
Kapillarität und Viskosität[1.5ex]

Praktikanten: Silke Andrea Teepe
Gerald Loitz
Marcel Kramer

E-Mail:

Betreuer: Alexander Schmelev

| |
|---------|
| Testat: |
|---------|

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---------------------------------|----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Theorie | 1 |
| 2.1 | Oberflächenspannung | 1 |
| 2.2 | Dynamische Viskosität | 3 |
| 3 | Durchführung | 4 |
| 4 | Auswertung | 4 |
| 4.1 | Kapillarität | 4 |
| 4.2 | Viskosität | 5 |
| 5 | Diskussion | 5 |

1 Einleitung

2 Theorie

2.1 Oberflächenspannung

Der Effekt der Kapillarität wird von Wechselwirkungen auf molekularer Ebene verursacht. Diese können in Zwei Arten unterteilt werden. Zu einem in die Kohäsionskräften, die innerhalb der Flüssigkeit wirken und zum anderen in die Adhäsionskräften, Kräften die zwischen der Flüssigkeit und einem Festkörper (Glas) oder einem Gas (Luft) auftreten.

Die wichtigsten Kohäsionskräfte sind die Van-der-Waals-Kräfte und die Dipol-Dipol-Kräfte. Die Van-der-Waals-Kräfte sind schwache Kräfte, die zwischen Molekülen und Atomen wirken. Sie entstehen durch zufällige Ladungsverschiebung innerhalb eines Moleküls durch seine freien Elektronen. Diese Ladungsverschiebungen verursachen, dass ein Molekül kurzzeitig zu einem Dipol wird und so mit anderen Molekülen wechselwirken kann. Dipol-Dipol-Kräfte hingegen werden zwischen Molekülen erzeugt, die ein dauerhaftes Dipolmoment besitzen.

Hält man einen Festkörper in eine Flüssigkeit so entstehen zwischen den Molekülen der Flüssigkeit und den Molekülen des Festkörpers Adhäsionskräfte. Sind diese Adhäsionskräfte größer als die Kohäsionskräfte innerhalb der Flüssigkeit so kann man beobachten wie sich die Flüssigkeit am Rand des Festkörpers hochzieht. Dieser Effekt heißt Kapillarität und ist besonders gut zu beobachten, indem man ein Glaskapillare in Wasser hält. Man sieht wie sich das Wasser im Inneren der Kapillare einen höheren Pegelstand als im Äußeren der Kapillare hat. Durch die stärkeren Adhäsionskräfte leistet das Wasser Arbeit entgegen der Gravitationskraft, was den Begriff der Oberflächenspannung σ motiviert.

$$dW = \sigma \cdot dA \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{dW}{dA}$$

Steigt das Wasser in der Kapillare um die noch zu bestimmende Höhe h an, so verändert sich die potentielle Energie um

$$dE_{Pot} = m \cdot g \cdot dh = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot g \cdot dh$$

und die Oberflächenenergie um

$$dE_O = -2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sigma \cdot dh.$$

Dabei ist ρ die Dichte des Wassers und R der Radius der Kapillare. Die Energieerhaltung liefert

$$\begin{aligned} dE_{Pot} + dE_O &= 0 \\ \Leftrightarrow \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot h \cdot g \cdot dh &= 2\pi \cdot R \cdot \sigma \cdot dh \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot R \cdot \rho \cdot h \cdot g &= \sigma \end{aligned} \tag{1}$$

Analog zur Oberflächenspannung zwischen Flüssigkeiten und Luft kann man die allgemeine Grenzflächenspannung $\sigma_{i,k}$ zwischen zwei beliebigen Stoffen i und k definieren.

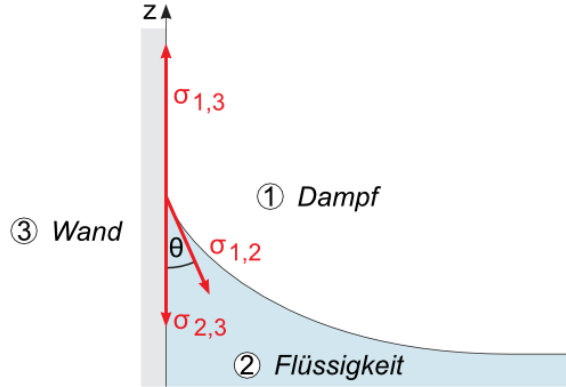


Abbildung 1: Zur Definition von Grenzflächen¹

Wie man der Grafik entnehmen kann können $\sigma_{2,3}$ und $\sigma_{1,3}$ nur in entgegengesetzte Richtung wirken. Also muss

$$\sigma_{2,3} - \sigma_{1,3} = -\sigma_{1,2} \cdot \cos \theta$$

gelten.

Um die Dichten der untersuchten Flüssigkeiten zu bestimmen wird die Mohr'sche Waage verwendet.

Es wird ein Körper mit bekanntem Volumen in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Durch die vom Körper verdrängte Flüssigkeit entsteht ein statischer Auftrieb, aus dem nach dem archimedischen Prinzip die Dichte der Flüssigkeit ermittelt werden. Um den entstehenden Auftrieb zu messen wird der Lastarm mittels Gewichten ausgeglichen. Für eine Flüssigkeit der Dichte ρ gilt bei Gleichgewicht

$$\begin{aligned} D_{\text{Auftrieb}} &= D_{\text{Gewichte}} \\ \Leftrightarrow V \cdot \rho \cdot g \cdot r &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot r_i \end{aligned} \quad (2)$$

Somit gilt für zwei Flüssigkeiten

$$\begin{aligned} \frac{V \cdot \rho_2 \cdot g \cdot r}{V \cdot \rho_1 \cdot g \cdot r} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_2} m_{2,i} \cdot g \cdot r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1,i} \cdot g \cdot r_{1,i}} \\ \Leftrightarrow \rho_2 &= \rho_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_2} m_{2,i} \cdot r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{n_1} m_{1,i} \cdot r_{1,i}} \end{aligned} \quad (3)$$

¹<http://lp.uni-goettingen.de/get/text/5065>

²<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3638>

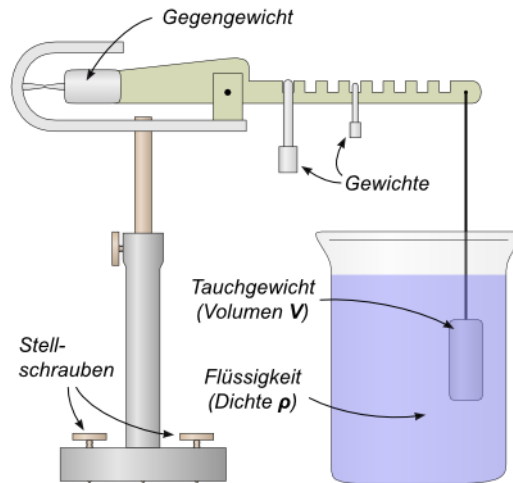


Abbildung 2: Die Mohrsche Waage²

2.2 Dynamische Viskosität

Die Viskosität $\eta = v \cdot \rho$ eines Fluids ist ein Maß für dessen Zähflüssigkeit.

Es existieren zwei verschiedene Strömungsarten die bei Fluiden auftreten können. Die laminare Strömung, bei der keine Turbulenzen auftreten, die Fluide also in Schichten strömen und die turbulente Strömung, bei der Verwirbelungen auftreten, so dass die einzelnen Schichten eines Fluids untereinander vermischt werden.

Das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften wird durch die dimensionslose Reynoldszahl Re angegeben. Sie ist ein Maß dafür ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Es gilt

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta},$$

wobei ρ die Dichte des Fluids, d die Länge des Gegenstandes in dem sich die Strömung befindet und v die durchschnittliche Geschwindigkeit angibt.

Verursacht wird die Viskosität von der inneren Reibung $F_r = -\eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dr} = -\eta \cdot 2\pi l r \cdot \frac{dv}{dr}$ die entsteht, wenn eine Flüssigkeit durch ein Rohr fließt. Aufgrund des Druckunterschieds $\delta p = (p_1 - p_2)$ wirkt ihr die Kraft $F_p = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2$ entgegen. Mit der Randbedingung $v(R)=0$ erhält man

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\eta \cdot 2l \cdot \frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2) \cdot r \\ \Leftrightarrow & -\int_r^R \frac{dv}{dr} dr = \int_r^R \frac{(p_1 - p_2)}{2l \cdot \eta} \\ \Leftrightarrow & v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Damit lässt sich die gesamte Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit t durch einen Hohlzylinder fließt angeben durch $dV = 2\pi \cdot r \cdot v(r) \cdot t \cdot dr$. Integrieren liefert

$$\Rightarrow \int_0^R dV dr = 2\pi \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{4l \cdot \eta} \cdot t \cdot \int_0^R r(R^2 - r^2) dr$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2)}{8l \cdot \eta} \cdot t,$$

woraus man die Hagen-Poiseuille Gleichung der laminaren Rohrströmung erhält

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2)}{8l \cdot \eta} \cdot .$$

Diese Gleichung sagt aus, wie der Volumenstrom vom Druckgradienten $(p_1 - p_2)/l$ und von der Viskosität des Fluids abhängt. Dies zu wissen ist zum Beispiel bei der Wahl des Motoröls im Auto entscheidend. Da man den Rohradius in dem das Öl zufließt nicht verändern kann war es früher notwendig verschiedene Motoröle mit verschiedenen Viskositäten η zu verwenden um auf temperaturbedingte Druckunterschiede zu reagieren.

3 Durchführung

4 Auswertung

In der Tabelle 1 und Tabelle 2 sind die gemessenen Längen l und Durchmesser d der Kapillare. Aus den Werten in Tabelle 3 und der Formel (3) folgen die relativen Dichten von destilliertem Wasser, Methanol und Ethylenglykol und mit der Voraussetzung $\rho_{Wasser} = 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ die Dichten in Tabelle 4.

| Kapillar | Messung 1 | Messung 2 | Messung 3 | Verwendet | rel. Fehler |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| Rot | 69(2) | 84(2) | 86(2) | 85(2) | 2.4% |
| Blau | 116(2) | 117(2) | 117(2) | 117(2) | 1.7% |
| Grün | 181(2) | 179(2) | 181(2) | 180(2) | 1.1% |

Tabelle 2: Durchmesser der Kapillare in 10^{-5} m

| Auslenkung $r[\text{cm}]$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------------------------|---|---|---|-----|---|-----|---|-----|-----|
| Wasser | | | | | | | | 11 | 100 |
| Methanol | | | 1 | 10 | | | | 100 | |
| Ethylenglykol | | | | 100 | | 100 | | 10 | |

Tabelle 3: Gewichte Verteilung bei der Mohrschen Waage

4.1 Kapillarität

| Flüssigkeit | Dichte $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ |
|---------------|--|
| Wasser | $1.00 \cdot 10^3$ |
| Methanol | $0.85 \cdot 10^3$ |
| Ethylenglykol | $1.09 \cdot 10^3$ |

Tabelle 4: Dichte

| Kapillar | Messung 1 | Messung 2 | Messung 3 |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| Rot | 35 | 37 | 38 |
| Blau | 9 | 23 | 24 |
| Grün | 15 | 17 | 15 |

Tabelle 5: h_{Kap} in mm für destilliertes Wasser mit einem Fehler von ± 1 mm

Die Messwerte der Höhenunterschiede h_{Kap} zur Bestimmung der Kapillarität sind in Tabelle 5 für destilliertes Wasser, in Tabelle 6 für Methanol und in Tabelle 7 für Ethylenglykol aufgeführt. Aus diesen Messwerten ergeben sich nach den Formeln (1) die Werte für die Oberflächenspannung σ in der Tabelle 4.1, sowie in der Grafik ???. Für die Berechnung der Fehler in der Oberflächenspannung gilt

| | Kapillar | $l[\text{mm}]$ |
|------|----------|----------------|
| [!h] | Rot | 231(1) |
| | Blau | 220(1) |
| | Grün | 228(1) |

Tabelle 1: Länge l der Kapillare

$$\frac{\sigma_\sigma}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2} \quad (4)$$

4.2 Viskosität

5 Diskussion

| Kapillar | Messung 1 | Messung 2 | Messung 3 |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| Rot | 15 | 14 | 14 |
| Blau | 10 | 10 | 11 |
| Grün | 6 | 6 | 7 |

Tabelle 6: h_{Kap} in mm für Methanol mit einem Fehler von ± 1 mm

| Kapillar | Messung 1 | Messung 2 | Messung 3 |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| Rot | 22 | 22 | 24 |
| Blau | 20 | 16 | 15 |
| Grün | 10 | 10 | 11 |

Tabelle 7: h_{Kap} in mm für Ethylenglykol mit einem Fehler von ± 1 mm

| Kapillar/Messung | σ_{Wasser} | $\sigma_{Methanol}$ | $\sigma_{Ethylenglykol}$ |
|------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|
| Rot 1 | 73(3) | 26.5 | 50.0 |
| Rot 2 | 77(3) | 24.8 | 50.0 |
| Rot 3 | 79(3) | 24.8 | 54.5 |
| Blau 1 | 26(3) | 24.4 | 62.5 |
| Blau 2 | 66(3) | 24.4 | 50.0 |
| Blau 3 | 69(3) | 26.8 | 46.9 |
| Grün 1 | 66(5) | 22.5 | 48.1 |
| Grün 2 | 75(5) | 22.5 | 48.1 |
| Grün 3 | 66(5) | 26.3 | 52.9 |

Tabelle 8: Oberflächenspannung σ in

| Kapillar | t_A |
|----------|-------|
| Rot | 67 |
| Blau | 20 |
| Grün | 6 |

Tabelle 9: Ausflusszeit t_A von 20.5 ml destilliertem Wasser bei 50 cm Füllhöhe

| Messung | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|------|------|------|
| $h_1[\text{cm}]$ | 49 | 45 | 40 | 35 | 30 | 50 | 40 | 50 | 46 | 42 |
| $h_2[\text{cm}]$ | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 | 40 | 30 | 43.5 | 42.5 | 38.5 |
| $t[\text{s}]$ | 52 | 75 | 83 | 99 | 112 | 142 | 182 | 45 | 49 | 54 |

Tabelle 10: Länge l der Kapillare in mm