

Aufgabe 1. Mengengrundlagen

- a. Gib die mit gelb gekennzeichnete Menge mit nur zwei Mengenoperationen an:

$$M = (A \setminus B) \Delta C$$

■

- b. Berechne: $((\{1, 3\} \times \{1\})) \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}$

$$\begin{aligned} M &= ((\{1, 3\} \times \{1\})) \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\times}{=} (\{(1, 1), (3, 1)\} \cup \{1, 3, 1\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\cup}{=} (\{(1, 1), (3, 1), 1, 3\} \setminus \{(1, 3), 1, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\setminus}{=} \{(1, 1), (3, 1), 3\} \end{aligned}$$

■

- c. Berechne: $(\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\})$

$$\begin{aligned} M &= (\{\emptyset, 2\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\cup}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}, 2\}) \\ &\stackrel{\text{Def.}\mathcal{P}}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\cap}{=} \{\emptyset\} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 2. Mengenbeweise

- a. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(A \cap B) \cap A = B \cap A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) \cap A = B \cap A \\
 \stackrel{\text{Def.}\cap}{=} & \{x \mid x \in \{y \mid y \in A \wedge y \in B\} \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Komm.}}{=} & \{x \mid x \in \{y \mid y \in B \wedge y \in A\} \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.}\in}{=} & \{x \mid (x \in B \wedge x \in A) \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Assoz.}}{=} & \{x \mid x \in B \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
 \stackrel{\text{Idem.}}{=} & \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.}\cap}{=} & B \cap A
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

■

b. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $A \cup (A \setminus B) = A$

Wir beweisen die Aussage. Seien A, B beliebige Mengen.

$$\begin{aligned}
 & A \cup (A \setminus B) = A \\
 \stackrel{\text{Def.}\cup}{=} & \{x \mid x \in A \vee x \in (A \setminus B)\} \\
 \stackrel{\text{Def.}\setminus}{=} & \{x \mid x \in A \vee x \in \{y \mid y \in A \wedge y \notin B\}\} \\
 \stackrel{\text{Def.}\in}{=} & \{x \mid x \in A \vee (x \in A \wedge x \notin B)\} \\
 \stackrel{\text{Distri.}}{=} & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in A)\} \\
 \stackrel{\text{Idem.oder}}{=} & \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Absorp.}}{=} & \{x \mid x \in A\} \\
 \stackrel{\text{Def.}\in}{=} & A
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage.

■

c. Beweise oder widerlege: Für alle Mengen A und B gilt: $(B \cup A) \cap B = A \cap B$

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels.

Wir wählen $A \triangleq \{1, 2\}, B \triangleq \{2, 3\}$.

$$\begin{aligned}
 & (B \cup A) \cap B \\
 = & (\{2, 3\} \cup \{1, 2\}) \cap \{2, 3\} \\
 \stackrel{\text{Def. } \cup}{=} & \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3\} \\
 = & \{2, 3\} \\
 \neq & \{2\} \\
 \stackrel{\text{Def. } \cap}{=} & \{1, 2\} \cap \{2, 3\} \\
 = & A \cap B
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage nicht.

■

Aufgabe 3. Wahrheitstabellen

a. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $\neg q \wedge ((r \leftrightarrow (r \rightarrow \perp)) \vee q)$ kontradiktorisch ist.

q	r	\neg	q	\bigwedge	((r	\leftrightarrow	(r	\rightarrow	\perp))	\vee	q)
F	F	W	F	F	F	F	F	W	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	F	F	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	W	F	W	F	F	W	W

Der Hauptjunktorkomplex wird immer zu F ausgewertet. Also ist die Formel kontradiktorisch.

■

b. Beweise oder widerlege nur mit Hilfe einer Wahrheitstabelle oder eines (Gegen-) Beispiels, dass $((s \wedge \neg q) \rightarrow r) \vee r \equiv r \vee (s \rightarrow q)$.

q	r	s	$((s \wedge \neg q) \rightarrow r)$	$r \vee ((s \wedge \neg q) \rightarrow r)$	$r \vee (s \rightarrow q)$
F	F	F	F	F	F
F	F	W	W	F	F
F	W	F	F	W	W
F	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F
W	F	W	W	F	F
W	W	F	F	W	W
W	W	W	W	W	W

Die beiden Hauptjunktoren werden in jeder Zeile zum selben Wert ausgewertet. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

Aufgabe 4. Logische Äquivalenz

a. Gib an: eine Formel, die logisch äquivalent zu \perp ist und nur \neg und \vee als Operatoren enthält.

$$\neg(q \vee \neg q) \equiv \perp$$

■

b. Beweise nur mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, dass $q \wedge (r \rightarrow s)$ und $\neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)$ logisch äquivalent sind.

$$\begin{aligned}
& q \wedge (r \rightarrow s) \\
\stackrel{\text{Implikation}}{=} & q \wedge (\neg r \vee s) \\
\stackrel{\text{Distr. von } \wedge \text{ über } \vee}{=} & (\neg r \wedge q) \vee (s \wedge q) \\
\stackrel{\text{DeMorganII}}{=} & \neg(r \vee \neg q) \vee (s \wedge q)
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 5. Variablenbelegungen

a. Beweise ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $q \rightarrow \neg(r \wedge s) \equiv \neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$.

$$\begin{aligned}
& \llbracket q \rightarrow \neg(r \wedge s) \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \rightarrow}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket \neg(r \wedge s) \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. DeMorganI}}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket \neg r \vee \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. Impl.}}{\Leftrightarrow} & \llbracket q \rrbracket^\beta = F \text{ oder } \llbracket r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \neg}{\Leftrightarrow} & \llbracket \neg q \rrbracket^\beta = W \text{ oder } \llbracket r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W \\
\stackrel{\text{Def. } \vee}{\Leftrightarrow} & \llbracket \neg q \vee r \rightarrow \neg s \rrbracket^\beta = W
\end{aligned}$$

Damit wird $q \rightarrow \neg(r \wedge s)$ genau dann zu W ausgewertet, wenn $\neg q \vee (r \rightarrow \neg s)$ zu W ausgewertet wird. Also sind die beiden Formeln äquivalent.

■

b. Beweise oder widerlege ausschließlich mit Hilfe von Argumenten über eine oder mehrere Variablenbelegungen, dass $\neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r))$ allgemeingültig ist.

Betrachte die Belegung β mit $\beta(q) = F$ und $\beta(r) = \beta(s) = W$. Dann ist

$$\llbracket \neg(\neg q \vee (s \wedge r)) \vee (q \leftrightarrow (s \wedge r)) \rrbracket = F$$

Damit ist die Formel nicht allgemeingültig (da es eine Belegung gibt, unter der die Formel zu F ausgewertet wird).

■

Aufgabe 6. Prädikatenlogik

L. Beweise: $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x))) \rightarrow \exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A1): $((\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)) \wedge (\forall x.P_1(x)))$

Zu Zeigen (Z1): $\exists z.P_2(z) \wedge P_1(z)$

Annahme (A2): $\exists y.P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Annahme (A3): $\forall x.P_1(x)$

Wähle $x \triangleq y$ in A3

Annahme (A4): $P_1(y)$

Sei x (beliebig aber fest) in A2

Annahme (A5): $P_1(y) \rightarrow P_2(y)$

Aus A4 und A5 folgt A6

Annahme (A6): $P_2(y)$

Wähle $z \triangleq y$ in Z1

Zu Zeigen (Z2): $P_2(y) \wedge P_1(y)$

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1): $P_2(y)$

Aus A6 folgt Z1.1

Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1): $P_1(y)$

Aus A4 folgt Z2.1

■

Aufgabe 7. Widerspruch und Kontraposition

a. Ziehe, durch die schrittweise Anwendung logischer Äquivalenzen, alle Negationen in der folgenden Formel soweit wie möglich nach Innen. Begründe jeden Schritt.

$$\begin{array}{ll}
& \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. Impl.} & \equiv \neg(\neg\neg(\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. dopp. Neg.} & \equiv \neg((\exists x.P_1(x)) \vee (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \\
\text{Def. DeMorgan2} & \equiv \neg(\exists x.P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\text{Def. log. Äquivalenz} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \\
\text{Def. DeMorgan1} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\neg(\forall y.P_2(y)) \vee \neg P_3(y)) \\
\text{Def. log. Äquivalenz} & \equiv (\forall x.\neg P_1(x)) \wedge (\exists y.\neg P_2(y) \vee \neg P_3(y))
\end{array}$$

■

b. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Widerspruch für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$.

Widerspruchs Annahme:

$$\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \equiv \neg(\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))) \rightarrow \perp$$

■

c. Gib an: Den ersten Schritt, d.h. die erste Zeile, eines Beweises per Kontraposition für die Aussage $\neg(\exists x.P_1(x)) \rightarrow (\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y))$.

$$\text{Zu Zeigen: } \neg(\forall y.P_2(y) \wedge P_3(y)) \rightarrow \neg\neg(\exists x.P_1(x))$$

■

Aufgabe 8. Induktion

L. Beweise per Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_7. n \bmod 2 = 1$.

Hinweis H1: $(n + m) \bmod r = ((n \bmod r)(m \bmod r)) \bmod r$

Sei

$$P(n) \triangleq (n \bmod 2 = 1)$$

Wir verwenden das Induktionsschema:

$$(P(7) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_7. P(n) \rightarrow P(n + 10))) \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}_7. P(x))$$

IA ($P(7)$):

$$7 \bmod 2 = 1$$

Sei $n \in \mathbb{N}_7$.

IV ($P(n)$):

$$n \bmod 2 = 1$$

IS ($P(n+10)$): Zu Zeigen: $(n+10) \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned}(n+10) \bmod 2 &\stackrel{\text{H1}}{=} ((n \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2 \\ &= ((n \bmod 2) + 0) \bmod 2 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (1 + 0) \bmod 2 \\ &= 1 \bmod 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Nach unserem Induktionsschema gilt nun $\forall x \in \mathbb{N}_7. P(x)$ was äquivalent zur ursprünglichen Aussage ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

■

Aufgabe 9. Eigenschaften von Relationen

- a. Gib die Relation R_4 , R_5 und R_6 jeweils in Mengenschreibweise an.

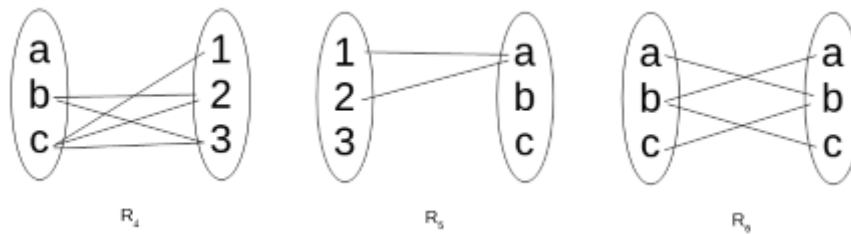
$$R_4 \triangleq \{(b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3), (c, 1)\}$$

$$R_5 \triangleq \{(1, a), (2, a)\}$$

$$R_6 \triangleq \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c)\}$$

■

- b. Gib die Relation R_4 , R_5 und R_6 jeweils graphisch an.



■

- c. Gib für jede der Relationen R_4 , R_5 und R_6 an, welche der Eigenschaften links-/rechtstotal und links-/rechtseindeutig erfüllt bzw. nicht erfüllt sind

	linkstotal	rechtstotal	linkseindeutig	rechtseindeutig
R_4	X	✓	X	X
R_5	X	X	X	✓
R_6	✓	✓	X	X

■

- d. Gib zwei Mengen X , Y so an, dass jede rechtstotale, rechtseindeutige Relation $R : (X, Y)$ linkseindeutig ist.

Wenn $X = \{\emptyset\}$ und $Y = \{\emptyset\}$ ist jede Relation $R : (X, Y)$, die rechtstotal und rechtseindeutig ist, linkseindeutig, da die leere Relation $\emptyset_{X,Y}$ immer linkseindeutig ist.

■

Aufgabe 10. Homogene Relation

$$C \triangleq \{a, b, c, d\}$$

$R_7(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ mit $R_7 = \{(a, a), (a, c), (c, b), (d, c), (d, d)\}$

a. Berechne $t(R_7)$ schrittweise.

$$\begin{aligned}
 R_7^1 &\stackrel{\text{FS2.1.16}}{=} R_7 \\
 R_7^2 &\stackrel{\text{FS2.1.16}}{=} R_7 R_7 \stackrel{\text{Def.}}{=} \{(a, b), (d, b)\} \\
 R_7^3 &\stackrel{\text{FS2.1.16}}{=} R_7 R_7^2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \emptyset \\
 R_7^4 &\stackrel{\text{FS2.1.16}}{=} R_7 R_7^3 \stackrel{\text{Def.}}{=} R_7^3 \\
 t(R_7) &\stackrel{\text{Def. } t(\cdot)}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_7^n = R_7 \cup R_7^2 \cup R_7^3 \\
 &\stackrel{\text{Def. } \cup}{=} \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, b), (d, b), (d, c), (d, d)\}
 \end{aligned}$$

■

b. Gib für $R_8 \triangleq t(R_7) \cup \Delta_C$ an, welche der Ordnungsbegriffe Quasiordnung, partielle Ordnung und totale Ordnung erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

$$\Delta_C = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

$$R_8 = \Delta_C \cup t(R_7) \stackrel{\text{Def. } \cup}{=} \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (c, b), (c, c), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

reflexiv :

$$\Delta_C \stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \subseteq R_8$$

transitiv :

$$R_8 R_8 \stackrel{\text{Def.}}{=} R_8 \subseteq R_8$$

antisymmetrisch :

$$\begin{aligned} R_8^{-1} \cap R_8 &\stackrel{\text{Def.}^{-1}}{=} \{(a, a), (b, a), (b, b), (c, a), (b, c), (c, c), (b, d), (c, d), (d, d)\} \cap R_8 \\ &\stackrel{\text{Def.}\cap}{=} \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \Delta_C \subseteq R_8 \end{aligned}$$

linear :

$$\begin{aligned} &\nabla_{C,C} \setminus \Delta_C \\ &\stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \nabla_{C,C} \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\nabla}{=} \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), \\ &\quad (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\} \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\setminus}{=} \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\} \\ &\stackrel{\text{Def.}\subseteq}{=} \nabla_{C,C} \setminus \Delta_C \not\subseteq R_8 \end{aligned}$$

R_8 ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und nicht linear, da (a, d) nicht enthalten in R_8 , und somit ist R_8 eine quasi Ordnung, eine partielle Ordnung, aber keine totale Ordnung. ■

c. Sei $R_9 : (C, C)$ mit $R_9 \triangleq \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, d)\}$

reflexiv :

$$\Delta_C \stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \subseteq R_8$$

transitiv :

$$R_8 R_8 \stackrel{\text{Def.};}{=} R_8 \subseteq R_8$$

antisymmetrisch :

$$R_8^{-1} \cap R_8 \stackrel{\text{Def.}^{-1}}{=} \{(a, a), (b, a), (b, b), (c, c), (d, c), (d, d)\} \cap R_8 \\ \stackrel{\text{Def.}\cap}{=} \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \Delta_C \subseteq R_8$$

R_9 ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und somit eine partielle Ordnung.

■

d. Beweise: R_9 ist keine totale Ordnung.

linear :

$$\nabla_{C,C} \setminus \Delta_C \\ \stackrel{\text{Def.}\Delta}{=} \nabla_{C,C} \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \\ \stackrel{\text{Def.}\nabla}{=} \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), \\ (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\} \setminus \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \\ \stackrel{\text{Def.}\setminus}{=} \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\} \\ \stackrel{\text{Def.}\subseteq}{=} \nabla_{C,C} \setminus \Delta_C \not\subseteq R_8$$

Das Paar (a, c) ist nicht enthalten und damit ist R_9 nicht linear und somit keine totale Ordnung.

■

Aufgabe 11. Abbildungen, Funktionen

a.

Gib an: Welche der Relationen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 sind (keine) partiellen bzw. totalen Abbildungen?

Die Relationen R_1 und R_2 sind keine partiellen bzw. totalen Abbildungen. Die Relation R_3 ist eine partielle Abbildung und die Relation R_4 ist eine totale Abbildung.

Gib an: Für jede der Relationen, die keine partielle Abbildung ist, ein Gegenbeispiel, dass das begründet.

Die Relation R_1 ist keine partielle Abbildung, weil die Paare (d, b) und $(d, 5)$ in der Relation auftreten. Die Relation R_2 ist keine partielle Abbildung, weil die Paare $(5, 5)$ und $(5, d)$ in der Relation auftreten. ■

b.

Gib an: Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv werden durch die Relationen R_1 , R_2 , R_3 und R_4 (die partielle oder totale Abbildungen sind) erfüllt / nicht erfüllt?

R_3 ist injektiv, surjektiv und bijektiv.

R_4 ist weder injektiv, surjektiv noch bijektiv.

Gib für jede nichterfüllte Eigenschaft ein Gegenbeispiel oder eine Begründung an.

Die Abbildung R_4 ist nicht injektiv, weil die Paare $(5, 5)$ und $(d, 5)$ in der Relation auftreten. Die Abbildung R_4 ist nicht surjektiv, weil das Element 3 aus dem Zielbereich A nicht mit einem anderen Element aus dem Argumentbereich B in Relation steht. Die Abbildung R_4 ist nicht bijektiv, weil sie nicht injektiv und nicht surjektiv ist. ■

c.

Beweise oder widerlege: Für alle Funktionen $f : B \rightarrow C$, $g : A \rightarrow B$ mit beliebigen Mengen A , B und C gilt, wenn $f \circ g$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

Wir widerlegen die Aussage durch Angabe eines Gegenbeispiels.

Wir wählen die Mengen A , B und C mit: $A \triangleq \{1, 2\}$, $B \triangleq \{3, 4\}$, $C \triangleq \{5\}$.

Wähle $g: A \rightarrow B$ mit $g \triangleq \{(1, 3)\} \triangleq R_1$ und $f: B \rightarrow C$ mit $f \triangleq \{(3, 5)\} \triangleq R_2$.

$(f \circ g) \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} \{(1, 5)\}$, wobei gilt, dass $\forall c \in C. \exists a \in A. a R_2 c$. Daraus folgt, dass $(f \circ g)$ surjektiv ist.

Für die gewählte Funktion g gilt aber nicht $\forall b \in B. \exists a \in A. a R_1 b$. Daraus folgt, dass g nicht surjektiv ist.

Somit ist die Aussage widerlegt. ■

Aufgabe 12. Kardinalität

Sei $M \triangleq \{n \in \mathbb{N} | n \bmod 10 = 7\}$

Beweise oder widerlege: $\text{card}(M) = \text{card}(\mathbb{N})$

L. Wir beweisen die Aussage und geben eine Bijektion $f: M \rightarrow \mathbb{N}$ an.

$$f: M \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto (x - 7) : 10$$

Die Funktion ist für jedes $x \in M$ eindeutig definiert und bildet ausschließlich auf ganze Zahlen ab.

Wir geben eine weitere Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow M$ an.

$$g: \mathbb{N} \rightarrow M$$

$$x \mapsto 10x + 7$$

Zu Zeigen (Z1): Bijektion(f)

Wenn $(f \circ g) = \Delta_{\mathbb{N}}$ und $(g \circ f) = \Delta_M$, dann ist laut Formelsammlung 2.2.8 f eine Bijektion.

Teil 1: Zu Zeigen (Z1.1): $\forall x \in \mathbb{N}. (f \circ g)(x) = \Delta_{\mathbb{N}}(x)$ Sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

$$(f \circ g)(x)$$

$$\stackrel{\text{Def. } \circ}{=} f(g(x))$$

$$\stackrel{\text{Def. } g}{=} f(10x + 7)$$

$$\stackrel{\text{Def. } f}{=} ((10x + 7) - 7) : 10$$

$$= x$$

$$\stackrel{\text{Def. } \Delta}{=} \Delta_{\mathbb{N}}(x)$$

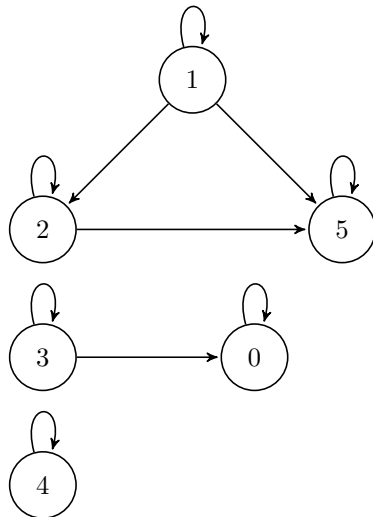
Teil 2: Zu Zeigen (Z2.1): $\forall x \in M. (g \circ f)(x) = \Delta_M(x)$ Sei $x \in M$ beliebig aber fest.

$$\begin{aligned}
 & (g \circ f)(x) \\
 \stackrel{\text{Def. } \circ}{=} & g(f(x)) \\
 \stackrel{\text{Def. } f}{=} & g((x - 7) : 10) \\
 \stackrel{\text{Def. } g}{=} & 10 * ((x - 7) : 10) + 7 \\
 = & x \\
 \stackrel{\text{Def. } \Delta}{=} & \Delta_M(x)
 \end{aligned}$$

Da wir Z1.1 und Z2.1 gezeigt haben, gilt: f ist eine Bijektion. Somit gilt die Aussage. ■

Aufgabe 13. Äquivalenzen

a.



■

b.

A/R_1 hat 3 Äquivalenzklassen $A/R_1 = \{ [1]_{R_1}, [0]_{R_1}, [4]_{R_1} \}$

mit $[1]_{R_1} = \{1, 2, 5\}$, $[0]_{R_1} = \{3, 0\}$ und $[4]_{R_1} = \{4\}$

■

c. Beweise: $\forall x, y \in X. (x, y) \in R \rightarrow x = y$

Zu Zeigen (Z0): $\forall x, y \in X. (x, y) \in R \rightarrow x = y$

Sei x, y beliebig in X

Zu Zeigen (Z1): $(x, y) \in R \rightarrow x = y$

Annahme (A0) : $(x, y) \in R$

Zu Zeigen (Z2): $x = y$

Aus der Eigenschaft der Antisymmetrie und (A0) folgt

(A1) $\forall x, y \in X. xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$

Aus (A0) und (A1) folgt

(A2) $x = y$

■

Aufgabe 14. Repräsentantensysteme

a.

$R \triangleq \{(a, b) \mid (a - b) \bmod 9 = 0\}$

■

b.

A/R hat 3 Äquivalenzklassen $A/R = \{ [2]_R, [5]_R, [8]_R \}$ mit

$[2]_R = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 9 = 2 \}$

$[5]_R = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 9 = 5 \}$

$[8]_R = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 9 = 8 \}$

■

c.

$P \triangleq \{2, 5, 8\}$

■

d.

$f : \{a, b, c\} \rightarrow P$ mit $f \triangleq \{(a, 2), (b, 5), (c, 8)\}$

■

Aufgabe 15. Kern einer Abbildung

a.

$$\text{Ker}(f) = \{(a, c), (c, a), (a, e), (e, a), (c, e), (e, c), (d, f), (f, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

■

Aufgabe 16. Wörter und Sprachen

Gegeben sei das Alphabet $\lambda = \{a, b, c\}$.

a. Gib alle Präfixe der Wörter ac und bca an.

$$\{\lambda, a, c, b, bc, bca\}$$

■

b. Gib eine Menge von maximal 5 Wörtern über dem Alphabet \sum so an, dass die Suffixe dieser Wörter genau aus den Wörtern $\lambda, a, b, c, ac, bb, cb, ccb$ bestehen

$$M = \{a, bb, ac, ccb\}$$

■

c. Gib ein Wort über dem Alphabet λ so an, dass die Anzahl der Teilwörter und die Summe der Anzahl der Präfixe und Suffixe gleich 10 ist

$$w = abca \in \lambda^*$$

■

Aufgabe 17. Reguläre Ausdrücke

Gegeben sei das Alphabet $\lambda = \{a, b, c\}$.

- a.** Gib die Sprache $L(e_1)$ für den regulären Ausdruck $e_1, a0a + ac(b + e)^* + d + cc^*$ an, ohne auf reguläre Ausdrücke zu verweisen.

$$L(e_1) \triangleq (w \in \Sigma^* \mid w \in ac(b)^*, d, cc^*)$$

■

- b.** $e_2 \triangleq ((b)^*a(b)^*a(b)^*a(b)^*)^+ + d + c^* + (c)^*d(c)^* + ((c)^*(d)^+(c)^*(d)^+(c)^*(d)^+(c)^*)^*$

■

Aufgabe 18. Ordnen von Wörtern

- a.**

$$\lambda \ll_{R1} 312 \ll_{R1} 32 \ll_{R1} 120 \ll_{R1} 032 \ll_{R1} 0 \ll_{R1} 02$$

■

- b.**

$$\lambda \ll_{R2}^S 23 \ll_{R2}^S 30 \ll_{R2}^S 231 \ll_{R2}^S 230 \ll_{R2}^S 000$$

■

- c.**

$$R_3 = t(r(\{(2, 0), (0, 3), (3, 1)\}))$$

■

Aufgabe 19. Induktion über Wörter

L. Beweise per (Wort)Induktion das $\forall w \in \Sigma^* . \text{bin}(w) \geq |w|_1$

$\text{bin}(w)$ kann nicht kleiner sein als $|w|_1$ da für jede 1 die in w enthalten ist mindestens 1 zum Wert von $\text{bin}(w)$ hinzugefügt wird. die Funktion w ändert von der letzten Stelle nach vorne und verdoppelt bei jedem Schritt den Multiplikator von der Binärstelle und startet bei 1. Dadurch kann muss jede 1 in w mindestens 1 zur Entzahl hinzuaddieren.

Bsp. $w=10110$

$$|10110|_1 = 3$$

$$\text{Bin}(10110) = \text{Bin}(1011) + 1 * 0$$

$$\text{Bin}(1011) = \text{Bin}(101) + 2 * 1 + 1 * 0$$

$$\text{Bin}(101) = \text{Bin}(10) + 4 * 1 + 2 * 1 + 1 * 0$$

$$\text{Bin}(10) = \text{Bin}(1) + 8 * 0 + 4 * 1 + 2 * 1 + 1 * 0$$

$$\text{Bin}(1) = \text{Bin}(\lambda) + 16 * 1 + 8 * 0 + 4 * 1 + 2 * 1 + 1 * 0$$

$$\text{Bin}(\lambda) = 0 + 16 * 1 + 8 * 0 + 4 * 1 + 2 * 1 + 1 * 0 = 22$$

$$22 \geq 3$$

■

b.

$$f : D \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } ((n \bmod 3) + 1) * 4 + 1$$

■

c.

$$\text{Antwort: } \text{card}(X) > \text{card}(Y)$$

■

Aufgabe 20. Grammatiken und Sprachen

a.

$$S \Rightarrow_{G_1} bV \Rightarrow_{G_1} bcbS \Rightarrow_{G_1} bcbaaU \Rightarrow_{G_1} bcbaacU \Rightarrow_{G_1} bcbaacc$$

■

b.

$$L(G_1) = \{x^n y \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \{bca^m b \mid m \in \{0, 1\}\} \text{ und } y = \{aavc \mid v \in \{b, c\}^*\}\}$$

■

c.

$$S \Rightarrow_{G_2} cT \Rightarrow_{G_2} cbbTaa \Rightarrow_{G_2} cbbabTaaa \Rightarrow_{G_2} cbbabcaaaa$$

■

d.

$$L(G_2) = \{cb^{2n}(ab)^mb^{2o}c(aa)^{n+o}a^m \mid n, m, o \in \mathbb{N}\}$$

■

Aufgabe 21. Sprachen und Grammatiken

a.

$$G_3 = (\{S, T, U\}, \Sigma, P_3, S) \text{ mit}$$

$$P_3 :$$

$$S \rightarrow cT$$

$$T \rightarrow aU \mid bU \mid a \mid b$$

$$U \rightarrow aaU \mid bbU \mid abU \mid baU$$

■

b.

$$G_4 = (\{S, T, U\}, \Sigma, P_4, S) \text{ mit}$$

$$P_4 :$$

$$S \rightarrow bbT$$

$$T \rightarrow bTc \mid bTac \mid aU$$

$$U \rightarrow aU \mid cc$$

■

Aufgabe 22. Chomsky Hierarchie

a.

$G_1 \rightarrow$ Typ 2 Grammatik

$G_2 \rightarrow$ Typ 1 Grammatik

■

b.

$A_3 \rightarrow$ ist regulär (Typ 3)

$A_4 \rightarrow$ ist kontextfrei (Typ 2)

■

c.

$G_5 = (\{S, T, U, V, W\}, \{a, b\}, P_5, S)$ mit

$P_5 :$

$S \rightarrow aT \mid cU$

$T \rightarrow aT \mid cW \mid c$

$U \rightarrow bV \mid b$

$V \rightarrow bU$

$W \rightarrow bW \mid b$

■

Aufgabe 23. Reguläre Sprachen / Pumping Lemma

a.

Seien $m \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Wir wählen das Wort $w = a^m c^m b^{m+7}$ mit $w \in A_1$ und $|w| \geq m$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \lambda$ und $|xy| \leq m$. Dann ist $x = a^i$, $y = a^j$, $z = a^{m-i-j} c^m b^{m+7}$ für $j \neq 0$ und $i + j \leq m$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = a^{m-j} c^m b^{m+7}$, somit ist $xy^0z \notin A_1$, denn der Abstand von $m - j$ zu $m + 7$ kann nicht mehr 7 betragen, da $j \neq 0$ ist.

■

b.

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $w = cb^{m-3}ca^m$ mit $w \in A_2$, denn $cb^{m-3}ca^m = cxc a^m$ für $x \in c, b^*$ und $|cb^{m-3}c| < m$ und $|w| \geq m$

Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \lambda$ und $|xy| \leq m$

1.Fall: $x = cb^i, y = b^j c, z = a^m$ für $i+j = m-3$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = cb^i a^m$.
 $cb^i a^m \notin A_2$

2.Fall: $x = cb^{m-3}, y = c, z = a^m$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = cb^{m-3}a^m$.
 $cb^{m-3}a^m \notin A_2$

3.Fall: $x = c, y = b^{m-3}c, z = a^m$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = ca^m$. $ca^m \notin A_2$

4.Fall: $x = \lambda, y = cb^{m-3}c, z = a^m$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $xy^0z = a^m$. $a^m \notin A_2$

■

Aufgabe 24. DFA

a.

$(q_1, bb) \vdash (q_2, b) \vdash (q_3, \lambda)$ da $q_3 \notin \{q_2\}$, ist $bb \notin L(M_3)$

$(q_1, cc bc) \vdash (q_0, bc) \vdash (q_1, bc) \vdash (q_2, c) \vdash (q_2, \lambda)$ da $q_2 \in \{q_2\}$, ist $cc bc \in L(M_3)$

■

b.

$(q_0, abc) \vdash (q_1, bc) \vdash (q_1, c) \vdash (q_2, \lambda)$ da $q_2 \in \{q_0, q_2\}$, ist $abc \in L(M_4)$

$(q_0, cbc) \vdash (q_2, bc) \vdash (q_2, c) \vdash (q_1, \lambda)$ da $q_1 \notin \{q_0, q_2\}$, ist $cbc \notin L(M_4)$

■

c.

$L(M_3) = \{w \in c^n bc^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ und } |w| > 0\}$

■

d.

$L(M_4) = \{(w \in \{a, b, c\}^* \mid \exists x \in \{b, c\}. \exists n \in \{0, 1\}, m \in \mathbb{N}. w = a^n x^m \wedge |w|_C \bmod 2 =$

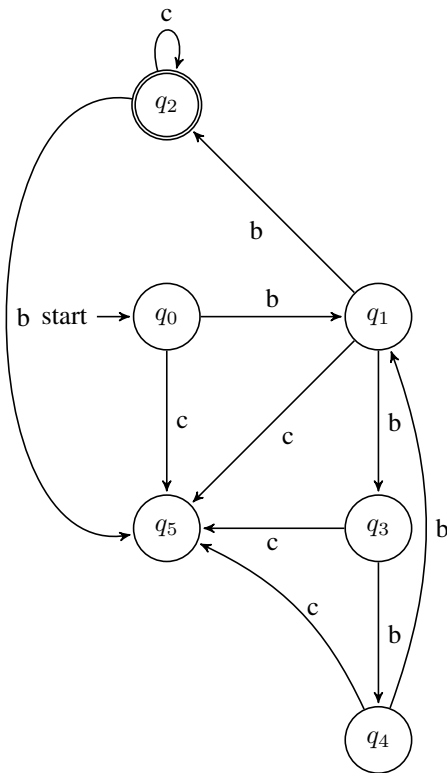
$1) \vee |w| = 0\}$

■

Aufgabe 25. Automat zu einer Sprache

a.

δ_5 :



■