Atividade 1 de Métodos Numéricos

Marcelo Manoel de Lima Filho.

I. Introdução

Em várias áreas da ciência e tecnologia, é frequentemente necessário analisar uma equação e solucioná-la a fim de obter suas raízes. Essa necessidade ocorre por diversos motivos, como, por exemplo, encontrar o conjunto solução de um sistema linear ou determinar os valores da corrente elétrica em um circuito. Embora para sistemas de ordem inferior, como os de segunda e terceira ordem, existam fórmulas fechadas para o cálculo de suas raízes, quando analisamos equações de ordens cada vez maiores, além de a complexidade aumentar, não há fórmulas que auxiliem o cálculo das raízes dessas funções. Dessa forma, surge a necessidade de desenvolver métodos que permitam alcançar valores próximos o suficiente dos valores reais dessas raízes, possibilitando o prosseguimento de diversas áreas do conhecimento.

Entretanto, para alcançar valores suficientemente próximos dos zeros de uma função, é necessário realizar diversos passos iterativos nesses métodos, o que pode resultar em um aumento da complexidade do cálculo e, consequentemente, em um tempo significativo para encontrar uma solução aceitável. Dessa maneira, utiliza-se o poder computacional das máquinas para a aplicação desses métodos, o que, além de realizar cálculos complexos com agilidade, também possibilita encontrar soluções com erros cada vez menores em relação ao valor real da raiz. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns métodos poderosos, destacando suas vantagens, desvantagens, implementação algorítmica e aplicação em exemplos propostos para a realização do trabalho.

A. *Método de Newton*

O método de Newton, também conhecido como Newton-Raphson, tem como objetivo acelerar a convergência do método do ponto fixo. Dessa forma, se a aproximação inicial da raiz for x_i, pode-se estabelecer uma reta tangente a partir do ponto $[x_i, f(x_i)]$. O ponto onde essa reta tangente cruza o eixo x usualmente representa uma estimativa melhorada da raiz.

O método pode ser deduzido com base em sua representação geométrica. Dessa forma, obtemos a sua fórmula geral, definida na Equação 1.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \tag{1}$$

Que pode ser reorganizada para fornecer:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1}$$

B. *Método da Secante*

Um problema possível e real na implementação do método de Newton-Raphson é o cálculo da derivada. Embora isso seja conveniente para polinômios e muitas outras funções, há certas funções cujas derivadas podem ser extremamente difíceis ou inconvenientes de calcular. Nesses casos, a derivada pode ser aproximada por uma diferença dividida regressiva, como ilustrado na Figura 1.

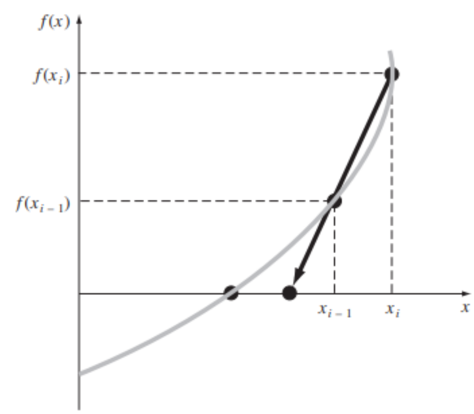

Fig. 1: Descrição gráfica do método da secante

Essa aproximação pode ser modelada, resultando na expressão definida na Equação (2)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2}$$

Essa equação é conhecida como a fórmula do método da secante. Observe que a abordagem exige duas estimativas iniciais de x. No entanto, como não é exigido que $f(x)$ mude de sinal entre as estimativas, ele não é classificado como um método intervalar.

C. *Método de Gauss-Seidel*

Os métodos iterativos ou de aproximação fornecem uma alternativa aos métodos de eliminação descritos até agora. Tais abordagens são semelhantes às técnicas desenvolvidas para obter as raízes de uma única equação. As abordagens apresentadas consistem em escolher um valor e, em seguida, utilizar um método sistemático para obter uma estimativa refinada da raiz. Dessa forma, o método de Gauss-Seidel é o método iterativo mais comumente utilizado. Suponha que tenhamos um conjunto de N equações:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \tag{3a}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \tag{3b}$$
$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \tag{3c}$$

Assim, inicia-se o processo de solução escolhendo aproximações para os x's. Uma forma simples e rápida de obter aproximações iniciais é supor que elas são todas nulas. Esses zeros podem ser substituídos na Equação (3a), que pode ser usada para calcular um novo valor para $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$. Em seguida, substitui-se esse novo valor de x_1, junto com a aproximação anterior nula para x_3, na Equação (3b) para calcular um novo valor para x_2. O processo é repetido para a Equação (3c) a fim de se calcular uma nova estimativa para x_3. Então, retorna-se à primeira equação, e o procedimento inteiro é repetido até que a solução convirja para valores suficientemente próximos dos valores verdadeiros.

II. Procedimento experimental

Para apresentar a aplicabilidade dos métodos mencionados na introdução, será realizada uma atividade que visa utilizá-los e implementá-los em código. A atividade será dividida em duas partes, e cada uma delas será descrita nesta seção. A implementação algorítmica desses métodos está disponível no GitHub [3].

A. Parte 1

1) Faça um programa que implemente: o método de Newton e o método da Secante. Utilize os programas para responder a questão a seguir.
2) Uma corrente oscilante em um circuito elétrico é descrita por $i = 9e^{-t}\sin(2\pi t)$, em que t está em segundos. Determine o menor valor de t para que $i = 3.5$, utilizando:
   (a) o método de Newton, com aproximação inicial $t_0 = 0$ e critério de parada de erro relativo inferior a 10^{-6}.
   (b) o método da Secante, com aproximações iniciais $t_0 = 0$ e $t_1 = 0.2$, e critério de parada de erro relativo inferior a 10^{-6}.
   (c) Comente os resultados obtidos nos itens anteriores, analisando a convergência de cada método.

B. Parte 2

1) Faça um programa que implemente o método de Gauss-Seidel na resolução de um sistema linear $Ax = b$, em que $A : n \times n$ e $b : n \times 1$.
2) Considere o sistema linear da figura 2
   (a) Se utilizarmos o método de Gauss-Seidel com aproximação inicial o vetor nulo, o método irá obter uma solução? Justifique.
   (b) Utilizando o programa, resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel partindo do vetor nulo e obtendo a solução com precisão de 10^{-6} (Analise o erro relativo). Informe quantas iterações do método foram necessárias para obter a solução.

$$\begin{pmatrix} 17 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 3 & -23 & 8 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 2: Sistema linear proposto na parte 2

III. Resultados e Discussões

A. Parte 1

Quando aplicado o método de Newton, seguindo os valores iniciais propostos na Parte 1, item 2.a, e executando o algoritmo desenvolvido, após 4 iterações, temos que o menor valor de t para que i seja 3,5 (ou suficientemente próximo desse valor) é de aproximadamente 0,0684.

Analisando a Figura 3, nota-se que, com poucas iterações do método, o valor inicial aproxima-se rapidamente do valor real desejado.

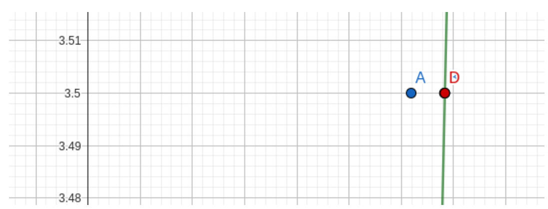

Fig. 3: Representação gráfica do método de Newton

De forma semelhante, ao aplicar o método da Secante e executar o algoritmo, após 7 iterações, o menor valor de t para que i seja 3,5 (ou suficientemente próximo desse valor) é de aproximadamente 0,0684. Vale ressaltar que os valores aproximados entre os dois métodos são iguais; no entanto, o valor obtido por cada método difere em casas decimais muito pequenas. Dessa forma, decidiu-se aproximar esses valores para demonstrar que ambos os métodos tendem ao mesmo resultado.

Embora o método da Secante tenha mais iterações comparado ao método anterior, ele apresenta valores próximos ao valor real a partir da terceira iteração (Ponto C), conforme demonstrado na Figura 4. A maior vantagem da secante em relação ao método de Newton-Raphson é a sua complexidade de cálculo reduzida. No entanto, essa facilidade demonstrou a necessidade de realizar mais iterações para alcançar o erro estipulado.

B. Parte 2

Antes de executar o código desenvolvido para a atividade proposta, é preciso verificar se o método aplicado garante a

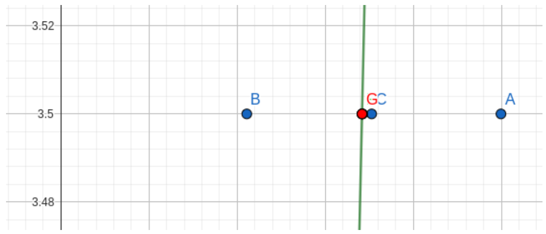

Fig. 4: Representação gráfica do métodp da Secante

convergência do sistema; caso contrário, o método de Gauss-Seidel não é apropriado para esse sistema. Para isso, utiliza-se o critério de Sassenfeld para analisar o comportamento do método para o sistema. Após aplicar o critério, verifica-se que todos os valores β_i do sistema são menores que 1, o que garante que o método irá convergir quando aplicado ao sistema apresentado na Fig. 2.

Dessa maneira, ao executar o código, observa-se que, após 2 iterações e partindo do vetor nulo, o conjunto solução do sistema é dado por: [64,8021, 23,1698, 16,4996, 5,7589, 5,6274, 10,7689, 18,3811, 18,4717].

IV. Conclusão

Ao concluir a atividade realizada, podemos refletir sobre as vantagens e desvantagens dos métodos numéricos analisados: Newton, Secante e Gauss-Seidel.

O método de Newton-Raphson, conhecido por sua rapidez na convergência quando a aproximação inicial está próxima da raiz real, demonstrou ser muito eficiente na solução de equações não-lineares. Sua principal vantagem reside na sua capacidade de convergir rapidamente para uma solução precisa, principalmente quando se parte de uma estimativa inicial adequada. No entanto, este método exige o cálculo da derivada, o que pode ser um desafio quando a função é complexa ou difícil de derivar. Além disso, pode falhar em situações onde a derivada é zero ou próxima de zero, ou quando a estimativa inicial está muito distante da raiz.

Por outro lado, o método da Secante, apesar de requerer mais iterações em comparação ao método de Newton-Raphson, apresentou valores próximos ao valor real a partir da terceira iteração, o que indica uma boa eficácia mesmo com um número relativamente pequeno de iterações. A principal vantagem da Secante é que ela não requer o cálculo da derivada, o que simplifica sua aplicação para funções onde a derivada é difícil de obter. No entanto, a necessidade de mais iterações para alcançar uma precisão similar à do método de Newton-Raphson e a possibilidade de convergência mais lenta são desvantagens a serem consideradas.

No contexto de sistemas lineares, o método de Gauss-Seidel mostrou-se uma abordagem prática e eficiente. A sua principal vantagem é a complexidade de cálculo reduzida em comparação com outros métodos, o que facilita sua aplicação em sistemas grandes. Contudo, a convergência do método de Gauss-Seidel não é garantida para todos os sistemas, e sua eficácia depende da estrutura do sistema. A análise do critério de Sassenfeld revelou que, quando aplicado a sistemas que satisfazem suas condições, o método convergirá, mas para sistemas que não atendem a essas condições, o método pode não ser apropriado, exigindo verificações adicionais ou o uso de métodos alternativos.

Em resumo, cada método possui suas próprias características que o tornam mais ou menos adequado para diferentes tipos de problemas. O método de Newton-Raphson é altamente eficaz quando se dispõe de uma boa estimativa inicial e uma derivada acessível. A Secante oferece uma alternativa quando a derivada não está disponível, mas pode necessitar de mais iterações para alcançar precisão semelhante. O método de Gauss-Seidel é eficiente para sistemas lineares bem comportados, mas requer verificação adicional para garantir a convergência. A escolha do método mais adequado dependerá das características específicas do problema em questão e das condições práticas de sua aplicação.

V. Referências

[1] RUGGIERO, Marcia Aparecida Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo, SP: Makron Books, 2012. xvi, 406 p. ISBN 8534602042.

[2] CHAPRA, Steven C. Métodos numéricos para engenharia. 7. Porto Alegre AMGH 2016 1 recurso online ISBN 9788580555691.

[3] Manoel, Marcelo Lima Filho. (2024). metodos-numericos. Available: `https://github.com/Marcelo-Filho112/metodos-numericos`