TDE 2 - Resolução de Equações de Recorrência

Marcello Fabrizio

9/12/2021

1 - T(N) = T(n/2) + 1 + n

Para a equação de recorrência acima, obtive o seguinte desenvolvimento:

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ T(\frac{N}{2}) + 1 + N, N > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(2) &= T(1) + 1 + 2 = 3 \\ T(4) &= T(2) + 1 + 4 = 8 \\ T(8) &= T(4) + 1 + 8 = 17 \end{aligned}$$

Então temos que

$$T(N) = T(N/2) + 1 + N$$

Onde

$$T(N/2) = T(\frac{N}{2^2}) + 1 + \frac{N}{2}$$

Substituindo em T(N)

$$T(N) = [T(\frac{N}{2^2}) + 1 + \frac{N}{2}] + 1 + N$$

$$= T(\frac{N}{2^2}) + 2 + \frac{N}{2} + N$$

$$= [T(\frac{N}{2^3}) + 1 + \frac{N}{2^2}] + 2 + \frac{N}{2} + N$$

$$= T(\frac{N}{2^3}) + 3 + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

$$= [T(\frac{N}{2^4}) + 1 + \frac{N}{2^3}] + 3 + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

$$= T(\frac{N}{2^4}) + 4 + \frac{N}{2^3} + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

Ou seja, percebemos que essa recorrência acontecerá um número indefinido de vezes, que chamaremos de k. Portanto temos

$$T(N) = T(\frac{N}{2^k}) + k + \frac{N}{2^{k-1}} + \frac{N}{2^{k-2}} + ... + \frac{N}{2} + N$$

Assumindo que $\frac{N}{2^k} = 1$, temos que $N = 2^k$, e $k = log_2 N$. Substituindo na equação de recorrência, obtemos

$$T(N) = T(1) + log_2 N + N * [\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + ... + \frac{1}{2} + 1]$$

$$= T(1) + log_2 N + N * \sum_{i=0}^{log_2 N - 1} \frac{1}{2^i}$$

Vamos interpretar $\sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i}$ como uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$, com o primeiro termo $a1 = 1$ e o enésimo termo sendo $\frac{1}{2^{logN-1}}$. Podemos trocar $a1$ com aN para termos essa PG invertida e assim ter uma razão inteira, nesse caso temos

$$a1 = \frac{1}{2^{logN-1}}$$

$$= \frac{1}{(2^{logN}) * (2^{-1})}$$

$$= \frac{2}{N^{log2}}$$

$$= \frac{2}{m}$$

$$S = \frac{2 * 1 - \frac{2}{N}}{1 - 2}$$

$$\sum_{i=0}^{log_2 N - 1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{2}{N}$$

Voltando para a equação anterior, teremos

$$T(N) = T(1) + log_2 N + N * \sum_{i=0}^{log_2 N - 1} \frac{1}{2^i}$$

$$T(N) = log_2 N + N * (2 - \frac{2}{N})$$

2 - T(N) = T(N/2) + bN + c

Com essa equação teremos um desenvolvimento parecido com a anterior, com a diferença que agora temos os termos b e c.

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ T(\frac{N}{2}) + bN + c, N > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(2) = T(1) + 2b + c &= 2b + c \\ T(4) = T(2) + 4b + c &= 6b + 2c \\ T(8) = T(4) + 8b + c &= 14b + 3c \end{aligned}$$

Onde

$$T(N/2) = T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + c$$

Substituindo em T(N)

$$T(N) = [T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + c] + Nb + c$$

$$= T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + Nb + 2c$$

$$= [T(\frac{N}{2^3}) + \frac{Nb}{2^2} + c] + \frac{Nb}{2} + Nb + 2c$$

$$= T(\frac{N}{2^3}) + \frac{Nb}{2^2} + \frac{Nb}{2} + Nb + 3c$$

$$= T(\frac{N}{2^k}) + Nb * [\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + ... + \frac{1}{2} + 1] + log_2 N + kc$$

Vamos ter então

$$T(N) = T(\frac{N}{2^k}) + Nb * \sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i} + log_2 N + kc$$

Onde, como vimos no ex. 1,

$$\sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{2}{N}$$

Assim chegaremos a seguinte equação de recorrência

$$T(N) = log_2 Nc + 2Nb - 2b$$

3 - T(N) = 4T(N/2) + N

Nessa questão, apliquei o método que vimos na aula do dia 14/09/2021 para resolver a equação de recorrência.

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ 4T(\frac{N}{2}) + N, N > 1 \end{cases}$$

Para isso, vamos primeiro buscar um padrão aplicando valores a função

$$T(1) = 0$$

$$T(2) = 4T(1) + 2 = 2$$

$$T(4) = 4T(2) + 4 = 8 + 4$$

$$T(8) = 4T(4) + 8 = 32 + 16 + 8$$

$$T(16) = 4T(8) + 16 = 128 + 64 + 32 + 16$$

Podemos perceber que o resultado é a soma de uma progressão geométrica. Agora, vamos analizar os termos da PG. Temos que a razão desta PG é $q = 2$, o seu primeiro termo é $a1 = N$ e o número de termos será $n = log_2 N$. Entretanto, não possúimos o n-ésimo termo da PG, o que podemos obter da seguinte maneira

$$an = a1.q^{n-1}$$

$$= N.2^{log_2 N - 1}$$

$$= N.2^{log_2 N}.2^{-1}$$

Podemos aplicar a propriedade logarítmica $a^{log_a b = b}$ para obter

$$an = N.N.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{N^2}{2}$$

Agora podemos aplicar esses valores na soma da PG para obter

$$S = \frac{N.(2^{log_2 N} - 1)}{2 - 1}$$

$$= N(N - 1)$$

$$= N^2 - N$$

Assim temo que

$$T(N) = N^2 - N$$

4 - T(N)=2T(N/4)+1

Assim como a questão anterior, utilizaremos o método da expansão

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ 2T(\frac{N}{4}) + 1, N > 1 \end{cases}$$

Nota-se na equação que sua chamada recursiva divide N por 4, portanto levaremos isso em conta quando formos substituir valores na equação.

$$T(1) = 0$$

$$T(4) = 2T(1) + 1 = 1$$

$$T(16) = 2T(4) + 1 = 2 + 1$$

$$T(64) = 2T(16) + 1 = 4 + 2 + 1$$

$$T(256) = 2T(64) + 1 = 8 + 4 + 2 + 1$$

$$T(1024) = 2T(256) + 1 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

Fica evidente que temos uma PG com os termos $q = 2$, $a1 = 1$ e a quantidade de termos $n = log_4 N$. Com isso vamos obter a soma da PG

$$S = \frac{1.(2^{log_4 N} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 2^{log_4 N} - 1$$

Assim temos que

$$T(N) = 2^{log_4 N} - 1$$

5 - T(N) = 4T(N/2) + N^2

Essa equação também será resolvida pelo método da expanção.

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ 4T(\frac{N}{2}) + N^2, N > 1 \end{cases}$$

Substituindo valores na equação, teremos

$$T(1) = 0$$

$$T(2) = 4T(1) + 2^2 = 4$$

$$T(4) = 4T(2) + 4^2 = 16 + 16$$

$$T(8) = 4T(4) + 8^2 = 64 + 64 + 64$$

$$T(16) = 4T(8) + 16^2 = 256 + 256 + 256 + 256$$

Analizando os resultados podemos identificar sem muitas dificuldades um padrão. Temos aqui N^2 que se repete $log_2 N$. Portanto, temos que nossa equação de recorrência será

$$T(N) = N^2.log_2 N$$