Formale Sprachen und Automaten
Abgabe 1

Marcel Ebert, Pascal Dettmers, Claude (???)
TU Berlin

November 14, 2019

Aufgabe 1. Mengengrundlagen

a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \setminus B) \triangle C$$

■

b. Berechne: $((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}$

$$\begin{aligned}
M &= ((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\} \\
&\overset{\text{Def.}\times}{=} (\{(1,1),(3,1)\} \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1,1),(3,1),1,3\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1,1),(3,1),3\}
\end{aligned}$$

■

c. Berechne: $(\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\})$

$$
\begin{aligned}
M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\}
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 2. Mengenbeweise

a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \wedge y \in B\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Komm.}}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \wedge y \in A\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid (x \in B \wedge x \in A) \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Assoz}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
\overset{\text{Def.Idem.und}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & B \cap A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

b. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \setminus B) = A \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee x \in (A \setminus B)\} \\
\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee x \in \{y \mid y \in A \wedge y \notin B\}\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid x \in A \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
\overset{\text{Def.Distri.}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
\overset{\text{Def.Idem.oder}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Absorp.}}{=} \quad & \{x \mid x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen $A \triangleq \{1, 2\}, B \triangleq \{2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
& (B \cup A) \cap B \\
= \quad & (\{2,3\} \cup \{1,2\}) \cap \{2,3\} \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \quad & \{1,2,3\} \cap \{2,3\} \\
= \quad & \{2,3\} \\
\neq \quad & \{2\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{1,2\} \cap \{2,3\} \\
= \quad & A \cap B
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \wedge y \in B\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Komm.}}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \wedge y \in A\} \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid (x \in B \wedge x \in A) \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.Assoz}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
\overset{\text{Def.Idem.und}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & B \cap A
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Wahrheitstabellen

a. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $\neg q \wedge ((r \leftrightarrow (r \rightarrow \bot)) \vee q)$ kontradiktorisch ist.

■

b. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $((s \wedge \neg q) \rightarrow r) \vee r \equiv r \vee (s \rightarrow q)$ kontradiktorisch ist.

■

Aufgabe 4. Logische Äquivalenz

a. Gib an: eine Formel, die logisch äquivalent zu $\bot$ ist und nur $\neg$ und $\vee$ als Operatoren enthält.

$\neg(q \vee \neg q) \equiv \bot$

■

b. Beweise nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass $q \wedge (r \rightarrow s)$ und $\neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)$ logisch äquivalent sind.

$$
\begin{aligned}
& q \wedge (r \rightarrow s) \\
\stackrel{\text{Def.Impl.}}{\equiv}\ & q \wedge (\neg r \vee s) \\
\stackrel{\text{Def.Distr.von}\wedge\text{ueber}\vee}{\equiv}\ & (\neg r \wedge q) \vee (s \wedge q) \\
\stackrel{\text{Def.DeMorganII}}{\equiv}\ & \neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 5. Variablenbelegungen

a. Beweise ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $q \rightarrow \neg(r \wedge s) \equiv \neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$.

$$
\begin{aligned}
& [\![q \rightarrow \neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def.Impl.}}{\equiv}\ & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def.DeMorganI}}{\equiv}\ & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg r \vee \neg s]\!]^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def.Impl.}}{\equiv}\ & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![r \rightarrow \neg s]\!]^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def.}\neg}{\equiv}\ & [\![\neg q]\!]^\beta = W oder [\![r \rightarrow \neg s]\!]^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def.}\vee}{\equiv}\ & [\![\neg q \vee r \rightarrow \neg s]\!]^\beta = W
\end{aligned}
$$

Damit wird $q \rightarrow \neg(r \wedge s)$ genau dann zu W ausgewertet, wenn $\neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$ zu W ausgewertet wird. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

b. Beweise oder widerlege ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))$ allgemeingültig ist.

Betrachte die Belegung β mit $\beta(q) = F$ und $\beta(r) = \beta(s) = W$. Dann ist

$$[\![\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))]\!] = F$$

Damit ist die Formel nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu F ausgewertet wird).

■