Sprawozdanie z Laboratorium obliczeń naukowych

Lista nr [3]

Marcel Musiałek
Indeks: 279704

23 listopada 2025

Spis treści

1 Zadania 1–3: Implementacja i weryfikacja metod

1.1 Opis zadań

Celem zadań było zaimplementowanie metod: bisekcji, Newtona oraz siecznych, zgodnie z pseudokodem przedstawionym na wykładzie. Następnie należało sprawdzić poprawność implementacji przy użyciu prostych funkcji testowych.

1.2 Opis rozwiązania

W ramach rozwiązania stworzono funkcje realizujące poszczególne metody. W celu weryfikacji ich działania dodano proste testy dla funkcji $f(x) = x^2 - 4$.

1.3 Wyniki

```
--- WERYFIKACJA NA FUNKCJI f(x) = x^2 - 4 ---
Bisekcja [1.0, 3.0]:     (2.0, 0.0, 1, 0)
Newton (x0=3.0):         (2.000000000026214, 1.0485656787295738e-10, 4, 0)
Sieczne (x0=1.0, x1=3.0):(2.000000195092221, 7.803689223706556e-7, 5, 0)
```

1.4 Wnioski

Wyniki testu potwierdzają, że zaimplementowane funkcje działają poprawnie dla prostych danych wejściowych, zbiegając do oczekiwanego rozwiązania.

---

2 Zadanie 4

2.1 Opis zadania

Celem zadania było wyznaczenie pierwiastka równania $f(x)$ przy użyciu trzech zaimplementowanych metod iteracyjnych:

- Metody bisekcji,
- Metody Newtona,
- Metody siecznych.

2.2 Opis rozwiązania

Wykorzystano moduł miejsca zerowe zawierający implementacje metod. Zdefiniowano funkcję $f(x)$ oraz jej pochodną $f'(x)$. Dla każdej metody wywołano odpowiednią funkcję z zadanymi parametrami i zmierzono liczbę iteracji oraz końcowy błąd $f(r)$.

2.3 Wyniki

```
Wymagana dokładność: delta = 5.0e-6, epsilon = 5.0e-6

1. Metoda Bisekcji (przedział [1.5, 2.0]):
Pierwiastek r = 1.933753967285156
Wartość f(r)  = -2.702768013840284e-07
Iteracje      = 16
```

```
------------------------------------------------------------
2. Metoda Newtona (x0 = 1.5):
Pierwiastek r = 1.933753779789742
Wartość f(r)  = -2.242331631485683e-08
Iteracje      = 4
------------------------------------------------------------
3. Metoda Siecznych (x0 = 1.0, x1 = 2.0):
Pierwiastek r = 1.933753644474301
Wartość f(r)  = 1.564525129449379e-07
Iteracje      = 4
============================================================
```

2.4 Obserwacje

- Bardzo podobne miejsca zerowe.
- Większa ilość iteracji w metodzie bisekcji.
- Różne znaki $f(r)$.

2.5 Wnioski

Ten eksperyment potwierdza teoretyczne właściwości badanych metod:

- **Metoda Bisekcji** – Jest zdecydowanie najwolniejsza, posiada zbieżność liniową.
- **Metoda Newtona** – Ma teoretycznie najlepszą zbieżność (kwadratową) – w eksperymencie również daje najlepsze wyniki.
- **Metoda Siecznych** – Uzyskała równie dobre wyniki co metoda Newtona, mimo teoretycznie gorszej zbieżności.

Eksperyment ten ukazuje, że na określonym wąskim przedziale lepiej sprawdzają się metody Newtona i siecznych. Pokazuje to, dlaczego metody hybrydowe są skuteczne.

---

3 Zadanie 5

3.1 Opis zadania

Zadanie polegało na znalezieniu wartości x, dla których przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$.

3.2 Opis rozwiązania

Sprawdzenie szerokiego zakresu dla metody bisekcji $[-100, 100]$ – szansa, że algorytm i tak znajdzie rozwiązanie. Zauważyć można, że $f(0) = -1$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, co oznacza, że w przedziałach $[0, 1]$ i $[1, 2]$ znajdują się miejsca zerowe. Zaimplementowano skrypt wykorzystujący funkcję mbisekcji z modułu `MiejscaZerowe`, uruchamiając ją niezależnie dla obu wyznaczonych wyżej przedziałów.

3.3 Wyniki

```
Szukanie w przedziale [-100.0, 100.0]:
   Błąd: Funkcja nie zmienia znaku w zadanym przedziale.

Szukanie w przedziale [0.0, 1.0]:
   Pierwiastek r = 0.61914062
   Wartość f(r)  = 9.06632034e-05
   Liczba iteracji: 9

Szukanie w przedziale [1.0, 2.0]:
   Pierwiastek r = 1.51208496
   Wartość f(r)  = 7.61857860e-05
   Liczba iteracji: 13
```

3.4 Obserwacje

- W szerokim zakresie nie działa metoda – ustalono, że funkcja ma 2 pierwiastki, więc na końcach szerokiego zakresu znak będzie taki sam.
- W obu przybliżonych przypadkach pierwiastek funkcji został znaleziony z rozsądną ilością iteracji.

3.5 Wnioski

- Metoda bisekcji wymaga zmiany znaku na danym zakresie, więc w przypadku wystąpienia na nim parzystej ilości pierwiastków metoda może zawieść.
- Na przedziałach, gdzie zmiana znaku występuje raz, metoda bisekcji gwarantuje znalezienie pierwiastka.

---

4 Zadanie 6

4.1 Opis zadania

Zadanie polegało na znalezieniu miejsc zerowych dwóch zadanych funkcji. Celem było przetestowanie metod Bisekcji, Newtona i Siecznych dla standardowych przedziałów, a następnie zbadanie zachowania Metody Newtona dla "trudnych"punktów startowych, gdzie pochodna jest bliska zeru lub zmienia znak.

4.2 Opis rozwiązania

Zaimplementowano funkcje f_1, f_2 oraz ich pochodne.

- Dla f_1 przeprowadzono testy stabilności Newtona dla dużych x_0, gdzie wykres funkcji staje się płaski (asymptota pozioma).
- Dla f_2 sprawdzono punkt $x_0 = 1$ (ekstremum lokalne) oraz punkty $x_0 > 1$, gdzie styczna kieruje iteracje w przeciwną stronę od pierwiastka.

4.3 Wyniki

```
Analiza funkcji f1(x) = e^(1-x) - 1
------------------------------------------------------------
Bisekcja [0.0, 2.0]:     r=1.000000, it=1, err=0
Newton (x0=2.0):         r=1.000000, it=5, err=0
Sieczne (x0=0.0, x1=2.0): r=1.000002, it=6, err=0

Testy specjalne Newtona dla f1 (x0 > 1):
x0 = 5.0   -> r=1.000000, it=54, v=3.6e-07
x0 = 10.0  -> r=NaN, it=100, v=NaN
x0 = 100.0 -> r=100.000000, it=1, v=-1.0e+00

Analiza funkcji f2(x) = x * e^(-x)
------------------------------------------------------------
Bisekcja [-0.5, 0.5]:    r=0.000000, it=1, err=0
Newton (x0=-0.5):        r=-0.000000, it=4, err=0
Sieczne (x0=-0.5, x1=0.5): r=0.000005, it=6, err=0

Testy specjalne Newtona dla f2 (szukanie zera w x=0):
x0 = 1.0 (ekstremum!): err kod = 2 (oczekiwany błąd pochodnej)
x0 = 1.5 -> r=14.787437, it=10 (czy zbiegła do 0?)
x0 = 2.0 -> r=14.398663, it=10 (czy zbiegła do 0?)
x0 = 10.0 -> r=14.380524, it=4 (czy zbiegła do 0?)
```

4.4 Obserwacje

Dla funkcji f_1:

- Metody zbiegły szybko. Bisekcja trafiła idealnie w 1 iteracji, ponieważ $x = 1$ jest środkiem przedziału $[0, 2]$.
- Dla $x = 5$ pochodna jest bardzo mała (funkcja płaska). Metoda Newtona potrzebowała aż 54 iteracji, aby "wrócić"do pierwiastka.
- Dla bardzo dużych x, pochodna jest numerycznie zerowa. Metoda albo generuje błędy (`NaN`), albo stoi w miejscu, ponieważ styczna jest prawie równoległa do osi OX.

Dla funkcji f_2:

- Funkcja ma maksimum w $x = 1$. Pochodna wynosi 0. Metoda Newtona zwróciła błąd (dzielenie przez zero), co jest zachowaniem poprawnym.
- Dla $x > 1$ styczna do wykresu przecina oś OX po prawej stronie (w coraz większych wartościach x), oddalając się od pierwiastka $x = 0$. Metoda rozbiega się do nieskończoności. Wartości typu 14.7 to moment, w którym algorytm się zatrzymał (przypadkowo spełniając warunek tolerancji dla bardzo małej wartości funkcji), ale nie jest to poszukiwany pierwiastek.