



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUDESTE DE MINAS GERAIS

Pesquisa Operacional

Introdução

- aula 2 -

Profa. Alessandra Martins Coelho

2019

Operational Research

- Pesquisa Operacional
- Investigação Operacional
- Investigación Operativa

Investigação de Operações

- Termo ligado à invenção do radar
(Inglaterra – 1934), atribuído à Rowe (1938)

Pesquisa Operacional (PO)

Em termos científicos, a PO é caracterizada por um **campo de aplicações bastante amplo** o que justifica a **existência de várias definições**, algumas tão gerais que podem se aplicar a qualquer ciência, e outras tão particulares que só são válidas em determinadas áreas de aplicação.

Pesquisa Operacional (PO)

- “É o **uso do método científico** com o objetivo de prover departamentos executivos de elementos quantitativos para a tomada de decisões com relação a operações sob seu controle”;
- “**Propõe uma abordagem científica** na solução de problemas: observação, formulação do problema, e construção de modelo científico (matemático ou de simulação)”;
- “É a **modelagem e tomada de decisão** em sistemas reais, determinísticos ou probabilísticos, relativos à necessidade de alocação de recursos escassos”.

Pesquisa Operacional (PO)

- É **uma ciência aplicada**, voltada para a resolução de problemas reais. Tendo como foco a tomada de decisões, aplica conceitos e métodos de várias áreas científicas na concepção, planejamento ou operação de sistemas. (SOBRAPO, 2010).
- É um conjunto de **técnicas matemáticas** utilizadas na resolução de um problema comum ao cotidiano de nossas vidas: determinar o melhor aproveitamento de recursos escassos. (PERIN FILHO, 1995)

Pesquisa Operacional (PO)

- É a **área** que avalia maneiras de adaptar os sistemas do mundo real, para identificar mais claramente as relações entre diferentes elementos.
- É um **método científico de tomada de decisões**. Em linhas gerais, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e através da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor maneira de operar o sistema.

Origens



Análise científica do uso operacional de recursos militares – 2ª Guerra Mundial

- A PO surgiu durante a II Guerra Mundial, resultado de estudos realizados envolvendo equipes multidisciplinares de cientistas, contratados para resolver problemas militares de ordem **estratégica e tática**, utilizando de técnicas matemáticas (SILVA et al., 1998).
- Pesquisas em operações militares desenvolvendo métodos, processos e teorias.

Origens

- Como os resultados foram significativos, continuaram a trabalhar mesmo após o término da guerra, redirecionando os estudos também para outras áreas.

Origens

Revolução industrial:

Crescimento das organizações
+
Complexidade dos problemas

Dificuldade na alocação
eficaz dos recursos
disponíveis às atividades

Fatores chaves para o crescimento da PO

- Readaptação do parque industrial;
- Desenvolvimento e aperfeiçoamento de técnicas de PO;
- Desenvolvimento dos recursos computacionais
- Dantzig – método simplex – otimização linear

- Evolução rápida - Inglaterra e Estados Unidos
- 1ª Conferência Internacional – 1957 - *Oxford*
 - Estudos de casos ou problemas específicos
 - Modelos e métodos matemáticos em diversos temas (teoria de estoques, substituição de equipamentos, teoria de filas, programação (*scheduling*) de tarefas em máquinas, teoria dos jogos, fluxo em redes e otimização linear.
- Final da década de 50 e início da década de 60
 - aplicação nos setores público e privado.
- Avanço da PO
 - aumento da velocidade de processamento;
 - quantidade de memória;
 - execução de problemas mais complexos

Pesquisa Operacional

PO propõe uma abordagem científica sobre a tomada de decisões

Observação, formulação do problema, e construção de modelo científico (matemático ou de simulação)

- Ideias e processos para articular e modelar problemas de decisão, determinando os objetivos do tomador de decisão e as restrições sob as quais se deve operar;
- Métodos matemáticos, estatísticos e algorítmicos

Conceito de Decisão

- Chiavenato (1997) - “o processo de análise entre várias alternativas disponíveis do curso de ação que a pessoa deverá seguir”.
- O processo pelo qual são escolhidas algumas ou apenas uma entre muitas alternativas para as ações a serem realizadas.

Exemplos de decisão

- escolher uma localização dentre várias disponíveis;
- determinar a melhor composição de uma carteira de ações;
- escolher uma entre várias alternativas que balanceia os recursos de produção, como mão de obra disponível, contratação, demissão, estoque.

A natureza

- aplicada a problemas associados a condução e a coordenação de operações ou atividades numa organização.
- possui ampla utilização:
 - governo e suas agências, indústrias, comércio e serviços.
 - adota um enfoque sistêmico para os problemas.
 - busca a solução “ótima” para o problema.
- Ramo multidisciplinar
 - engenharia, computação, economia, estatística, administração, matemática, ciências comportamentais.

Fases de um estudo de PO

- (1) definição do problema;
- (2) construção do modelo;
- (3) solução do modelo;
- (4) validação do modelo;
- (5) implementação da solução;
- (6) avaliação final.

Fases de uma estudo de PO

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução;

(6) avaliação final.

- objetivos a serem alcançados;

- possíveis caminhos para a solução do modelo;

- definição das limitações técnicas do sistema;

- relação do sistema com outros da empresa ou do ambiente externo.

Fases de uma estudo de PO

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução;

(6) avaliação final.

- conjunto de equações (funções objetivo e restrições de igualdade) e/ou inequações (restrições de desigualdade) que tem como objetivo **otimizar** a eficiência do sistema e oferecer subsídios para que o tomador de decisão identifique as limitações do mesmo.

Fases de uma estudo de PO

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução;

(6) avaliação final.

- uso de várias técnicas de PO.
Ex.:

- Simplex (programação linear e programação em redes)
- *Branch-and-bound* (programação inteira)

Fases de uma estudo de PO

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução;

(6) avaliação final.

- Um modelo é considerado válido se conseguir representar ou prever, com precisão aceitável, o comportamento do sistema estudado.

Fases de uma estudo de PO

(1) definição do problema;

(2) construção do modelo;

(3) solução do modelo;

(4) validação do modelo;

(5) implementação da solução;

(6) avaliação final.

- deve ser controlada e acompanhada de maneira a detectar e corrigir possíveis mudanças da nova solução, o que possa fazer com que algumas partes do modelo sejam reformuladas.

Fases de uma estudo de PO

- (1) definição do problema;
- (2) construção do modelo;
- (3) solução do modelo;
- (4) validação do modelo;
- (5) implementação da solução;
- (6) avaliação final.**

- verificar se o
objetivo final foi
alcançado

Exemplos

- **Programação linear:** *mix* de produção, mistura de matérias-primas, modelos de equilíbrio econômico, carteiras de investimentos, roteamento de veículos, jogos entre empresas;
- **Modelos em redes:** rotas econômicas de transporte, distribuição e transporte de bens, alocação de pessoal, monitoramento de projetos;
- **Teoria de filas:** congestionamento de tráfego, operações de hospitais, dimensionamento de equipes de serviço;

Ferramentas da Pesquisa Operacional

Modelos determinísticos são aqueles em que **todas as variáveis** envolvidas em sua formulação são **constantes e conhecidas**.

Modelos estocásticos utilizam uma ou mais **variáveis aleatórias** em que **pelo menos uma de suas características** operacionais é definida por meio de **funções de probabilidade**.

Metodologia Multicritério de apoio a Decisão tem a finalidade de estudar problemas com vários critérios simultaneamente, buscando selecionar a melhor escolha dentre um conjunto de alternativas.

Ferramentas da Pesquisa Operacional

Análise Envoltória de Dados busca analisar o desempenho, em termos de eficiência relativa, de diferentes unidades tomadoras de decisão.

Inteligência Artificial tipo de inteligência produzida pelo homem para dotar as máquinas de algum tipo de habilidade que simula a inteligência humana.

Inteligência Computacional campo da inteligência artificial que estuda algoritmos inspirados na natureza ou bioinspirados, como redes neurais, lógica nebulosa e computação evolucionária.

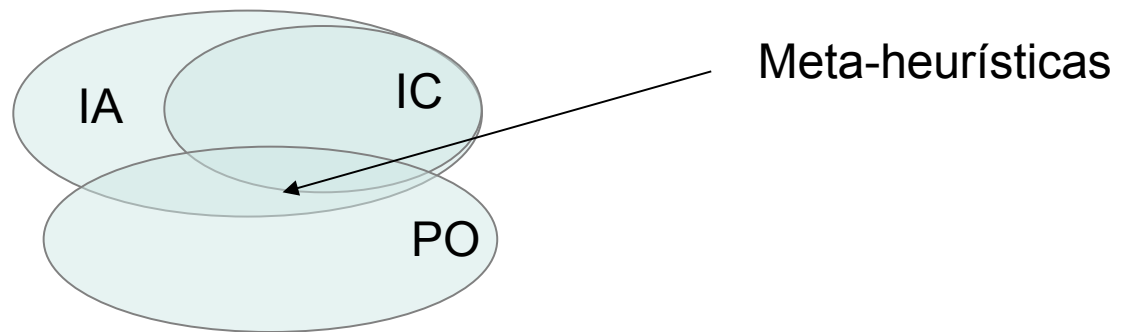
Ferramentas da Pesquisa Operacional

Heurísticas e Meta-heurísticas – são um campo da Pesquisa Operacional, da Inteligência Artificial e Inteligência Computacional que surgiram como alternativas aos métodos exatos para problemas de otimização de alta complexidade computacional que não podem ser resolvidos em tempo polinomial (NP-completos), como problema da mochila, caixeiro viajante, *timetabling*, entre outros.

Ferramentas da Pesquisa Operacional

Heurística pode ser definida como um procedimento de busca guiada pela intuição, por regras e ideias, visando encontrar uma boa solução.

Meta-heurística, ao contrário, busca escapar de ótimos locais com o intuito de encontrar soluções muito próximas de ótimo local, porém sem a garantia da otimalidade.



Principais Sociedades Profissionais ligadas à PO

*INFORMS – Institute for Operations Research and the
Management Sciences (1995)*

EURO - European Operational Research Society

*IFORS - International Federation of Operational Research
Societies*

**SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa
Operacional (1968)**

**ABEPRO – Associação Brasileira de Engenharia de
Produção**

Variáveis

- característica de interesse que é medida em cada elemento da amostra ou população.
- seus valores variam de elemento para elemento.
- podem ter valores numéricos ou não numéricos.

Variáveis

Classificação

- **Variáveis Quantitativas**: são as características que podem ser medidas em uma escala quantitativa, ou seja, apresentam valores numéricos que fazem sentido
 - Podem ser contínuas ou discretas.
- **Variáveis Qualitativas (ou categóricas)** : são as características que não possuem valores quantitativos, mas, ao contrário, são definidas por várias categorias, ou seja, representam uma classificação dos indivíduos
 - Podem ser nominais ou ordinais

Variáveis Quantitativas

- **Variáveis discretas:** características mensuráveis que podem assumir apenas um número finito ou infinito contável de valores e, assim, somente fazem sentido valores inteiros
 - Geralmente são o resultado de contagens.
- **Variáveis contínuas:** características mensuráveis que assumem valores em uma escala contínua (na reta real), para as quais valores fracionais fazem sentido.
 - Usualmente devem ser medidas através de algum instrumento.

Variáveis Quantitativas

- **Variável binária:** variáveis explicativas que podem assumir apenas um de dois valores (geralmente 0 ou 1).
- Representam características qualitativas, em eventos que tenham apenas dois resultados possíveis.

Exercícios

Classificar as variáveis segundo uma das escalas de mensuração: discreta, contínua ou binária

- a) tempo de atendimento de cada cliente
- b) distância percorrida
- c) atuação em um ramo de atividade: indústria ou comércio
- d) número de lojas de um varejista
- e) número de computadores por departamento
- f) decisão se um veículo será designado a determinado cliente
- g) área total de vendas
- h) quantidade de agências a serem inauguradas

Classificar as variáveis segundo uma das escalas de mensuração: discreta, contínua ou binária

- i) decisão se determinado armazém será ou não escolhido dentre um conjunto de alternativas
- j) tempo de processamento de pintura
- k) número de funcionários
- l) faturamento bruto
- m) nível de serviço (alto ou baixo)
- n) escolha ou não de um projeto de investimento

Função Linear

- Uma função do tipo $y = ax + b$ em que a razão entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante.
- o gráfico é sempre uma reta.

Seção 1.3.1 (ex. 3). Classificar as funções a seguir como lineares ou não lineares.

a) $24x_1 + 12x_2 = 10$

b) $\ln(x_1) - x_2 + x_3 = 5$

c) $x_1 x_2 + 10x_3 \leq 40$

d) $\frac{x_1 x_2}{x_3}$

e) $24x_1 + 12x_2 - 2x_3 \geq 24$

f) $\frac{5}{x_1} + 10x_2 \leq 10$

g) $24x_1 + \frac{x_2}{2} = 8$

h) $\sin(x_1) + \cos(x_2) \geq 1$

i) $10x_1 - x_2 + 30$

j) $(x_1)^2 + x_2 + 5x_3 \leq 22$

k) $\sum_{j=1}^n c_j x_j$

l) $\ln(x_1) = \ln(10) + 5\ln(x_3)$

m) $e^2 x_2 + 10x_3 \leq 140$

n) $\frac{x_1}{x_2} + 6x_3 = 60$

o) $4x_1 x_2 x_3 - \ln(x_4) \leq 36$

p) $\frac{2x_1 + 4x_2}{3x_3 - x_4} \geq 16$

q) $4x_1 + 3x_2 - 62 \geq x_3$

r) $x_2 = 10 - 4\left(\frac{1}{x_1}\right)$

s) $x_1 x_2 + 4(x_3)^3 = 45$

t) $x_2 = \frac{1}{e^{-(1+2x_1)}}$

Características dos Problemas de Programação Linear, Programação Não Linear, Programação Binária e Inteira e suas Extensões

| Tipo de Modelo | Função Objetivo | Restrições | Tipo de Variável |
|--|-----------------------------------|------------|---------------------|
| Programação linear (PL) | Linear | Linear | Contínua |
| Programação linear inteira (PLI ou PI) | Linear | Linear | Discreta |
| Programação linear inteira mista (PLIM ou PIM) | Linear | Linear | Discreta e contínua |
| Programação linear binária (PLB ou PB) | Linear | Linear | Binária |
| Programação linear binária mista (PLBM ou PBM) | Linear | Linear | Binária e contínua |
| Programação linear inteira binária (PLIB ou PIB) | Linear | Linear | Discreta e binária |
| Programação não linear (PNL) | Pelo menos uma delas é não linear | | Contínua |
| Programação não linear inteira (PNLI) | Pelo menos uma delas é não linear | | Discreta |
| Programação não linear inteira mista (PNLIM) | Pelo menos uma delas é não linear | | Discreta e contínua |
| Programação não linear binária mista (PNLBM) | Pelo menos uma delas é não linear | | Binária e contínua |
| Programação não linear inteira binária (PNLIB) | Pelo menos uma delas é não linear | | Discreta e binária |

Imagine que você foi escolhido para ser o gestor de investimentos de uma família que quer maximizar o retorno de suas aplicações. Você tem apenas dois tipos de possibilidades de aplicação: ações ou renda fixa. Sabendo que a família vai disponibilizar a você um montante de \$1.000.000,00, que a taxa de retorno esperada para a aplicação em ações no período será de $A\%$, que a taxa de retorno esperada para a aplicação em renda fixa no período analisado será de $R\%$ e que o montante a ser aplicado em ações não deve exceder a 25% do total, defina as variáveis de decisão, os parâmetros, a função objetivo e as restrições.

Imagine que você foi escolhido para ser o gestor de investimentos de uma família que quer maximizar o retorno de suas aplicações. Você tem apenas dois tipos de possibilidades de aplicação: ações ou renda fixa. Sabendo que a família vai disponibilizar a você um montante de \$1.000.000,00, que a taxa de retorno esperada para a aplicação em ações no período será de A%, que a taxa de retorno esperada para a aplicação em renda fixa no período analisado será de R% e que o montante a ser aplicado em ações não deve exceder a 25% do total, defina as variáveis de decisão, os parâmetros, a função objetivo e as restrições.

Variáveis de decisão:

montante a ser aplicado em ações (QA) e em renda fixa (QR)

Parâmetros:

Taxa de retorno esperada para a aplicação em ações (A%) e em renda fixa (R%)

Função Objetivo:

Maximizar $(A\%)QA + (R\%)QR$

Restrições:

$QA + QR = 1.000.000,00$

$QA \leq 250.000,00$

$QA \geq 0$

$QR \geq 0$

Considerando que x_j representa as variáveis de decisão, classificar os problemas abaixo como programação linear (PL) ou não linear (PNL). Justifique.

a) $\max \sum_{j=1}^{10} 10x_j$

sujeito a:

$$2x_1 - 5x_2 = 10 \quad (1)$$

$$x_1 x_2 \leq 50 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3)$$

d) $\max 3x_1 + 3x_2 - 2x_3$

sujeito a:

$$6x_1 + \cos x_2 - x_3 \leq 10 \quad (1)$$

$$\frac{x_2}{4} + x_3 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (3)$$

b) $\min 24x_1 + 12x_2$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 4 \quad (1)$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 26 \quad (2)$$

$$x_2 \geq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

c) $\max \frac{10}{x_1} - x_2$

sujeito a:

$$6x_1 + x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Considerando que x_j representa as variáveis de decisão, classificar os problemas a seguir em uma das categorias listadas:

- 1) Funções lineares: a) programação linear (PL); b) programação inteira (PI); c) programação inteira mista (PIM); d) programação binária (PB); e) programação binária mista (PBM); e f) programação inteira binária (PIB).

$$\text{a) } \max \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^3 c_j x_j \leq 20 \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

$$\text{b) } \max \quad x_1 + \cos(x_2) + x_3$$

sujeito a:

$$10x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 16 \quad (1)$$

$$0 \leq x_j \leq 10, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

$$\text{c) } \min \quad x_1 x_2 + 6x_3$$

sujeito a:

$$4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 32 \quad (1)$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

$$\text{d) } \min \quad 12x_1 + 10x_2 - 8x_3$$

sujeito a:

$$\frac{x_1}{4} + 10x_2 - 2x_3 \geq 28 \quad (1)$$

$$x_1, x_2 = 0 \text{ ou } 1 \quad (2)$$

$$x_3 \text{ inteiro} \quad (3)$$

$$\text{e) } \max \quad 2(x_1)^2 + 2x_2 x_3$$

sujeito a:

$$\frac{4}{x_2} + 2x_2 - \sin(x_3) = 42 \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

$$x_2 \text{ inteiro} \quad (3)$$

$$\text{f) } \max \quad 2x_1 - \frac{x_2}{10} + 4x_3$$

sujeito a:

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 20 \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3 \quad (2)$$

$$x_j \text{ inteiro} \quad (3)$$