

### Aufgabe 1. Mengengrundlagen

- a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \setminus B) \Delta C$$

■

- b. Berechne:  $((\{1, 3\} \times \{1\})) \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}$

$$\begin{aligned} M &= ((\{1, 3\} \times \{1\})) \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\times}{=} (\{(1, 1), (3, 1)\} \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1, 1), (3, 1), 1, 3\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1, 1), (3, 1), 3\} \end{aligned}$$

■

- c. Berechne:  $(\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\})$

$$\begin{aligned} M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\} \end{aligned}$$

■

### Aufgabe 2. Mengenbeweise

- a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt:  $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
 \stackrel{\text{Def.} \cap}{=} & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \wedge y \in B\} \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Komm.}}{=} & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \wedge y \in A\} \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.} \in}{=} & \{x \mid (x \in B \wedge x \in A) \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Assoz.}}{=} & \{x \mid x \in B \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
 \stackrel{\text{Idem.}}{=} & \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.} \cap}{=} & B \cap A
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

■

**b.** Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt:  $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$\begin{aligned}
 & A \cup (A \setminus B) = A \\
 \stackrel{\text{Def.} \cup}{=} & \{x \mid x \in A \vee x \in (A \setminus B)\} \\
 \stackrel{\text{Def.} \setminus}{=} & \{x \mid x \in A \vee x \in \{y \mid y \in A \wedge y \notin B\}\} \\
 \stackrel{\text{Def.} \in}{=} & \{x \mid x \in A \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
 \stackrel{\text{Distri.}}{=} & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
 \stackrel{\text{Idem. oder}}{=} & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Absorp.}}{=} & \{x \mid x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.} \in}{=} & A
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt:  $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen  $A \triangleq \{1, 2\}, B \triangleq \{2, 3\}$ .

$$\begin{aligned}
 & (B \cup A) \cap B \\
 = & (\{2, 3\} \cup \{1, 2\}) \cap \{2, 3\} \\
 \stackrel{\text{Def. } \cup}{=} & \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3\} \\
 = & \{2, 3\} \\
 \neq & \{2\} \\
 \stackrel{\text{Def. } \cap}{=} & \{1, 2\} \cap \{2, 3\} \\
 = & A \cap B
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■

### Aufgabe 3. Wahrheitstabellen

a. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass  $\neg q \wedge ((r \leftrightarrow (r \rightarrow \perp)) \vee q)$  kontradiktorisch ist.

q	r	$\neg$	q	$\wedge$	((r	$\leftrightarrow$	(r	$\rightarrow$	$\perp$ ))	$\vee$	q)
F	F	W	F	F	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	F	F	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	W	F	W	F	F	W	W

Der Hauptjunktorkomplex wird immer zu F ausgewertet. Also ist die Formel kontradiktorisch.

■

**b.** Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass  $((s \wedge \neg q) \rightarrow r) \vee r \equiv r \vee (s \rightarrow q)$ .

q	r	s	$((s \wedge \neg q) \rightarrow r)$	$r \vee ((s \wedge \neg q) \rightarrow r)$	$r \vee (s \rightarrow q)$
F	F	F	F	F	F
F	F	W	W	F	F
F	W	F	F	W	W
F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	F	F
W	W	F	F	W	W
W	W	W	W	W	W

Die beiden Hauptjunktoren werden in jeder Zeile zum selben Wert ausgewertet. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

#### Aufgabe 4. Logische Äquivalenz

**a.** Gib an: eine Formel, die logisch äquivalent zu  $\perp$  ist und nur  $\neg$  und  $\vee$  als Operatoren enthält.

$$\neg(q \vee \neg q) \equiv \perp$$

■

**b.** Beweise nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass  $q \wedge (r \rightarrow s)$  und  $\neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)$  logisch äquivalent sind.

$$\begin{aligned}
& q \wedge (r \rightarrow s) \\
\stackrel{\text{Implikation}}{=} & q \wedge (\neg r \vee s) \\
\stackrel{\text{Distr. von } \wedge \text{ über } \vee}{=} & (\neg r \wedge q) \vee (s \wedge q) \\
\stackrel{\text{DeMorganII}}{=} & \neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)
\end{aligned}$$

■

### Aufgabe 5. Variablenbelegungen

a. Beweise ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass  $q \rightarrow \neg(r \wedge s) \equiv \neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$ .

$$\begin{aligned}
& \llbracket q \rightarrow \neg(r \wedge s) \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \rightarrow}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket \neg(r \wedge s) \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. DeMorganI}}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket \neg r \vee \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. Impl.}}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \neg}{\Leftrightarrow} & \llbracket \neg q \rrbracket^\beta = W \text{ oder } \llbracket r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \vee}{\Leftrightarrow} & \llbracket \neg q \vee r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W
\end{aligned}$$

Damit wird  $q \rightarrow \neg(r \wedge s)$  genau dann zu W ausgewertet, wenn  $\neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$  zu W ausgewertet wird. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

b. Beweise oder widerlege ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass  $\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))$  allgemeingültig ist.

Betrachte die Belegung  $\beta$  mit  $\beta(q) = F$  und  $\beta(r) = \beta(s) = W$ . Dann ist

$$\llbracket \neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r)) \rrbracket = F$$

Damit ist die Formel nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu F ausgewertet wird).

■

### Aufgabe 6. Prädikatenlogik

**L.** Beweise:  $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x))) \rightarrow \exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A1):  $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x)))$

Zu Zeigen (Z1):  $\exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A2):  $\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Annahme (A3):  $\forall x.P_1(x)$

Wähle  $x \triangleq y$  in A3

Annahme (A4):  $P_1(y)$

Sei  $x$  (beliebig aber fest) in A2

Annahme (A5):  $P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Aus A4 und A5 folgt A6

Annahme (A6):  $P_2(y)$

Wähle  $z \triangleq y$  in Z1

Zu Zeigen (Z2):  $P_2(y) \wedge P_1(y)$

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1):  $P_2(y)$

Aus A6 folgt Z1.1

Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1):  $P_1(y)$

Aus A4 folgt Z2.1

■

### Aufgabe 7. Widerspruch und Kontraposition

**a.** Ziehe, durch die schrittweise Anwendung logischer Äquivalenzen, alle Negationen in der folgenden Formel soweit wie möglich nach Innen. Begründe jeden Schritt.

$$\begin{array}{ll}
& \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. Impl.} & \equiv \neg(\neg\neg(\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. dopp. Neg.} & \equiv \neg((\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. DeMorgan2} & \equiv \neg(\exists x.P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\text{Def. log. Äquivalenz} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\text{Def. DeMorgan1} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\neg(\forall y.P_2(y)) \vee \neg P_3(y)) \\
\text{Def. log. Äquivalenz} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\exists y.\neg P_2(y) \vee \neg P_3(y))
\end{array}$$

■

**b.** Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Widerspruch für die Aussage  $\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$ .

Widerspruchs Annahme:

$$\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \equiv \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \rightarrow \perp$$

■

**c.** Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Kontraposition für die Aussage  $\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$ .

$$\text{Zu Zeigen: } \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \rightarrow \neg\neg(\exists x.P_1(x))$$

■

## Aufgabe 8. Induktion

**L.** Beweise per Induktion  $\forall n \in \mathbb{N}_7. n \bmod 2 = 1$ .

Hinweis H1:  $(n + m) \bmod r = ((n \bmod r)(m \bmod r)) \bmod r$

Sei

$$P(n) \triangleq (n \bmod 2 = 1)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$(P(7) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_7. P(n) \rightarrow P(n + 10))) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}_7. P(x))$$

**IA** ( $P(7)$ ):

$$7 \bmod 2 = 1$$

Sei  $n \in \mathbb{N}_7$ .

**IV** ( $P(n)$ ):

$$n \bmod 2 = 1$$

**IS** ( $P(n+10)$ ): Zu Zeigen:  $(n+10) \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned}(n+10) \bmod 2 &\stackrel{\text{H1}}{=} ((n \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2 \\ &= ((n \bmod 2) + 0) \bmod 2 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (1 + 0) \bmod 2 \\ &= 1 \bmod 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Nach unserem Induktionsschema gilt nun  $\forall x \in \mathbb{N}_7. P(x)$  was äquivalent zur ursprünglichen Aussage ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

■