Aufgabe 1. Mengengrundlagen

a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \setminus B) \triangle C$$

■

b. Berechne: $((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}$

$$\begin{aligned} M &= ((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\} \\ &\overset{\text{Def.}\times}{=} (\{(1,1),(3,1)\} \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1,1),(3,1),1,3\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1,1),(3,1),3\} \end{aligned}$$

■

c. Berechne: $(\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\})$

$$\begin{aligned} M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\ &\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 2. Mengenbeweise

a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \land y \in B\} \land x \in A\} \\
\overset{\text{Komm.}}{=} \quad & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \land y \in A\} \land x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid (x \in B \land x \in A) \land x \in A\} \\
\overset{\text{Assoz.}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \land (x \in A \land x \in A)\} \\
\overset{\text{Idem.}}{=} \quad & \{x \mid x \in B \land x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & B \cap A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

b. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
& A \cup (A \setminus B) = A \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \quad & \{x \mid x \in A \lor x \in (A \setminus B)\} \\
\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \quad & \{x \mid x \in A \lor x \in \{y \mid y \in A \land y \notin B\}\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & \{x \mid x \in A \lor (x \in A \land x \notin B)\} \\
\overset{\text{Distri.}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \land x \in A)\} \\
\overset{\text{Idem.oder}}{=} \quad & \{x \mid (x \in A \lor x \in B) \land x \in A\} \\
\overset{\text{Absorp.}}{=} \quad & \{x \mid x \in A\} \\
\overset{\text{Def.}\in}{=} \quad & A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen $A \triangleq \{1,2\}, B \triangleq \{2,3\}$.

$$\begin{aligned}
& (B \cup A) \cap B \\
= \quad & (\{2,3\} \cup \{1,2\}) \cap \{2,3\} \\
\overset{\text{Def.}\cup}{=} \quad & \{1,2,3\} \cap \{2,3\} \\
= \quad & \{2,3\} \\
\neq \quad & \{2\} \\
\overset{\text{Def.}\cap}{=} \quad & \{1,2\} \cap \{2,3\} \\
= \quad & A \cap B
\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■

Aufgabe 3. Wahrheitstabellen

a. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $\neg q \wedge ((r \leftrightarrow (r \to \perp)) \vee q)$ kontradiktorisch ist.

q	r	¬	q	$\overbrace{\wedge}^{\downarrow}$	((r	↔	(r	→	⊥))	∨	q)
F	F	W	F	F	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	F	F	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	W	F	W	F	F	W	W

Der Hauptjunktor wird immer zu F ausgewertet. Also ist die Formel kontradiktorisch.

■

b. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $((s \wedge \neg q) \to r) \vee r \equiv r \vee (s \to q)$.

q	r	s	((s	$\wedge$	$\neg$	q)	$\to$	r)	$\overset{\downarrow}{\vee}$	r	r	$\overset{\downarrow}{\vee}$	(s	$\to$	q)
F	F	F	F	F	W	F	W	F	W	F	F	W	F	W	F
F	F	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	W	F	F
F	W	F	F	F	W	F	W	W	W	W	W	W	F	W	F
F	W	W	W	W	W	F	W	W	W	W	W	W	W	F	F
W	F	F	F	F	F	W	W	F	W	F	F	W	F	W	W
W	F	W	W	F	F	W	W	F	W	F	F	W	W	W	W
W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	W	W	W	F	W	W
W	W	W	W	F	F	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Die beiden Hauptjunktoren werden in jeder Zeile zum selben Wert ausgewertet. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

Aufgabe 4. Logische Äquivalenz

a. Gib an: eine Formel, die logisch äquivalent zu $\bot$ ist und nur $\neg$ und $\vee$ als Operatoren enthält.

$\neg(q \vee \neg q) \equiv \bot$

■

b. Beweise nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass $q \wedge (r \to s)$ und $\neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)$ logisch äquivalent sind.

$$
\begin{aligned}
& q \wedge (r \to s) \\
\overset{\text{Implikation}}{=} \quad & q \wedge (\neg r \vee s) \\
\overset{\text{Distr.von}\wedge\text{über}\vee}{=} \quad & (\neg r \wedge q) \vee (s \wedge q) \\
\overset{\text{DeMorganII}}{=} \quad & \neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 5. Variablenbelegungen

a. Beweise ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $q \to \neg(r \wedge s) \equiv \neg q \vee (r \to \neg s)$.

$$
\begin{aligned}
& [\![q \to \neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.}\to}{\Leftrightarrow} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg(r \wedge s)]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.DeMorganI}}{\Leftrightarrow} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![\neg r \vee \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.Impl.}}{\Leftrightarrow} \quad & [\![q]\!]^\beta = F oder [\![r \to \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.}\neg}{\Leftrightarrow} \quad & [\![\neg q]\!]^\beta = W oder [\![r \to \neg s]\!]^\beta = W \\
\overset{\text{Def.}\vee}{\Leftrightarrow} \quad & [\![\neg q \vee r \to \neg s]\!]^\beta = W
\end{aligned}
$$

Damit wird $q \to \neg(r \wedge s)$ genau dann zu W ausgewertet, wenn $\neg q \vee (r \to \neg s)$ zu W ausgewertet wird. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

b. Beweise oder widerlege ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))$ allgemeingültig ist.

Betrachte die Belegung β mit $\beta(q) = F$ und $\beta(r) = \beta(s) = W$. Dann ist

$$[\![\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))]\!] = F$$

Damit ist die Formel nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu F ausgewertet wird).

■

Aufgabe 6. Prädikatenlogik

L. Beweise: $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x))) \rightarrow \exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A1): $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x)))$

Zu Zeigen (Z1): $\exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A2): $\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Annahme (A3): $\forall x.P_1(x)$

Wähle $x \triangleq y$ in A3

Annahme (A4): $P_1(y)$

Sei x (beliebig aber fest) in A2

Annahme (A5): $P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Aus A4 und A5 folgt A6

Annahme (A6): $P_2(y)$

Wähle $z \triangleq y$ in Z1

Zu Zeigen (Z2): $P_2(y) \wedge P_1(y)$

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1): $P_2(y)$

Aus A6 folgt Z1.1

Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1): $P_1(y)$

Aus A4 folgt Z2.1

■

Aufgabe 7. Widerspruch und Kontraposition

a. Ziehe, durch die schrittweise Anwendung logischer Äquivalenzen, alle Negationen inder folgenden Formel soweit wie möglich nach Innen. Begründe jeden Schritt.

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.Impl.}}{=} \quad & \neg(\neg\neg(\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.dopp.Neg.}}{=} \quad & \neg((\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\overset{\text{Def.DeMorgan2}}{=} \quad & \neg(\exists x.P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\overset{\text{Def.log.Äquivalenz}}{=} \quad & (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\overset{\text{Def.DeMorgan1}}{=} \quad & (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\neg(\forall y.P_2(y)) \vee \neg P_3(y)) \\
\overset{\text{Def.log.Äquivalenz}}{=} \quad & (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\exists y.\neg P_2(y) \vee \neg P_3(y))
\end{aligned}
$$

■

b. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Widerspruch für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$.

Widerspruchs Annahme:

$\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \equiv \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \rightarrow \perp$

■

c. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Kontraposition für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(c)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$.

Zu Zeigen: $\neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \rightarrow \neg\neg(\exists x.P_1(x))$

■

Aufgabe 8. Induktion

L. Beweise per Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_7.n \bmod 2 = 1$.

Hinweis H1: $(n + m) \bmod r = ((n \bmod r)(m \bmod r)) \bmod r$

Sei

$$P(n) \triangleq (n \bmod 2 = 1)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$(P(7) \wedge (\forall n \wedge \mathbb{N}_7.P(n) \rightarrow P(n + 10))) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}_7.P(x))$$

IA ($P(7)$):

$$7 \bmod 2 = 1$$

Sei $n \in \mathbb{N}_7$.

IV ($P(n)$):

$$n \bmod 2 = 1$$

IS ($P(n+10)$): Zu Zeigen: $(n+10) \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned}(n+10) \mod 2 &\overset{\text{H1}}{=} ((n \mod 2) + (10 \mod 2)) \mod 2\\ &= ((n \mod 2) + 0) \mod 2\\ &\overset{\text{IV}}{=} (1+0) \mod 2\\ &= 1 \mod 2\\ &= 1\end{aligned}$$

Nach unserem Induktionsschema gilt nun $\forall x \in \mathbb{N}_7.P(x)$ was äquivalent zur ursprünglichen Aussage ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

■

Aufgabe 9. TODO

Aufgabe 10. TODO

Aufgabe 11. Abbildungen, Funktionen

a.

Gib an: Welche der Relationen R_1, R_2, R_3 und R_4 sind (keine) partiellen bzw. totalen Abbildungen?

Die Relationen R_1 und R_2 sind keine partiellen bzw. totalen Abbildungen. Die Relation R_3 ist eine partielle Abbildung und die Relation R_4 ist eine totale Abbildung.

Gib an: Für jede der Relationen, die keine partielle Abbildung ist, ein Gegenbeispiel, dass das begründet.

Die Relation R_1 ist keine partielle Abbildung, weil die Paare (d, b) und $(d, 5)$ in der Relation auftreten. Die Relation R_2 ist keine partielle Abbildung, weil die Paare $(5, 5)$ und $(5, d)$ in der Relation auftreten. ■

b.

Gib an: Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv werden durch die Relationen R_1, R_2, R_3 und R_4 (die partielle oder totale Abbildungen sind) erfüllt / nicht erfüllt?

R_3 ist injektiv, surjektiv und bijektiv.

R_4 ist weder injektiv, surjektiv noch bijektiv.

Gib für jede nichterfüllte Eigenschaft ein Gegenbeispiel oder eine Begründung an.

Die Abbildung R_4 ist nicht injektiv, weil die Paare $(5, 5)$ und $(d, 5)$ in der Relation auftreten. Die Abbildung R_4 ist nicht surjektiv, weil das Element 3 aus dem Zielbereich A nicht mit einem anderen Element aus dem Argumentbereich B in Relation steht. Die Abbildung R_4 ist nicht bijektiv, weil sie nicht injektiv und nicht surjektiv ist. ■

c.

Beweise oder widerlege: Für alle Funktionen $f : B \to C, g : A \to B$ mit beliebigen Mengen A, B und C gilt, wenn $f \circ g$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels.

Wir wählen die Mengen A, B und C mit: $A \triangleq \{1, 2\}$, $B \triangleq \{3, 4\}$, $C \triangleq \{5\}$.

Wähle g: $A \to B$ mit $g \triangleq \{(1, 3)\} \triangleq R_1$ und f: $B \to C$ mit $f \triangleq \{3, 5\} \triangleq R_2$.

$(f \circ g) \overset{\text{Def.}\circ}{=} \{(1, 5)\}$, wobei gilt, dass $\forall c \in C.\exists a \in A.aR_2c$. Daraus folgt, dass $(f \circ g)$ surjektiv ist.

Für die gewählte Funktion g gilt aber nicht $\forall b \in B.\exists a \in A.aR_1b$. Daraus folgt, dass g nicht surjektiv ist.

Somit ist die Aussage widerlegt. ■

Aufgabe 12. Kardinalität

Sei $M \triangleq \{n \in \mathbb{N} | n \mod 10 = 7\}$

Beweise oder widerlege: $card(M) = card(\mathbb{N})$

L. Wir beweisen die Aussage und geben eine Bijektion f: $M \to \mathbb{N}$ an.

$$f : M \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto (x - 7) : 10$$

Die Funktion ist für jedes $x \in M$ eindeutig definiert und bildet ausschließlich auf ganze Zahlen ab.

Wir geben eine weitere Funktion g: $\mathbb{N} \to M$ an.

$$f : \mathbb{N} \to M$$
$$x \mapsto 10x + 7$$

Zu Zeigen (Z1): Bijektion(f)

Wenn $(f \circ g) = \Delta_{\mathbb{N}}$ und $(g \circ f) = \Delta_M$, dann ist laut Formelsammlung 2.2.8 f eine Bijektion.

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1): $\forall x \in \mathbb{N}.(f \circ g)(x) = \Delta_{\mathbb{N}}(x)$ Sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

$$\begin{aligned}
& (f \circ g)(x) \\
\overset{\text{Def.}\circ}{=} \quad & f(g(x)) \\
\overset{\text{Def.g}}{=} \quad & f(10x + 7) \\
\overset{\text{Def.f}}{=} \quad & ((10x + 7) - 7) : 10 \\
= \quad & x \\
\overset{\text{Def.}\Delta}{=} \quad & \Delta_{\mathbb{N}}(x)
\end{aligned}$$

Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1): $\forall x \in M.(g \circ f)(x) = \Delta_M(x)$ Sei $x \in M$ beliebig aber fest.

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(x) \\ \overset{\text{Def.}\circ}{=} & g(f(x)) \\ \overset{\text{Def.f}}{=} & g((x-7):10) \\ \overset{\text{Def.g}}{=} & 10*((x-7):10)+7 \\ = & x \\ \overset{\text{Def.}\Delta}{=} & \Delta_M(x) \end{aligned}$$

Da wir Z1.1 und Z2.1 gezeigt haben, gilt: f ist eine Bijektion. Somit gilt die Aussage. ■