# TDE 2 - Resolução de Equações de Recorrência

Marcello Fabrizio

9/12/2021

**1 - T(N) = T(n/2) + 1 + n**

Para a equação de recorrência acima, obtive o seguinte desenvolvimento:

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ T(\frac{N}{2}) + 1 + N, N > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(2) = T(1) + 1 + 2 &= 3 \\ T(4) = T(2) + 1 + 4 &= 8 \\ T(8) = T(4) + 1 + 8 &= 17 \end{aligned}$$

Então temos que

$$T(N) = T(N/2) + 1 + N$$

Onde

$$T(N/2) = T(\frac{N}{2^2}) + 1 + \frac{N}{2}$$

Substituindo em T(N)

$$T(N) = [T(\frac{N}{2^2}) + 1 + \frac{N}{2}] + 1 + N$$

$$= T(\frac{N}{2^2}) + 2 + \frac{N}{2} + N$$

$$= [T(\frac{N}{2^3}) + 1 + \frac{N}{2^2}] + 2 + \frac{N}{2} + N$$

$$= T(\frac{N}{2^3}) + 3 + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

$$= [T(\frac{N}{2^4}) + 1 + \frac{N}{2^3}] + 3 + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

$$= T(\frac{N}{2^4}) + 4 + \frac{N}{2^3} + \frac{N}{2^2} + \frac{N}{2} + N$$

Ou seja, percebemos que essa recorrência acontecerá um número indefinido de vezes, que chamaremos de $k$. Portanto temos

$$T(N) = T(\frac{N}{2^k}) + k + \frac{N}{2^{k-1}} + \frac{N}{2^{k-2}} + ... + \frac{N}{2} + N$$

Assumindo que $\frac{N}{2^k} = 1$, temos que $N = 2^k$, e $k = log_2 N$. Substituindo na equação de recorrência, obtemos

$$T(N) = T(1) + log_2 N + N * [\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + ... + \frac{1}{2} + 1]$$

$$= T(1) + log_2 N + N * \sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i}$$

Vamos interpretar $\sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i}$ como uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$, com o primeiro termo $a1 = 1$ e o enésimo termo sendo $\frac{1}{2^{logN-1}}$. Podemos trocar $a1$ com $aN$ para termos essa PG invertida e assim ter uma razão inteira, nesse caso temos

$$a1 = \frac{1}{2^{logN-1}}$$

$$= \frac{1}{(2^{logN}) * (2^{-1})}$$

$$= \frac{2}{N^{log2}}$$

$$= \frac{2}{m}$$

$$S = \frac{2 * 1 - \frac{2}{N}}{1 - 2}$$

$$\sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{2}{N}$$

Voltando para a equação anterior, teremos

$$T(N) = T(1) + log_2 N + N * \sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i}$$

$$T(N) = log_2 N + N * (2 - \frac{2}{N})$$

### 2 - T(N) = T(N/2) + bN + C

Com essa equação teremos um desenvolvimento parecido com a anterior, com a diferença que agora temos os termos $b$ e $c$.

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ T(\frac{N}{2}) + bN + c, N > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(2) = T(1) + 2b + c &= 2b + c \\ T(4) = T(2) + 4b + c &= 6b + 2c \\ T(8) = T(4) + 8b + c &= 14b + 3c \end{aligned}$$

Onde

$$T(N/2) = T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + c$$

Substituindo em T(N)

$$T(N) = [T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + c] + Nb + c$$

$$= T(\frac{N}{2^2}) + \frac{Nb}{2} + Nb + 2c$$

$$= [T(\frac{N}{2^3}) + \frac{Nb}{2^2} + c] + \frac{Nb}{2} + Nb + 2c$$

$$= T(\frac{N}{2^3}) + \frac{Nb}{2^2} + \frac{Nb}{2} + Nb + 3c$$

$$= T(\frac{N}{2^k}) + Nb * [\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + ... + \frac{1}{2} + 1] + log_2 N + kc$$

Vamos ter então

$$T(N) = T(\frac{N}{2^k}) + Nb * \sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i} + log_2 N + kc$$

Onde, como vimos no ex. 1,

$$\sum_{i=0}^{log_2 N-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{2}{N}$$

Assim chegaremos a seguinte equação de recorrência

$$T(N) = log_2 Nc + 2Nb - 2b$$

### 3 - T(N) = 4T(N/2) + N Nessa questão, apliquei o método que vimos na aula do dia 14/09/2021 para resolver a equação de recorrência.

$$T(N) = \begin{cases} 0, N = 1 \\ 4T(\frac{N}{2}) + N, N > 1 \end{cases}$$

Para isso, vamos primeiro buscar um padrão aplicando valores a função

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(2) = 4T(1) + 2 &= 2 \\ T(4) = 4T(2) + 4 &= 8 + 4 \\ T(8) = 4T(4) + 8 &= 32 + 16 + 8 \\ T(16) = 4T(8) + 16 &= 128 + 64 + 32 + 16 \end{aligned}$$

Podemos perceber que o resultado forma uma progressão geométrica. Agora, vamos analizar os termos da PG. Temos que a razão desta PG é $r = 2$, o seu primeiro termo é $a1 = N$ e o número de termos será $n = log_2 N$