

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

1 Resultados clássicos	1
2 Álgebras de flag	3
2.1 Aplicações	3
2.1.1 Cortes locais	3
3 Grau limitado	5
Referências	7

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Definimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade). *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G , com $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a* ϕ se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização). *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G . Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e m arestas. Então

$$D(G) \leq \min \left\{ m - \frac{4m^2}{n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\} \leq \frac{n^2}{18}.$$

Demonstração. Provamos primeiro que $D(G) \leq m - \frac{m^2}{4n}$. Para isso, vamos definir para cada vértice v o conjunto $F_v \subseteq E(G)$ de arestas $xy \in E(G)$ tais que $vx, vy \notin E(G)$. Note que $D(G) \leq |F_v|$ para qualquer vértice v , pois a bipartição $\{N_G(v), V(G) \setminus N_G(v)\}$ possui exatamente $|F_v|$ arestas dentro da segunda parte, e a primeira é independente. Assim, temos que

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |F_v| \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v|. \quad (1.1)$$

Observe que $xy \in F_v \implies v \in V(G) \setminus (N_G(x) \cup N_G(y))$, logo cada aresta $xy \in E(G)$ pertence a no máximo $n - d_G(x) - d_G(y)$ conjuntos F_v , logo em 1.1 we have

$$\begin{aligned} D(G) &\leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{xy \in E(G)} (n - d_G(x) - d_G(y)) \\ &= m - \frac{1}{n} \sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \\ &\leq m - \left(\frac{\sum_{x \in V(G)} d_G(x)}{n} \right)^2 \\ &= m - \frac{4m^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5. Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.

Teorema 6 (Erdős - Győri - Simonovits). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.

A prova é algorítmica.

Capítulo 2

Álgebras de flag

A estrutura desse capítulo segue o jeito que o Andrzej Grzesik faz na tese de doutorado dele. É menos técnico e mais motivado.

2.1 Aplicações

2.1.1 Cortes locais

Teorema 7 (Balogh-Clemen-Lidický). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer “mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso”. Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 2. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d - 2\}$ e arestas entre i e $i + d + j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d - 1)$ -ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.

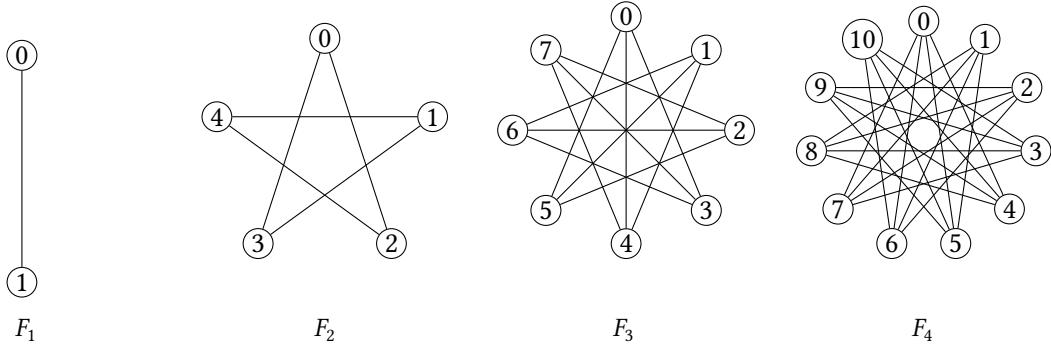


Figura 3.1: Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d -regular e livre de triângulos.

Teorema 8 (JIN, 1995). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$.

Teorema 9 (CHEN et al., 1997). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$, então G está contido em um blow-up de F_d .

Lema 1. Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ tais que $G - F_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 1.

Demonstração. Se $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < \frac{n^2}{5}$, então

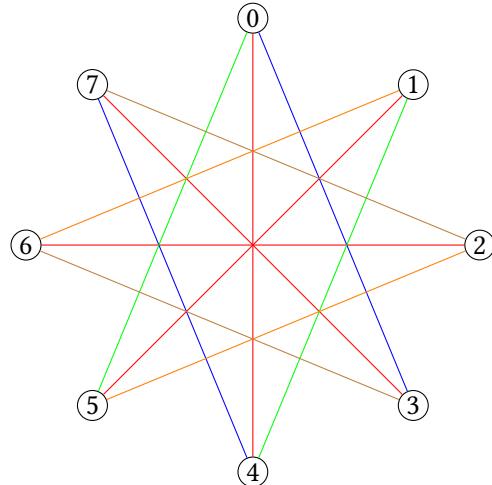
$$5 \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

de forma que para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < \frac{n^2}{25}$. \square

Esse Lema vai funcionar para F_4 , mas não para F_5 .

Teorema 10. *Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*

Demonstração. Veja que $4/11 > 10/29$, logo pelo Teorema 8, temos que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$. Em particular, $\chi(G) \leq \chi(F_9) = 3$. Assim, pelo Teorema 9 com $d = 3$, vale que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_4$. Considere a seguinte partição das arestas de G , em que cada classe está representada por um vértice e todos as arestas entre o mesmo par de classes estão na mesma parte:



Como a remoção de cada uma das partes deixa G bipartido, podemos aplicar o Lema 1 a G . Isso conclui a prova do Teorema. \square

Referências

- [CHEN *et al.* 1997] Chuan-Chong CHEN, Guoping P JIN e Khee Meng KOH. “Triangle-free graphs with large degree”. *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 5).
- [ERDŐS 1975] Paul ERDŐS. “Problems and results in graph theory and combinatorial analysis”. *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (citado na pg. 1).
- [JIN 1995] Guoping JIN. “Triangle-free four-chromatic graphs”. *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 5).