Formale Sprachen und Automaten
Hausaufgabe 1

Marcel Ebert, Pascal Dettmers, Claude (???)
TU Berlin

November 3, 2019

Aufgabe 1. Mengengrundlagen

a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \cup C) \setminus (((A \cap B) \setminus C) \setminus ((A \cap C) \setminus B))$$

■

b. Berechne: $((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}$

$$\begin{aligned} M &= ((\{1,3\} \times \{1\})) \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\} \\ &\overset{\text{Def.}\times}{=} (\{(1,1),(3,1)\} \cup \{1,3,1\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1,1),(3,1),1,3\} \setminus \{(1,3),1,2\}) \\ &\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1,1),(3,1),3\} \end{aligned}$$

■

c. Berechne: $(\{\emptyset,2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\},2\})$

$$
\begin{aligned}
M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\
&\overset{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\}
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 2. Mengenbeweise

a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B) \cap A = B \cap A \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \land y \in B\} \land x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.Komm.}}{=} \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \land y \in A\} \land x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.}\in}{=} \{x \mid (x \in B \land x \in A) \land x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.Assoz}}{=} \{x \mid x \in B \land (x \in A \land x \in A)\} \\
&\overset{\text{Def.Idem.und}}{=} \{x \mid x \in B \land x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} B \cap A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

b. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$
\begin{aligned}
&A \cup (A \setminus B) = A \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in (A \setminus B)\} \\
&\overset{\text{Def.}\setminus}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in \{y \mid y \in A \wedge y \notin B\}\} \\
&\overset{\text{Def.}\in}{=} \{x \mid x \in A \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
&\overset{\text{Def.Distri.}}{=} \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
&\overset{\text{Def.Idem.oder}}{=} \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.Absorp.}}{=} \{x \mid x \in A\} \\
&\overset{\text{Def.}\in}{=} A
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen $A \triangleq \{1, 2\}, B \triangleq \{2, 3\}$.

$$
\begin{aligned}
&(B \cup A) \cap B \\
&= (\{2,3\} \cup \{1,2\}) \cap \{2,3\} \\
&\overset{\text{Def.}\cup}{=} \{1,2,3\} \cap \{2,3\} \\
&= \{2,3\} \\
&\neq \{2\} \\
&\overset{\text{Def.}\cap}{=} \{1,2\} \cap \{2,3\} \\
&= A \cap B
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■