
Kreiselprecision

Praktikanten: Silke Andrea Teepe
Marcel Kramer
Gerald Loitz
Betreuer: Alexander Schmelev

Testat:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	1
2.1	Trägheitsmomente	1
2.2	Präzession	2
2.3	Nutation	3
3	Durchführung	3
4	Auswertung	3
4.1	Theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes	3
4.2	Berechnung des Trägheitsmomentes als physikalisches Pendel	4
4.3	Präzessionsfrequenz	5
4.4	Nutation	6
5	Diskussion	7

1 Einleitung

2 Theorie

2.1 Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment des Rades (s. Abb. ??) bezüglich der Symmetrieachse $I_{R||}$ kann hergeleitet werden, indem man die Bewegung in Zylinderkoordinaten betrachtet:

$$\begin{aligned} J_{R||} &= \int_{M_R} r_{\perp}^2 dx = \rho_R \int_{V_R} r_{\perp}^2 dV \\ &= \rho_R \int_0^{D_R} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_R} r^3 dr d\varphi dz = \rho_R \int_0^{D_R} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R_R^4 d\varphi dz \\ &= \rho_R \int_0^{D_R} \frac{1}{2} \pi R_R^4 dz = \rho_R D_R \frac{1}{2} \pi R_R^4 \\ &= \frac{1}{2} M_R R_R^2 \end{aligned}$$

Es entspricht dabei $M_R = \rho_R D_R \pi R_R^2$ der gesamten Masse des Rades, ρ_R dessen Dichte, R_R dem Radius und D_R der Dicke.

Das vertikale Trägheitsmoment des gesamten Versuchsaufbaus $J_{ges\perp}$ bezüglich der Aufhängung benötigt zur Bestimmung zunächst das Trägheitsmoment eines Zylinders um eine Achsenkrechte der Symmetrieachse durch den Schwerpunkt ¹:

$$J_{Z\perp} = M \left(\frac{1}{12} D^2 + \frac{1}{4} R^2 \right)$$

Hier entspricht D der Dicke, R dem Radius und M der Masse des Zylinders.

Mit Hilfe des Steiner'schen Satzes kann nun $J_{ges\perp}$ bestimmt werden. Das Trägheitsmoment des Stabes wird dabei vernachlässigt.

$$\begin{aligned} J_{ges\perp} &= J_{R\perp} + M_R d_R^2 + J_{A\perp} + M_A d_A^2 \\ &= M_R \left(\frac{1}{12} D_R^2 + \frac{1}{4} R_R^2 + d_R^2 \right) + M_A \left(\frac{1}{12} D_A^2 + \frac{1}{4} R_A^2 + d_A^2 \right) \end{aligned}$$

($d_R \hat{=}$ Abstand Unterstützungspunkt zum Radschwerpunkt; $J_{A\perp} \hat{=}$ vertikales Trägheitsmoment des Ausgleichgewichts; $D_A \hat{=}$ Dicke des Ausgleichgewichts; $R_A \hat{=}$ Radius des Ausgleichgewichts; $d_A \hat{=}$ Abstand Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt des Ausgleichgewichts)

Aus Versuch 3 ist die Formel zur Berechnung des Trägheitsmoments $J_{R_{||}}$ eines physikalischen Radpendels bezüglich seiner Symmetrieachse bekannt:

$$J_{R_{||}} = \frac{gd_P m_P T^2}{4\pi^2} - m_P d_P^2 \quad (1)$$

($T \hat{=}$ Schwingungsdauer des Rades; $d_P \hat{=}$ Abstand Pendelgewicht zur Drehachse; $m_P \hat{=}$ Masse des Pendelgewichts)

2.2 Präzession

Durch das angehängte Zusatzgewicht wird auf den Versuchsaufbau ein Drehmoment

$$|\vec{D}| = |d_Z \times \vec{F}_G| = d_Z m_Z g \sin(\Theta)$$

($d_Z \hat{=}$ Abstand Zusatzgewicht zur vertikalen Drehachse; $F_G \hat{=}$ Gewichtskraft auf das Zusatzgewicht; $m_Z \hat{=}$ Masse des Zusatzgewichts; $\Theta \hat{=}$ Winkel zwischen Stab und vertikaler Drehachse) ausgeübt. \vec{D} steht senkrecht auf dem Drehimpuls \vec{L} des Rades und ändert, da $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$, nicht den Betrag, sondern lediglich die Richtung. Somit überstreicht die Drehimpulsachse einen Kegel; normiert man die Seitenlänge dieses auf L , so ergibt sich für den Radius des nach oben breiter werdenden Kegels $L \cdot \sin(\Theta)$. Betrachten des Winkels α (im Bogenmaß), der innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls von der Drehachse eingeschlossen wird, ergibt folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \omega_P &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{L \sin(\Theta)} = \frac{D}{L \sin(\Theta)} \\ &= \frac{d_Z m_Z g \cdot \sin(\Theta)}{J_{R_{||}} \omega_R \cdot \sin(\Theta)} \\ &= \frac{d_Z m_Z g}{J_{R_{||}} \omega_R} \end{aligned}$$

($\omega_P \hat{=}$ Winkelgeschwindigkeit der Präzession; $\omega_R \hat{=}$ Winkelgeschwindigkeit des Rades bezüglich der Symmetrieachse) Es folgt für das waaerechte Trägheitsmoment des Rades bezüglich seiner Symmetrieachse:

$$J_{R_{||}} = \frac{d_Z m_Z g}{\omega_P \omega_R} \quad (2)$$

2.3 Nutation

Die Figurenachsen bezeichnen die Achsen bezüglich denen ein Körper das kleinste oder größte Trägheitsmoment besitzt. Lediglich Rotation um diese Achsen ist stabil. Verschieben der Drehimpulsachse aus einer parallelen Lage zu einer Figurenachse, z.B. durch einen Stoß, führt zu einer Rotation der Figurenachse um die Drehimpulsachse. Sichtbar wird dies durch "Wippen", bzw. "Nicken" des Kreisels.

Sei $\vec{\omega}_N$ die Winkelgeschwindigkeit der Nutation, $\vec{\omega}_{N\perp}$ den vertikalen Anteil dieser, und α der Winkel zwischen $\vec{\omega}_N$ und $\vec{\omega}_R$. $\vec{L}_{||}$ sei der horizontale Anteil von \vec{L} , parallel zu $\vec{\omega}_R$; \vec{L}_{\perp} sei der vertikale Anteil, parallel zu $\vec{\omega}_{N\perp}$. $\vec{J}_{Ges||}$ und $\vec{J}_{Ges\perp}$ seien nach dem gleichen Prinzip definiert. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{N\perp} &= \vec{\omega}_N \cdot \sin(\alpha) \\ \frac{L_{||}}{\cos(\alpha)} &= L = \frac{L_{\perp}}{\sin(\alpha)} \\ L_{||} &= J_{Ges||} \cdot \omega_R \\ L_{\perp} &= J_{Ges\perp} \cdot \omega_{N\perp} \\ \Leftrightarrow \omega_N &= \frac{\omega_{N\perp}}{\sin(\alpha)} = \frac{L_{\perp}}{J_{Ges\perp} \sin(\alpha)} = \frac{L_{||}}{J_{Ges\perp} \cos(\alpha)} \\ &= \frac{J_{Ges||} \omega_R}{J_{Ges\perp} \cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkwinkel α ist $\cos(\alpha) \approx 1$. Damit folgt:

$$\frac{\omega_N}{\omega_R} \approx \frac{J_{Ges||}}{J_{Ges\perp}} \quad (3)$$

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes

Wie aus dem Versuch "Das Trägheitsmoment" bekannt ist berechnet sich das horizontale Trägheitsmoment eines Rades mit Masse M_R und Radius R_R durch die Formel

$$J_{hor} = \frac{1}{2} M_R R_R^2.$$

Mit den abgelesenen Werten des Rades aus Tabelle 1 erhält man $J = 9,95 \cdot 10^{-3}$. Die abgelesenen Werte waren ohne Fehlerangaben und werden daher als exakt angenommen. Der Messfehler für die selbst gemessenen Längen wurde mit 2 mm abgeschätzt.

Größe	Wert
Masse des Rads M_R	1326 g
Masse des Zusatzgewichts M_Z	80 g
Masse des Ausgleichsgewichts M_G	932 g
Breite des Rads L_R	28 mm
Abstand Rad zum Stützpunkt A_R	11,5 cm
Abstand Ausgleichsgewicht zum Stützpunkt A_G	$16,8 \pm 0,2$ cm
Länge des Ausgleichsgewichts L_G	$4,35 \pm 0,2$ cm
Länge des Stabs L_S	$40 \pm 0,2$ cm
Radius des Rads R_R	245 mm
Radius des Ausgleichsgewichts R_G	$3 \pm 0,2$ cm

Tabelle 1: Werte zur Berechnung der Trägheitsmomente

Um das vertikale Trägheitsmoment des Kreisels zu bestimmen wird die Summe aus den Trägheitsmomenten der Komponenten gebildet und der Satz von Steiner ausgenutzt. Dabei werden Rad und Ausgleichsgewicht als Zylinder betrachtet, deren Trägheitsmoment bei Rotation durch die Mittelachse $J_Z = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ beträgt. Das Trägheitsmoment eines Stabes ist $J_S = \frac{1}{12}ML^2$. Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
J_{vert} &= J_{Rad} + J_{Ausgleichsgewicht} + J_{Stange} \\
&= \frac{1}{4}M_R R_R^2 + \frac{1}{12}M_R L_R + M_R A_R + \frac{1}{4}M_G R_G^2 + \frac{1}{12}M_G L_G^2 + M_G A_G \\
&\quad + \frac{1}{12}M_S L_S^2 + M_S \left(\frac{L_S}{2} - L_R \right)^2.
\end{aligned}$$

Die Masse der Stange lässt sich leider nicht genau bestimmen und muss daher abgeschätzt werden. Ihr Volumen ist ($V = \pi R^2 \cdot L$). Die Stange ist vermutlich aus Eisen, was eine Dichte von $7,874 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ besitzt, wie man in jedem Nachschlagewerk sehen kann. Einsetzen unserer Werte liefert $M_S = 247,37$ g. Wir schätzen den Wert daher mit $M_S = (250 \pm 100)$ g ab. Der Gesamtfehler $\sigma_{J_{vert}}$ des Trägheitsmomentes ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung. Das Ergebnis mit den gemessenen Werten ist

$$J_{vert} = (6,93 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

4.2 Berechnung des Trägheitsmomentes als physikalisches Pendel

Das Trägheitsmoment des physikalischen Pendels lässt sich mit Formel 1 berechnen. Bei dem verwendeten Versuchsaufbau lautet sie

$$J = \frac{(M_R + M_G) g d T^2}{4\pi^2} - M_G A_G^2.$$

Dabei ist T die Periodendauer, d der Abstand zur Drehachse und g die Erdbeschleunigung. Der Abstand zur Drehachse d berechnet sich zu

$$d = \frac{M_G}{M_R + M_G} \cdot A_G = (0,0096 \pm 0,0001) \text{ m} .$$

Die Periodendauer $T = 1,69 \pm 0,014 \text{ s}$ ergibt sich aus den gewichteten Mittelwert der Messungen. Der zugehörige systematische Fehler wurde durch $\sigma_T = 0,01 + 0,005t$ abgeschätzt. Für das Trägheitsmoment ergibt sich damit

$$J = (9,16 \pm 1,99) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 .$$

4.3 Präzessionsfrequenz

Im zweiten teil wurde die je eine halbe Periodendauer T_p der Präzession und die Periodendauer T_r der Rotation des Rades nach jeweils einer halben Umdrehung des Kreisel gemessen. Aus diesen Messungen ergeben sich die Präzessionsfrequenz $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ und die Rotationsfrequenz $\omega_r = \frac{2\pi}{T_r} \Leftrightarrow \omega_r^{-1} = \frac{T_r}{2\pi}$. Um die Rotationsfrequenz während der Präzessionsmessung zu erhalten wird zu jedem Messwert der Präzession jeweils der Mittelwert aus der Rotationsfrequenz vorher und hinterher gebildet. Der Fehler σ_{T_r} der Rotation ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung zu $\sigma_{\omega_r} = \frac{2\pi}{T_r^2} \sigma_{T_r}$. Analog berechnet sich der Fehler der Präzession zu $\sigma_{T-p} = \frac{2\pi}{T_p^2} \sigma_{T_p}$. Für den Fehler σ_T der Zeitmessung mit der Lichtschranke wurde wie oben wieder der systematische Fehler $\sigma_T = 0,01 + 0,005t$ verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 1 zu sehen. Die steigung der zugehörigen Regressionsgeraden ergibt sich jeweils durch $\Omega = \omega_r \omega_p$.

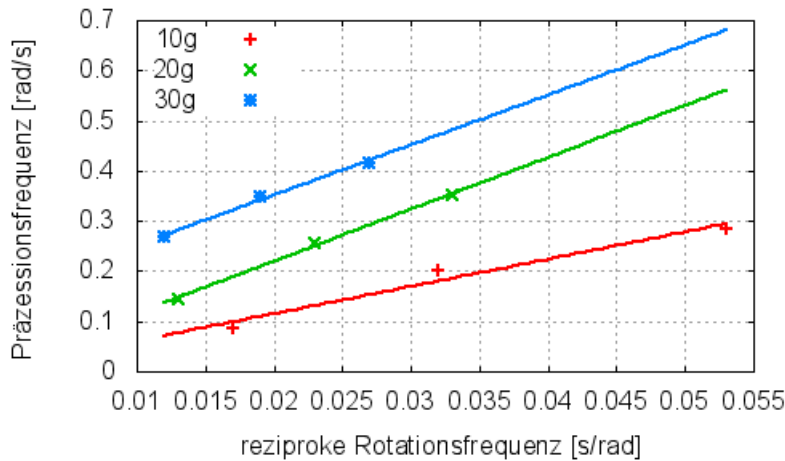


Abbildung 1: Verhältnis von Rotations- und Präzessionsfrequenz

Nun lässt sich das Trägheitsmoment mithilfe von Formel 2 aus dem Theorieteil berechnen. Der Abstand vom Zusatzgewicht zur Drehachse beträgt $d_Z = (28,5 \pm 0,2) \text{ cm}$.

Der Fehler des Trägheitsmoment ist

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{m_Z g}{\omega_r \omega_p}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{d_Z m_Z g}{(\omega_p \omega_r)^2}\right)^2 \sigma_\Omega^2}$$

Die Trägheitsmomente der einzelnen Massen sind in Tabelle 2 aufgeführt. Berechnet man den gewichteten Mittelwert erhält man

$$J = (9,77 \pm 0,40) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} .$$

Masse [g]	Trägheitsmoment J [kg m ⁻² · 10 ⁻³]
10	10,07 ± 0,71
20	10,37 ± 0,72
30	0,91 ± 0,64

Tabelle 2: Trägheitsmomente aus Messung 4 und 5

4.4 Nutation

Die Nutationsgeschwindigkeit lässt sich durch

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

mit dem Fehler $\sigma_{\omega_n} = \sigma_{T_n} \frac{2\pi}{T_n^2}$ berechnen. Dabei wird wieder der systematische Fehler der Stoppuhr mit $\sigma_{T_n} = 0,01 + 0,005t$ beachtet. In Abbildung 2 sind die Ergebnisse zu sehen. Man kann einen linearen Zusammenhang erkennen, auch wenn der zweit Messwert etwas abzuweichen scheint.

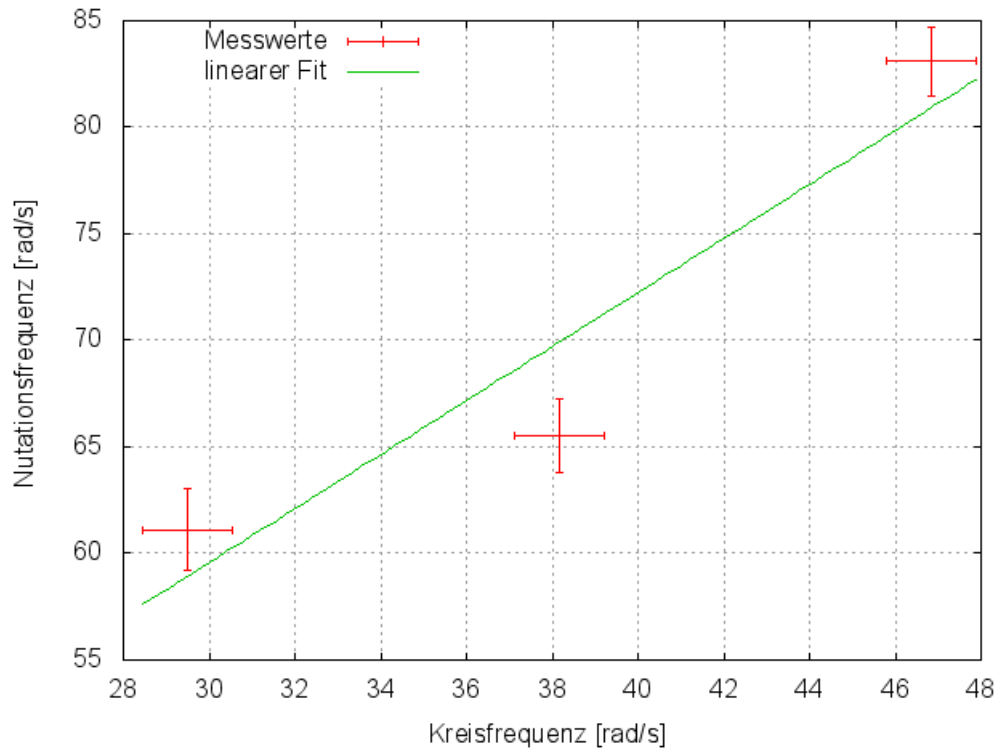


Abbildung 2: Rotations- und Nutationsfrequenz

Die lineare Regression ergibt den Wert $m = 1,27$ für die Regressionsgerade. Nach Gleichung 3 gilt die Näherung

$$m = \frac{\omega_N}{\omega_R} \approx \frac{J_{Ges\parallel}}{J_{Ges\perp}}$$

womit sich unter verwendung des vorher bestimmten horizontalen Trägheitsmoment $J_{Ges\parallel}$ nun das vertikale Trägheitsmoment $J_{Ges\perp}$ bestimmen lässt. Man kommt auf

$$J_{Ges\perp} = (7,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}.$$

5 Diskussion

In Tabelle 3 sind die drei berechneten Werte für das horizontale Trägheitsmoment aufgeführt.

Messmethode	Trägheitsmoment J [kg m ⁻² · 10 ⁻³]
theoretische Berechnung	9,95
physikalisches Pendel	9,16 ± 1,99
Präzessionsmessung	9,77 ± 0,40

Tabelle 3: Ergebnisse für das horizontale Trägheitsmoment

Der theoretische Wert liegt im Fehlerintervall beider durch die Messwerte bestimmten Trägheitsmomente, daher ist anzunehmen das die Ergebnisse dem wahren Trägheitsmoment sehr nahe kommen.

Das Ergebnis der Nutationsmessung von $J_n = (7,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}$ weicht um etwa 4% von dem theoretisch berechneten Wert $J_t = (6,93 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ ab und beide Fehlerintervalle überschneiden sich.