NOTA TÉCNICA: Seguro dotal mixto

Modelos Actuariales

Marcelino Sánchez Rodríguez 191654

25/9/23

Nota Técnica

1. Descripción de la cobertura del seguro

a. Tipo de seguro

Es un seguro dotal mixto.

b. Temporalidad

El seguro tiene una vigencia de 19 años con primas niveladas por 4 años anticipadamente.

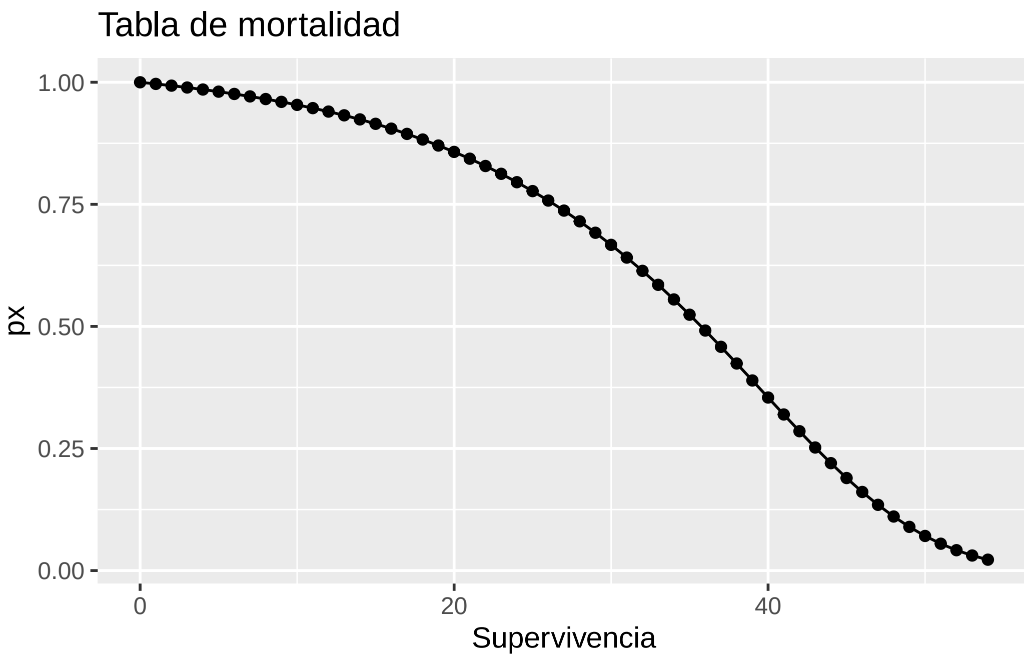
c. Población asegurada

La edad de los asegurados es de 46 años y son 100 asegurados.

2. Hipótesis demográficas y financieras

a. Hipótesis demográfica

Utilizaremos la tabla proporcionada por la aseguradora. La cual para una persona de 46 años se ve de la siguiente manera:



b. Hipótesis sobre costos

Dados los valores observados por la aseguradora tendremos los siguientes gastos.

Los gastos asociados a la prima son $1000 más 40% de la prima en la emisión, $500 más 20% de la prima los siguientes dos años y $100 más 5% de la prima para el resto de los años donde se paga prima. Los gastos asociados a la liquidación son $3,000 mas 0.3% de la suma asegurada en caso de muerte y $1,000 mas 0.1% de la suma asegurada en caso de supervivencia.

c. Hipótesis sobre tasa de interés

La tasa base será del 5%, porque actualmente existe la expectativa de disminución en la tasa de interés. Esto debido a que la inflación está disminuyendo, y la política de BM es bajar las tasas de interés una vez controlada la inflación. Además, como el seguro tiene una vigencia de 19 años esperamos que disminuya aún más manteniendose en promedio del 5%.

3. Procedimientos técnicos

a. Prima neta

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

La prima neta está dada por la siguiente fórmula:

$$P = \frac{(2\times 10^6)A_{46:\overline{19}|} + (10^6)\,{}_{19}E_{46}}{\ddot{a}_{46:\overline{4}|}}$$

$$= \frac{(2\times 10^6)(\sum_{k=0}^{18} v^{k+1}\frac{d_{46+k}}{\ell_{46}}) + (10^6)v^{19}\frac{\ell_{65}}{\ell_{46}}}{\sum_{k=0}^{18} v^k \frac{\ell_{46+k}}{\ell_{46}}}$$

Con lo cual el valor de la prima neta es de $\$1.3299687 \times 10^5$.

b. Prima recargada

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

El valor de la prima recargada proviene de despejar G de la siguiente ecuación:

$$(3000 + (1.003)(SA_M))A^{1}_{46:\overline{19}|} + (1000 + (1.001)(SA_S))\,{}_{19}E_{46} =$$

$$-1000 + .6G + (-500 + .8G)(\ddot{a}_{46:\overline{3}|} - 1) + (-100 + .95G)\ddot{a}_{49:\overline{1}|}({}_3E_{46})$$

Es decir, tenemos que:

$$G = \frac{(3000 + (1.003)(SA_M))A^{1}_{46:\overline{19}|} + (1000 + (1.001)(SA_S))\,{}_{19}E_{46} + 1000 + 500((\ddot{a}_{46:\overline{3}|} - 1)) + 100(\ddot{a}_{49:\overline{1}|})({}_3E_{46})}{.6 + .8(\ddot{a}_{46:\overline{3}|} - 1) + .95\ddot{a}_{49:\overline{1}|}({}_3E_{46})}$$

Con lo cual el valor de la prima recargada es de $\$1.7153866 \times 10^5$.

c. Valores póliza asociados a la prima neta

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos para toda la vigencia de la póliza)

Las fórmulas teóricas son las siguientes, pero para efectos prácticos las calcularemos con la fórmula recursiva de Fackler.

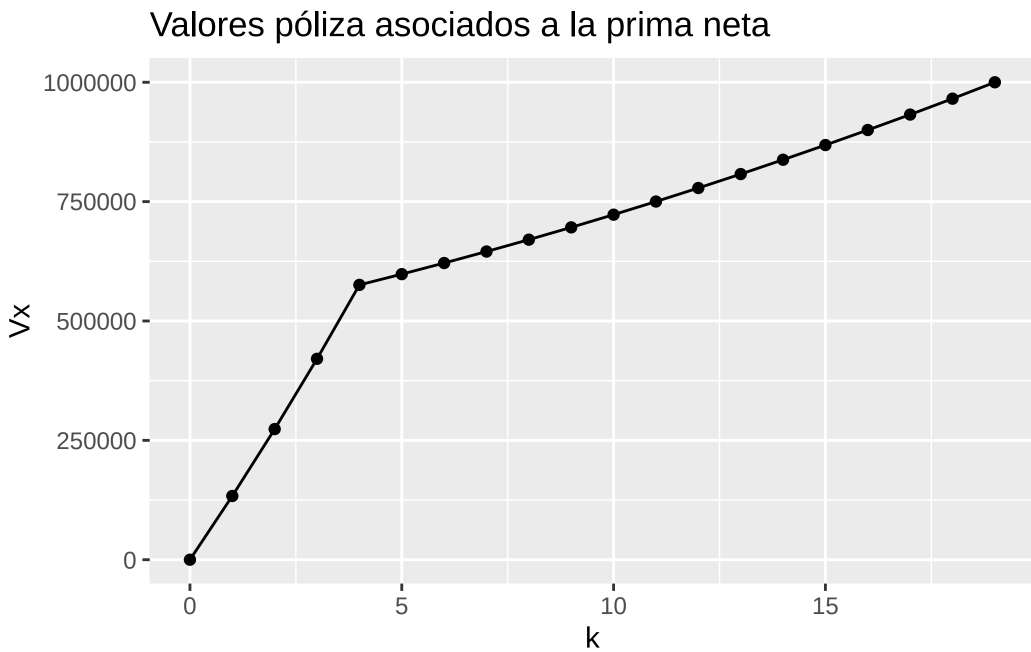
Para $k = 0, ..., mPrimas - 1$

$${}_kV_{46:\overline{19}|} = \frac{1}{{}_kE_{46}}(P\ddot{a}_{46:\overline{k}|} - (SA_M)A^{1}_{46:\overline{k}|})$$

Para $k = mPrimas, ..., 19$

$$ {}_kV_{46:\overline{19}|} = \frac{1}{{}_kE_{46}}(P\ddot{a}_{46:\overline{4}|} - (SA_M)A^{1}_{46:\overline{k}|}) $$

	k	Vx
1	0	0.0
2	1	133457.2
3	2	273577.0
4	3	420809.3
5	4	575585.0
6	5	598117.7
7	6	621394.4
8	7	645481.1
9	8	670360.3
10	9	696102.8
11	10	722699.1
12	11	750184.1
13	12	778529.1
14	13	807735.1
15	14	837741.3
16	15	868503.5
17	16	900018.9
18	17	932340.1
19	18	965623.9
20	19	1000000.0



d. Valores póliza asociados a la prima recargada

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos para toda la vigencia de la póliza)

Las fórmulas teóricas son las siguientes, pero para efectos prácticos las calcularemos con la fórmula recursiva de Fackler.

Para $k = 0$

$$_kV_{46:\overline{19}|} = 0$$

Para $k = 1$

$$_kV_{46:\overline{19}|} = \frac{1}{_kE_{46}}(-1000 + .6G - (3000 + 1.003SA_M)A^{\,1}_{46:\overline{k}|})$$

Para $k = 2, 3$

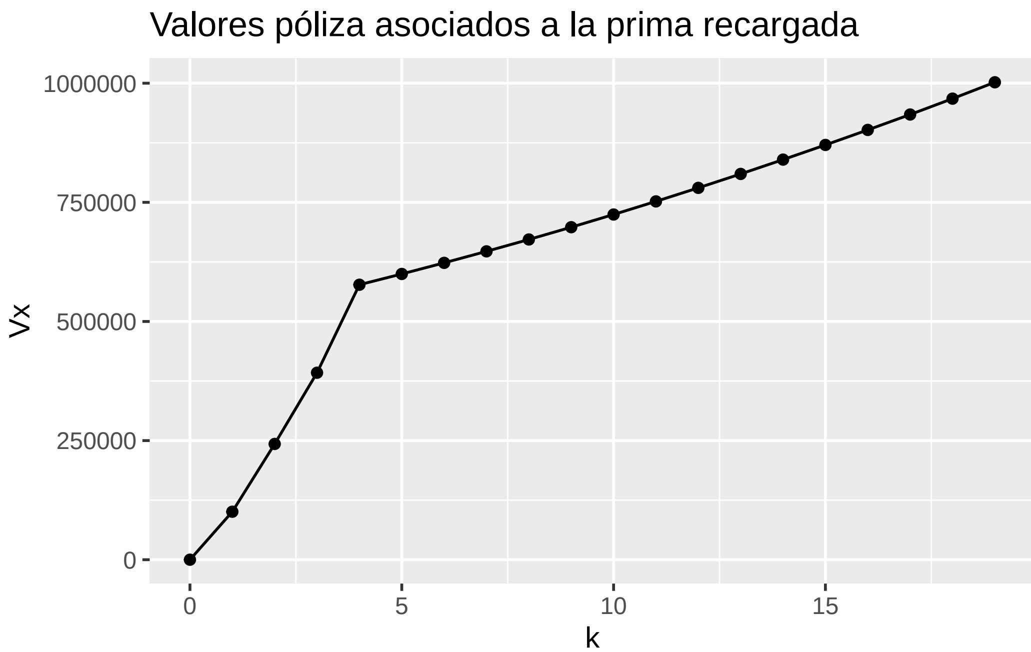
$$_kV_{46:\overline{19}|} = \frac{1}{_kE_{46}}(-1000 + .6G + (-500 + .8G)(\ddot{a}_{46:\overline{k}|} - 1) - (3000 + 1.003SA_M)A^{\,1}_{46:\overline{k}|})$$

Para $k = 4, ..., 19$

$$
{}_kV_{46:\overline{19}|} = \frac{1}{{}_kE_{46}}(-1000 + .6G + (-500 + .8G)(\ddot{a}_{46:\overline{3}|} - 1) + (-100 + .95G)(\ddot{a}_{49:\overline{1}|})({}_3E_{46})
$$

$$
-(3000 + 1.003SA_M)A^{\ 1}_{46:\overline{k}|})
$$

	k	Vx
1	0	0.0
2	1	100691.3
3	2	242951.3
4	3	392428.8
5	4	577112.6
6	5	599688.5
7	6	623008.3
8	7	647137.8
9	8	672059.3
10	9	697843.5
11	10	724480.3
12	11	752004.8
13	12	780387.2
14	13	809628.1
15	14	839665.9
16	15	870454.9
17	16	901991.9
18	17	934328.4
19	18	967621.4
20	19	1002000.0



e. Valores garantizados

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos mientras haya pago de primas)

Calculado retrospectivamente obtenemos la siguiente fórmula:

Los valores garantizados para la prima neta son:

```
  k       Vx
1 1 106765.8
2 2 218861.6
3 3 378728.4
```

Los valores garantizados para la prima recargada son:

```
  k        Vx
1 1  61063.38
2 2 147829.68
3 3 268757.44
```

Profit testing

1. Análisis determinista

a. Hipótesis demográficas y financieras

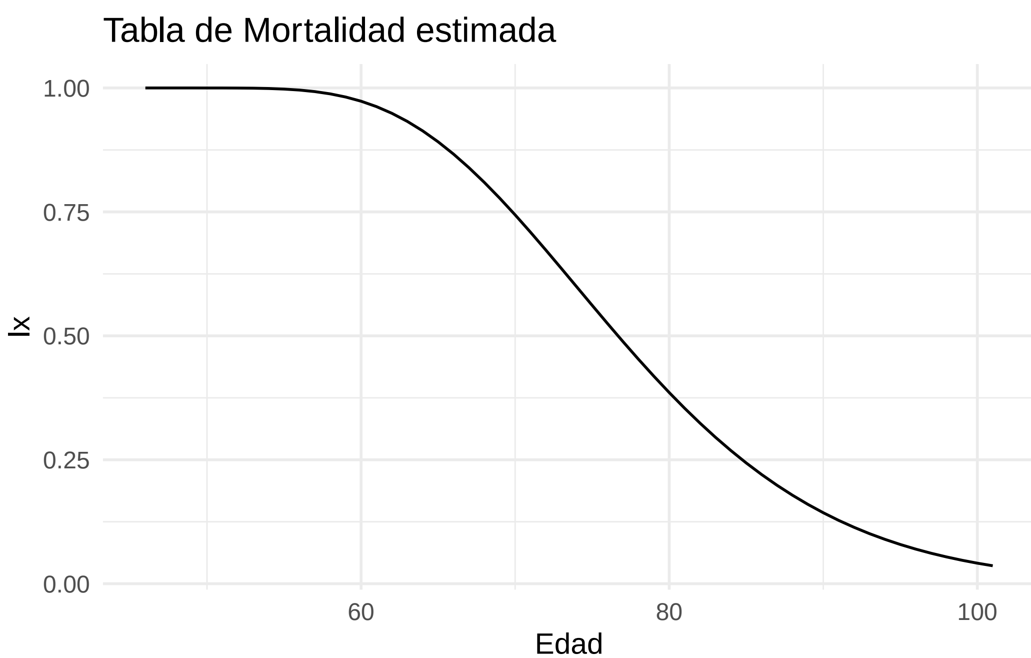
(Elige las variables a analizar, mínimo 2, y los supuestos realistas que vas a utilizar)

Vamos a analizar las variables de tasa de interés y de tabla de mortalidad y sus efectos en las medidas de VPN y MU.

Nuestro mejor estimador de estas variables es que la tasa de interés con la que traeremos a valor presente todos los flujos será de 7.5%, porque se espera que las tasas de interés bajen paulatinamente y considerando que actualmente nos encontramos con tasas altísimas del 11% aproximadamente.

Así mismo consideramos que la tabla de mortalidad será una $Gamma(8, 1/4)$, esto porque suponemos que la tala de mortalidad se comporta como una normal y queremos además modelar mayores sobrevivientes que llegan a tener 100 años.

Esta gráfica se ve la siguiene forma:



b. Valor Presente Neto (VPN)

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

$$VPN(r) = \sum_{k=1}^{19} F_k v_r^k$$

donde F_k representa los flujos vencidos de cada año (solo durante ese año) hasta la vigencia, tomando en cuenta el final de la vigencia.

Es decir $F_k = Ingreso_k(1+i^*) - Egreso_k - Reserva_k$

Donde

$Ingreso_k(1+i^*)$: es el ingreso actuarial por primas (menos gatos) y la reserva obtenida al inicio del año y traídas a valor futuro (con la tasa de inversión) que corresponde al final del año en curso con la tasa de costo de capital.

$$\frac{[_kV + G_k(1-c_k) - e_k](1+i_{k,k+1}) - q_{x+k}(b_{k+1}(1-propb_{k+1}) + E_{k+1}))}{p_{x+k}}(100)$$

$Egreso_k$: es el egreso actuarial obtenido al final del año (por liquidaciones de muertes y costos asociados):

$$\frac{q_{x+k}(b_{k+1}(1-propb_{k+1}) + E_{k+1}))}{p_{x+k}}(100)$$

$Reserva_k$: es la reserva actuarial que se debe componer al final del año multiplicada por $100p_{x+k}$.

v es el factor de descuento que se obtiene de la tasa de costo de capital el cual suponemos que es del 16%.

Con lo que con las hipótesis planteadas obtenemos un VPN de \$1.0307039 $\times 10^7$.

c. Margen de Utilidad (MU)

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

$$MU(r) = \frac{VPN(r)}{100P^G \ddot{a}_{46:\overline{4}|_{CC}}}$$

Donde P^G representa la prima recargada que se cobró al inicio del año, se trae a valor presente con la tasa de costo de capital, y se calcula con la mortalidad base.

Con lo cual obtenemos un MU de 0.1859646.

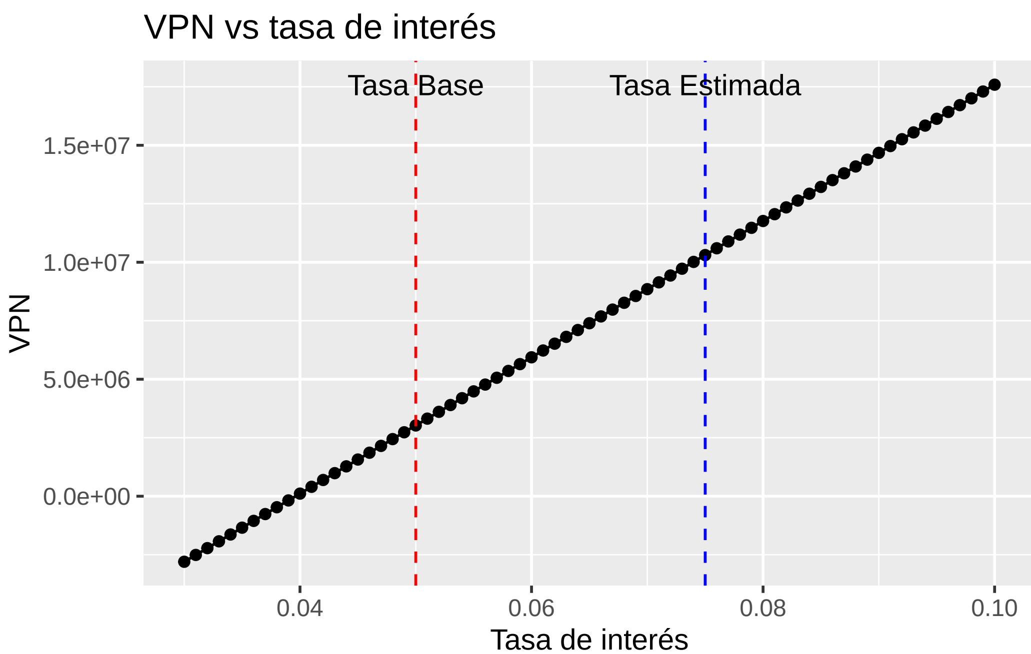
2. Análisis estocástico

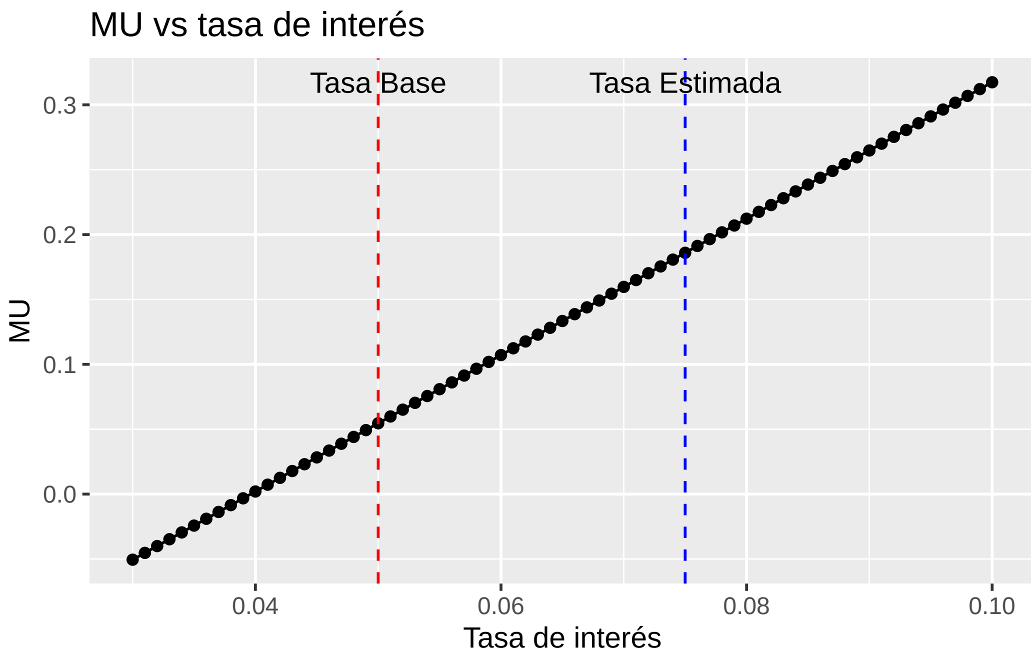
a. Análisis stress-testing para el VPN y MU

(Escoge 2 variables y realiza el stress testing)

Escogemos las variables de tasa de interés y de tabla de mortalidad y realizamos el stress testing para el VPN y MU.

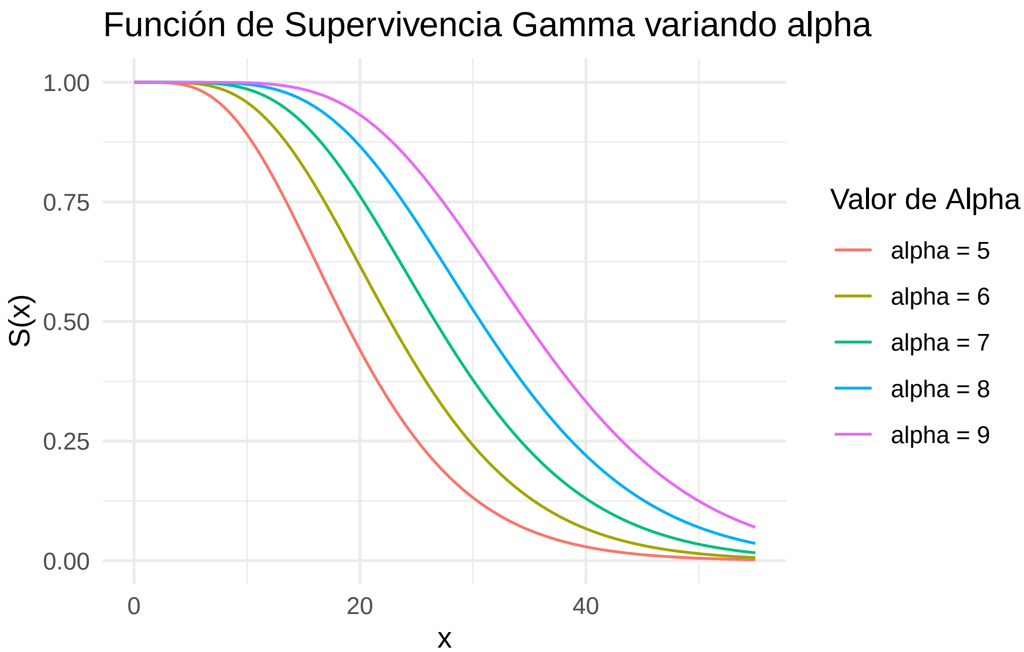
Variamos primero la tasa de interés de 3% a 10% dejando los supuestos base fijos.





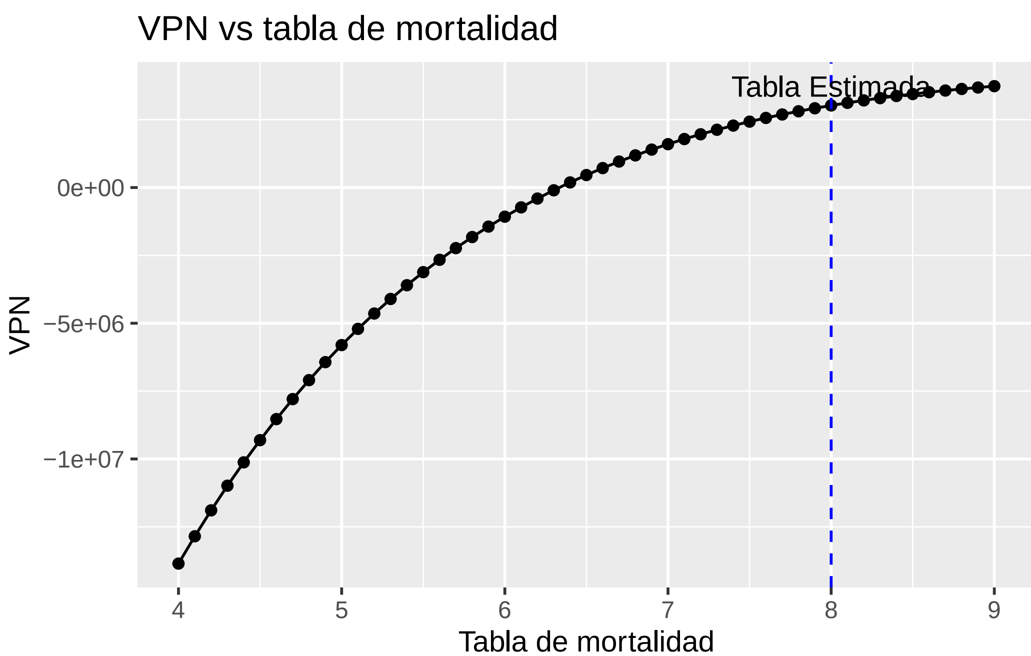
Con lo cual nos damos cuenta que nuestro producto en las medidas de MU y VPN es linealmente sensible a la tasa de interés y presenta una correlación positiva con respecto a la misma. También nos damos cuenta que a partir de una tasa menor al 4% el producto deja de ser rentable.

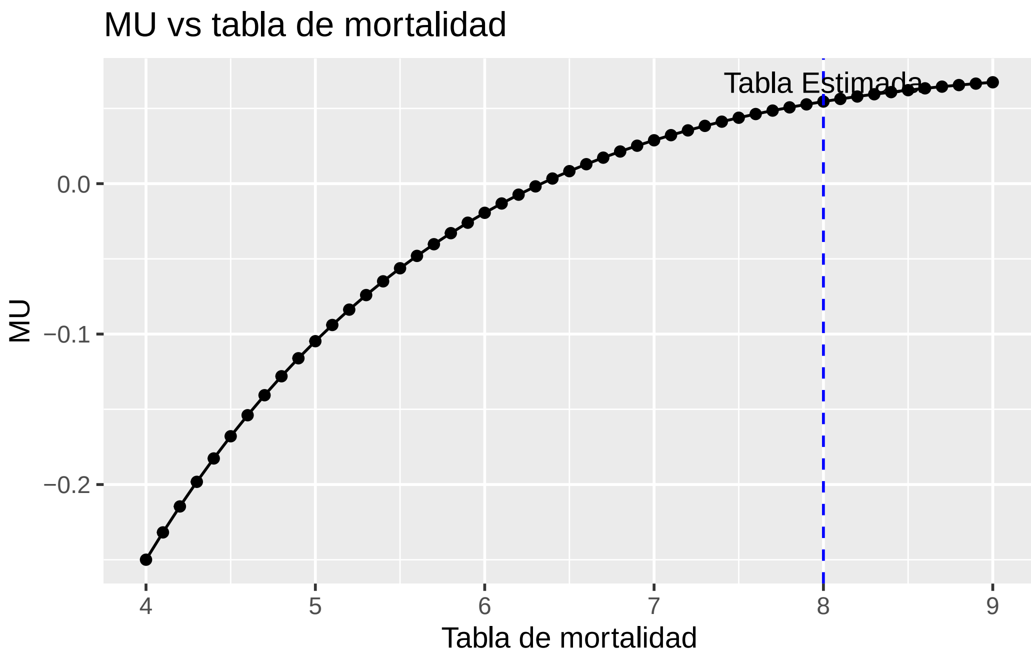
Ahora variaremos la tabla de mortalidad cambiando los valores del parámetro α. El efecto de estos cambios en la tabla se ven de esta forma:



Es decir, entre más grande la α se presenta una mayor expectativa de supervivencia y por lo tanto un mayor valor en la función de supervivencia. Además, con una α más grande, las defunciones son menos abruptas.

Y con lo cual los cambios en VPN y MU se ven gráficamente de la siguiente forma:





Es decir, entre más grande la α se presenta una mayor expectativa de supervivencia y por lo tanto se tiene una mayor rentabilidad entre nuestro producto mixto. Con lo cual en este producto hay que tener cuidado si se presentan muchas defunciones.

b. Análisis por escenarios para el VPN y MU

(Plantea 5 escenarios para realizar el análisis)

Ahora plantearemos 5 escenarios para realizar el análisis.

Los escenarios serán los siguientes:

Descripción detallada de los escenarios:

1. Escenario 1 (Pesimista): Tasa de interés del 3% y tabla de mortalidad con alfa=4.
2. Escenario 2 (Conservador): Tasa de interés del 5% y tabla de mortalidad con alfa=6.
3. Escenario 3 (Estimado): Tasa de interés del 7.5% y tabla de mortalidad con alfa=8.
4. Escenario 4 (Optimista): Tasa de interés del 10% y tabla de mortalidad con alfa=9. 5.- Escenario 5 (Base): Tasa de interés del 5% y tabla de mortalidad base con la que calculamos las reservas.

Los resultados de VPN y MU de los primeros 4 escenarios se muestran en la siguiente tabla:

```
                   VPN          MU
Escenario 1 -18803185 -0.33925625
Escenario 2  -1074704 -0.01939033
Escenario 3  10307039  0.18596464
Escenario 4  18372573  0.33148694
```

En el quinto escenario obviamente obtenemos MU=VPN=0

Con lo cual notamos que debemos tener cuidado cuando hay muchas defunciones y tasas de interés más bajas que la tasa base.

c. Análisis por simulación

c.1. Hipótesis para la simulación de las variables a analizar

Elegiremos tasa de interés y tabla de mortalidad como las variables a analizar.

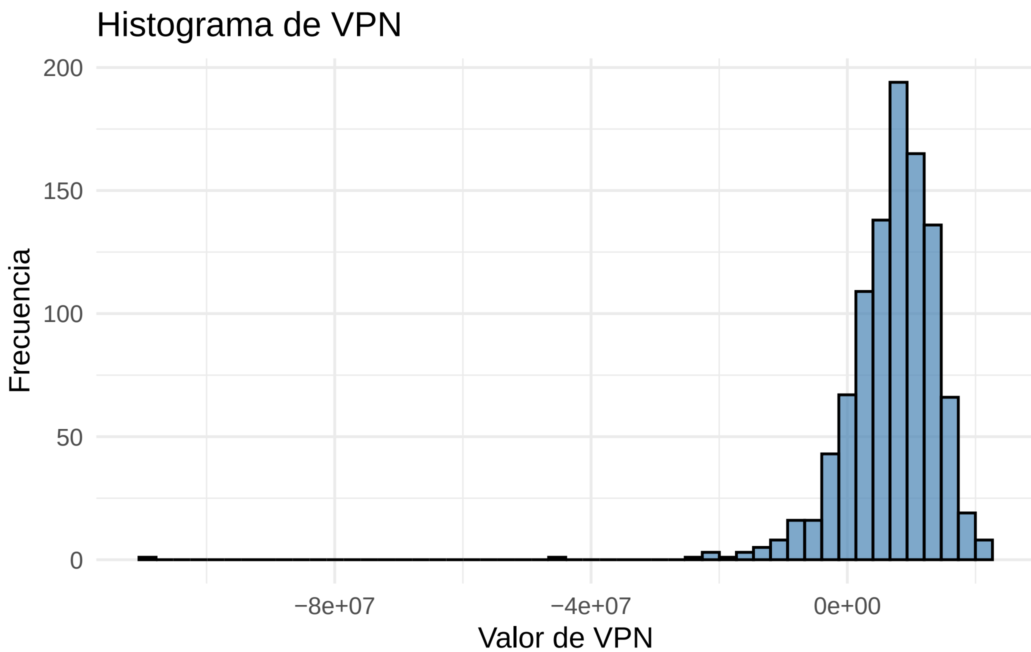
Realizaremos simulaciones para la tasa de interés y la tabla de mortalidad, con la finalidad de obtener una distribución de los valores que pueden obtener VPN y MU conjuntamente.

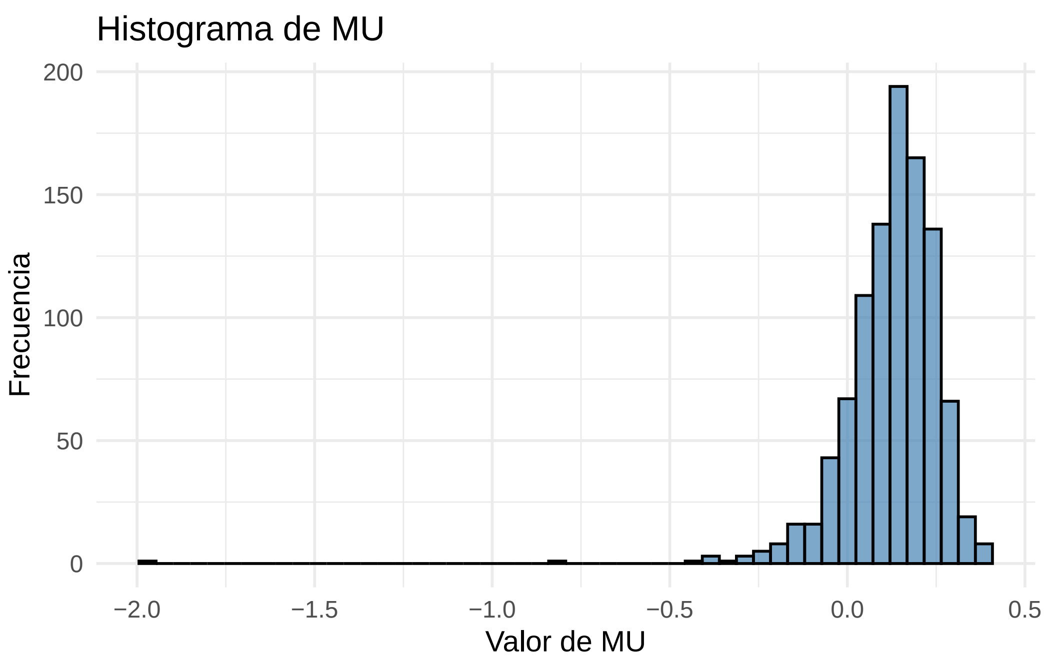
Para la tasa de interés, supondremos que sigue una distribución normal recortada en 0 con media de 7.5% y desviación estándar de 1.5%.

Para la tabla de mortalidad, supondremos que la α de nuestro modelo Gamma sigue una distribución normal recortada en 0.

c.2. Histograma de 1000 realizaciones de VPN y MU

Procedemos a mostrar los histogramas de las 1000 realizaciones estocásticas sobre tasa de interés y tabla de mortalidad de VPN y MU. (Nota: se fijó una semilla de 191654)





c.3. Promedio y desviación estándar de las 1000 realizaciones de VPN y MU

Los promedios y desviación estándar son los siguientes:

Es decir, si en general suponiendo que la mayoría de las tasas de intérés se encuentran en el rango de 6% a 9% y que la mayoría de las α se encuentran en el rango de 6.5 a 8.5, entonces

Tabla 1: Promedio y desviación estándar de las 1000 realizaciones de VPN y MU

Medida	Promedio	Desviacion_Estandar
VPN	6936845.2877	7626583.7996
MU	0.1252	0.1376

podemos esperar que el VPN y la MU lleguen a ser rentables, aunque igual hay que estar muy pendientes ante bajas en la tasa de interés y muchas defunciones de las esperadas, porque se puede apreciar que el VPN y la MU son muy sensibles a estos cambios, y que hay riesgo de que no sea rentable el producto con una confianza del 12.4%.

Para una cartera de 100 asegurados: Fondo Total

1. Asset-share

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos para toda la vigencia de la póliza)

Utilizaremos la fórmula recursiva para calcular el Asset-share, contando con los valores observados de tasa de interés, mortalidad promedio, costos asociados a la prima de emisión y renovación promedio, y por último los costos asociados a la liquidación por muerte promedio.

$$_{k+1}AS = \frac{[_kAS + G_k - e_k^o](1 + i_{k,k+1}^o) - q_{x+k}^o(b_{k+1} + E_{k+1}^o))}{p_{x+k}^o}$$

Con lo cual los valores de Asset-share para toda la vigencia de la póliza son los siguientes:

```
   kTemp assetShare
1      0        0.0
2      1   156766.2
3      2   344399.9
4      3   533183.1
5      4   761677.8
6      5   834198.5
7      6   907833.8
8      7   996841.4
9      8  1076107.5
10     9  1163617.1
11    10  1292222.6
12    11  1372873.0
13    12  1561862.6
14    13  1732977.4
```

15	14	1898354.1
16	15	2091647.8
17	16	2248593.2
18	17	2526151.9
19	18	2729191.0
20	19	3080890.2

2. Estimación del Fondo Total mediante el Asset-share

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos para toda la vigencia de la póliza)

Utilizaremos la siguiente fórmula para calcular el Fondo Total, suponiendo que conocemos exactamente cúantos asegurados tenemos en cada año:

$$_{k+1}AS = \frac{[_kAS + G_k - e^o_k](1 + i^o_{k,k+1}) - q^o_{x+k}(b_{k+1} + E^o_{k+1}))}{p^o_{x+k}}$$

$$_kFT = \ell^o_{x+k\,k}AS$$

	kTemp	assetShare	fondo_total
1	0	0.0	0
2	1	156766.2	15519849
3	2	344399.9	33062394
4	3	533183.1	50652390
5	4	761677.8	70836040
6	5	834198.5	76746264
7	6	907833.8	82612872
8	7	996841.4	87722045
9	8	1076107.5	91469138
10	9	1163617.1	93089366
11	10	1292222.6	103377808
12	11	1372873.0	108456969
13	12	1561862.6	123387143
14	13	1732977.4	131706284
15	14	1898354.1	136681494
16	15	2091647.8	148506995
17	16	2248593.2	148407153
18	17	2526151.9	161673723
19	18	2729191.0	166480649
20	19	3080890.2	181772521

Análisis de Rentabilidad

1. Utilidades

(Fórmula para el cálculo y valores obtenidos para toda la vigencia de la póliza)

Calcularemos el fondo total de lo que estimamos que tenemos como si calcularamos el Asset-Share con lo que ocurrió realmente en cuanto a muertes, utilizamos los demás supuestos promedios observados, y además siempre topamos o completamos el Asset-Share con el valor que debemos tener de la póliza recargada.

$$ {}_{k+1}AS^{*} = \frac{[{}_kAS^{*} + G_k - e_k^o](1 + i_{k,k+1}^o) - q_{x+k}^o(b_{k+1} + E_{k+1}^o))}{p_{x+k}^o} $$

$$ {}_kFT = \ell_{x+k}^o {}_kAS^{*} $$

Una vez que tenemos el valor del fondo total, calculamos las utilidades como la diferencia entre el fondo total y el valor de la póliza recargada en los mismos tiempos k; y al final lo diviremos entre 100 para tener un valor comparativo per cápita.

$$ U_k = ({}_kFT - \ell_{x+k}^o {}_kV_{46:\overline{19}|})/100 $$

	k	Utilidades
1	0	0.000
2	1	43143.586
3	2	-7842.646
4	3	20823.732
5	4	5558.881
6	5	19703.896
7	6	16877.348
8	7	-4073.656
9	8	-13724.550
10	9	-38344.588
11	10	42612.981
12	11	3573.448
13	12	60809.070
14	13	9366.193
15	14	-10535.086
16	15	27737.172
17	16	-32201.794
18	17	29026.352
19	18	-6721.034

```
20 19  31741.182
```

Es decir, nuestro producto parece no ser rentable la mayor parte del tiempo. Por lo que realizaremos medidas para determinar si es rentable o no.

2. VPN

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

Lo obtenemos como nuestra medida mencionada anteriormente, pero ahora con los valores de utilidades obtenidos en la sección anterior en lugar de utilizar los flujos completos obtenidos en el stress testing.

Con lo cual la medida de rentabilidad de VPN para este producto dado lo observado es de 7.2769551×10^4.

3. MU

(Fórmula para el cálculo y valor obtenido)

Usamos la misma fórmula mencionada anteriormente pero con la medida de VPN modificada como se mencionó antes.

Con lo cual la medida de rentabilidad de MU para este producto dado lo observado es de 0.1312944.

En conclusión, el producto fue rentable, ya que la medida de rentabilidad de MU no fue negativa. Esto se debió a que hubo mayores tasas de interés de las esperadas que lograron subsidiar el incremento en las defunciones.

Referencias

Sánchez, Marcelino, (2023). Notas de la clase de modelos actuariales con la profesora María Mercedes Gregorio Domínguez. Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM).

Código en R del documento:

Sánchez, Marcelino, (2023). modelos.Actuariales_examen_1. GitHub.

https://github.com/Marce2021M/modelos.Actuariales_examen_1