

---

# Kapillarität und Viskosität

---

Praktikanten: Silke Andrea Teepe  
Gerald Loitz  
Marcel Kramer

Betreuer: Alexander Schmelev

Testat:
---------



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Oberflächenspannung . . . . .	1
2.2	Dynamische Viskosität . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
3.1	Teilversuch 1: Kapillarität . . . . .	5
3.2	Teilversuch 2: Viskosität . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Kapillarität . . . . .	6
4.2	Viskosität . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>



---

# 1 Einleitung

Dieser Versuch ist in zwei Teile unterteilt. Im ersten Experiment wird das Phänomen der Kapillarität untersucht, welches es Flüssigkeiten ermöglicht durch Oberflächenspannung die Schwerkraft zu überwinden. Dadurch wird zum Beispiel der Wassertransport in Pflanzen ermöglicht. Im zweiten Experiment wird die Viskosität untersucht. Diese ist ein Maß für die Zähflüssigkeit einer Flüssigkeit und beeinflusst damit unter anderem ihre Fließgeschwindigkeit.

## 2 Theorie

### 2.1 Oberflächenspannung

Der Effekt der Kapillarität wird von Wechselwirkungen auf molekularer Ebene verursacht. Diese können in zwei Arten unterteilt werden. Zum einen in die Kohäsionskräften, die innerhalb der Flüssigkeit wirken und zum anderen in die Adhäsionskräften, Kräften die zwischen der Flüssigkeit und einem Festkörper (Glas) oder einem Gas (Luft) auftreten.

Die wichtigsten Kohäsionskräfte sind die Van-der-Waals-Kräfte und die Dipol-Dipol-Kräfte. Die Van-der-Waals-Kräfte sind schwache Kräfte die zwischen Molekülen und Atomen wirken. Sie entstehen durch zufällige Ladungsverschiebung innerhalb eines Moleküls, verursacht durch die Bewegung seiner freien Elektronen. Diese Ladungsverschiebungen bewirken, dass ein Molekül kurzzeitig zu einem Dipol wird und so mit anderen Molekülen wechselwirken kann. Dipol-Dipol-Kräfte hingegen werden zwischen Molekülen erzeugt, die ein dauerhaftes Dipolmoment besitzen.

Hält man einen Festkörper in eine Flüssigkeit so entstehen zwischen den Molekülen der Flüssigkeit und den Molekülen des Festkörpers Adhäsionskräfte. Sind diese Adhäsionskräfte größer als die Kohäsionskräfte innerhalb der Flüssigkeit so kann man beobachten wie sich die Flüssigkeit am Rand des Festkörpers hochzieht. Dieser Effekt heißt Kapillarität und ist besonders gut zu beobachten, wenn man eine Glaskapillare in Wasser hält. Man sieht, dass das Wasser im Inneren der Kapillare einen höheren Pegelstand als die Flüssigkeit außerhalb der Kapillare hat. Durch die stärkeren Adhäsionskräfte leistet das Wasser Arbeit entgegen der Gravitationskraft, was den Begriff der Oberflächenspannung  $\sigma$  motiviert.

$$dW = \sigma \cdot dA \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{dW}{dA}$$

Steigt das Wasser in der Kapillare um die noch zu bestimmende Höhe  $h$  an, so verändert sich die potentielle Energie um

$$dE_{Pot} = m \cdot g \cdot dh = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot g \cdot dh$$

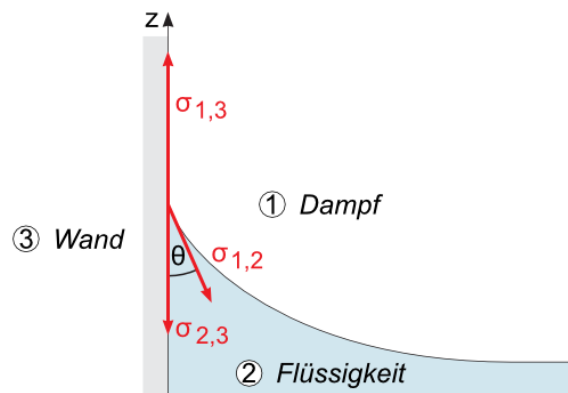
und die Oberflächenenergie um

$$dE_O = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma \cdot dh$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte des Wassers und  $R$  der Radius der Kapillare. Die Energieerhaltung liefert

$$\begin{aligned}
 dE_{Pot} + dE_O &= 0 \\
 \Leftrightarrow \quad \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot h \cdot g \cdot dh &= 2\pi \cdot R \cdot \sigma \cdot dh \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot R \cdot \rho \cdot h \cdot g &= \sigma
 \end{aligned} \tag{1}$$

Analog zur Oberflächenspannung zwischen Flüssigkeiten und Luft kann man die allgemeine Grenzflächenspannung  $\sigma_{i,k}$  zwischen zwei beliebigen Stoffen  $i$  und  $k$  definieren.



**Abbildung 1:** Zur Definition von Grenzflächen<sup>1</sup>

Wie man der Grafik entnehmen kann, können  $\sigma_{2,3}$  und  $\sigma_{1,3}$  nur in entgegengesetzte Richtung wirken. Also muss

$$\sigma_{2,3} - \sigma_{1,3} = -\sigma_{1,2} \cdot \cos \theta$$

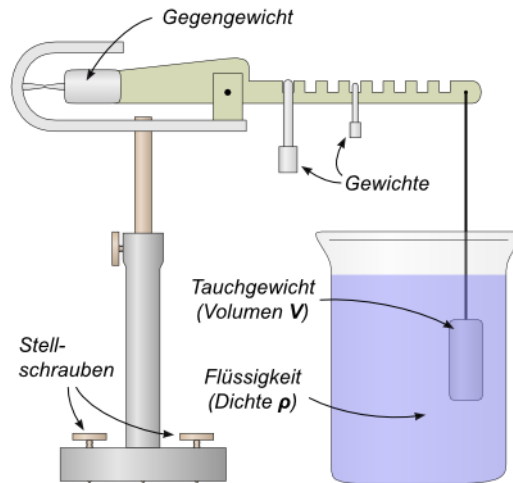
gelten.

Um die Dichten der untersuchten Flüssigkeiten zu bestimmen wird die Mohrsche Waage verwendet.

Es wird ein Körper mit bekanntem Volumen in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Durch die vom Körper verdrängte Flüssigkeit entsteht ein statischer Auftrieb, aus dem nach dem archimedischen Prinzip die Dichte der Flüssigkeit ermittelt werden. Um den entstehenden Auftrieb zu messen wird der Lastarm mittels Gewichten ausgeglichen.

<sup>1</sup><http://lp.uni-goettingen.de/get/text/5065>

<sup>2</sup><https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3638>



**Abbildung 2:** Die Mohrsche Waage<sup>2</sup>

Für eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  gilt bei Gleichgewicht

$$D_{\text{Auftrieb}} = D_{\text{Gewichte}}$$

$$\Leftrightarrow V \cdot \rho \cdot g \cdot r = \sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot r_i \quad (2)$$

Somit gilt für zwei Flüssigkeiten

$$\frac{V \cdot \rho_2 \cdot g \cdot r}{V \cdot \rho_1 \cdot g \cdot r} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} m_{2,i} \cdot g \cdot r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1,i} \cdot g \cdot r_{1,i}}$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_2} m_{2,i} \cdot r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1,i} \cdot r_{1,i}} \quad (3)$$

## 2.2 Dynamische Viskosität

Die Viskosität  $\eta = v \cdot \rho$  eines Fluids ist ein Maß für dessen Zähflüssigkeit.

Es existieren zwei verschiedene Strömungsarten die bei Fluiden auftreten können. Die laminare Strömung, bei der keine Turbulenzen auftreten, die Fluide also in Schichten strömen und die turbulente Strömung, bei der Verwirbelungen auftreten, so dass die einzelnen Schichten eines Fluids untereinander vermischt werden.

Das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften wird durch die dimensionslose Reynoldszahl  $Re$  angegeben. Sie ist ein Maß dafür ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Es gilt

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta},$$

,wobei  $\rho$  die Dichte des Fluids,  $d$  die Länge des Gegenstandes in dem sich die Strömung befindet und  $v$  die durchschnittliche Geschwindigkeit bezeichnet.

Verursacht wird die Viskosität von der inneren Reibung  $F_r = -\eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = -\eta \cdot 2\pi l r \cdot \frac{dv}{dr}$  die entsteht, wenn eine Flüssigkeit durch ein Rohr fließt. Aufgrund des Druckunterschieds  $\delta p = (p_1 - p_2)$  wirkt ihr die Kraft  $F_p = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2$  entgegen. Mit der Randbedingung  $v(R)=0$  erhält man

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & -\eta \cdot 2l \cdot \frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2) \cdot r \\ \Leftrightarrow \quad & -\int_r^R \frac{dv}{dr} dr = \int_r^R \frac{(p_1 - p_2)}{2l \cdot \eta} \\ \Leftrightarrow \quad & v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Damit lässt sich die gesamte Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit  $t$  durch einen Hohlzylinder fließt angeben durch  $dV = 2\pi \cdot r \cdot v(r) \cdot t \cdot dr$ . Integrieren liefert

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_0^R dV dr = 2\pi \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{4l \cdot \eta} \cdot t \cdot \int_0^R r(R^2 - r^2) dr \\ \Leftrightarrow \quad & V = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2)}{8l \cdot \eta} \cdot R^4 \cdot t, \end{aligned}$$

woraus man die Hagen-Poiseuille Gleichung der laminaren Rohrströmung erhält

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2)}{8l \cdot \eta} \cdot R^4 \quad (4)$$

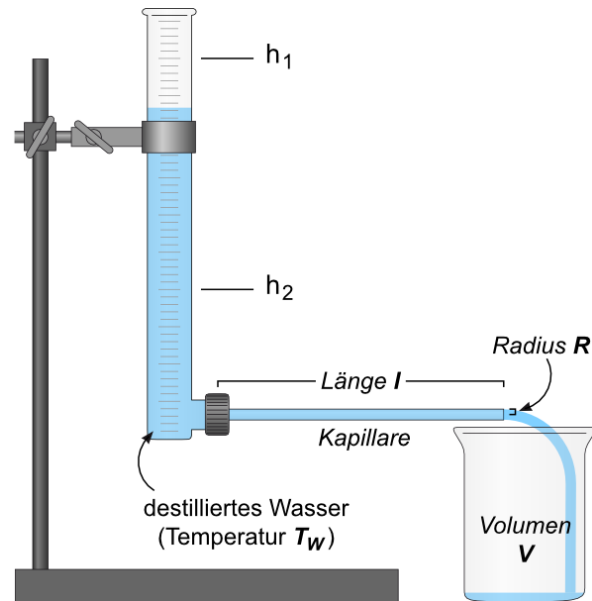
Diese Gleichung sagt aus, wie der Volumenstrom vom Druckgradienten  $(p_1 - p_2)/l$  und von der Viskosität des Fluids abhängt. Dies zu wissen ist zum Beispiel bei der Wahl des Motoröls im Auto entscheidend. Da man den Rohrradius in dem das Öl zufließt nicht verändern kann, war es früher notwendig verschiedene Motoröle mit verschiedenen Viskositäten  $\eta$  zu verwenden um auf temperaturbedingte Druckunterschiede zu reagieren.

### 3 Durchführung

Um Messfehler durch Verunreinigungen vorzubeugen sind die Kapillare vor jeder Messung gründlich mit Lösungsmittel und Wasser zu säubern und anschließend mit der Wasserstrahlpumpe zu trocknen.

Der Radius  $R$  jeder Kapillare ist mindestens dreimal mit Hilfe des Mikroskops zu bestimmen.





**Abbildung 3:** Versuchsaufbau: (Hagen – PoiseuilleschesGesetz)

### 3.1 Teilversuch 1: Kapillarität

Die zu untersuchenden Flüssigkeiten, destilliertes Wasser, Methanol und Ethylenglykol werden in ausreichender Menge in Bechergläser gegeben. Jede der Kapillaren wird in die Flüssigkeiten getaucht und dann soweit wieder herausgehoben, dass sich der Nullpunkt der Messskala auf gleichem Niveau mit dem Flüssigkeitsspiegel der Flüssigkeit im Becherglas befindet. Mit Hilfe der Skala ist dann der Höhenunterschied  $h_{kap}$  der Flüssigkeitsspiegel zu bestimmen. Dies wird für jede Kapillare und jede Flüssigkeit mindestens dreimal wiederholt.

Die Dichte  $\rho$  der Flüssigkeiten ist mit Hilfe der Mohrschen Waage zu bestimmen, wobei darauf geachtet werden sollte, dass der Probekörper trocken und sauber ist, bevor er in die Flüssigkeit getaucht wird und dass er in diese für die Messung dann vollständig eingetaucht ist.

### 3.2 Teilversuch 2: Viskosität

Zu messen sind die Temperatur  $T_W$  des destillierten Wassers, die Länge der Kapillaren  $l$ , sowie das Volumen des Glasgefäßes zwischen den Strichmarken 50 und 45.

- Für jedes der drei Kapillare ist die Ausflusszeit  $t_A$  von destilliertem Wasser zwischen den Strichmarken 50 und 45 zu bestimmen.
- Für die Kapillare mit dem geringsten Durchmesser sind mindestens 10 Werte der Abflusszeit  $t(h)$  (in Abhängigkeit der Höhe  $h$  der Wassersäule) zu bestimmen.

## 4 Auswertung

In der Tabelle 1 und Tabelle 2 sind die gemessenen Längen  $l$  und Durchmesser  $d$  der Kapillare. Aus den Werten in Tabelle 3 und der Formel (3) folgen die relativen Dichten von destilliertem Wasser, Methanol und Ethylenglykol und mit der Voraussetzung  $\rho_{\text{Wasser}} = 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  die Dichten in Tabelle 4.

Kapillar	$l[\text{mm}]$
Rot	231(1)
Blau	220(1)
Grün	228(1)

**Tabelle 1:** Länge  $l$  der Kapillare

Kapillar	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Verwendet	rel. Fehler
Rot	69(2)	84(2)	86(2)	85(2)	2.4%
Blau	116(2)	117(2)	117(2)	117(2)	1.7%
Grün	181(2)	179(2)	181(2)	180(2)	1.1%

**Tabelle 2:** Durchmesser der Kapillare in  $10^{-5} \text{ m}$

Auslenkung $r[\text{cm}]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasser								11	100
Methanol			1	10				100	
Ethylenglykol				100		100		10	

**Tabelle 3:** Gewichte Verteilung bei der Mohrschen Waage

Flüssigkeit	Dichte $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
Wasser	$1.00 \cdot 10^3$
Methanol	$0.85 \cdot 10^3$
Ethylenglykol	$1.09 \cdot 10^3$

**Tabelle 4:** Dichte

### 4.1 Kapillarität

Die Messwerte der Höhenunterschiede  $h_{\text{Kap}}$  zur Bestimmung der Kapillarität sind in Tabelle 5 für destilliertes Wasser, in Tabelle 6 für Methanol und in Tabelle 7 für Ethylenglykol aufgeführt. Aus diesen Messwerten ergeben sich nach der Formel (1) die Werte

für die Oberflächenspannung  $\sigma$  in der Tabelle 8, sowie in der Grafik 4. Für die Berechnung der Fehler in der Oberflächenspannung gilt

$$\frac{\sigma_\sigma}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2} \quad (5)$$

Kapillar	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Rot	35	37	38
Blau	9	23	24
Grün	15	17	15

**Tabelle 5:**  $h_{Kap}$  in mm für destilliertes Wasser mit einem Fehler von  $\pm 1$  mm

Kapillar	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Rot	15	14	14
Blau	10	10	11
Grün	6	6	7

**Tabelle 6:**  $h_{Kap}$  in mm für Methanol mit einem Fehler von  $\pm 1$  mm

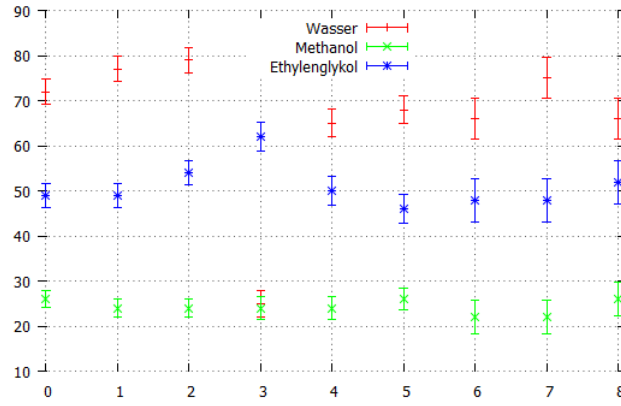
Kapillar	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Rot	22	22	24
Blau	20	16	15
Grün	10	10	11

**Tabelle 7:**  $h_{Kap}$  in mm für Ethylenglykol mit einem Fehler von  $\pm 1$  mm

Kapillar/Messung	$\sigma_{Wasser}$	$\sigma_{Methanol}$	$\sigma_{Ethylenglykol}$
Rot 1	73(3)	27(2)	50(3)
Rot 2	77(3)	25(2)	50(3)
Rot 3	79(3)	25(2)	55(3)
Blau 1	26(3)	24(3)	63(3)
Blau 2	66(3)	24(3)	50(3)
Blau 3	69(3)	27(3)	47(3)
Grün 1	66(5)	23(4)	48(5)
Grün 2	75(5)	23(4)	48(5)
Grün 3	66(5)	26(4)	53(5)

**Tabelle 8:** Oberflächenspannung  $\sigma$  in  $\text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$

Damit ergibt sich



**Abbildung 4:** Gemessene Oberflächenspannungen

	Wasser	Methanol	Ethylenglykol
Gewichteter Mittelwert	$66.1 \pm 1.1$	$25.1 \pm 0.8$	$51.8 \pm 1.1$
Literaturwert	72.8	22.6	31.4

**Tabelle 9:** Gewichtete Mittelwerte

## 4.2 Viskosität

Aus der Formel (4)

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{R^4 \cdot \pi \cdot (p_1 - p_2)}{8l \cdot \eta} \\
 \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{R^4 \cdot \pi \cdot \Delta p}{8 \cdot l \cdot \eta} \\
 \Rightarrow \eta &= \frac{R^4 \cdot \pi \cdot \Delta p \cdot t_A}{8 \cdot l \cdot \Delta V}
 \end{aligned} \tag{6}$$

und den gemessenen Ausflusszeiten  $t_A$  in Tabelle 10 von  $\Delta V = 0.205$  l Wasser und einem Druckunterschied  $\Delta p = h \cdot \rho \cdot g = (4,66 \pm 0,24) \cdot 10^3$  Pa ergeben sich die Viskositäten in Tabelle 11. Für die Fehler ergibt sich nach Fehlerfortpflanzung

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} = \sqrt{\left(4 \cdot \frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta p}}{\Delta p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_A}}{t_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

Daraus ergibt sich der gewichtete Mittelwert  $\bar{\eta} = 0.93(6)$  mPa · s. Der Literaturwert<sup>3</sup> für die Viskosität von Wasser zum Vergleich bei 20 °C liegt bei  $\eta = 1.002$  mPa · s.

<sup>3</sup>Nach P. Schaaf (2014): "Das Physikalische Praktikum". Universitätsverlag Göttingen

Kapillar	$t_A[\text{s}]$
Rot	67(1)
Blau	20(1)
Grün	6(1)

**Tabelle 10:** Ausflusszeit  $t_A$  von 20.5 ml destilliertem Wasser bei 50 cm Füllhöhe

Kapillar	$\eta[\text{mPa} \cdot \text{s}]$
Rot	$0.84 \pm 0.09$
Blau	$0.95 \pm 0.09$
Grün	$1.5 \pm 0.3$

**Tabelle 11:** Viskosität  $\eta$  nach den Messwerten in Tabelle 10

Um einen zweiten Wert für die Viskosität zu erhalten kann nach der Formel

$$h(t) = h_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho \cdot g \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l \cdot r^2} \cdot t\right) \quad (7)$$

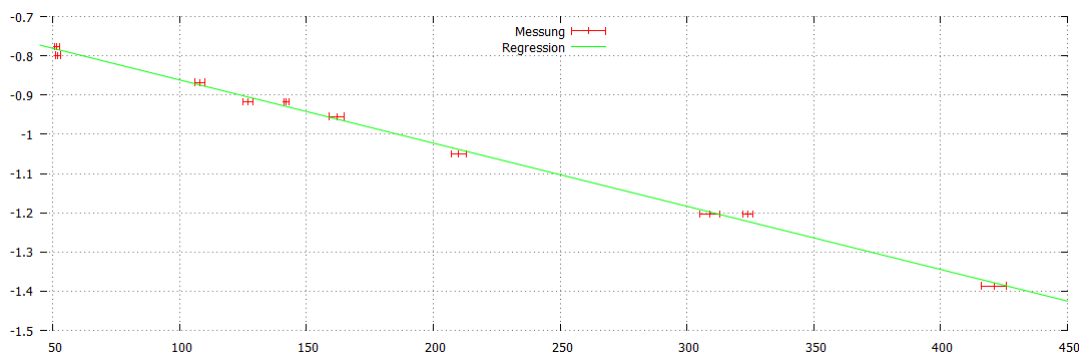
mit den Werten aus Tabelle 12 eine lineare Regression von  $\log(h(t))$  über  $t$  durchführen und bekommt  $f(t) = m \cdot t + b$  mit

$$m = -\frac{\rho \cdot g \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l \cdot r^2} \quad (8)$$

wobei  $V = h \cdot \pi \cdot r^2$

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h[\text{cm}]$	45	40	35	30	25	40	30	43	42	38.5
$t(h)[\text{s}]$	52(1)	127(2)	210(3)	309(4)	421(5)	142(1)	324(2)	52(1)	108(2)	162(3)

**Tabelle 12:** Abflusszeit  $t(h)$



**Abbildung 5:** Höhe  $h$  der Wassersäule halblogarithmisch über der Zeit  $t(h)$

---

Als Geradensteigung ergibt sich  $m = -(1.60 \pm 0.01) \text{ s}^{-1}$ . Nach der Formel (8) folgt  $\eta = 0.83(8) \text{ mPa} \cdot \text{s}$  mit der Formel

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} = \sqrt{\left(4 \cdot \frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$$

für den Fehler.

## 5 Diskussion

Im Allgemeinen ist festzustellen, dass die Kapillare teilweise nicht zentriert und nicht sonderlich rund gebohrt sind. Besonders die Exzentrizität zusammen mit der Tatsache, dass die Kapillare beim Messen des Durchmessers nicht fixiert sind, kann zu großen Fehlern führen. Ein Stoß gegen den Tisch hat wahrscheinlich unsere erste Messung des Durchmessers des roten Kapillar verfälscht. Deshalb haben wir diese Messung im Weiteren nicht berücksichtigt.

Bei der Berechnung der Oberflächenspannungen sind relativ große Fehler gegenüber den Literaturwerten aufgetreten. Dies lässt sich durch Schwierigkeiten beim Ablesen von  $h_{kap}$  aufgrund zu kleiner und verschmierter Skalen erklären. Außerdem sind wahrscheinlich trotz gründlicher Reinigung Verunreinigungen in den Kapillaren zurückgeblieben, denn teilweise hat sich der Flüssigkeitsspiegel beim Bewegen des Kapillar nicht verändert. So ist es wahrscheinlich zu der starken Abweichung u.a. bei der vierten Messung von Wasser gekommen.

Die Ergebnisse für die Viskosität sind recht annehmbar, denn trotz vieler potentieller Fehlerquellen sind die relativen Fehler mit ca. 6.9% bzw. 9.8% verhältnismäßig klein und der Literaturwert bei der gegebenen Raumtemperatur von  $(24.5 \pm 0.5) \text{ }^\circ\text{C}$  liegt mit etwas über  $0.89 \text{ mPa} \cdot \text{s}$  im Bereich der Messtoleranz.