Sprawozdanie z Laboratorium Obliczeń Naukowych

Lista nr 4: Interpolacja

Marcel Musiałek
Indeks: 279704

8 grudnia 2025

Spis treści

1 Implementacja Metod (Zadania 1–4)

Stworzono moduł `Interpolacja` w języku Julia, zawierający następujące funkcje:

1.1 Zadanie 1: Ilorazy różnicowe

- **Funkcja:** `ilorazyRoznicowe(x, f)`
- **Opis:** Oblicza współczynniki wielomianu Newtona.
- **Optymalizacja:** Zgodnie z poleceniem, nie użyto macierzy dwuwymiarowej. Algorytm działa na wektorze jednowymiarowym, aktualizując go „w miejscu”, co redukuje złożoność pamięciową do $O(n)$.

1.2 Zadanie 2: Wartość wielomianu

- **Funkcja:** `warNewton(x, fx, t)`
- **Opis:** Oblicza wartość wielomianu w punkcie t.
- **Optymalizacja:** Zastosowano uogólniony schemat Hornera, co pozwala na obliczenie wartości w czasie $O(n)$ bez jawnego potęgowania.

1.3 Zadanie 3: Postać naturalna

- **Funkcja:** `naturalna(x, fx)`
- **Opis:** Przelicza współczynniki z bazy Newtona na bazę naturalną ($a_n x^n + \cdots + a_0$).
- **Działanie:** Algorytm rekurencyjnie wymnaża czynniki liniowe ($x - x_k$). Czas działania to $O(n^2)$.

1.4 Zadanie 4: Rysowanie interpolacji

- **Funkcja:** `rysujNnfx(f, a, b, n; wezly=:rownoodlegle)`
- **Opis:** Rysuje wykres funkcji $f(x)$ i jej wielomianu interpolacyjnego Newtona (stopnia n) na przedziale $[a, b]$.
- **Węzły:** Możliwość wyboru węzłów równoodległych lub Czebyszewa. Funkcja wykorzystuje `ilorazyRoznicowe` i `warNewton`. Do wizualizacji użyto pakietu `Plots`.

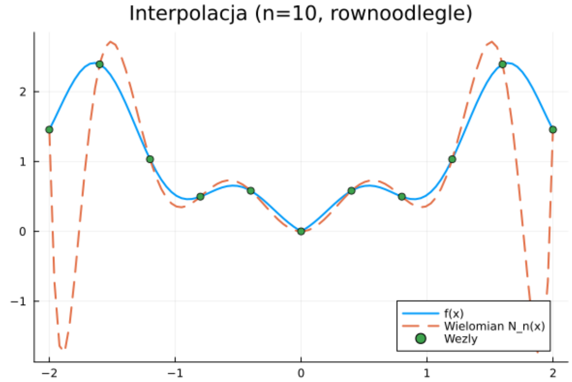
---

2 Weryfikacja poprawności

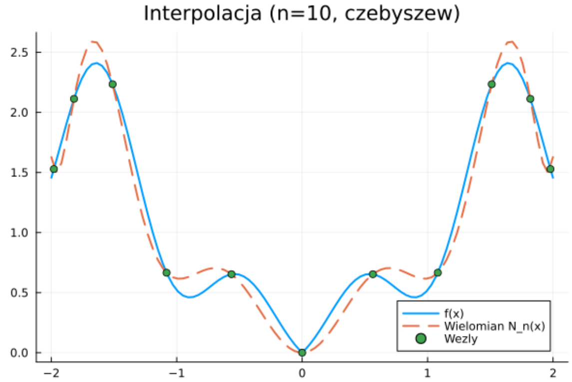
Algorytmy przetestowano na wielomianie $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Program poprawnie wyznaczył:

- ilorazy różnicowe: `[0.0, 1.0, 2.0]`,
- wartość w punkcie $x = 2$: wynik `15.0`,
- współczynniki naturalne: `[1.0, 3.0, 2.0]`.

2.1 Wykresy testowe



(a) Węzły równoodległe (n=10)



(b) Węzły Czebyszewa (n=10)

Rysunek 1: Porównanie interpolacji dla wielomianu testowego

2.2 Wnioski

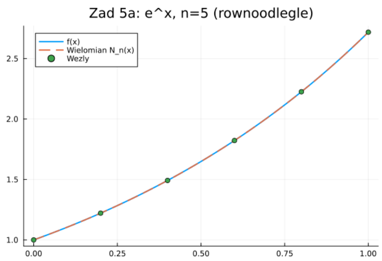
- Algorytmy zostały poprawnie zaimplementowane.
- Na wykresach widać, że przy zastosowaniu węzłów równoodległych pojawiają się wyraźne błędy (oscylacje) na krańcach przedziału.
- Zastosowanie węzłów Czebyszewa znacząco poprawia wynik. Wynika to z faktu, że węzły te są zagęszczone na brzegach przedziału, co pozwala wielomianowi lepiej dopasować się do funkcji w tych newralgicznych miejscach i eliminuje duże odchylenia.

---

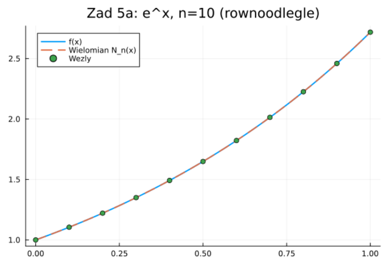
3 Zadanie 5: Zbieżność dla funkcji gładkich

Zbadano zachowanie interpolacji na węzłach równoodległych dla funkcji klasy C^∞ (gładkich). Sprawdzono, czy błąd maleje wraz ze wzrostem stopnia wielomianu ($n = 5, 10, 15$).

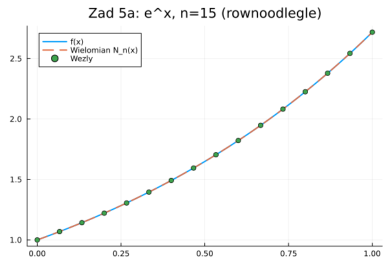
3.1 Przypadek A: $f(x) = e^x$ na przedziale $[0, 1]$



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



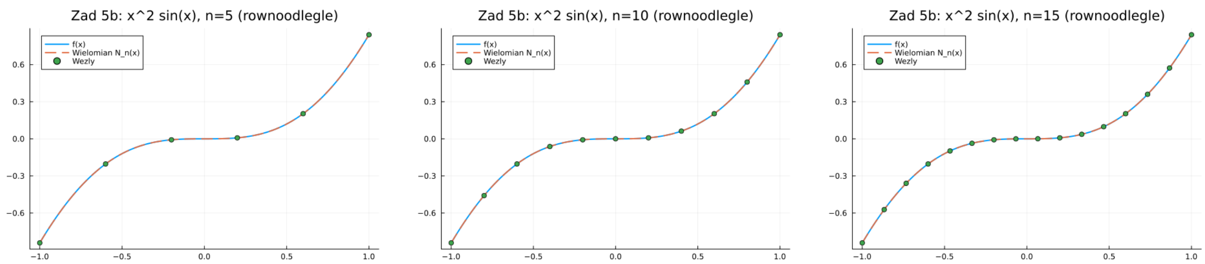
(c) $n = 15$

Rysunek 2: Interpolacja e^x, węzły równoodległe

Obserwacje:
Funkcja e^x jest bardzo regularna. Już dla $n = 5$ przybliżenie jest dobre. Wraz ze wzrostem

n wielomian interpolacyjny idealnie pokrywa się z funkcją. Nie widać żadnych negatywnych efektów na brzegach.

3.2 Przypadek B: $f(x) = x^2 \sin(x)$ na przedziale $[-1, 1]$



(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 15$

Rysunek 3: Interpolacja $x^2 \sin(x)$, węzły równoodległe

Obserwacje:
Mimo bardziej „falistego” kształtu funkcji, interpolacja na węzłach równoodległych działa poprawnie. Zwiększanie liczby węzłów (n) systematycznie zmniejsza błąd interpolacji. Dla $n = 15$ wykresy są niemal nierozróżnialne.

3.3 Wniosek z Zadania 5

Dla funkcji gładkich na krótkich przedziałach, interpolacja na węzłach równoodległych jest zbieżna i skuteczna.

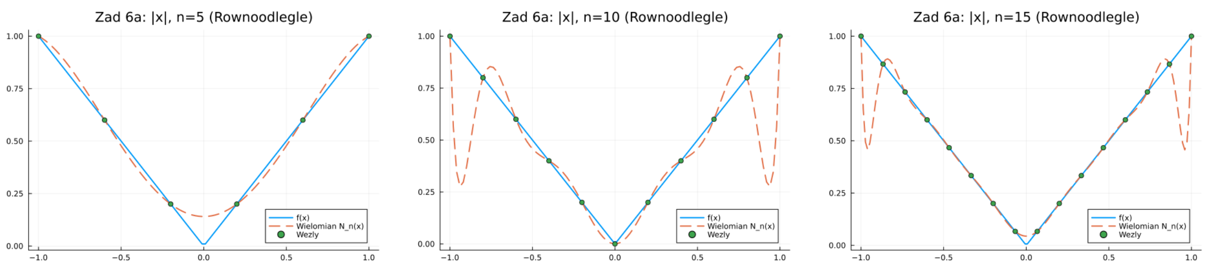
---

4 Zadanie 6: Granice interpolacji (Zjawisko Rungego)

Zbadano funkcje trudne, porównując węzły równoodległe (R) i Czebyszewa (C) dla stopni $n = 5, 10, 15$.

4.1 Przypadek A: $f(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$ (Ostrze)

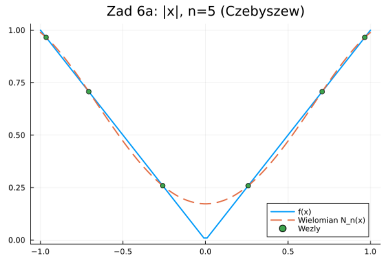
Węzły Równoodległe



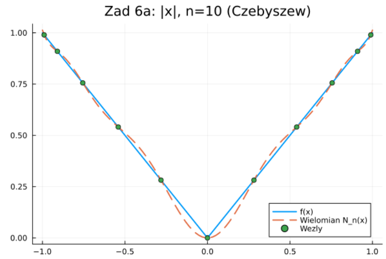
(a) $n = 5$ (b) $n = 10$ (c) $n = 15$

Rysunek 4: Funkcja $|x|$ - Węzły równoodległe

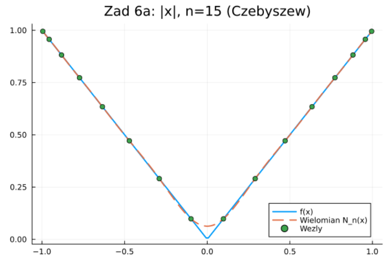
Węzły Czebyszewa



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 15$

Rysunek 5: Funkcja $|x|$ - Węzły Czebyszewa

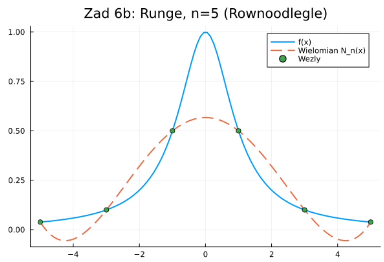
Obserwacje:

- Dla węzłów równoodległych, próba odwzorowania szpica w $x = 0$ powoduje zafalowanie wielomianu na bokach.
- Dla węzłów Czebyszewa, wielomian znacznie lepiej radzi sobie z ostrzem, a błąd na reszcie przedziału jest minimalny.

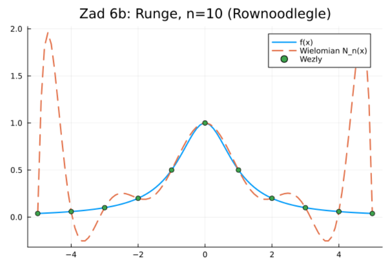
4.2 Przypadek B: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ (Funkcja Rungego)

To jest kluczowy test stabilności interpolacji.

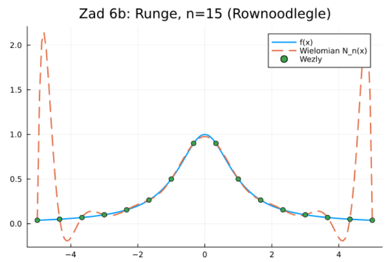
Ewolucja błędu dla węzłów Równoodległych



(a) $n = 5$



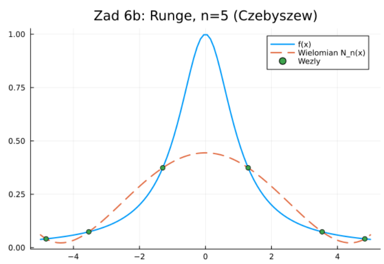
(b) $n = 10$



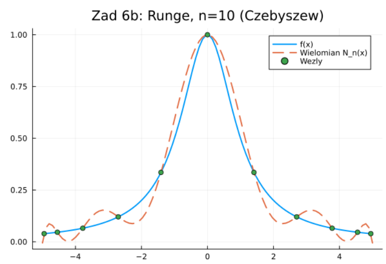
(c) $n = 15$

Rysunek 6: Runge - Węzły równoodległe

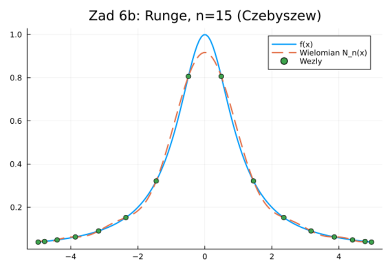
Rozwiązanie problemu - Węzły Czebyszewa



(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 15$

Rysunek 7: Runge - Węzły Czebyszewa

4.3 Analiza

To klasyczny przykład testujący stabilność interpolacji.

- **Węzły równoodległe:** Obserwujemy klasyczne **Zjawisko Rungego**. Dla $n = 10$ i $n = 15$ wielomian wpada w silne oscylacje na krańcach przedziału, osiągając wartości wielokrotnie przekraczające zakres funkcji. Interpolacja jest rozbieżna, co wynika z niekorzystnego układu węzłów powodującego gwałtowny wzrost czynnika iloczynowego $\prod(x - x_i)$ we wzorze na błąd.
- **Węzły Czebyszewa:** Interpolacja jest zbieżna. Zastosowanie węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa zagęszcza punkty pomiarowe na krańcach przedziału. Zgodnie z teorią, minimalizuje to normę czynnika wielomianowego w oszacowaniu błędu, co skutecznie eliminuje oscylacje Rungego. Wielomian dla $n = 15$ niemal idealnie pokrywa się z zadaną funkcją.

4.4 Wnioski końcowe

Wybór rodzaju węzłów ma kluczowe znaczenie dla zbieżności interpolacji wielomianowej.

1. Dla funkcji analitycznych (jak w przypadku Rungego), węzły równoodległe mogą prowadzić do rozbieżności (dużych oscylacji na brzegach) wraz ze wzrostem stopnia wielomianu.
2. Węzły Czebyszewa są rozwiązaniem optymalnym – poprzez zagęszczenie na krańcach minimalizują błąd maksymalny i gwarantują zbieżność jednostajną, eliminując zjawisko Rungego.