa troisième coordonnée, celle qui sort du plan, et on peut se contenter de calculer celle-ci. On note ainsi $(x,y) \times (x',y') = xy' - yx'$ cette coordonnée. On a donc $u \times u = 0$.

On peut alors composer l'égalité par $\times\overrightarrow{A_2B_2}$:

$$\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_2B_2} + t\left(\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_2B_2}\right) = 0$$

Notons $\Delta = \overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_2B_2}$, si $\Delta \neq 0$, alors

$$t = -\frac{\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_2B_2}}{\Delta} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_2B_2}}{\Delta}$$

On procède de même avec $\times\overrightarrow{A_1B_1}$ pour obtenir une expression de u : $\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_1B_1} = u\left(\overrightarrow{A_2B_2} \times \overrightarrow{A_1B_1}\right) = -u\Delta$ et donc

$$u = -\frac{\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_1B_1}}{\Delta} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1B_1}}{\Delta}$$

Si $\Delta \neq 0$, on peut donc alors exprimer u et t et vérifier qu'ils sont dans $[0,1]$.
Si $\Delta = 0$ c'est que les deux segments sont de directions parallèles ou confondues.

- Si $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1B_1} \neq 0$ alors $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1B_1}$ sont non colinéaires donc les deux segments sont sur des droites parallèles distinctes et ne peuvent s'intersecter.
- Sinon, les segments reposent sur une même droite et il s'agit de vérifier leurs positions sur la droite. Pour cela, on exprime $A_2 = A_1 + t_A\overrightarrow{A_1B_1}$ de même pour $B_2 = A_1 + t_B\overrightarrow{A_1B_1}$. Plus précisement, on calcule $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = t_A||\overrightarrow{A_1B_1}||^2$ à l'aide du produit scalaire et on a $t_A = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{||\overrightarrow{A_1B_1}||^2}$. De même, $t_B = \frac{\overrightarrow{A_1B_2}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{||\overrightarrow{A_1B_1}||^2}$. On doit alors vérifier si l'intervalle $[t_A, t_B]$ (ou $[t_B, t_A]$ selon leur position) intersecte $[0,1]$.

Voici une fonction *OCaml* qui correspond à ce raisonnement

OCaml
```
let intersecte (a1,b1) (a2,b2) =
    let vec (x1,y1) (x2,y2) = (x2-.x1,y2-.y1) in
    let cross (x1,y1) (x2,y2) = x1 *. y2 -. y1 *. x2 in
    let dot (x1,y1) (x2,y2) = x1 *. x2 +. y1 *. y2 in
    let proche0 x = let eps = 1e-20 in
        if x < 0. then -.x < eps else x < eps in
    let a1b1 = vec a1 b1 in let a2b2 = vec a2 b2 in
    let a1a2 = vec a1 a2 in let a1b2 = vec a1 b2 in

    let delta = cross a1b1 a2b2 in

    if proche0 delta
    then
        if proche0 (cross a1a2 a1b1)
        then let na1b1 = dot a1b1 a1b1 in (* colinéaires *)
            let tA = (dot a1a2 a1b1) /. na1b1 in
            let tB = (dot a1b2 a1b1) /. na1b1 in
            if tA < tB
            then not (tB < 0. || tA > 1.)
            else not (tA < 0. || tB > 1.)
        else false (* parallèles *)
    else let t = (cross a1a2 a2b2) /. delta in (* se croisent *)
        let u = (cross a1a2 a1b1) /. delta in
        t >= 0. && t <= 1. && u >= 0. && u <= 1.
```

■ **Note 1** réécrire cela avec le déterminant de deux vecteurs du plan qui est au programme de mathématiques de seconde.

■

La recherche par force brute va alors énumérer l'ensemble des paires de segments distincts et tester deux à deux les intersections. On peut ainsi écrire le programme suivant qui est assez simple et effectuera effectivement $O(|v|^2)$ itérations dans le pire cas, i.e. lorsqu'il n'y a pas d'intersections.

OCaml
```
exception Trouve

let intersection_ensemble (v : ((float * float) * (float * float)) array) : bool =
    let n = Array.length v in
    try
        for i = 0 to n - 1 do
            for j = i+1 to n-1 do
                if intersecte v.(i) v.(j)
                then raise Trouve
            done
        done;
        false
    with Trouve -> true
```

TODO approche par droite de balayage : algorithme de Shamos et Hoey (1976)