Sobre uma conjectura de Erdős acerca de grafos livres de triângulos

Introdução e motivação

Um grafo G é um par (V, E), onde V são os *vértices* e E são as *arestas* (pares não ordenados de vértices). A Teoria Extremal dos Grafos estuda propriedades de grafos sob restrições estruturais. Compreender propriedades extremais tem aplicações em análise de algoritmos, modelagem de redes e otimização.

- Grafos livres de triângulo não contêm ciclos de tamanho 3.
- Pergunta natural: quantas arestas um grafo livre de triângulos pode ter?
- **Teorema de Mantel.** Um grafo com n vértices sem triângulos possui no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas.

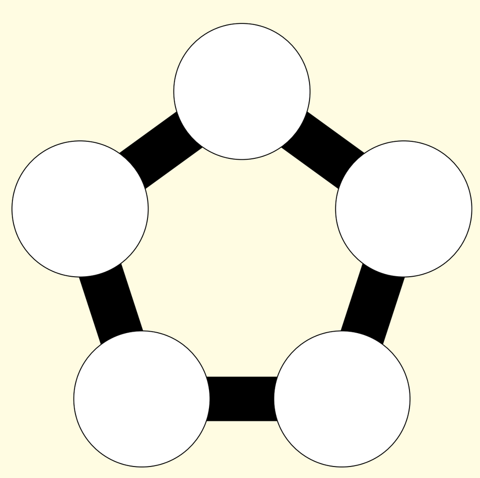
Problema e objetivos

Os únicos grafos que satisfazem igualdade no Teorema de Mantel são bipartidos.

- Pergunta natural: quão "distante" pode estar um grafo sem triângulos de um bipartido?
- $D(G)$ mede essa distância pela remoção de um menor conjunto de arestas que torna G bipartido.

Conjectura 1 (Erdős, 1975). Todo grafo livre de triângulos G com n vértices satisfaz $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.

O caso geral da Conjectura 1 permanece em aberto.



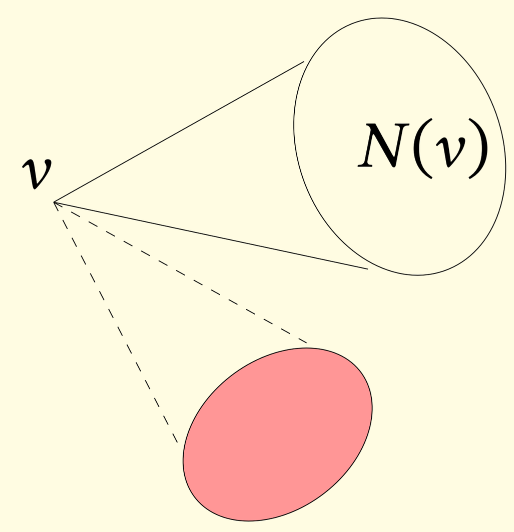
O blow-up de C_5 em que cada classe tem $\frac{n}{5}$ vértices satisfaz $e(G) = \frac{n^2}{5}$ e $D(G) = \frac{n^2}{25}$.

Metodologia

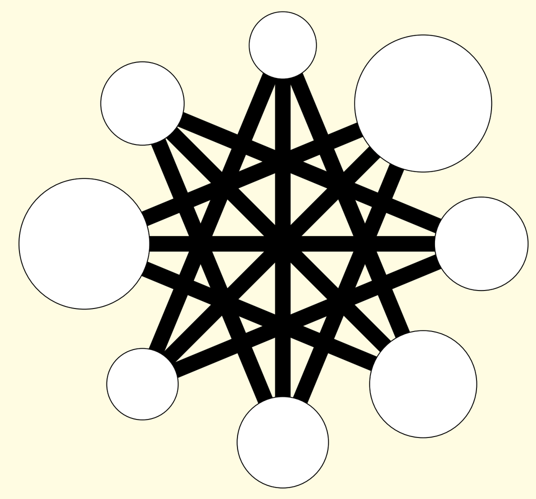
- Álgebras de flag
  → traduzem problemas de densidade em programas semidefinidos.
- Blow-ups
  → expandem vértices para conjuntos independentes mantendo estrutura.
- Condições de grau mínimo
  → permitem simplificar o problema para blow-ups de grafos pequenos.

Resultados principais

- *(Simonovits 1968)* → Se $e(G) = \frac{n^2}{4} - m$, então $D(G) \leq m$.
  - Resolve a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.21n^2$.
- [1] → Prova de $D(G) \leq \frac{4e(G)^2}{n^2}$ e $D(G) \leq \frac{n^2}{18+\epsilon}$ (para algum $\epsilon > 0$).
  - Cota explícita sobre $D(G)$; resolve a Conjectura 1 se $e(G) \geq \frac{n^2}{5} = 0.20n^2$.
- [2] → Generaliza [1]: prova a Conjectura 1 se $e(G) \geq 0.159n^2$ e outros resultados parciais usando *álgebras de flag*.
- A Conjectura 1 também pode ser resolvida quando $\delta(G) \geq \frac{4n}{11}$ usando [3].



Observe que $D(G) \leq e(G - N(v))$. Na linguagem de álgebras de flag, essa figura representa o corte local gerado relacionado à restrição $[\![\,\cdot\,]\!] \geq \frac{2}{25}$.



Se $\delta(G) \geq \frac{4n}{11}$, então G é da forma acima, e é possível demonstrar a Conjectura 1 usando essa informação estrutural extra.

Discussão

- As cotas conhecidas funcionam melhor para grafos densos: resultados do tipo "a Conjectura 1 vale se $e(G) \geq \alpha n^2$";
- Uso de álgebras de flag fornece desigualdades assintóticas a partir de otimização (numérico);
- Condições de grau mínimo permite simplificação estrutural e estudo da Conjectura 1 para certos grafos abaixo do limiar $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$ (estrutural).

Conclusão

O uso de álgebras de flag e condições de grau mínimo confirmam a Conjectura 1 em subclasses de grafos densos. O trabalho contribui revisando os métodos usados no problema e com uma prova alternativa para o caso $\delta(G) > \frac{4n}{11}$.

Referências

[1] Erdős, Faudree et. al.. *How to Make a Graph Bipartite. (1988)*
[2] Balogh et. al. *Max cuts in triangle-free graphs. (2021)*
[3] Chen et. al. *Triangle-free graphs with large degree. (1997)*

Aluno: Marcelo Machado Lage
Orientador: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota
Departmento de Ciência da Computação — Instituto de Matemática e Estatística — Universidade de São Paulo

Durante a realização desse projeto, o aluno recebeu apoio da FAPESP. Processos nº 2025/06707-6, 2025/14743-2.