Optimización Numérica I
Laboratorio de Computo # 2
Programación Cuadrática
Método del Espacio NUlo

1. El Método del Espacio Nulo

El problema convexo cuadrático que deseamos resolver es

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{sujeto a} & Ax = b, \end{array} \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $rango(A) = m$, $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ es simétrica positiva definida en $\mathbb{R}^n$.

La idea se basa en eliminar la restricción

$$Ax = b,$$

usando el hecho de que, $x = x_p + x_h$, donde, $Ax_p = b$, es una solución particular y $Ax_h = 0$ es cualquier solución del sistema homegéneo, es decir $x_h \in Null(A)$.

Notemos que $dim(Null(A)) = n - m$.

Sean $x_p \in \mathbb{R}^n$ y $Z \in \mathbb{R}^{nx(n-m)}$ tales que $rango(Z) = n - m$ y

$$Ax_p = b, \;\; \text{y} \;\; AZ = 0.$$

Ls columnas de Z son una base de $Null(A)$.
De donde

$$x = x_p + Zx_z, \;\; \text{con} \;\; x_z \in \mathbb{R}^{n-m}, \tag{2}$$

satisface la restricción lineal en (1).

Realizando la sustitución de (2) en el problema (1), se reduce al problema cuadrático sin restricciones en $\mathbb{R}^{n-m}$,

$$\min \; \frac{1}{2}{x_z}^T(Z^TQZ)x_z + [Z^T(Qx_p + c)]^Tx_z. \tag{3}$$

Con nuestras hipótesis, la matriz $Z^T Q Z$ es simétrica y positiva definida. El único mínimo de (3) se obtiene al resolver el sistema lineal

$$(Z^T Q Z) x_z = -Z^T (Q x_p + c).$$

El valor óptimo en x se recupera con

$$x^* = x_p + Z(x_Z)^*.$$