Problema de Localização de Facilidades

Hérico Gonçalves Valiati, Marcel Mendes

[1]Departamento de Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

{herico,marcelmendes}@dcc.ufmg.br

Sumário

1. Introdução

O *Problema de Localização de Facilidades* (PLF) é a abstração de um desafio comum a muitas organizações. Esse problema consiste em escolher a melhor forma de atender a determinados clientes instalando serviços em certas regiões. O PLF é uma variação do *Problema do Transporte* (PT). Assim como no PT, o PLF é um problema de distribuição de qualquer grupo de centros de fornecimento, chamados origens (ou facilidades), a qualquer grupo de centros de recepção, denominados destinos (ou clientes), de modo a minimizar o custo total de distribuição [Hillier and Lieberman 2010].

No entanto, existem algumas diferenças significativas entre o PLF e o PT. Em primeiro lugar, tem-se que no PLF cada nó ofertante pode participar ou não da solução, ao contrário do PT em que todos os nós ofertantes participam da solução. O fato de um nó de oferta pertencer ou não a solução no PLF é determinado com base em uma análise que avalia se é vantajoso pagar o custo de instalação do nó em questão para atender a alguma das demandas existentes. Em segundo lugar, tem-se que no PT cada nó de oferta possui uma certa capacidade que deve ser distribuída aos nós de demanda. Já o PLF, não lida com quantidade de commodities, e só deve ser escolhido se uma determinada facilidade atende ou não determinado cliente.

2. Definição do Problema

O Recycoin é um projeto de aplicativo para intermediar produtores, coletores e receptores de lixo reciclável. O projeto recebe constantemente a sugestão para criar pontos de coleta em locais estratégicos e precisa saber qual seria a melhor estratégia para distribuir os pontos de coleta nas regiões da cidade.

Considerando-se a hipótese de se criar pontos de coletas em regiões da cidade, é preciso decidir quais regiões receberão os novos pontos. Para tal, considera-se que existe um custo c_i associado à construção do ponto de coleta i. Além disso, um custo f_{ij} associado ao atendimento do ponto de coleta i no bairro j. O problema consiste em minimizar os custos de instalação e operação do Recycoin na criação desses pontos de coleta.

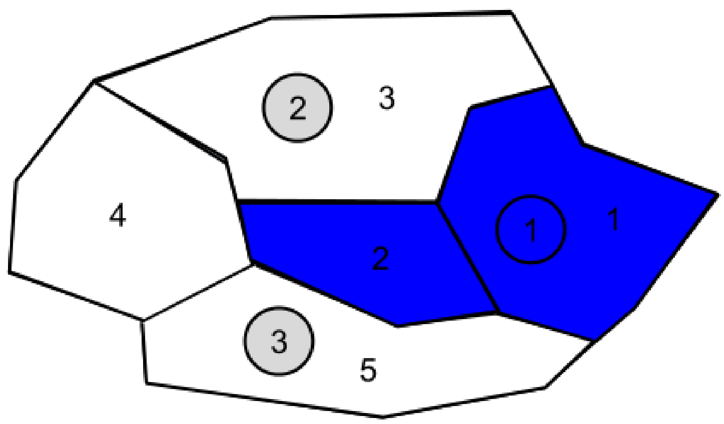

Figura 1. Exemplo de instância do problema (visual)

Como exemplo suponha que o Recycoin esteja operando em uma dada cidade e já tenha instalado um ponto de coleta na região 1 que está atendendo as regiões 1 e 2. É preciso cobrir as regiões restantes da cidade (3, 4 e 5) criando-se novos pontos de coleta. Para isso, modela-se esse problema como um Problema de Localização de Facilidades (PLF), onde os pontos de coletas são consideradas facilidades. Um ponto de coleta é tido aqui como uma estrutura que também pode atender a outras regiões. Por exemplo, na Figura 1, o ponto de coleta 1 atende as regiões 1 e 2. A tabela de custo mostrados em Figura 3 constituem os subsídios para a modelagem do problema. Na Figura 2, temos uma representação visual do problema por meio de um grafo bipartido.

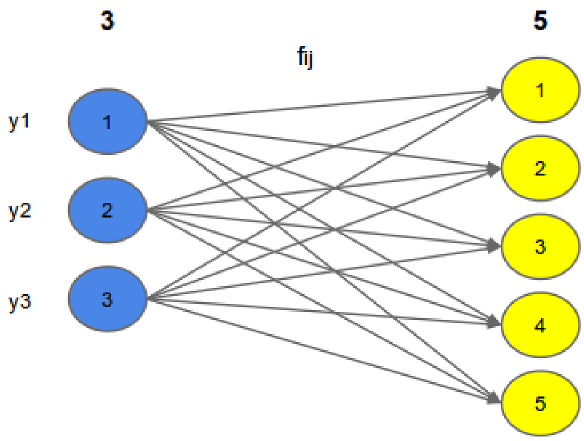

Figura 2. Grafo com a modelagem do problema

	1	2	3	4	5
1 (0)	0	0	5	9	5
2 (2)	3	2	1	3	7
3 (2)	3	3	7	3	2

Figura 3. Tabela de custos do problema

Como exemplo suponha que o Recycoin esteja operando em uma dada cidade e já tenha instalado um ponto de coleta na região 1 que está atendendo as regiões 1 e 2. É preciso cobrir as regiões restantes da cidade (3, 4 e 5) criando-se novos pontos de coleta. Para isso, modela-se esse problema como um Problema de Localização de Facilidades (PLF), onde os pontos de coletas são consideradas facilidades. Um ponto de coleta é tido aqui como uma estrutura que também pode atender a outras regiões. Por exemplo, na Figura 1, o ponto de coleta 1 atende as regiões 1 e 2. A tabela de custo mostrados em Figura 3 constituem os subsídios para a modelagem do problema. Na Figura 2, temos uma representação visual do problema por meio de um grafo bipartido.

Como mostrado na figura 2 , existe um custo associado a instalação de cada um dos novos pontos de coleta. Além disso, existe um custo relativo ao atendimento do bairro j pelo ponto de coleta i. A solução do problema está explicitada nas figuras 4, 5 e 6, e o custo mínimo é de 10.

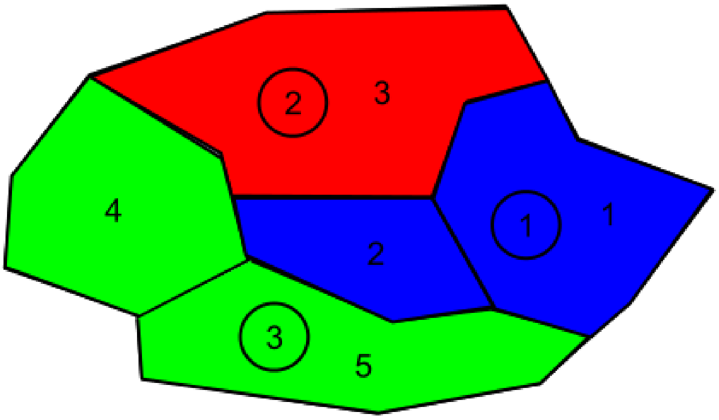

Figura 4. Solução visual do problema

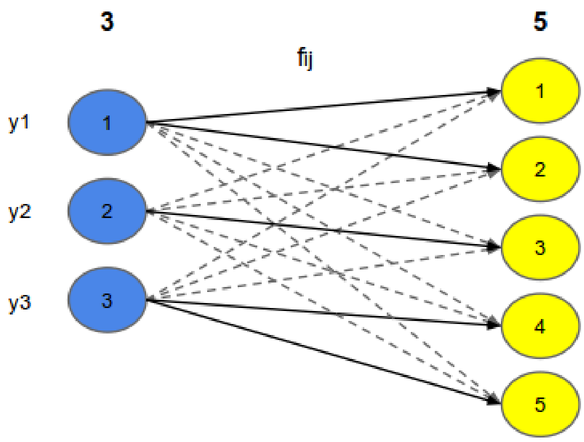

Figura 5. Solução do problema na forma de grafo

	1	2	3	4	5
1 (0)	0	0	5	9	5
2 (2)	3	2	1	3	7
3 (2)	3	3	7	3	2

Figura 6. Solução do problema representada na tabela de custos

3. Formulação Matemática

A equação 1 representa a função de custo. O objetivo dessa função é minimizar a soma dos dois custos do problema.O primeiro custo, representado pelo primeiro somatório se baseia na soma dos custos de instalação das facilidades que optou-se por pagar o seu custo, ou seja, essa facilidade faz parte da solução. O somatório duplo representa, a soma dos custo de se atender a cada um dos clientes.

$$Minimizar \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall, j \in m \tag{2}$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall, i \in m, j \in n \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall, i \in m, j \in n \tag{4}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall, i \in m \tag{5}$$

A restrição 2 é responsável por garantir que cada nó cliente j seja atendido por somente um dos nós ofertantes. Já a restrição 3 garante que um cliente j só possa ser atendido por um nó ofertante i caso esse nó faça parte da solução, ou seja, tenha-se optado por pagar o valor de instalação dessa facilidade. Para garantir que os valores de x_{ij} sejam inteiros e iguais a 1 ou 0, ou seja, uma aresta pertence ou não a solução, temos a restrição 4. Por fim, a restrição 5 garante que os valores de y_i sejam inteiros e iguais a 1 ou 0, ou seja, uma facilidade pertence ou não a solução.

4. Descrição das Instâncias de Teste

4.1. Solver

Optou-se pela implementação da solução do problema utilizando o GNU Linear Programming Kit, ou GLPK. O GLPK é um pacote voltado para a solução de problemas de programação linear.

4.2. Instâncias

Para exemplificar o problema de localização de facilidades descrito, abordando o tema do projeto Recycoin, foram feitas algumas implementações utilizando-se o mapa das regiões de BH como base para o problema. O mapa mais simples descrevendo essas regiões pode ser visto na Figura 7.

Figura 7. Mapa Região BH

Cada região é um ponto onde será avaliado a inclusão de uma facilidade no nosso problema. O custo C_i (1) está relacionado diretamente com o custo médio do metro quadrado de uma determinada localidade de Belo Horizonte. Também consideramos a variável f_{ij} (1) como sendo o custo do deslocamento de uma região i para j ou j para i.

5. Resultados

5.1. Primeiro problema

Regiões : 9
Limitador: Número de facilidades = 3
Regiões escolhidas pelo solver: Venda-Nova, Norte e Barreiro

Instância	Tamanho	Tempo Médio	Uso de memória	Ótimo
1	9 regiões	0.1 seg	0.3 Mb	10935

Tabela 1. Tabela resultados 1

5.2. Segundo problema

Regiões : 9
Limitador: Custo total $>=$ 10000 e Custo total $<=$ 15000
Regiões escolhidas pelo solver: Pampulha e Noroeste

Instância	Tamanho	Tempo Médio	Uso de memória	Ótimo
2	9 regiões	0.9 seg	0.5 Mb	10000

Tabela 2. Tabela resultados 2

5.3. Terceiro problema

Regiões : 9
Limitador: Custo total >= 20000 e Custo total <= 25000
Regiões escolhidas pelo solver: Norte, Nordeste, Centro-sul e Barreiro

Instância	Tamanho	Tempo Médio	Uso de memória	Ótimo
3	9 regiões	0.5 seg	0.4 Mb	20000

Tabela 3. Tabela resultados 3

5.4. Quarto problema- Aleatório

Regiões : 40
Limitador: Custo total >= 50000 e Custo total <= 200000

Instância	Tamanho	Tempo Médio	Uso de memória	Ótimo
4	40 regiões	12.6 seg	4.8 Mb	50000

Tabela 4. Tabela resultados 4

6. Conclusão

O Problema de Localização de Facilidades (PLF) pode ser aplicado a uma grande diversidade de situações. Apesar de ser um problema relativamente simples de ser entendido, o PLF é um grande desafio na área da computação, sendo classificado como um problema NP-difícil. Nesse trabalho, apresentamos o Problema de Localização de Facilidades, modelando-o e implementando-o no GLPK.

A modelagem e uso do solver para resolvê-la nos proporcionou experiência prática que será um ótimo ponto de partida caso nos deparemos com problemas semelhantes no futuro.

Referências

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2010). *Introdução à pesquisa operacional*. McGraw Hill.

Appendices

Modelo descrito no glpsol

Listing 1. Modelo mathprog GNU

```
var Y{1..40}, binary;           #variables bh-regions
var X{1..40,1..40} , binary;    #variables facilities-regions

param c{1..40} default 1;                         # Implamtation costs
param f{1..40,1..40} default 1;         # Facilitities cost


minimize z: sum{j in 1..40} c[j]* Y[j] + sum{k in 1..40, l in 1..40} f[
   k,l] * X[k,l];

subject to constraint{j in 1..40}:  sum{i in 1..40 } X[i,j] = 1;
          #(1)

subject to constraint2{i in 1..40, j in 1..40}:         X[i,j]<= Y[i];
    #(2)

subject to constraint4: sum{j in 1..40} c[j]* Y[j] + sum{k in 1..40, l
   in 1..40} f[k,l] * X[k,l] >= 50000 ;

subject to constraint5: sum{j in 1..40} c[j]* Y[j] + sum{k in 1..40, l
   in 1..40} f[k,l] * X[k,l] <= 200000 ;
```