Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de
Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento. Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós-Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. É uma boa ideia usar o sítio www.grammarly.com na preparação de textos em inglês. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Defininimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade)**.** *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (Erdős)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2. *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G, com $\phi : V(H) \to V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a ϕ* se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G. Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. *Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então*

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS)**.** *Seja G um grafo livre de triângulo com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \left\{ m - \frac{m^2}{4n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\}.$$

Corolário 2. *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.*

Teorema 5 (Erdős - Győri - Simonovits)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.*

A prova é algorítmica.

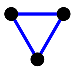
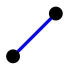
Capítulo 2

Álgebras de flag

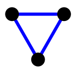
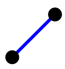
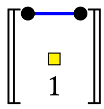
2.1 Preliminares

Seja $k \geq 0$ um inteiro. Um *tipo* de *tamanho* k é um grafo G com $V(G) = [k]$, i.e. é um grafo com todos os seus vértices rotulados. O tipo vazio é denotado por $\emptyset$.

Seja σ um tipo de tamanho k. Um *σ-flag* é um par (F, ϕ) em que $\phi\colon\ [k] \to V(F)$ é um homomorfismo de grafos injetor tal que $F[\phi([k])] \cong \sigma$.

Exemplo 1 (Mantel)**.** Se  $= 0$, então  $\leq \frac{1}{2}$.

2.2 Aplicações para a Conjectura 1

Teorema 6. *Se*  $= 0$ *e*  $\geq \frac{2}{25}$, *então*  $\leq \frac{2}{25}$.

Corolário 3. *Seja G um grafo com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas. Então a Conjectura 1 vale para G.*

O ponto é que ter a linguagem de flag algebras facilita obter cotas a partir da ideia de “cortes locais” e daí pode automatizar o processo.

Teorema 7 (Balogh-Clemen-Lidický)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer "mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso". Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 2. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai F_d* é o grafo com vértices $\{0, 1, \ldots, 3d-2\}$ e arestas entre i e $i+d+j$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d-1)$-ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.

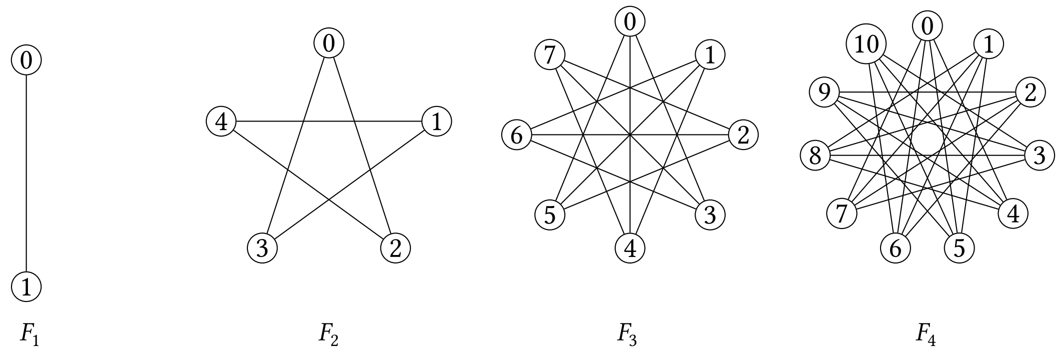


Figura 3.1: *Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d-regular e livre de triângulos.*

Teorema 8. *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Se $\delta(G) > \frac{d}{3d-1}$, então G está contido em um blow-up de F_{d-1}.*

Teorema 9. *Seja G um grafo livre de triângulos aresta com n vértices tal que $\delta(G) > \frac{10n}{29}$ ou $\delta(G) > \frac{n}{3}$ e $\chi(G) \leq 3$. Então existe um inteiro $d \geq 1$ tal que G é subgrafo de um blow-up de F_d.*

Lema 1. *Seja G um grafo e suponha que existem $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \subseteq E$ tais que:*

- *$F_i \cap F_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;*

- *$G - F_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Então G satisfaz a Conjectura 1.

Esse Lema vai funcionar para F_4, mas não para F_5.

Corolário 4. *Se $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*