

Sobre uma conjectura de Erdős acerca de grafos livres de triângulos

Introdução e motivação

Um grafo G é um par (V, E) , onde V são os *vértices* e E são as *arestas* (pares não ordenados de vértices). A Teoria Extremal dos Grafos estuda propriedades dos grafos sob restrições estruturais. Compreender propriedades extremas tem aplicações em análise de algoritmos, modelagem de redes e otimização.

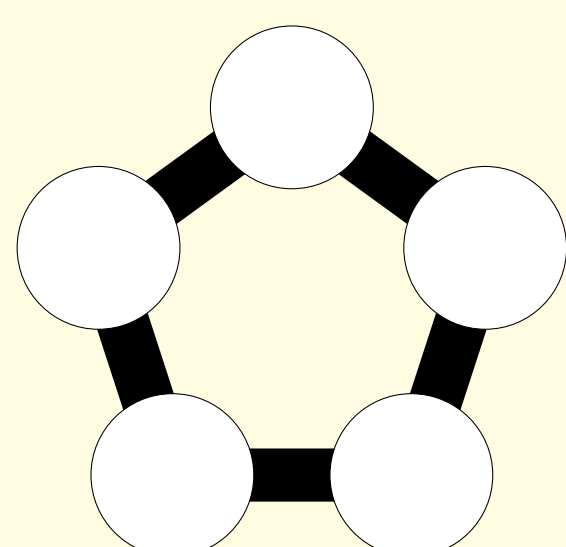
- ▶ Grafos livres de triângulos não contêm ciclos de tamanho 3.
- ▶ Pergunta natural: quantas arestas um grafo livre de triângulos pode ter?
- ▶ **Teorema de Mantel.** Um grafo com n vértices sem triângulos possui no máximo $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arestas.

Problema e objetivos

Os únicos grafos que satisfazem igualdade no Teorema de Mantel são bipartidos.

- ▶ Pergunta natural: quão “distante” pode estar um grafo sem triângulos de um bipartido?
- ▶ $D(G)$ mede essa distância pela remoção de um menor conjunto de arestas que torna G bipartido.

Conjectura 1 (Erdős, 1975). Todo grafo livre de triângulos G com n vértices satisfaz $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$. O caso geral da Conjectura 1 permanece em aberto.



O blow-up de C_5 em que cada classe tem $\frac{n}{5}$ vértices satisfaz $e(G) = \frac{n^2}{5}$ e $D(G) = \frac{n^2}{25}$.

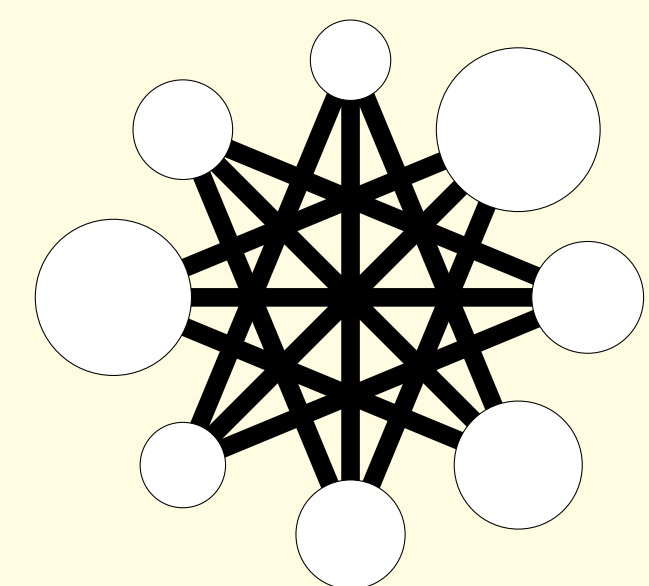
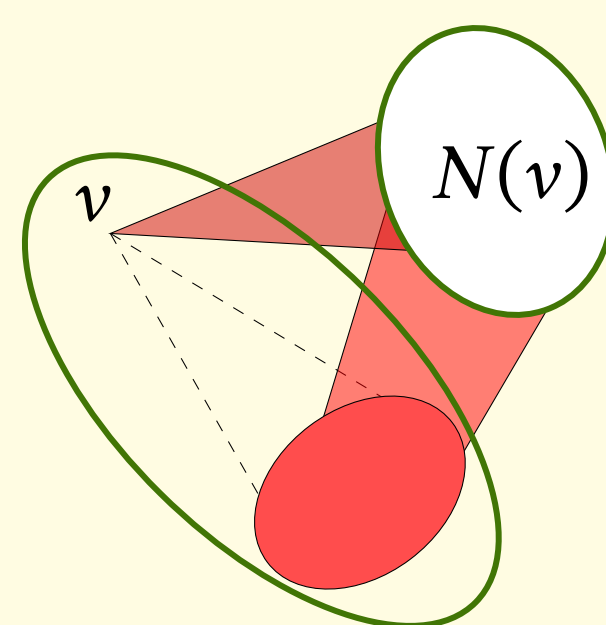
Metodologia

- ▶ **Álgebras de flag** (ver [2])
→ traduzem problemas de densidade em programas semidefinidos.
- ▶ Blow-ups
→ expandem vértices para conjuntos independentes mantendo estrutura.
- ▶ **Condições de grau mínimo** (ver [3])
→ permitem simplificar o problema para blow-ups de grafos pequenos.

Resultados principais

Por resultados clássicos de estabilidade de Simonovits, é possível verificar a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.21n^2$. O trabalho de [1] prova que $D(G) \leq \frac{4e(G)^2}{n^2}$ e $D(G) \leq \frac{n^2}{18+\epsilon}$ (para algum $\epsilon > 0$). Em particular, a Conjectura 1 vale se $e(G) \geq 0.20n^2$.

- ▶ [2] → Generaliza [1]: prova a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.1599n^2$ e outros resultados parciais usando *álgebras de flag*.
- ▶ Usando [3], provamos a Conjectura 1 quando $\delta(G) > \frac{4n}{11}$.



Observe que $D(G) \leq e(G - N(v))$, pois $N(v)$ é independente. Na linguagem de álgebras de flag, essa figura representa o corte local relacionado à restrição $\llbracket \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \rrbracket \geq \frac{2}{25}$.

Se $\delta(G) > \frac{4n}{11}$, então G é da forma acima, e é possível demonstrar a Conjectura 1 usando essa informação estrutural extra.

Discussão

- ▶ As cotas conhecidas funcionam melhor para grafos densos: resultados do tipo “a Conjectura 1 vale se $e(G) \geq \alpha n^2$ ”;
- ▶ Uso de álgebras de flag fornece desigualdades assintóticas a partir de otimização (numérico);
- ▶ Condições de grau mínimo simplificam os grafos, mesmo abaixo do limiar $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$ para provar a Conjectura 1 (estrutural).

Conclusão

O uso de álgebras de flag e condições de grau mínimo confirmam a Conjectura 1 em subclasses de grafos densos. O trabalho contribui revisando os métodos usados no problema e com uma prova alternativa para o caso $\delta(G) > \frac{4n}{11}$.

Referências

- [1] Erdős, Faudree et. al. *How to Make a Graph Bipartite.* (1988)
- [2] Balogh et. al. *Max cuts in triangle-free graphs.* (2021)
- [3] Chen et. al. *Triangle-free graphs with large degree.* (1997)

Aluno: Marcelo Machado Lage

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Departamento de Ciência da Computação — Instituto de Matemática e Estatística — Universidade de São Paulo

Durante a realização desse projeto, o aluno recebeu apoio da FAPESP. Processos nº 2025/06707-6, 2025/14743-2.