Formale Sprachen und Automaten
Abgabe 1

Marcel Ebert, Pascal Dettmers, Claude (???)
TU Berlin

November 17, 2019

Aufgabe 1. Mengengrundlagen

a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \setminus B) \triangle C$$

■

b. Berechne: $((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}$

$$\begin{aligned}
M &= ((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\} \\
&\overset{\text{Def.}\times}{=} (\{(1,1),(3,1)\} \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1,1),(3,1),1,3\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1,1),(3,1),3\}
\end{aligned}$$

■

c. Berechne: $(\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\})$

$$
\begin{aligned}
M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\}
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 2. Mengenbeweise

a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \wedge y \in B\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Komm.}}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \wedge y \in A\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid (x \in B \wedge x \in A) \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Assoz}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
\overset{\text{Def.Idem.und}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & B \cap A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

b. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \setminus B) = A \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee x \in (A \setminus B)\} \\
\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee x \in \{y \mid y \in A \wedge y \notin B\}\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
\overset{\text{Def.Distri.}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
\overset{\text{Def.Idem.oder}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Absorp.}}{=} \quad & \{x \mid x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen $A \triangleq \{1, 2\}, B \triangleq \{2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
& (B \cup A) \cap B \\
= \;& (\{2,3\} \cup \{1,2\}) \cap \{2,3\} \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \;& \{1,2,3\} \cap \{2,3\} \\
= \;& \{2,3\} \\
\neq \;& \{2\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \;& \{1,2\} \cap \{2,3\} \\
= \;& A \cap B
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■

Aufgabe 3. Wahrheitstabellen

a. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $\neg q \wedge ((r \leftrightarrow (r \rightarrow \bot)) \vee q)$ kontradiktorisch ist.

q	r	¬	q	$\overset{\downarrow}{\overbrace{\wedge}}$	((r	↔	(r	→	⊥))	∨	q)
F	F	W	F	F	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	F	F	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	W	F	W	F	F	W	W

Der Hauptjunktor wird immer zu F ausgewertet. Also ist die Formel kontradiktorisch.

■

b. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $((s \wedge \neg q) \rightarrow r) \vee r \equiv r \vee (s \rightarrow q)$ kontradiktorisch ist.

■

Aufgabe 4. Logische Äquivalenz

a. Gib an: eine Formel, die logisch äquivalent zu $\perp$ ist und nur $\neg$ und $\vee$ als Operatoren enthält.

$\neg(q \vee \neg q) \equiv \perp$

■

b. Beweise nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass $q \wedge (r \to s)$ und $\neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)$ logisch äquivalent sind.

$$
\begin{aligned}
& q \wedge (r \to s) \\
\overset{\text{Def.Impl.}}{\equiv} \quad & q \wedge (\neg r \vee s) \\
\overset{\text{Def.Distr.von}\wedge\text{ueber}\vee}{\equiv} \quad & (\neg r \wedge q) \vee (s \wedge q) \\
\overset{\text{Def.DeMorganII}}{\equiv} \quad & \neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 5. Variablenbelegungen

a. Beweise ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $q \to \neg(r \wedge s) \equiv \neg q \vee (r \to \neg s)$.

$$
\begin{aligned}
& [\![q \to \neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.Impl.}}{\equiv} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.DeMorganI}}{\equiv} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg r \vee \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.Impl.}}{\equiv} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![r \to \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.}\neg}{\equiv} \quad & [\![\neg q]\!]^\beta = W oder [\![r \to \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.}\vee}{\equiv} \quad & [\![\neg q \vee r \to \neg s]\!]^\beta = W
\end{aligned}
$$

Damit wird $q \to \neg(r \wedge s)$ genau dann zu W ausgewertet, wenn $\neg q \vee (r \to \neg s)$ zu W ausgewertet wird. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

b. Beweise oder widerlege ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))$ allgemeingültig ist.

Betrachte die Belegung β mit $\beta(q) = F$ und $\beta(r) = \beta(s) = W$. Dann ist

$$[\![\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))]\!] = F$$

Damit ist die Formel nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu F ausgewertet wird).

■

Aufgabe 6. Prädikatenlogik

L. Beweise: $((\exists y.P_1(y) \to P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x))) \to \exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A1): $((\exists y.P_1(y) \to P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x)))$

Zu Zeigen (Z1): $\exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A2): $\exists y.P_1(y) \to P_2(y)$

Annahme (A3): $\forall x.P_1(x)$

Wähle $x \triangleq y$ in A3

Annahme (A4): $P_1(y)$

Sei x (beliebig aber fest) in A2

Annahme (A5): $P_1(y) \to P_2(y)$

Aus A4 und A5 folgt A6

Annahme (A6): $P_2(y)$

Wähle $z \triangleq y$ in Z1

Zu Zeigen (Z3): $P_2(y) \wedge P_1(y)$

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1): $P_2(y)$

Aus A6 folgt Z1.1

Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1): $P_1(y)$

Aus A4 folgt Z2.1

■

Aufgabe 7. Widerspruch und Kontraposition

a. Ziehe, durch die schrittweise Anwendung logischer Äquivalenzen, alle Negationen inder folgenden Formel soweit wie möglich nach Innen. Begründe jeden Schritt.

$$\begin{aligned}
& \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \to (\forall y.P_2(y) \land P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.Negation}}{=} \quad & \neg\neg(\exists x.P_1(x)) \to \neg(\forall y.P_2(y) \land P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.doppelteNegation}}{=} \quad & (\exists x.P_1(x)) \to \neg(\forall y.P_2(y) \land P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.deMorgan1}}{=} \quad & (\exists x.P_1(x)) \to (\exists y.\neg P_2(y) \lor \neg P_3(y)))
\end{aligned}$$

■

b. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Widerspruch für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(x)) \to (\forall y.P_2(y) \land P_3(y))$

Widerspruchs Annahme: $\neg(\exists x.P_1(x)) \land \neg((\forall y.P_2(y) \land P_3(y)))$

■

c. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Kontraposition für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(c)) \to (\forall y.P_2(y) \land P_3(y))$

Zu Zeigen: $(\exists y.\neg P_2(y) \lor \neg P_3(y)) \to (\exists x.P_1(x))$

■

Aufgabe 8. Induktion

L. Beweise per Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_7.n \mod 2 = 1$.

Hinweis H1: $(n+m) \mod r = ((n \mod r)(m \mod r)) \mod r$

Sei

$$P(n) \triangleq (n \mod 2 = 1)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$P(7) \land (\forall n \land \mathbb{N}_7.P(n) \to P(n+10)) \to (\forall x \in \mathbb{N}_7.P(x))$$

IA ($P(7)$):

$$7 \mod 2 = 1$$

Sei $n \in \mathbb{N}_7$.

IV ($P(n)$):

$$n \mod 2 = 1$$

IS ($P(n+10)$): Zu Zeigen: $(n+10) \mod 2 = 1$

$$(n+10) \mod 2 \overset{\text{H1}}{=} ((n \mod 2) + (10 \mod 2)) \mod 2$$
$$(n+10) \mod 2 = ((n \mod 2) + 0) \mod 2$$
$$(n+10) \mod 2 \overset{\text{IV}}{=} (1+0) \mod 2$$
$$(n+10) \mod 2 = 1 \mod 2$$
$$(n+10) \mod 2 = 1$$

Nach unserem Induktionsschema gilt nun $\forall x \in \mathbb{N}_7.P(x)$ was äquivalent zur ursprünglichen Aussage ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

■