Marc de Falco

Langages réguliers et automates finis - Fiche

Définition

AFD

- un seul état initial
- pas de choix : si $q \xrightarrow{a} q'$ et $q \xrightarrow{a} q'$ alors $q' = q''$

AFND : plusieurs états initiaux et choix

AFNDϵ : un seul état initial, choix et transitions spontanées $q \xrightarrow{\epsilon} q'$

complet : toutes les transitions $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \exists q', q \xrightarrow{a} q'$

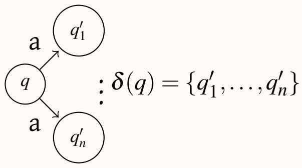
émondé : $\forall q, i \rightsquigarrow q \rightsquigarrow f$

Fonction de transition

AFD $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ partielle

$(q, a) \in \mathrm{dom}(\delta) \iff q \xrightarrow{a} \delta(q, a)$

AFND $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$



AFNDϵ $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

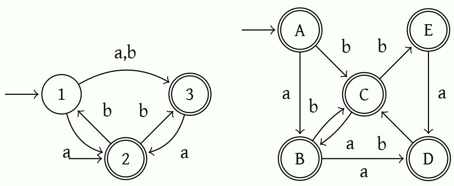
transition spontanée $q \xrightarrow{\epsilon} q'$

AFND ⇒ AFD

$A = (\Sigma, Q, \delta, I, F) \Rightarrow A' = (\Sigma, \mathcal{P}(Q), \delta', I, F')$

$\delta'(E, a) = \bigcup_{q \in E} \delta(q, a)$

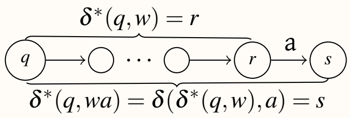
$F' = \{\ E \subset Q \mid E \cap F \neq \emptyset\ \}$



	q	a	b
$\to *$	$\{1,2\} = A$	B	C
$*$	$\{2,3\} = B$	D	C
$*$	$\{1,3\} = C$	B	E
$*$	$\{2\} = D$	$\emptyset$	C
$*$	$\{3\} = E$	D	$\emptyset$

Fonction de transition étendu

AFD $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \ldots \xrightarrow{a_n} q_n \Rightarrow \delta^*(q_0, a_1 \ldots a_n) = q_n$



$\delta^*(q, \epsilon) = q \qquad w \in lang(A) \iff \delta^*(i, w) \in F$

AFND $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \ldots \xrightarrow{a_n} q_n \Rightarrow q_n \in \delta^*(q_0, a_1 \ldots a_n)$

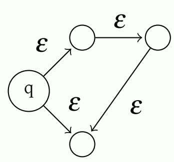
$\delta^*(q, wa) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,w)} \delta(q', a)$

$\delta^*(q, \epsilon)\{q\}$

$w \in lang(A) \iff \left(\bigcup_{i \in I} \delta^*(i, w)\right) \cap F \neq \emptyset$

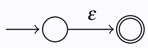
AFNDϵ Fermeture en avant

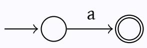
$\overline{q} = \left\{\ q' \mid q \xrightarrow{\epsilon} \ldots \xrightarrow{\epsilon} q'\ \right\}$

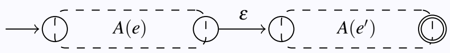
$\overline{q} =$ 

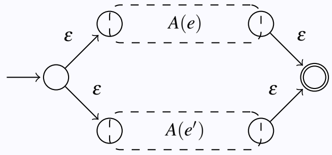
$\delta^*(q, \epsilon) = \overline{q} \quad \delta^*(q, wa) = \overline{\bigcup_{q' \in \delta^*(q,w)} \delta(q', a)}$

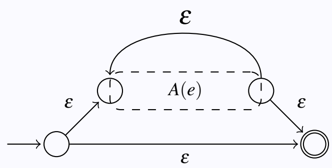
Thompson : regexp ⇒ AFNDϵ

$A(\emptyset) =$  $A(\epsilon) =$ 

$\forall a \in \Sigma, A(a) =$ 

$A(ee') =$ 

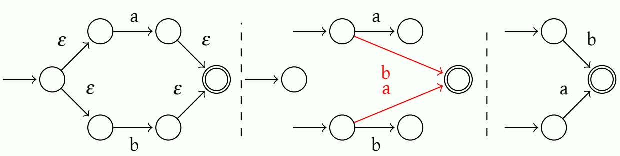
$A(e|e') =$ 

$A(e^*) =$ 

AFNDϵ ⇒ AFND

$A = (\Sigma, Q, \delta, i, F) \Rightarrow A' = (\Sigma, Q, \delta', \overline{i}, F')$

$\delta'(q, a) = \overline{\delta(q, a)} \quad q \in F' \iff \overline{q} \cap F \neq \emptyset$



Théorème de Kleene

régulier dénoté par une expression régulière **rationnel** = **reconnaissable par un AFD**

Th : Langage **régulier** ssi **reconnaissable par un AFD**

Contraposée du lemme de l'étoile

Soit L un langage sur Σ. **Si** pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w \in L$ tel que $|w| \geq n$ et que pour tout $x, y, z \in \Sigma^*$ tels que $w = xyz$, $y \neq \epsilon$ et $|xy| \leq n$ il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $xy^k z \notin L$, **alors** L n'est pas régulier.

Stabilité des langages réguliers

Les langages réguliers sont stables : par union, intersection, conplémentaire, étoile, concaténation, miroir.

Langages locaux

L local ssi $\exists P, S \subset \Sigma, N \subset \Sigma^2$,
$L \backslash \{\epsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^* S) \backslash \Sigma^* N \Sigma^*$
$P = \{ \ a \in \Sigma \mid \exists w \in \Sigma^*, aw \in L \ \}$
$S = \{ \ a \in \Sigma \mid \exists w \in \Sigma^*, wa \in L \ \}$
$\overline{N} = \left\{ \ ab \in \Sigma^2 \ \middle| \ \exists w, v \in \Sigma^*, wabv \in L \ \right\}$

Automates locaux

automate local : Si $q \xrightarrow{a} q_1$ et $q' \xrightarrow{a} q_2$ alors $q_1 = q_2$.
langage local $\iff$ reconnu par automate local.
Si P, S, N définis $A = (\Sigma, \Sigma \cup \{\epsilon\}, \delta, \epsilon, S')$

$$S' = \begin{cases} S & \text{si } \epsilon \notin L \\ S \cup \{\epsilon\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall a \in P, \delta(\epsilon, a) = a \ \forall a, b \in \Sigma, ab \notin N \Rightarrow \delta(a, b) = b$

Berry-Sethi

Regexp linéaire : au plus une fois chaque lettre.
linéarisation : $a(a|b)cb^*a \Rightarrow a_1(a_2|b_1)cb_2^*a_3$
Regexp linéaire $e \Rightarrow lang(e)$ local.

$accv(\emptyset) = \perp \quad \forall a \in \Sigma, accv(a) = \perp$
$accv(\epsilon) = \top \quad accv(e^*) = \top$
$accv(e_1|e_2) = accv(e_1) \vee accv(e_2)$
$accv(e_1 e_2) = accv(e_1) \wedge accv(e_2)$

$P(\emptyset) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma, P(a) = \{a\}$
$P(\epsilon) = \emptyset \quad P(e^*) = P(e)$
$P(e_1|e_2) = P(e_1) \cup P(e_2)$

$$P(e_1 e_2) = \begin{cases} P(e_1) \cup P(e_2) & \text{si } accv(e_1) \\ P(e_1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$S(\emptyset) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma, S(a) = \{a\}$
$S(\epsilon) = \emptyset \quad S(e^*) = S(e)$
$S(e_1|e_2) = S(e_1) \cup S(e_2)$

$$S(e_1 e_2) = \begin{cases} S(e_1) \cup S(e_2) & \text{si } accv(e_2) \\ S(e_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

$N(\emptyset) = N(\epsilon) = \Sigma^2 \quad \forall a \in \Sigma, N(a) = \Sigma^2$
$N(e^*) = N(e) \backslash S(e)P(e)$
$N(e_1|e_2) = N(e_1) \cap N(e_2)$
$N(e_1 e_2) = (N(e_1) \cap N(e_2)) \backslash S(e_1)P(e_2)$

Méthode de Yamada-McNaughton

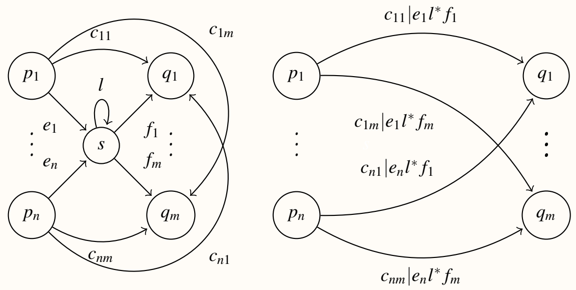
$Q = [\![1, n]\!]$
$R_{ij}^{(k)}$ = expression régulière dénotant les étiq $i \rightsquigarrow j$ transitant par $\geq k$.
$R_{ii}^{(0)} = \epsilon$ si $i \not\to i \qquad R_{ii}^{(0)} = \epsilon|a_1|\dots|a_p$ si $i \xrightarrow{a_k} i$
$i \neq j, R_{ij}^{(0)} = \emptyset$ si $i \not\to j \quad R_{ij}^{(0)} = a_1|\dots|a_p$ si $i \xrightarrow{a_k} j$
$i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} | R_{ik}^{(k-1)} \left(R_{kk}^{(k-1)} \right)^* R_{kj}^{(k-1)}$$

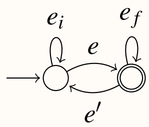
Si i initial et $f_1, \dots, f_p$ finaux :
$R_{if_1}^{(n)} | \dots | R_{if_p}^{(n)}$

Élimination des états - Brzozowski-McCluskey

EX-AF(N)D : automates avec des expressions régulières comme étiquettes.
Élimination de s :



On aboutit sur :



Expression régulière associée : $(e_i|ee_f^*e')^*ee_f^*$

Schéma global