

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

1 Resultados clássicos	1
2 Álgebras de flag	3
2.1 Preliminares	3
2.1.1 Densidades	3
2.1.2 O Teorema de Mantel	4
2.1.3 O método semidefinito	7
2.1.4 A álgebra	8
2.2 Aplicações	11
2.2.1 Cortes locais	12
3 Grau limitado	15
Referências	17

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Definimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade). *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G , com $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a* ϕ se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização). *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G . Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e m arestas. Então

$$D(G) \leq \min \left\{ m - \frac{4m^2}{n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\} \leq \frac{n^2}{18}.$$

Demonstração. Provamos primeiro que $D(G) \leq m - \frac{m^2}{4n}$. Para isso, vamos definir para cada vértice v o conjunto $F_v \subseteq E(G)$ de arestas $xy \in E(G)$ tais que $vx, vy \notin E(G)$. Note que $D(G) \leq |F_v|$ para qualquer vértice v , pois a bipartição $\{N_G(v), V(G) \setminus N_G(v)\}$ possui exatamente $|F_v|$ arestas dentro da segunda parte, e a primeira é independente. Assim, temos que

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |F_v| \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v|. \quad (1.1)$$

Observe que $xy \in F_v \implies v \in V(G) \setminus (N_G(x) \cup N_G(y))$, logo cada aresta $xy \in E(G)$ pertence a no máximo $n - d_G(x) - d_G(y)$ conjuntos F_v , logo em 1.1 we have

$$\begin{aligned} D(G) &\leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{xy \in E(G)} (n - d_G(x) - d_G(y)) \\ &= m - \frac{1}{n} \sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \\ &\leq m - \left(\frac{\sum_{x \in V(G)} d_G(x)}{n} \right)^2 \\ &= m - \frac{4m^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5. Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.

Teorema 6 (Erdős - Győri - Simonovits). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.

A prova é algorítmica.

Capítulo 2

Álgebras de flag

A estrutura desse capítulo segue o jeito que o Andrzej Grzesik faz na tese de doutorado dele. É menos técnico e mais motivado.

2.1 Preliminares

2.1.1 Densidades

Sejam F e G grafos quaisquer. A *densidade de F em G* (denotada $d(F, G)$) como o número de subgrafos induzidos de G com $|F|$ vértices que são isomorfos a F . Analogamente, a densidade de F em G é a probabilidade que um conjunto de $|F|$ vértices de G , escolhido uniformemente ao acaso, induza um subgrafo isomorfo a F .

Fixe um grafo grande G e fixe um grafo F com $|F| \leq |G|$. Para calcular $d(F, G)$, podemos fixar um inteiro l com $|F| \leq l \leq |G|$ e escrever

$$d(F, G) = \sum_{|V(H)|=l} d(F, H)d(H, G). \quad (2.1)$$

A igualdade é válida porque sortear um subconjunto $S \subseteq \binom{V(G)}{l}$ uniformemente ao acaso e depois sortear um subconjunto $T \subseteq \binom{S}{|F|}$ segue a distribuição uniforme em $\binom{V(G)}{|F|}$.

Agora, denote por \mathcal{F}_l^\emptyset a família dos grafos livres de triângulos com l vértices (a menos de isomorfismo). Para a configuração geral de flag álgebras, a família “proibida” pode ser qualquer conjunto finito de grafos que não $\{K_3\}$. Se G é um grafo livre de triângulos, então por (2.1) vale que

$$d(F, G) = \sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(F, H)d(H, G). \quad (2.2)$$

Para problemas de minimização de uma expressão do tipo $d(F, G)$ (como no caso do Teorema de Mantel), desejamos utilizar a igualdade (2.2) para Em particular, usando $\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(H, G) = 1$ temos $d(F, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(F, H)$. Por um lado, essa cota é um

resultado “finito”, pois enquanto G é um grafo grande e F é um dado do problema, l é um parâmetro que podemos controlar para tentar obter resultados mais refinados.

Contudo, essa cota em geral é bastante fraca. A ideia do método semidefinido nas álgebras de flag é de gerar inequações lineares da forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\varnothing} c_H d(H, G) \geq 0, \quad (2.3)$$

onde os c_H 's são constantes reais. Logo, poderemos obter de (2.2) a desigualdade

$$d(F, G) \leq \sum_{H \in \mathcal{F}_l^\varnothing} (c_H + d(F, H)) d(H, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\varnothing} (c_H + d(F, H)).$$

Novamente, esse tipo de desigualdade permitirá cotar superiormente o valor de $d(F, G)$ para grafos “grandes” G usando apenas informações “finitas”, vindas de F , de l e da desigualdade na forma de (2.3).

Na verdade, o método semidefinido permitirá obter desigualdades na forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\varnothing} c_H d(H, G) + o(1) \geq 0, \quad (2.4)$$

onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G|$ cresce, e portanto a cota superior obtida para $d(F, G)$ será

$$d(F, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\varnothing} (c_H + d(F, H)) + o(1). \quad (2.5)$$

Em geral, esse tipo de resultado é suficiente quando a compreensão assintótica é suficiente. Veremos no caso do Teorema 1 e posteriormente no caso da Conjectura 1 que argumentos com blow-ups podem ser usadas para transferir os resultados assintóticos para grafos concretos. Ou seja, o termo $o(1)$ em (2.4) não será um problema para as aplicações visadas nesse trabalho.

2.1.2 O Teorema de Mantel

Vamos provar o Teorema 1 usando a estratégia descrita na seção 2.1.1. Iremos provar que $d(\text{---}, G) \leq 1/2 + o(1)$. Iremos usar $l = 3$, que em 2.2 nos dá a igualdade

$$d(\text{---}, G) = d(\text{---}; \bullet, \bullet) d(\bullet, \bullet, G) + d(\text{---}; \bullet, \bullet) d(\bullet, \bullet, G) + d(\text{---}; \bullet, \bullet) d(\bullet, \bullet, G),$$

ou simplesmente

$$d(\text{---}, G) = \frac{1}{3} d(\bullet, \bullet, G) + \frac{2}{3} d(\bullet, \bullet, G).$$

Isso nos dá a igualdade na forma de (2.2). Agora, temos que uma desigualdade na forma de (2.4) que nos permita concluir $d(\text{---}, G) \leq 1/2 + o(1)$.

A desigualdade em questão será

$$\frac{1}{2}d(\bullet\bullet, G) - \frac{1}{6}d(\bullet\bullet, G) - \frac{1}{6}d(\bullet\bullet, G) + o(1) \geq 0. \quad (2.6)$$

Assumindo (2.6), temos

$$d(\bullet\bullet, G) \leq \frac{1}{2}d(\bullet\bullet, G) + \frac{1}{6}d(\bullet\bullet, G) + \frac{1}{2}d(\bullet\bullet, G) + o(1) \leq \frac{1}{2} + o(1),$$

como desejado. Então nos resta descobrir como gerar desigualdades à maneira de (2.6).

Fixe um vértice “especial” $v \in V(G)$ (que representaremos como \blacksquare). Nós podemos definir a densidade em G^\square com um vértice especial da mesma forma, calculando a densidade de estruturas que também tenham um vértice especial. Por exemplo, $d(\bullet\bullet, G^\square)$ é a probabilidade de que um vértice $u \in V(G) \setminus \{v\}$, escolhido uniformemente ao acaso, seja vizinho de G .

Observe que

$$(d(\bullet\bullet, G^\square) - d(\bullet\bullet, G^\square))^2 \geq 0, \quad (2.7)$$

e portanto

$$d(\bullet\bullet, G^\square)^2 - 2d(\bullet\bullet, G^\square)d(\bullet\bullet, G^\square) + d(\bullet\bullet, G^\square)^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

O produto $d(\bullet\bullet, G^\square)^2$ é a probabilidade que dois vértices escolhidos aleatoriamente ao acaso (com reposição) em $V(G) \setminus \{v\}$ sejam ambos vizinhos de G . A probabilidade que esses dois vértices sejam iguais é $o(1)$, e se eles são distintos, então os dois (e v) induzem um subgrafo isomorfo a $\bullet\bullet$ (pois G é livre de triângulos). Ou seja,

$$d(\bullet\bullet, G^\square)^2 = d(\bullet\bullet, G^\square) + o(1).$$

De forma análoga, é possível provar

$$d(\bullet\bullet, G^\square)d(\bullet\bullet, G^\square) = \frac{1}{2}d(\bullet\bullet, G^\square) + \frac{1}{2}d(\bullet\bullet, G^\square) + o(1), \quad (2.9)$$

$$d(\bullet\bullet, G^\square)^2 = d(\bullet\bullet, G^\square) + d(\bullet\bullet, G^\square) + o(1). \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), obtemos

$$d(\bullet\bullet, G^\square) - d(\bullet\bullet, G^\square) - d(\bullet\bullet, G^\square) + d(\bullet\bullet, G^\square) + d(\bullet\bullet, G^\square) + o(1) \geq 0. \quad (2.11)$$

Obtivemos assim uma igualdade que se assemelha à igualdade (2.6), mas com densidades de conjuntos de 3 vértices contendo um vértice especial v em G^\square em vez de densidades em G para subconjuntos de tamanho 3 escolhidos ao acaso.

Para obter densidades em G a partir de (2.11), iremos fazer a média dessa desigualdade por todas as escolhas possíveis de v . De forma análoga, podemos pensar em escolher v

uniformemente ao acaso. Por exemplo, escolhendo v aleatoriamente temos que

$$\mathbb{E}[d(\bullet \textcolor{blue}{\square}, G^\square)] = \frac{1}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\square}, G),$$

pois para cada subgrafo induzido de G que é isomorfo a  existe apenas uma dentre as três escolhas possíveis para o vértice especial v tal que o grafo “rotulado” resultante é isomorfo a .

Portanto, segue de (2.11) que

$$\frac{1}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\square}, G) - \frac{2}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\square}, G) - \frac{2}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) + \frac{1}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) + d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) + o(1) \geq 0,$$

que é o mesmo que

$$d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) - \frac{1}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) - \frac{1}{3}d(\bullet \textcolor{blue}{\square}, G) + o(1) \geq 0,$$

que é um múltiplo de (2.6).

Assim, provamos que se G é um grafo livre de triângulos, então $d(\bullet \textcolor{blue}{\bullet}, G) \leq 1/2 + o(1)$. Para provar a versão sem $o(1)$, tome um grafo livre de triângulos G qualquer e considere um blow-up balanceado G_N de G em que cada vértice de G é substituído por um conjunto independente de tamanho N . Então, pela versão assintótica do Teorema de Mantel que provamos, $e(G_N) \leq \frac{1}{2} \binom{N|G|}{2} + o(1) \leq \frac{N^2|G|^2}{4} + o(N^2)$. Além disso, $e(G) = N^2e(G)$, portanto $e(G) \leq \frac{|G|^2}{4} + \frac{o(N^2)}{N^2}$. Fazendo $N \rightarrow \infty$, obtemos $e(G) \leq \frac{|G|^2}{4}$, o que conclui a prova da versão finitística (existe essa palavra?) do Teorema 1.

A estratégia apresentada nesse caso simples reflete bem a estratégia geral que utilizaremos quando formos provar algum resultado mais sofisticado com álgebras de flag. Começamos fixando um subgrafo especial σ (no caso de Mantel, $\sigma = \square$ tem apenas um vértice) para uma desigualdade quadrática (2.7) envolvendo as densidades relativas a uma cópia fixa de σ em G ; multiplicamos tais densidades relativas a σ adicionando termos de erro para obter desigualdades lineares com as densidades relativas a σ (2.9); escolhemos aleatoriamente um subgrafo induzido de G isomórfico a σ para associar as densidades de subgrafos com σ fixado a densidades de subgrafos sem essa restrição. Todos os passos acima podem ser tornados mecânicos, exceto a obtenção da desigualdade quadrática inicial.

A desigualdade em questão deve satisfazer a hipótese de ser não negativa para toda escolha de densidade envolvida. Para isso, iremos escolher uma desigualdade da forma $v^\top Av \geq 0$, onde v é um vetor com todas as densidades de certos subgrafos bem escolhidos e A é uma matriz positiva semidefinida. Por exemplo, podemos reescrever (2.8) como

$$[d(\textcolor{blue}{\square} \textcolor{blue}{\bullet}, G^\square) \quad d(\square \textcolor{blue}{\bullet}, G^\square)] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\textcolor{blue}{\square} \textcolor{blue}{\bullet}, G^\square) \\ d(\square \textcolor{blue}{\bullet}, G^\square) \end{bmatrix} \geq 0.$$

De fato, poderíamos ter começado com uma matriz positive semidefinida genérica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, encontrando os coeficientes de (2.4) e cotando em (2.5) para provar que

$d(\textcolor{blue}{\bullet}, G) \leq d^* + o(1)$, onde d^* é o valor do programa semidefinido

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \max \left\{ a_{11}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} \right\} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_+^2. \end{aligned}$$

2.1.3 O método semidefinido

Seja \mathcal{F} uma família de grafos “proibidos”. Um *tipo* σ é um grafo \mathcal{F} -livre junto a um homorfismo $\theta: [s] \rightarrow V(\sigma)$ para algum $s \geq 0$. Frequentemente iremos omitir o homorfismo quando esse for claro do contexto. Então, definimos um σ -flag como um grafo \mathcal{F} -livre F que contém como subgrafo induzido uma cópia induzida de σ rotulada por θ . Em outras palavras, um tipo é um grafo (pequeno) com todos os seus vértices rotulados/especiais, enquanto um flag é um grafo parcialmente rotulado de acordo com um tipo.

Dado um grafo G e um tipo σ de tamanho s , vamos fixar inteiros $l > s$ e $m \leq (l+s)/2$. Seja \mathcal{F}_m^σ o conjunto de todos os σ -flags de tamanho m , a menos de isomorfismo (no caso de flags, o isomorfismo restrito aos vértices de σ deve ser a identidade). Seja também Θ o conjunto de todos os homorfismos injetivos de $[s]$ para $V(G)$. Dado $F \in \mathcal{F}_m^\sigma$ e $\theta \in \Theta$, definimos a *densidade induzida* $d(F, G; \theta)$ como a probabilidade de um conjunto $V' \subseteq$ de tamanho m que contém σ , escolhido uniformemente ao acaso, induza um σ -flag isomórfico a F . Observe que para $s = 0$ (isto é, não estamos efetivamente rotulando nenhuma parte do grafo), então $d(F, G; \theta) = d(F, G)$ é a definição usual de densidade induzida.

Se $F_a, F_b \in \mathcal{F}_m^\sigma$ e $\theta \in \Theta$, definimos $d(F_a, F_b, G; \theta)$ como a probabilidade de, ao escolhermos dois conjuntos $V_a, V_b \subseteq V(G)$ com $V_a \cap V_b = \text{im}(\theta)$, uniformemente ao acaso, então os σ -flags induzidos por V_a e V_b são isomórficos a F_a e F_b respectivamente. Essa definição é importante para lidar com produtos de densidades, como diz o próximo teorema:

Teorema 7 (CITA ALGUÉM). *Para $F_a, F_b \in \mathcal{F}_m^\sigma$ e $\theta \in \Theta$, vale*

$$d(F_a, G; \theta)d(F_b, G; \theta) = d(F_a, F_b, G; \theta) + o(1),$$

onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G|$ vai para infinito.

Seja $\mathcal{F}_m^\sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_{|\mathcal{F}_m^\sigma|}\}$ e sejam $v \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}_m^\sigma|}$ um vetor e $Q \in \mathbb{R}^{|\mathcal{F}_m^\sigma| \times |\mathcal{F}_m^\sigma|}$ uma matriz positiva semidefinida. Então de $v^\top Q v \geq 0$, podemos escrever

$$\sum_{F_a, F_b \in \mathcal{F}_m^\sigma} Q_{ab} v_a v_b \geq 0.$$

Fazendo $v_F = d(F, G; \theta)$ e usando o Teorema 7, obtemos

$$\sum_{F_i, F_j \in \mathcal{F}_m^\sigma} Q_{ij} d(F_i, F_j, G; \theta) + o(1) \geq 0. \quad (2.12)$$

Agora, seja $H \in \mathcal{F}_l^\emptyset$ um flag sem vértices rotulados e seja Θ_H o conjunto de homorfis-

mos injetivos de $[s]$ para $V(H)$. Da mesma forma que em (2.2), é fácil ver que

$$\mathbb{E}_{\theta \in \Theta} [d(F_a, F_b, G; \theta)] = \sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} \mathbb{E}_{\theta \in \Theta_H} [d(F_a, F_b, H; \theta)] d(H, G). \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13), temos então

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} \sum_{F_i, F_j \in \mathcal{F}_m^\sigma} Q_{ij} \mathbb{E}_{\theta \in \Theta_H} [d(F_a, F_b, H; \theta)] d(H, G) + o(1) \geq 0.$$

Definindo $c_H(\sigma, m, Q) := \sum_{F_i, F_j \in \mathcal{F}_m^\sigma} Q_{ij} \mathbb{E}_{\theta \in \Theta_H} [d(F_a, F_b, H; \theta)]$, a desigualdade obtida é exatamente da forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} c_H(\sigma, m, Q) d(H, G) + o(1) \geq 0. \quad (2.14)$$

Combinando (2.2) e (2.14), é possível obter cotas para problemas de Turán ao variar os hiperparâmetros m, l, σ do modelo e utilizar a cota de (2.5) [CITAÇÕES]. Também é possível combinar escolhas de hiperparâmetros $c_H(\sigma_i, m_i, Q_i)$ para obter cotas mais refinadas [CITAÇÕES].

2.1.4 A álgebra

Vamos agora entender a formalização das álgebras de flag. O objetivo geral do método aplicado a problemas de densidade e homomorfismos é obter desigualdades não triviais da forma

$$\sum_{F_i \in \mathcal{F}_l^\emptyset} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0, \quad (2.15)$$

onde l é fixo e $Gin\mathcal{F}^\emptyset$ é um grafo (não rotulado) arbitrário. Para isso, vimos que é interessante considerar desigualdades na forma $\sum_{F_i \in \mathcal{F}_l^\sigma} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0$, onde $G \in \mathcal{F}^\sigma$ e aplicar um operador linear (associado a uma distribuição de probabilidade) que gere uma desigualdade da forma de (2.15).

Como G é arbitrário (em geral, grande), podemos lidar com as somas $\sum_{F_i \in \mathcal{F}_l^\emptyset} a_i d(F_i, G)$ considerando essas somas como ações de \mathcal{F}^σ sobre $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$. Ou seja, vamos considerar as somas formais de σ -flags e deixar um grafo G agir sobre elas através de $\sum a_i F_i \mapsto a_i d(F_i, G_i)$. Note que, de (2.2), todo elemento da forma

$$\tilde{F} - \sum_{F \in \mathcal{F}_l^\sigma} d(\tilde{F}, F) F \quad (2.16)$$

é levado a 0 por qualquer por G . Dessa forma, iremos definir o espaço vetorial $\mathcal{A}^\sigma := \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma / \mathcal{K}^\sigma$, onde \mathcal{K}^σ é o subespaço gerado pelos elementos da forma (2.16).

Finalmente, é importante definir uma noção adequada de multiplicação nesse espaço vetorial para manipular a multiplicação de densidades. Assim, também transformaremos

\mathcal{A}^σ numa álgebra. Para $F_1 \in \mathcal{F}_{l_1}^\sigma$ e $F_2 \in \mathcal{F}_{l_2}^\sigma$ e $l \geq l_1 + l_2 - |\sigma|$, definimos

$$F_1 \cdot F_2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_l^\sigma} d(F_1, F_2, F)F,$$

e definimos a multiplicação sobre \mathcal{A}^σ expandindo essa definição bilinearmente. É possível provar [RAZBOROV, 2007](#) que essa operação de multiplicação está bem definida em \mathcal{A}^σ , ou seja, que não depende da escolha de l . Pelo Teorema 7, temos que o mapa

$$\phi_G : \sum a_i F_i \in \mathcal{A}^\sigma \mapsto \sum a_i d(F_i, G) \in \mathbb{R}$$

pode ser visto como um “homomorfismo aproximado” de \mathcal{A}^σ para \mathbb{R} .

Apresentamos alguns exemplos em que \blacksquare é um tipo de tamanho 1:

$$\begin{aligned} \bullet &= \frac{1}{3} \bullet + \frac{2}{3} \bullet + \bullet, \\ \bullet \cdot \bullet &= \bullet + \bullet, \\ \bullet \cdot \bullet &= \frac{1}{2} \bullet + \frac{1}{2} \bullet. \end{aligned}$$

Muitas vezes, quando estamos querendo provar algum resultado de densidade, começamos com desigualdades de densidades com vértices especiais rotulados de acordo com um tipo σ . Para transferir esse resultado para grafos não rotulados (i.e., \emptyset -flags), escolhemos aleatoriamente onde alocar σ em G . Em álgebras de flag, esse formalismo será realizado por operadores lineares

$$[\![\cdot]\!] : \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathcal{A}^\emptyset.$$

Para $F \in \mathcal{F}^\sigma$, definimos $[\![F]\!] = q(F) \downarrow F$, onde $\downarrow F \in \mathcal{F}^\emptyset$ é uma cópia de F em que os rótulos especiais são esquecidos e $q(F)$ é a probabilidade que a imagem de um homomorfismo injetivo $\theta : [\![\sigma]\!] \rightarrow V(\downarrow F)$ escolhido uniformemente ao acaso defina um flag isomórfico a F . Em seguida, estendemos $[\![\dots]\!]$ linearmente para \mathcal{A}^σ . Por exemplo, temos

$$[\![\bullet]\!] = \bullet, \quad [\![\bullet]\!] = \frac{1}{3} \bullet + \bullet, \quad [\![\bullet]\!] = \frac{1}{3} \bullet + \bullet.$$

Note que os $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ -flags $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ não são isomórficos. Como esse tipo tem mais de um vértice, é importante rotulá-los, ao contrário de tipos de tamanho 1.

Finalmente, iremos lidar com a noção de “homomorfismos aproximados” de \mathcal{A}^σ a \mathbb{R} e como recuperar informação sobre densidades em grafos. Para cada σ -flag G , podemos associar um vetor (de dimensão infinita) $(d(F, G))_{F \in \mathcal{F}^\sigma} \in [0, 1]^{\mathcal{F}^\sigma}$. Se $(G_k)_{k \geq 0}$ é uma sequência de σ -flags tal que tal que $d(F, G_k)$ converge para todo $F \in \text{calf}^\sigma$, então dizemos que $(G_k)_{k \geq 0}$ é *convergente*. Pelo Teorema de Tychonoff (REFERÊNCIA?), o espaço $[0, 1]^{\mathcal{F}^\sigma}$ com a topologia produto é compacto e portanto para toda sequência infinita $(G_k)_{k \geq 0}$ de σ -flags, possui uma subsequência infinita que é convergente. Para cada sequência convergente, existe um homomorfismo (entre espaços vetoriais) $\phi : F \in \mathcal{F}^\sigma \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} d(F, G_k) \in$

\mathbb{R} , que pode ser estendido para um homorfismo (entre álgebras) $\phi: \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Esses homomorfismos serão chamados de *homomorfismos funcionais*. Dessa forma, se vale uma desigualdade $\sum a_i F_i \geq 0$ em \mathcal{A}^σ , então também vale $\phi(\sum a_i F_i) \geq 0$ para todo homomorfismo funcional ϕ , e logo $\sum a_i d(F_i, G_k) + o(1) \geq 0$ para toda sequência convergente $(G_k)_{k \geq 0}$, onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G_k|$ vai para infinito.

Vamos mostrar mais uma vez o Teorema de Mantel usando a linguagem da álgebra. Começamos com

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \right)^2 \geq 0.$$

Daí, temos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \geq 0,$$

e multiplicando obtemos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \geq 0.$$

Aplicando $\|\cdot\|$, segue que

$$\frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \geq 0 \implies \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \geq 0.$$

Dividindo por 2 e somando a igualdade

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array},$$

obtemos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \leq \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, toda sequência infinita de grafos livres de triângulos $(G_k)_{k \geq 0}$ possui uma subseqüência $(G_{i_k})_{k \geq 0}$ com $d\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array}, G_{i_k}\right) \leq 1/2 + o(1)$. Tome G_0 e G_N como um blow-up completo balanceado de G_0 em que cada vértice de G_0 é substituído por um conjunto independente de tamanho N . Então para alguma sequência $N_0 < N_1 < \dots$ vale $d\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array}, G_{N_k}\right) \leq 1/2 + o(1)$. Mas

$$d\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array}, G_{N_k}\right) = \frac{e(G_{N_k})}{v(G_{N_k})^2/2} + o(1) = \frac{N_k^2 e(G_0)}{N_k^2 v(G_0)^2/2} + o(1) = \frac{e(G_0)}{v(G_0)^2/2} + o(1),$$

logo $e(G_0) \leq (1/4 + o(1))v(G_0)^2$, e como o termo $o(1)$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno, obtemos $e(G_0) \leq v(G_0)^2/4$ para qualquer escolha de G_0 .

2.2 Aplicações

Vamos provar o Teorema 5 usando álgebras de flag. Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Primeiro, observe que, para todo vértice $v \in V(G)$, o conjunto

$$A_v := E(G - N(v))$$

de arestas entre os não vizinhos de v é tal que $G - A_v$ é bipartido considerando as classes $(N(v), V(G) \setminus N(v))$. Portanto,

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |A_v|,$$

ou ainda

$$D(G) \leq \mathbb{E}_{v \in V(G)} [|A_v|], \quad (2.17)$$

onde $v \in V(G)$ é escolhido aleatoriamente ao acaso.

Isso nos mostra que é possível modelar certas escolhas de bipartição e, portanto, de arestas que precisamos contar/deletar a partir de um único vértice *especial*. Na linguagem de álgebras de flag (sobre os grafos livres de triângulos):

Teorema 8. Se $\left[\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \square & \bullet \end{smallmatrix} \right] \geq 2/25$, então $\bullet \bullet \leq 2/5$.

Demonstração. Primeiro, vamos fixar o tipo σ de tamanho 1, e os inteiros $l = 3$ e $m = 2$ (assim como no Teorema de Mantel). Da desigualdade

$$\left[\left[\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \square & \bullet \end{smallmatrix} \right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \square & \bullet \end{smallmatrix} \right] \right] \geq 0,$$

segue

$$\left(\frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12} \right) \bullet \bullet + \left(\frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} \right) \bullet \bullet + a_{22} \bullet \bullet \geq 0.$$

Além disso,

$$\bullet \bullet = \frac{2}{3} \bullet \bullet + \frac{1}{3} \bullet \bullet,$$

logo

$$\begin{aligned} \bullet \bullet + \frac{6}{25}x &\leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12} \right) \bullet \bullet + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x \right) \bullet \bullet + a_{22} \bullet \bullet \\ &\leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x, a_{22} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\bullet \bullet \leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x, a_{22} \right\} - \frac{6}{25}x$$

para toda escolha de $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ e $x \geq 0$.

Um software específico de SDP (cvxpy) pode ser usado para encontrar que o mínimo da expressão acima é $2/5$ para

$$A = \begin{bmatrix} 6/5 & -4/5 \\ -4/5 & 8/15 \end{bmatrix}, \quad x = 5/9.$$

□

2.2.1 Cortes locais

Em [Hu et al., 2021](#), os autores provam a seguinte conjectura de Sudakov [SUDAKOV, 2007](#):

Teorema 9. *Seja G um grafo K_6 -livre com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido deletando no máximo $4n^2/25$.*

O principal ingrediente dos resultados provados em [Hu et al., 2021](#) é a utilização de álgebras de flag para expressar os chamados *cortes locais*.

O Teorema 8 mostra como podemos definir cortes (ou seja, subgrafos bipartidos grandes) a partir de um único vértice, e também como utilizar álgebras de flag para expressar a densidade de arestas fora de cada um desses cortes e foi utilizada em [NORIN e SUN, 2016](#); [BALOGH et al., 2021](#). A mesma ideia pode ser usada para definir cortes a partir de outros conjuntos pequenos de vértices. Por exemplo, se G é livre de triângulos e $uv \in E(G)$, então é possível definir um corte com $N(u)$ em uma das partes, $N(v)$ em outra das partes e, para cada vértice em $V(G) \setminus (N(u) \cup N(v))$, decidimos uniformemente ao acaso em qual das partes definidas por $N(u)$ e $N(v)$ ele será colocado. Se nenhum desses cortes deixa no máximo $n^2/25$ arestas de fora, então a densidade esperada das arestas fora de qualquer um desses cortes definidos localmente é pelo menos $2/25$, o que pode ser expressado da seguinte maneira:

$$\left[\left[\frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 2 \end{array} \right] \right] \geq \frac{2}{25}.$$

Um *corte local* é definido a partir de um tipo σ de tamanho k (nos exemplos que já vimos, usamos os tipos \square e $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}$). Esse tipo está associado a uma estrutura pequena do grafo grande livre de triângulos G a partir da qual definiremos o corte particionando os demais vértices de G em 2^k conjuntos X_1, X_2, \dots, X_{2^k} a partir das arestas entre esse vértice e σ . (Na prática, o número de conjuntos é menor, uma vez que um vértice não pode ser simultaneamente adjacente a dois vértices adjacentes de σ .)

Após definir esses X_{2^k} conjuntos, adicionamos cada elemento de X independentemente a um conjunto A (inicialmente vazio) com probabilidade p_i ou a B com probabilidade $1 - p_i$, onde p_1, p_2, \dots, p_{2^k} são hiperparâmetros do modelo.

Teorema 10 ([BALOGH et al., 2021](#)). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5};$

2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer “mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso”. Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 2. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d - 2\}$ e arestas entre i e $i + d + j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d - 1)$ -ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.

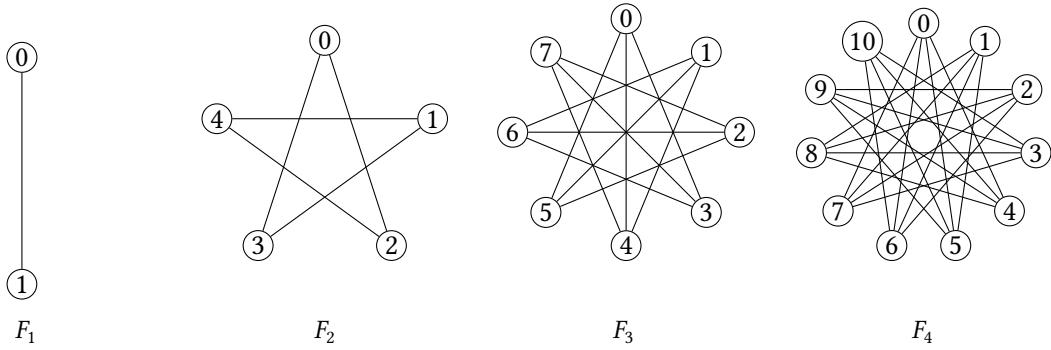


Figura 3.1: Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d -regular e livre de triângulos.

Teorema 11 (JIN, 1995). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$.

Teorema 12 (CHEN et al., 1997). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$, então G está contido em um blow-up de F_d .

Lema 1. Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ tais que $G - F_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 1.

Demonstração. Se $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < \frac{n^2}{5}$, então

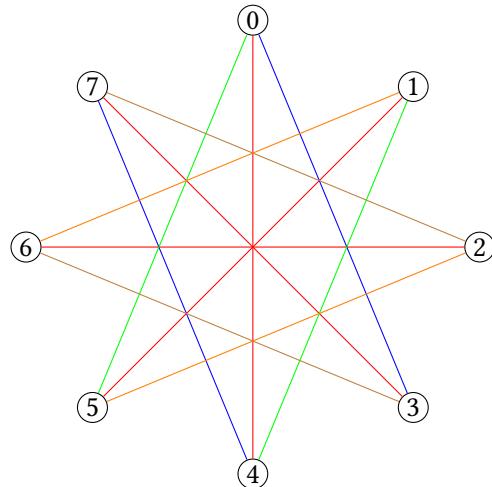
$$5 \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

de forma que para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < \frac{n^2}{25}$. \square

Esse Lema vai funcionar para F_4 , mas não para F_5 .

Teorema 13. *Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*

Demonstração. Veja que $4/11 > 10/29$, logo pelo Teorema 11, temos que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$. Em particular, $\chi(G) \leq \chi(F_9) = 3$. Assim, pelo Teorema 12 com $d = 3$, vale que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_4$. Considere a seguinte partição das arestas de G , em que cada classe está representada por um vértice e todos as arestas entre o mesmo par de classes estão na mesma parte:



Como a remoção de cada uma das partes deixa G bipartido, podemos aplicar o Lema 1 a G . Isso conclui a prova do Teorema. \square

Referências

- [BALOGH *et al.* 2021] József BALOGH, Felix Christian CLEMEN e Bernard LIDICKÝ. “Max cuts in triangle-free graphs”. In: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*. Springer. 2021, pp. 509–514 (citado na pg. 12).
- [CHEN *et al.* 1997] Chuan-Chong CHEN, Guoping P JIN e Khee Meng KOH. “Triangle-free graphs with large degree”. *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 15).
- [ERDŐS 1975] Paul ERDŐS. “Problems and results in graph theory and combinatorial analysis”. *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (citado na pg. 1).
- [HU *et al.* 2021] Ping HU, Bernard LIDICKÝ, Taísa MARTINS, Sergey NORIN e Jan VOLEC. “Large multipartite subgraphs in h -free graphs”. In: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*. Springer. 2021, pp. 707–713 (citado na pg. 12).
- [JIN 1995] Guoping JIN. “Triangle-free four-chromatic graphs”. *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 15).
- [NORIN e SUN 2016] Sergey NORIN e Yue Ru SUN. “Triangle-independent sets vs. cuts”. *arXiv preprint arXiv:1602.04370* (2016) (citado na pg. 12).
- [RAZBOROV 2007] Alexander A RAZBOROV. “Flag algebras”. *The Journal of Symbolic Logic* 72.4 (2007), pp. 1239–1282 (citado na pg. 9).
- [SUDAKOV 2007] Benny SUDAKOV. “Making a K_4 -free graph bipartite”. *Combinatorica* 27.4 (2007), pp. 509–518 (citado na pg. 12).