

Langages réguliers et automates finis - Exercices

I	Exercices	1
I.1	Exercices d'application	1
I.2	Lemme d'Arden	2
I.3	Explosion exponentielle de la détermination	3
I.4	Miroir d'un langage	3
II	Exercices de colle	4
II.1	Moitié d'un langage	4

I Exercices

I.1 Exercices d'application

Exercice 1 Si $L = \{a\}$ et $L' = \{b\}$, déterminer les langages suivants : $L^*, L'^*, LL', L + L', (LL')^*, (L + L')^*, L^*L'^*, L^* + L'^*$.

Exercice 2 Déterminer des expressions régulières dénotant les langages suivants.

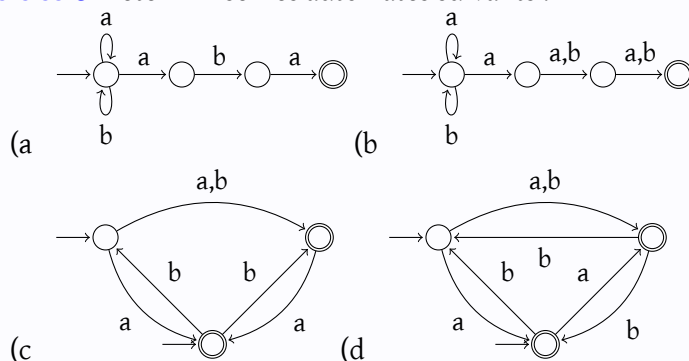
1. L'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant au moins un a et au moins un b .
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la dixième lettre en partant de la fin est un b .
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ contenant au plus deux b consécutifs.
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ tels qu'aucun facteur aa ne soit précédé d'un facteur bb . $aabaabb$ convient mais pas $aabbbaa$.
5. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont le nombre de a est divisible par 5.

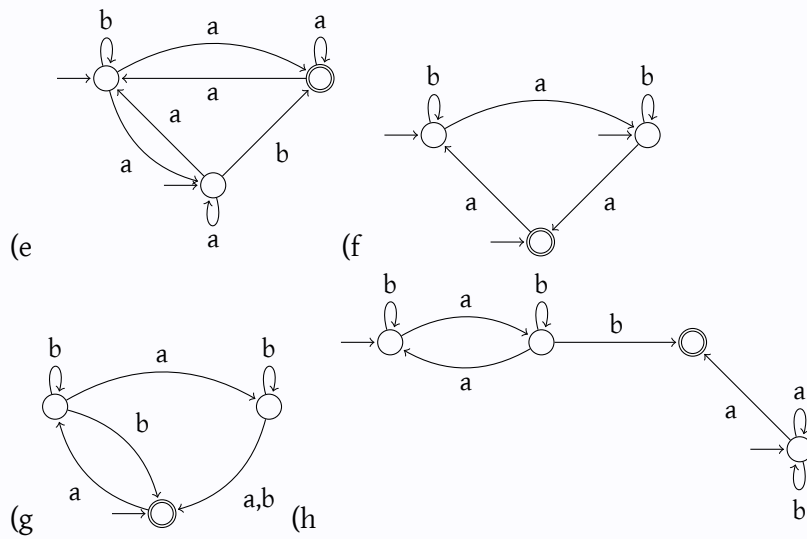
Exercice 3 Décrire informellement les langages dénotés par les expressions régulières suivantes.

1. $(a|e)(aa^*b)^*a^*$
2. $(a^*b^*)^*aaa(a|b)^*$
3. $(a + ba)^*b^*$

Exercice 4 Montrer qu'il n'existe que deux langages dont l'étoile est finie.

Exercice 5 Déterminer les automates suivants :





Exercice 6 Pour chacune des expressions régulières suivantes, déterminez un automate fini non déterministe avec transitions spontanées qui reconnait le langage qu'elle dénote, éliminez les transitions spontanées pour en déduire un automate non déterministe, puis, déterminez un automate directement par Berry-Sethi.

1. ab^*
2. $(a|b)ab$
3. $aa(a|b)^*$

Exercice 7 On considère la table de transition :

		a	b
\rightarrow	q_1	q_2	q_1
	q_2	q_3	q_1
*	q_3	q_3	q_2

1. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(0)}$.
2. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(1)}$ en la simplifiant.
3. Déterminer la matrice des expressions régulières $R^{(2)}$ en la simplifiant.
4. En déduire une expression régulière dénotant le langage reconnu par l'automate.
5. Appliquer la méthode d'élimination des états pour obtenir une expression régulière.

Exercice 8 Montrer que les langages suivants ne sont pas réguliers.

1. L'ensemble des expressions bien parenthésées : P défini par induction avec $\epsilon \in P, \forall e_1, e_2 \in P, e_1 e_2 \in P$ et $\forall e \in P, (e) \in P$.
2. $\{ a^n b c^n \mid n \geq 1 \}$.
3. $\{ a^n b^m c^n \mid n, m \in \mathbb{N} \}$
4. $\{ a^n b^m \mid n \leq m \}$
5. $\{ a^n b^{2n} \mid n \geq 1 \}$

Exercice 9 Même exercice que le précédent, mais les preuves sont plus délicates.

1. $\{ a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$
2. $\{ a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$
3. $\{ w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, |w| = n^2 \}$
4. $\{ w^2 \mid w \in \Sigma^* \}$
5. $\{ w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ est l'écriture d'un premier en binaire} \}$
6. $\{ a^i b^j \mid i \wedge j = 1 \}$.

Théorème I.1 Soit A, B deux langages sur Σ .

Le langage $L = A^*B$ est le plus petit langage solution de l'équation

$$X = AX \cup B$$

De plus, si $\epsilon \notin A$, cette solution est unique.

Exercice 10 Démontrer ce théorème.

I.3 Explosion exponentielle de la détermination

Exercice 11 On va montrer dans cet exercice, qu'il est possible de trouver un automate à n états dont le déterminisé par l'automate des parties contient $O(2^n)$ états.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, définir un automate fini non-déterministe à $n + 1$ états sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui reconnaît les mots de la forme waw' avec $|w'| = n - 1$, c'est-à-dire les mots qui ont un a en n -ième position en partant de la fin.
2. Montrer que le déterminisé de cet automate contient au moins 2^n états.

I.4 Miroir d'un langage

Exercice 12 Soit Σ un alphabet fini.

Si $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ est un mot non vide, on note $w^R = a_n \dots a_1$ le mot w lu à l'envers. On l'appelle le miroir de w .

Soit $L \subset \Sigma^*$ un langage. On note $L^R = \{ w^R \mid w \in L \}$ le miroir de L .

1. Montrer que le langage des palindromes

$$P = \{ w \in \Sigma^* \mid w = w^R \}$$

n'est pas régulier.

2. On va donner deux preuves du fait que les langages réguliers sont stables par miroir.

1. Soit L un langage régulier et A un automate reconnaissant L , en déduire un automate non déterministe avec transitions spontanées A^R , en renversant les transitions, permettant de reconnaître L^R .
2. Soit e une expression régulière, déterminer par induction une expression régulière e^R dénotant $\text{lang}(e)^R$.

II Exercices de colle

II.1 Moitié d'un langage

Exercice 13 Soit $L \subset \Sigma^*$, on note

$$\frac{1}{2}L = \{ u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, |u| = |v| \text{ et } uv \in L \}$$

■ Preuve

Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ un automate déterministe reconnaissant L . L'idée ici est que si $u \in \frac{1}{2}L$ et que $\delta^*(i, u) = q$, unique car A est déterministe, alors il existe un chemin de longueur $|u|$ tel que $q \rightsquigarrow q' \in F$.

Donc, pour déterminer un automate reconnaissant $\frac{1}{2}L$, on peut simuler **tous les chemins possibles** depuis tous les états en même temps qu'on lit u . Quand on a finit de lire, on a qu'à vérifier si dans les chemins énumérés il y en a un issu de q qui aboutit sur un état dans F .

On va ainsi noter $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ et supposer que $i = q_1$. On suppose de plus que A est complet, quitte à ajouter un état puits.

On pose

$$A' = (\Sigma, Q \times Q^n, \delta', (q_1, (q_1, \dots, q_n)), F')$$

avec

$$\forall (q, (s_1, \dots, s_n)) \in Q \times Q^n, \forall a \in \Sigma, \delta'((q, (s_1, \dots, s_n)), a) = \{ (\delta(q, a), (\delta(s_1, a), \dots, \delta(s_n, a))) \mid b \in \Sigma \}$$

ce qui revient à faire exactement comme A sur la première composante et à faire tous les chemins possibles sur la seconde de manière non déterministe. On remarque que

$$\delta'^*((q_1, (q_1, \dots, q_n)), u) = \{ (\delta^*(q_1, u), (\delta^*(q_1, v), \dots, \delta^*(q_n, v))) \mid v \in \Sigma^*, |v| = |u| \}$$

Pour les états finaux, on pose

$$F' = \{ (q_i, (s_1, \dots, s_n)) \mid s_i \in F \}$$

ce sont les états tels qu'on puisse atteindre un état final depuis ceux-ci en prenant le même temps que pour arriver sur l'état.

Soit $u \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} u \in \text{lang}(A') &\iff \delta'^*((q_1, (q_1, \dots, q_n)), u) \cap F' \neq \emptyset \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } (\delta^*(q_1, u), (\delta^*(q_1, v), \dots, \delta^*(q_n, v))) \in F' \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(\delta^*(q_1, u), v) \in F \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(q_1, uv) \in F \\ &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } uv \in L \\ &\iff u \in \frac{1}{2}L \end{aligned}$$

■

Exercice 14 Soit $L, L' \subset \Sigma^*$, on note

$$L : L' = \{ u \in L \mid \exists v \in L', |u| = |v| \}$$

Montrer que si L et L' sont réguliers, alors $L : L'$ est régulier.

■ Preuve

C'est un peu comme l'exercice précédent, on va considérer A et A' déterministes et complets reconnaissant respectivement L et L' , et simuler tous les chemins possibles dans A' pendant qu'on lit un mot dans A . Si on peut aboutir en même temps sur deux états finaux, on aura reconnu le mot.

On pose donc $A'' = (\Sigma, Q \times Q', \delta'', (i, i'), F \times F')$ et

$$\delta''((q, q'), a) = \{ (\delta(q, a), \delta'(q', b)) \mid b \in \Sigma \}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
 u \in \text{lang}(A'') &\iff \delta''^*((i, i'), u) \cap F \times F' \neq \emptyset \\
 &\iff \{ (\delta^*(i, u), \delta'^*(i', v)) \mid v \in \Sigma^*, |v| = |u| \} \cap F \times F' \neq \emptyset \\
 &\iff \exists v \in \Sigma^*, |v| = |u| \text{ et } \delta^*(i, u) \in F, \delta'^*(i', v) \in F' \\
 &\iff u \in L \text{ et } \exists v \in L', |u| = |v| \\
 &\iff u \in L : L'
 \end{aligned}$$

■

Exercice 15 Soit $L \subset \Sigma^*$.

1. Soit $a \in \Sigma$, on pose $L \setminus a = \{ w \in \Sigma^* \mid wa \in L \}$.
2. $\min(L) = \{ w \in L \mid \forall w = uv, v \neq \emptyset \Rightarrow u \notin L \}$ les mots de L dont aucun préfixe propre n'est pas dans L .
3. $\max(L) = \{ w \in L \mid \forall u \in \Sigma^*, u \neq \epsilon \Rightarrow wu \notin L \}$ les mots de L qui ne sont préfixes propres d'aucun mot de L .

Montrer que si L est régulier, alors $L \setminus a$, $\min(L)$ et $\max(L)$ sont réguliers.

■ Preuve

Dans tous les cas, on va procéder de la même manière : on part d'un AFD complet A reconnaissant L et on en déduit un AFD A' reconnaissant le langage qui nous intéresse.

Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ reconnaissant L .

Construction 1 On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta, i, F')$ où

$$F' = \{ q \in Q \mid \delta(q, a) \in F \}$$

Montrons que $\text{lang}(A') = L \setminus a$:

Soit $w \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned}
 w \in \text{lang}(A') &\iff \delta^*(i, w) \in F' \\
 &\iff \delta(\delta^*(i, w), a) = \delta^*(i, wa) \in F \\
 &\iff wa \in L \\
 &\iff w \in L \setminus a
 \end{aligned}$$

On a bien $\text{lang}(A') = L \setminus a$ donc ce langage est régulier.

Construction 2 On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta', i, F)$ où

$$\forall q \in Q \setminus F, \forall a \in \Sigma, \delta'(q, a) = \delta(q, a)$$

On supprime ainsi les transitions issues d'un état final.

Comme $q \rightarrow q'$ dans A' entraîne $q \notin F$, on remarque qu'un chemin dans A' passe au plus dans un état final, et nécessairement comme dernier état du chemin.

Soit $w \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned}
 w \in \text{lang}(A') &\iff \delta'^*(i, w) \in F \\
 &\iff \delta^*(i, w) \in F \text{ et } \forall w = uv, v \neq \epsilon \Rightarrow \delta^*(i, u) \notin F \\
 &\iff w \in L \text{ et } \forall w = uv, v \neq \epsilon \Rightarrow u \notin L \\
 &\iff w \in \min(L)
 \end{aligned}$$

On a bien $\text{lang}(A') = \min(L)$ donc ce langage est régulier.

Construction 3 On pose $A' = (\Sigma, Q, \delta, i, F')$ où

$$F' = \{ q \in F \mid \forall q' \in Q, q \neq q' \wedge q \rightsquigarrow q' \Rightarrow q' \notin F \}$$

les états finaux desquels on ne peut pas rejoindre un autre état final.

Soit $w \in \Sigma^*$, on va noter $q = \delta^*(i, w)$.

Supposons $q \in F'$ et soit $u \in \Sigma^*$ tel que $u \neq \epsilon$. On pose $q' = \delta^*(q, u)$, on a $q \rightsquigarrow q'$ donc $q' \notin F$ or $q' = \delta^*(i, wu)$ donc $wu \notin L$. Ainsi $w \in \max(L)$.

Réciproquement, si $w \in \max(L)$, soit $q' \in Q$ tel que $q \neq q'$ et $q \rightsquigarrow q'$. On note u l'étiquette de ce chemin, $u \neq \epsilon$ car $q \neq q'$, on a $\delta^*(q, u) = q' = \delta^*(i, wu)$ or $wu \notin L$ par hypothèse sur w . Donc $q' \notin F$. On vient de montrer que $q \in F'$.

On a donc,

$$w \in \text{lang}(A') \iff q \in F' \iff w \in \max(L)$$

On a bien $\text{lang}(A') = \max(L)$ donc ce langage est régulier.

■