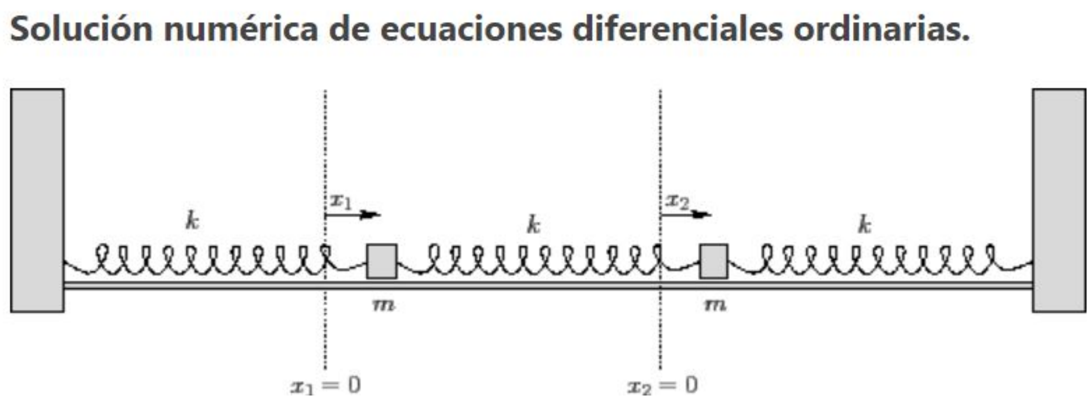
Actividad 9

Jesús Marcel Alfaro Santos

Física Computacional

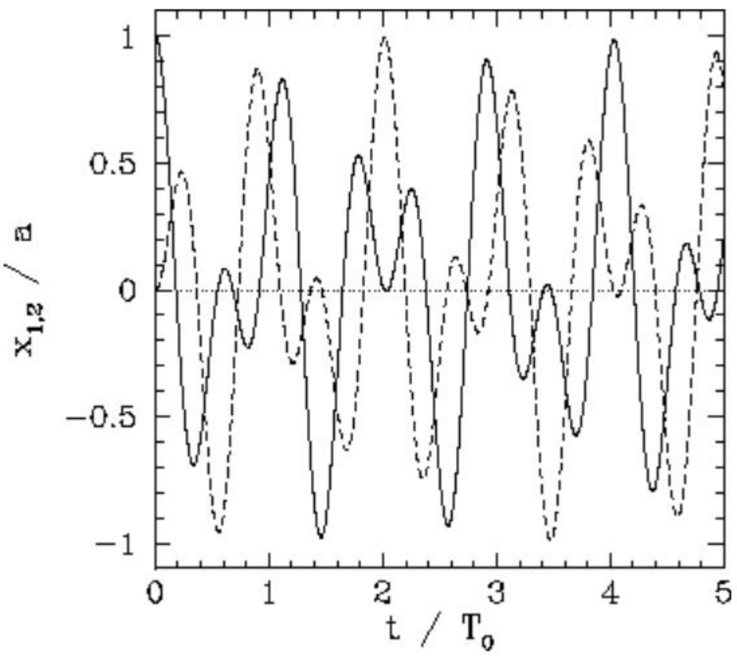


Mayo 2019

Grupo 10 - 11 am

Introducción

En este proyecto, resolveremos numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el sistema que aparece en la figura de arriba. Nos basaremos en las notas de Richard Fitzpatrick, de la Universidad de Texas que resuelve analíticamente el sistema arriba mencionado. Nosotros en nuestro caso intentaremos resolverlo numéricamente utilizando la función odeint de SciPy.Para ello se sugiere utilizar y adaptar el código que aparece en el Cookbook de SciPy, para resolver el problema del sistema que aparece en las notas de R. Fitzpatrick. Como primer paso, comprende los elementos y partes del código de la página del Cookbook de SciPy y hazlo correr. Después adapta el código para resolver el segundo problema.Se pide utilizar el código Python para reproducir la figura 16 de las notas de R. Fitzpatrick.



Desarrollo

Un oscilador armónico es aquel sistema que cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales en torno a dicha posición estable.

Mediante la ley de Hooke, describimos la fuerza ejercida por un resorte sobre una masa como:

$$F = -kx$$

Donde k es la constante elástica del resorte, x es la distancia entre la posición de equilibrio y la masa, la cual denominamos como m.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, sabemos que $F = ma = mx$. Reemplazando la fuerza tenemos:

$$mx = -kx$$

Si además tomamos en cuenta la fricción, esta ecuación resulta ser:

$$mx = -kx - b\dot{x}$$

Donde b es el coeficiente de fricción.
El problema presentado en el esquema es un sistema de osciladores acoplados, ya que consta de varios osciladores individuales interconectados entre sí.Para encontrar la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales, nos basamos en el algoritmo que aparece en el Cookbook de SciPy. Aquí se apoyan en las bibliotecas *NumPy* y *SciPy* para realizar los cálculos, empleando la función *odeint*, la cual soluciona ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, el problema abordado aquí es distinto al nuestro, ya que en nuestro caso la configuración de masas y resortes incluye una pared y un resorte extra, como se muestra a continuación: Las ecuaciones diferenciales que modelan este sistema son:

$$\mathrm{m}_1 x_1 + b_1 x_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0$$
$$\mathrm{m}_2 x_2 + b_2 x_2 + k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0$$

Además de las diferencias en el problema físico, el sistema de referencia tomado para las variables también resulta ser distinto, puesto que aquí se incluyen como parámetros las longitudes naturales de los resortes (L_1 y L_2), y las posiciones de las masas x_1 y x_2 se miden a partir de la pared izquierda, mientras que en primer sistema se mide el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio para cada masa.

Basándonos en la solución propuesta en las notas de Richard Fitzpatrick, escribimos las ecuaciones de movimiento para las dos masas como:

$$\mathrm{mx}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad \mathrm{mx}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_2)$$

Adaptando estas ecuaciones a nuestro nuevo sistema, tenemos:

$$m_1 x_1 = -b_1 x_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_1 - L_1 + L_2 - x_2) \tag{1}$$

$$m_2 x_2 = -b_2 x_2 - k_3(x_2 - L_2) - k_2(x_2 - L_2 + L_1 - x_1) \tag{2}$$

Este es un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para resolverlas mediante la función de *SciPy* debemos convertir esto en un sistema de primer orden, para ello introducimos las siguientes variables:

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

Reescribimos ahora las ecuaciones de segundo orden, obteniendo un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden:

$$x_1 = y_1$$

$$\mathrm{y}_1 = (-b_1 y_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_1 - L_1 + L_2 - x_2))/m_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$\mathrm{y}_2 = (-b_2 y_2 - k_3(x_2 - L_2) - k_2(x_2 - L_2 + L_1 - x_1))/m_2$$

Estas son las ecuaciones que fueron implementadas en Python para ser resueltas mediante la función *odeint*, generándose así un archivo de texto con las posiciones de las masas, las cuales fueron graficadas posteriormente.

Resultados

Se tomaron las siguientes condiciones iniciales para el sistema:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$L_1 = L_2 = 1$$

$$b_1 = b_2 = 0$$

$$x_1 = 1, y_1 = x_2 = y_2 = 0$$