Pesquisa Operacional
aula 3

Profa. Alessandra Martins Coelho

2019

Programação Linear

- Uma das principais ferramentas da PO
- A FO e todas as restrições do modelo são representadas por funções lineares. Todas as variáveis de decisão devem ser contínuas.
- Construção do modelo matemático que representa a problema real em estudo.
- Solução ótima
  - Determinar valores ótimos para as variáveis de decisão
- Método simplex – mais conhecido

Formulação Matemática de um Modelo Geral de PL

FO

max ou min $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeito a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, =, \geq\} b_m
\end{array}
$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ (restrição de não negatividade)

Formulação Matemática de um Modelo Geral de PL

max ou min $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeito a:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, =, \geq\} b_m \\
\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \text{ (restrição de não negatividade)}
\end{array}
$$

z é a função objetivo;

x_j são as variáveis de decisão, principais ou controláveis, $j = 1, 2, \ldots, n$;

a_{ij} é a constante ou coeficiente da i-ésima restrição da j-ésima variável, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, $i = 1, 2, \ldots, m$;

c_j é a constante ou coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Modelo de Programação Linear na forma Padrão

- Para resolver um problema de PL pelo método analítico ou pelo algoritmo simplex:
  - Os termos independentes das restrições devem ser não negativos.
  - Todas as restrições devem estar representadas por equações lineares e apresentadas na forma de igualdade.
  - As variáveis de decisão devem ser não negativas.

Forma Padrão

$$\max \text{ ou } \min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Forma Matricial

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$$

sujeito a:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

em que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica

- As restrições devem ser apresentadas na forma de inequações.
- Se a FO for de max, todas as restrições devem ser representadas com sinal do tipo $\leq$
- Se a FO for de min, as restrições devem estar com sinal do tipo $\geq$

Forma Canônica

$$\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & \geq b_m \end{array}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, \text{n}$$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Um problema de PL padrão de max pode ser transformado em um de min.

  $\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \min -z = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- Analogamente, um problema de PL padrão de min pode ser transformado em um de max.

  $\min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \max -z = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Uma restrição de desigualdade do tipo $\leq$ pode ser transformada em outra do tipo $\geq$, multiplicando-se ambos os lados por (-1)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ é equivalente a}$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

- Analogamente, uma restrição de desigualdade do tipo $\geq$ pode ser transformada em outra do tipo $\leq$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \text{ é equivalente a}$$
$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Uma restrição de igualdade pode ser transformada em duas restrições de desigualdade.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \text{ é equivalente a}$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Uma restrição de desigualdade do tipo $\leq$ pode ser reescrita de uma equação de igualdade considerando a adição de uma nova variável não negativa do lado esquerdo $x_k \geq 0$, chamada **variável de folga**.

- $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ é equivalente a
  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_k = b_i$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Analogamente, a restrição de desigualdade do tipo $\geq$ também pode ser transformada em uma equação de igualdade por meio de subtração de uma nova variável não negativa do lado esquerdo, $x_k \leq 0$ chamada **variável de excesso**.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \text{ é equivalente a}$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_k = b_i$$

Transformações para a forma Padrão ou Canônica

- Uma variável x_j que não tem restrição de sinal, chamada de **variável livre**, pode ser expressa como a diferença de duas variáveis não negativas.

$$x_j = x_j^1 - x_j^2,\; x_j^1, x_j^2 \geq 0$$

Para o problema de PL a seguir, reescreva-o na forma padrão, a partir de uma FO de minimização

$$\max z = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad &\geq 6 \\ x_1 \text{ livre}, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min -z = -f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -5x_1^1 + 5x_1^2 - 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1^1 - x_1^2 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 \qquad &= 12 \\ 2x_1^1 - 2x_1^2 + x_2 + 3x_3 \qquad\qquad - x_6 &= 6 \\ x_1^1, x_1^2, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transforme o problema a seguir na forma canônica

$$\max z = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 320 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 580 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &\leq -320 \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 &\leq -580 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 580 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transforme os problemas a seguir: 1) para a forma padrão
2) para a forma canônica

a) $\max \sum_{j=1}^{2} x_j$

sujeito a:

$x_1 - 5x_2 = 10 \quad (1)$

$x_1 + 2x_2 \le 50 \quad (2)$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad (3)$

b) $\min 24x_1 + 12x_2$

sujeito a:

$3x_1 + 2x_2 \ge 4 \quad (1)$

$2x_1 - 4x_2 \le 26 \quad (2)$

$x_2 \ge 3 \quad (3)$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad (4)$

c) $\max 10x_1 - x_2$

sujeito a:

$6x_1 + x_2 \le 10 \quad (1)$

$x_2 \ge 6 \quad (2)$

$x_1, x_2 \ge 0 \quad (3)$

d) $\max 3x_1 + 3x_2 - 2x_3$

sujeito a:

$6x_1 + 3x_2 - x_3 \le 10 \quad (1)$

$\frac{x_2}{4} + x_3 \ge 20 \quad (2)$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad (3)$

Transformar os problemas de maximização em outros problemas de minimização

a) $\max z = 10x_1 - x_2$

b) $\max z = 3x_1 + 3x_2 - 2x_3$

Modelagem de problemas reais

Problema do Mix de Produção

- Objetivo: encontrar a quantidade ideal a ser fabricada de determinada linha de produtos que:
  - maximize o resultado da empresa (lucro líquido, margem de contribuição total etc.) ou
  - minimize os custos de produção respeitando suas limitações de recursos produtivos e mercadológicos (restrições de matéria-prima, capacidade máxima de produção, disponibilidade de mão de obra, demanda máxima e mínima de mercado, etc)
- Quando a quantidade a ser fabricada de determinado produto só puder assumir valores inteiros (carro, eletrodomésticos, etc) – problema PI.

Problema da Mistura

- Objetivo: encontrar a solução com custo mínimo ou lucro máximo, a partir da combinação de diversos ingredientes para produzir um ou vários produtos.
- Exemplos:
  - Mistura de vários tipos de petróleo ou óleo bruto para produzir diferentes tipos de gasolina
  - Mistura de produtos químicos para gerar outros produtos
  - Mistura de diferentes tipos de papel para gerar papel reciclado.

Problema da dieta

- Objetivo: determinar a melhor combinação de alimentos a serem ingeridos em uma refeição, com o menor custo possível, atendendo todas as necessidades nutricionais.
- Podem ser analisados diversos nutrientes: calorias, proteínas, gorduras, carboidratos, fibras, cálcio, ferro, magnésio, fósforo, potássio, sódio, zinco, cobre, manganês, selênio, vitamina A, vitamina C, vitamina B1, vitamina B2, vitamina B12, e outros

Problemas de Investimentos Financeiros

- Problema de orçamento de capital, seleção de carteiras ou portifólio, administração de capital de giro, análise de risco
- Problema de orçamento de capital
  - Objetivo: selecionar, a partir de um conjunto de alternativas, os projetos de investimentos financeiramente viáveis, respeitando restrições orçamentárias da empresa investidora.

A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R$12,00 e R$60,00, respectivamente. As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e de triciclo produzida, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal. Formular o problema de programação linear que maximiza o lucro líquido da empresa Venix.