INPHB/ ESTP

Photogrammétrie

Définition et principes mathématiques

Pr. Diabaté Kramoko

Année Académique 2015-2016

Ce cours est tiré du manuel de photogrammétrie de Karl Kraus et Peter Waldhäusl

Contenu

Chapitre 1 : Introduction

1.1 Définition et applications

La photogrammétrie permet de définir la forme et la position d'objets à partir de photographies. Les résultats des mesures photogrammétriques peuvent se présenter sous la forme :

- de fichiers de coordonnées (c.-à-d., de saisies numériques de points dans un système de coordonnées tridimensionnel) ;
- de représentations graphiques (analogiques et/ou numériques), notamment de cartes et de plans comportant entre autres des détails planimétriques et des courbes de niveau ;
- d'images (émulsions photographiques ou images numériques), essentiellement des photos redressées (orthophotos) et les cartes qui peuvent en être dérivées, mais , aussi des photomontages et des images qui représentent l' espace.

Bien souvent, la signification du contenu de l'image présente autant d'intérêt que la reconstitution géométrique des objets. La classification des objets selon différentes caractéristiques est alors le résultat d'une telle photo-interprétation.

La photogrammétrie permet de reconstituer des objets et de déterminer certaines de leurs caractéristiques sans les toucher. Cette méthode d'acquisition de l ´information est aujourd´hui appelée la télédétection.

La photogrammétrie est essentiellement utilisée pour la production de cartes topographiques (en mode vecteur) ou d'orthophotocartes (en mode maillé). Les restituteurs photogrammétriques modernes (digitaliseurs en trois dimensions) permettent de générer des modèles numériques de terrain qui pourront être r représentés à l'aide de logiciels de dessin assisté par ordinateur. Les informations sur la forme et l'utilisation de la surface terrestre, qui sont enregistrées dans ces modèles, pourront ensuite être traitées de différentes manières dans un système d'information topographique.

La photogrammétrie peut aussi être utilisée pour déterminer des réseaux de points pour la densification de canevas ou la délimitation cadastrale. L'échelle de la photographie sera choisie en fonction de la précision souhaitée.

Le domaine de la photogrammétrie rapprochée est celui où l'objet se situe à une distance comprise entre 1 m et 100 m. Des chambres stéréométriques ont été spécialement développées pour ce type d'applications parmi lesquelles on compte la photogrammétrie architecturale, la métrologie industrielle, le contrôle et la documentation d'ouvrages, les mesures de déformations, les mesures cinématique s ou encore les relevés d'œuvres d'arts.

Il convient enfin de mentionner que le développement d'algorithmes mathématiques complexes a rendu possible l'exploitation photogrammétrique des clichés pris avec des appareils d'amateurs. Ces techniques sont de plus en plus populaires et peuvent notamment être utilisées lors de la reconstitution des accidents de la circulation.

1.2 Quelques remarques sur I ‘histoire de la photogrammétrie

Bien que J.H. Lambert ait publié une ébauche de théorie avant même l'invention de la photographie (Nïépce, Daguerre, Arago 1839), c'est le colonel français Laussedat qui est considéré comme le fondateur de la photogrammétrie. Il exposa, devant une commission de l'Académie des Sciences réunie en 1859 à Paris, une méthode de détermination des coordonnées des points d'un objet par intersection de visées spatiales à partir d'un couple de photographies de cet objet. A la même époque, en Allemagne, A. Meydenbauer mettait en œuvre avec succès la photogrammétrie pour le relevé de constructions.

Après l'introduction de la stéréophotogrammétrie par C. Pulfrich en 1901, E. von Orel inventa son stéréoautographe en 1909. Cet instrument donnait pour la première fois la possibilité de restituer la planimétrie et les courbes de niveau en continu à partir de photographies terrestres.

W. Bauersfeld (1923), reprenant les recherches de T. Scheimpflug, M. Gasser, U. Nistri, R. Hugershoff, a étendu le principe du stéréoautographe à la restitution des photographies aériennes. L'instrument qui en résulta est connu sous le nom de stéréoplanigraphe.

Au cours des décennies suivantes, des sociétés d'optique et de mécanique réputées améliorèrent les chambres de prise de vues et les instruments de restitution.

En parallèle, des recherches théoriques dues notamment à S. Finsterwalder et à O. von Gruber définirent les principes nécessaires pour une mise en œuvre rationnelle et universelle de ces restituteurs optico-mécaniques.

La première production d'orthophotographies à partir de photographies aériennes est attribuée à l'Américain R.K. Bean, en 1955, bien que T. Scheimpflug (1897), L. Vietoris (1924) et O. Lacmann (1929) aient au préalable présenté des études intéressantes sur cette méthode de transformation photographique.

L'apparition, ensuite, des techniques de calcul électronique a profondément modifié la photogrammétrie. Les processeurs se sont substitués aux composants optiques et mécaniques dans les systèmes de restitution. Il en a résulté que de nombreuses opérations du processus de restitution photogrammétrique sont actuellement effectuées par ordinateur.

La croissance continue des performances des ordinateurs a favorisé le développement de la photogrammétrie analytique dans les années cinquante, époque à laquelle la technique d'aérotriangulation a pris son essor, réduisant considérablement le nombre de points de calage à déterminer sur le terrain.

Actuellement Le développement de la photogrammétrie est marqué par l l'introduction des techniques de traitement d'image dans le processus de restitution.

Chapitre 2 : Principes mathématiques

La connaissance des principes mathématiques utilisés par la photogrammétrie est essentielle pour la compréhension des différents procédés et techniques qu'elle emploie. Nous rappelons brièvement les relations de base, bien qu'elles soient traitées dans les cours et livres de mathématiques.

2.1 Rotation dans le plan

Soit un point P(x, y) défini dans un système de coordonnées (x, y) ayant subi une rotation d'angle α (dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre) par rapport à un système de coordonnées (X, Y). On veut calculer les coordonnées X et Y du point p dans ce second système de coordonnées.

Figure 1

En utilisant les cosinus des angles entre les axes de coordonnées et l'écriture sous la forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xY) & \cos(yX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En notation symbolique (avec des caractères gras pour les vecteurs et les matrices), on peut écrire :

$$X = Rx \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

R est appelée la matrice rotation. Elle est carrée, mais non symétrique.

Elle contient les cosinus des angles entre les axes de coordonnées.

Propriétés de la matrice rotation R

Les éléments r_{ik} de la matrice rotation sont-ils indépendants ou vérifient-i ls certaines conditions ? pour répondre à cette question, nous définissons les vecteurs unitaires i et j sur les axes de coordonnées x et y (cf. figure 2.2) et nous exprimons leurs composantes dans le système (X, Y) :

Figure

$$i = \begin{pmatrix} cos\propto \\ sin\propto \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} -sin\propto \\ cos\propto \end{pmatrix}$$

En comparant les équations (2.1] et (2.2], on voit que les éléments r_{ik} de la matrice de rotation sont

R= (i, J)

Les deux vecteurs unitaires sont perpendiculaires entre eux et satisfont aux conditions d'orthogonalité :

$$i^T.i = cos^2 \propto + sin^2 \propto = 1 = r_{11+}^2 r_{21}^2$$

$$j^T.j = sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1 = r_{12}^2 + r_{22}^2$$

$$i^T.j = -cos \propto . sin \propto + sin \propto . cos \propto = 0 = r_{11}.r_{12} + r_{21}.r_{22}$$

Une matrice qui satisfait aux conditions d'orthogonalité est appelée matrice orthogonale. Etant donné que les quatre éléments de la matrice rotation **R** satisfont aux trois conditions d'orthogonalité, seul un paramètre est indépendant ; en général, c'est l´angle de rotation α.

Application numérique :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.69 \\ 0.19 & 0.27 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les conditions d'orthogonalité ne sont pas vérifiées, l'ensemble de points transformé à partir de cette matrice sera ainsi déformé.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6234 & -0.7819 \\ 0.7819 & 0.6234 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les conditions d'orthogonalité sont vérifiées, l'ensemble de points transformé à partir de cette matrice subira simplement une rotation mais ne sera donc pas déformé.

Inversion de la matrice rotation R

Par définition, le produit de la matrice inverse R^{-1} par la matrice **R** est égal à la matrice unité **I**.

$\mathbf{R^{-1}.R=I}$

Par ailleurs, le produit de la matrice transposée $\mathbf{R^T}$ par la matrice **R** est aussi égal à la matrice unité **I.**

$$\begin{pmatrix} i^T \\ j^T \end{pmatrix} . (i, j) = \begin{pmatrix} i^T i & i^T i \\ j^T i & j^T j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte une relation importante pour la matrice rotation :

$\mathbf{R^{-1}=R^T}$

Transformation inverse

Les points du système (X, Y) peuvent être transformés dans le système (x, y) comme suit :

X=R. x

Multiplication par $\mathbf{R^T}$ **:** $\mathbf{R^T.X=R^T.\ R.\ x=I.\ x=x}$

Résultat :

$$x = R^T X = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

2.2 Rotation dans l'espace

D'après l´équation [2.2], on peut exprimer la transformation d'un point P de coordonnées (x, y, z) dans un système (X, Y, Z) en fonction des cosinus des angles entre les axes de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

X=R. x $\qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$

par analogie aux équations [2.5], on introduit les trois vecteurs unitaires I, j, k, qui forment la matrice R = (i, j, k). On peut en déduire les six conditions, d'orthogonalité pour les neuf éléments r_{ik} :

$i^T.i = j^T.j = k^T.k = 1$

$i^T.j = i^T.k = j^T.k = 0$

Figure

Une rotation dans l'espace est donc définie par trois paramètres indépendants. En photogrammétrie, on a l'habitude de définir ces paramètres à l´aide de trois angles de rotation omega , phi, kappa autour des trois axes de coordonnées. Il faut remarquer la « hiérarchie entre les différents axes, qu'une suspension par cardan permet d´ illustrer (cf. figure 2.4.).

Figure

Quand on applique une rotation omega, les positions des deux autres axes sont modifiées dans l'espace. Après une rotation d'axe phi seul l'axe K est déplacé. Une rotation autour de l'axe kappa ne modifie pas la position des deux autres axes de rotation. On peut considérer que le système représenté sur la figure 2.3 est le résultat final de l'application des trois rotations omega, phi,kappa. Chaque rotation est à prendre dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, pour un observateur placé le long de l'axe et regardant vers l'origine du système de coordonnées.

Figure

Tout point P d'un système de coordonnées (x, y, z) peut par conséquent être transformé à .I » aide des trois rotations ω, ϕ, Κ dans le système (X, Y. Z). La matrice rotation R du système [2.9] aura la forme suivante :

$$R_{\omega\Phi\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} \cos\Phi\ \cos\mathrm{K} & -\cos\Phi\ \sin\mathrm{K} & \sin\Phi \\ \cos\omega\ \sin\mathrm{K} + \sin\omega\ \sin\Phi\ \cos\mathrm{K} & \cos\omega\ \cos\mathrm{K} - \sin\omega\ \sin\Phi\ \sin\mathrm{K} & -\sin\omega\ \cos\Phi \\ \sin\omega\ \sin\mathrm{K} - \cos\omega\ \sin\Phi\ \cos\mathrm{K} & \sin\omega\ \cos\mathrm{K} + \cos\omega\ \sin\Phi\ \sin\mathrm{K} & \cos\omega\ \cos\Phi \end{pmatrix}$$

Si on définit une autre séquence pour les rotations, alors les éléments de la matrice [2.11] sont modifiés. Compte tenu des conditions d´orthogonalité (2.10], la matrice de rotation inverse $\mathbf{R}^{-1}$ est égale à la matrice transposée $\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$ par analogie à l´équation [2.7] .

En résumé on peut interpréter les éléments r_{ik} de la matrice de rotation **R** de trois manières différentes :

- comme cosinus des angles des axes correspondants dans les deux systèmes de coordonnées ;
- comme composantes des vecteurs unitaires du système de coordonnées ayant subi une rotation par rapport au second système ;
- comme fonctions trigonométriques des rotations autour des trois axes d'une suspension par cardan.

Si on considère deux rotations successives :

Première rotation : $\mathbf{X_1=R_1.x}$

Deuxième rotation : $\mathbf{X_2=R_2.}X_1$

Rotation totale : $\mathbf{X_2=R_2.R_1x=R. x}$

En multipliant les matrices $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$, on obtient une nouvelle matrice R. Comme la multiplication des matrices n'est pas commutative, l'ordre de la multiplication doit être strictement respecté.

Exemple pour l'équation [2.11]

Données :

ω = -1.3948 gon

ϕ = 0.1041 gon

Κ = -0.8479 gon

A calculer : les éléments de la matrice **R**

R=

Les neuf éléments r_{ik} doivent satisfaire aux conditions d'orthogonalité :

Exemple pour l'équation [2.12]

2.3. Projection centrale dans l'espace

Pour rétablir la position et la forme d'un objet à partir de photographies, il faut connaître les relations géométriques qui définissent une photographie. Celles obtenues avec les chambres de prise de vues utilisées en photogrammétrie peuvent être considérées comme des projections centrales précises des objets photographiés dans l'espace. Ces photos sont parfois appelées photogrammes ou photos métriques pour montrer qu'elles peuvent être utilisées pour des mesures précises.

Les figures 2.6 et 2.7 présentent quelques définitions :

Figure

Les relations [2.13] entre les coordonnées-images ξ et η d'un point p' et les coordonnées-Objets (X, Y, Z) d'un point p sont présentées à la suite de la figure 2.8.

Figure

$$\xi = \xi_0 - c\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Les paramètres ri_k sont les éléments d'une matrice rotation R [2.9], qui définit alors la position de la photo dans l' espace par rapport au système de coordonnées objets (X, y, Z). Les éléments r_{ik} peuvent être développés en fonction des trois rotations ω, ϕ, Κ.

A partir des équations [2.13], on peut exprimer les coordonnées : X et Y :

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

Les équations (2.13] montrent qu'à chaque point de l´objet correspond un point dans l'image.

Les équations [2.14] montrent qu'à chaque point de l'image correspond une infinité de points dans l'objet. Une seule photographie ne permet donc pas de reconstruire un objet de l'espace. Il faut alors soit une deuxième image soit une information complémentaire sur Z par exemple que tous les points se trouvent dans un même plan à une altitude donnée pour résoudre le problème.

Pour appliquer les transformations définies dans les équations [2.13] et [2.14], la connaissance préalable des paramètres indépendants suivants les éléments' d'orientation) est nécessaire :

- ξ_0,η_0: coordonnées-images du point principal PP ;
- C : distance principale.

Ces trois paramètres sont les éléments de l'orientation interne. Ils définissent la position du centre de projection par rapport au plan de l'image.

- (X_0, Y_0, Z_0) coordonnées de la position de la chambre de prise de vues ;
- Trois rotations de l´image (par exemple ω, ϕ, K).

Ces six paramètres sont les éléments de l'orientation externe. Ils définissent la position et l'altitude de la chambre de prise de vues (donc de l'image) dans le système de coordonnées de l'objet.

Les neuf paramètres qui définissent la projection centrale d'une photo peuvent être déterminés de différentes manières. Les trois constantes de l'orientation interne sont spécifiques à chaque chambre de prise de vues. Elles sont déterminées par des mesures effectuées en laboratoire par le constructeur qui garantit la bonne correspondance entre le point principal et le point central de l'image. Les six éléments de r orientation externe peuvent être déterminés par des méthodes géodésiques si les conditions le permettent (en particulier en photogrammétrie terrestre).

Il est en revanche impossible d'obtenir une précision équivalente pour des prises de vues aériennes. On utilise alors une méthode indirecte basée sur la mesure dans l'image de points de calage de coordonnées connues. Si les données d'orientation interne sont connues, trois points de calage seront nécessaires pour calculer les six inconnues (chaque point de calage mesuré dans l'image fournit deux équations. [2.13])

Exemple de mise en œuvre des équations [2.13]

Données :
Données d´orientation internes :

A calculer les coordonnées-images des deux points

2.4. Projection centrale d'un plan

On va considérer que le plan de l´ objet se situe dans le plan (X, Y) (c.-à-d. Z = 0)

Sur la figure 2.8, sans pour autant se limiter à un cas particulier. Les équations [2.14] se ramènent alors à :

$$X = \frac{\bar{a}_{1\xi} + \bar{a}_2\eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3}$$

$$Y = \frac{\bar{b}_{1\xi} + \bar{b}_2\eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3}$$

Les nouveaux paramètres $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$ sont liés aux paramètres des équations [2.14] ;

$$\bar{a}_1 = X_0 r_{31} - Z_0 r_{11}$$

$$\bar{a}_2 = X_0 r_{32} - Z_0 r_{12}$$

On obtient les relations entre les coordonnées-images (ξ, η) et les coordonnées objets (X, Y) en divisant les équations [2.17] par $\bar{c}_3$:

$$X = \frac{a_1\xi + a_2\eta + a_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1}$$

$$Y = \frac{b_1\xi + b_2\eta + b_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1}$$

On peut en conclure que :

- une image est suffisante pour la reconstitution d'un objet plan ;
- huit paramètres indépendants décrivent la projection centrale d'un objet plan.

La réduction de neuf à huit du nombre de paramètres indépendants pour un objet plan peut paraître surprenante mais elle est due aux relations existant entre les neuf paramètres initiaux de la projection centrale. Dans le cas particulier où la photographie est parallèle au plan de l'objet (figure 2.9), la relation (dans ce cas entre la distance principale C et la coordonnée Z_0 du centre de projection 0) est facile à établir : il suffit de connaître le rapport Z_0/C au lieu des deux valeurs initiales indépendantes Z_0 et C.

Figure

Nous allons à présent nous intéresser à la détermination des huit paramètres dans le cas général et aux possibilités de restitution d'une telle photographie. Quatre points de calage (dont les coordonnées dans l'image et dans l'objet sont connues) permettent de calculer les huit coefficients des équations [2.18]. On pourra ensuite, déterminer les coordonnées-objets X_i et Y_i de n'importe quel point du cliché à partir de ses coordonnées-images ξ et η.

Exemple numérique

Données : les coordonnées (dans l'image et dans l'objet) de quatre points A. B, C, D et les coordonnées-images d ´un point nouveau P.

A calculer : les coordonnées-objets du point P.

	Coordonnées-images		Coordonnées-Objets	
	ξ [mm]	η [mm]	X [m]	Y[m]
A	-33.288	110.074	1488.05	3552.12
B	32.183	101.785	2229.38	2507.46
C	-45.762	-74.337	1376.40	1899.76
D	28.472	-96.643	2086.48	1600.12
P	1.628	5.182		

On obtient huit équations linéaires issues de [2.18] après multiplication par le dénominateur :

$$\xi a_1 + \eta a_2 + a_3 \qquad\qquad - X\xi c_1 - X\eta c_2 = X$$

$$\xi b_1 + \eta b_2 + b_3 - Y\xi c_1 - Y\eta c_2 = Y$$

Calcul des coordonnées-objets du point P à partir des équations [2.18] :

Cas particulier

Le plan de l'image est parallèle au plan de I' objet (c.-à-d. ω=ϕ=0). La matrice Rotation R [2. 11] sera réduite à :

$$R = \begin{pmatrix} cos\mathrm{K} & -sin\mathrm{K} & 0 \\ sin\mathrm{K} & cos\mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le remplacement des coefficients de R dans les équations [2.14] se ramène à :

$$X = X_0 + \frac{Z_0}{C}(cos\mathrm{K}(\xi - \xi_0) - sin\mathrm{K}(\eta - \eta_0))$$

$$Y = Y_0 + \frac{Z_0}{C}(sin\mathrm{K}(\xi - \xi_0) + cos\mathrm{K}(\eta - \eta_0))$$

En utilisant la notation matricielle et en introduisant la variable $m_b = Z_0/C$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + m_b \begin{pmatrix} cos\mathrm{K} & -sin\mathrm{K} \\ sin\mathrm{K} & cos\mathrm{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi - \xi_0 \\ \eta - \eta_0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas particulier la photographie est un plan, c.-à-d. qu'elle représente le plan de l'objet à une échelle bien déterminée. Le facteur d'échelle de la photo et du plan est :

$$m_b \frac{Z_0}{C}$$

On peut aussi donner une solution géométrique de l'équation [2.20] en 1 considérant la figure 2. 10 :

Figure

Hypothèses

$$\mathrm{K} = X_0 = Y_0 = \xi_0 = \eta_0 = 0$$

$$\frac{s}{S} = \frac{C}{Z_0} = cte = \frac{1}{m_b}$$

Figure

2.5 Projection centrale d'une droite

Sans pour autant se limiter à un cas particulier, on peut définir une droite dans l ´objet selon un axe X (c.-à-d. Y=0), correspondant à une droite dans l'image représentée par un axe ξ (c.-à-d. η=0).

La première des équations [2, 1 8] permet d'écrire :

$$X = \frac{a_1\xi + a_3}{\mathrm{a1}c_1 + 1}$$

Les trois coefficients $a_1$et a_3 et c_1 décrivent la projection centrale d'une droite. Ils peuvent être calculés à partir de trois points de calage ; tout autre point mesuré sur la droite de l'image pourra être transformé dans l´espace-objet à l' aide de ces coefficients.

La méthode du rapport anharmonique est utilisée en géométrie descriptive pour restituer des lignes droites à partir de photos. L'exemple qui suit présente cette méthode.

Exemple de reconstitution de lignes droites d'un objet

Données : une ligne, APBQC du marquage au sol est identifiable sur la photo d'une rue (cf. figure 2.12). La longueur de la ligne AB est de 4.50 m, l´espace entre B a et C est de 5.00 m. La position des deux traces de freinage P et Q doit être rétablie.

Figure

Solution 1, à l'aide de l'équation [2.21]

Les coordonnées des trois points de calage A, B et C dans I' image (ξ) et l'objet (X) sont :

	ξ	X
A	0.00 mm	0.00 m
B	38.40 mm	4.50 m
C	68.30 mm	9.50 m

[2.21] avec A : $0 = \frac{a_1.0+a_3}{C_1.0+1} \rightarrow a_3 = 0$

[2.21] avec B : $4.50 = \frac{a_1.38.40}{C_1.38.40+1}$

[2.21] avec C : $9.50 = \frac{a_1.68.30}{C_1.68.30+1}$

On obtient a_1= 0.09747 et c_1=-0.00438

En introduisant les coordonnées-images ξ_p et ξ_Q dans l'équation (2.21], I, on obtient X_p et X_Q :

	ξ	X
P	33.50 mm	3.83 m
Q	44.90 mm	5.45 m

Solution 2 (avec le rapport anharmonique)

$$\frac{AB}{PB}:\frac{AC}{PC} = \frac{A'B'}{P'B'}:\frac{A'C'}{P'C'}$$

$$\frac{4.50}{PB}:\frac{9.50}{5.00+PB} = \frac{38.40}{4.90}:\frac{68.30}{34.80} \rightarrow PB = 0.67$$

$$\frac{AB}{QB}:\frac{AC}{QC} = \frac{A'B'}{Q'B'}:\frac{A'C'}{Q'C'}$$

$$\frac{4.50}{QB}:\frac{9.50}{5.00-QB} = \frac{38.40}{6.50}:\frac{68.30}{23.40} \rightarrow QB = 0.95$$

2.6 Stéréorestitution dans le cas normal

La photogrammétrie est principalement utilisée pour reconstituer ou restituer des objets de l'espace à partir de photographies. Nous avons vu que deux photos d'un même objet étaient nécessaires à cet effet. La restitution est particulièrement simple si les axes des chambres de prise de vues sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la base formée par les deux chambres. En photogrammétrie aérienne, ces conditions sont très difficiles à respecter, on s'efforcera toutefois de rester le plus proche possible du cas normal.

Figure

$X_{01}=Y_{02}=Z_{o1}=Z_{02}=0$

$X_{02}=B$

$\xi_{01}=\xi_{02}=\eta_{01}\ \eta_{02}=0$

$\omega_1=\omega_2=\phi_1=\phi_2=K_1=K_2=0$

Dans le cas normal, la matrice rotation R [2.11] se ramène pour chaque image à la matrice unité :

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Les équations [2.14] exprimant les relations entre les coordonnées de l' image et objet, se simplifient alors selon :

Photo 1

$$X=Z\frac{\xi_1}{-C}$$

$$Y=Z\frac{\eta_1}{-C}$$

Photo 2

$$X=B+Z\frac{\xi_2}{-C}$$

$$Y=Z\frac{\eta_2}{-C}$$

Les équations [2.23] et [2.25) impliquent que :

$\eta_1=\eta_2\rightarrow\eta_1-\eta_2=p_\eta=0$ (pas de parallaxe)

Figure

Les formules finales [2.26] pour le calcul des coordonnées (X, Y, Z) à partir des coordonnées-images ξ et η se déduisent des équations [2.22] à [2.25] . Nous commençons par les équations [2.22] et [2.24].

C.-à-d. : $-Z\frac{\xi_1}{c} = B - Z\frac{\xi_2}{c}$

$$-Z = \frac{C.B}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{C.B}{p_{\xi_1}}$$

$$Y = -Z\frac{\eta_1}{C} = -Z\frac{\eta_2}{C}$$

$$X = Z\frac{\xi_1}{-C}$$

Contrôle

La différence ξ_1-ξ_2=p_ξ (parallaxe ξ) peut être mesurée directement sur un stéréocomparateur.

On peut également démontrer les équations [2.26] en considérant tout simplement des triangles semblables sur la figure 2. 15.

Figure

2.7Théorie des erreurs dans le cas normal

Les équations [2.26] montrent comment calculer les coordonnées (X, Y, Z) d'un Point de l´objet à partit des grandeurs ξ_1, η_1, p_ξ mesurées sur les photos. On va s'intéresser dans ce paragraphe à l'exactitude de ce calcul indirect de coordonnées. On admet qu'il n'y a pas d'erreur sur la distance principale c et la base B.

A partir de la première équation [2.26] on obtient l'écart type σ_z :

$$\sigma_Z = \frac{C.B}{p_\xi^2} = \frac{Z}{C}\frac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}$$

Le rapport B/Z est appelé le rapport « base sur éloignement ». Le rapport Z/C représente d´après [2.20], le facteur d´échelle m_b de la photo. Il représente en fait l' échelle moyenne de l' image, sauf dans le cas particulier où l'objet (plan) lui est parallèle. Pour calculer les écarts types σ_x et σ_y des coordonnées X et Y, on applique la loi de propagation des erreurs aux équations [2.26] :

$$\sigma_Z = m_b\frac{Z}{B}\sigma_{p_\xi} = \frac{Z^2}{C.B}\sigma_{p_\xi}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{C}\sigma_Z\right)^2 + \left(\frac{Z}{C}\sigma_\eta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{C}m_b\frac{Z}{B}\sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b\sigma_\eta\right)^2}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{C} m_b \frac{Z}{B} \sigma_{p_\xi}\right)^2 + \left(m_b \sigma_\xi\right)^2}$$

Exemple numérique

Données :

A calculer : l'écart type sur chaque coordonnée-objet en fonction du facteur d'échelle m_b et du rapport base sur éloignement B/Z (attention aux différences d'unité dans la dernière colonne).

	B/Z=1 :1		B/Z=1 :3		B/Z=1 :10		B/Z=1 :20	
m_b	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z
50000	0.36	0.25	0.43	0.75	0.90	2.50	1.70	5.00 m
10000	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 dm
1000	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 cm
100	0.72	0.50	0.86	1.50	1.81	5.00	3.41	10.00 mm
25	0.18	0.13	0.22	0.38	0.45	1.25	0.85	2.50 mm

A partir de ce tableau et des relations [2.28] on peut formuler des règles générales relati yes à t : exactitude en photogrammétrie :

- pour un rapport base sur éloignement constant. Les écarts types sur les trois coordonnées sont directement proportionnels au facteur d'échelle de la photo. Pour obtenir l'exactitude souhaitée, il faudra choisir l'échelle en conséquence ;
- Pour une échelle donnée, les écarts types sur Z sont inversement proportionnels au rapport base sur éloignement. En revanche, les écarts types sur les coordonnées (X, Y) n'augmentent que faiblement quand le rapport B/Z décroît. Pour un rapport B/Z légèrement inférieur à 1, les trois coordonnées (X, Y, Z) auront le même écart type ;
- pour une base constante, l´écart type sur Z augmente en fonction du carré de la distance entre la chambre de prise de vues et l' objet.