Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Sobre uma conjectura de Erdős sobre grafos livres de triângulos

Marcelo Machado Lage

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de
Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processos nº 2025/06707-6, 2025/14743-2

São Paulo

2025

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Sobre uma conjectura de Erdős sobre grafos livres de triângulos**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento. Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **On a conjecture by Erdős on triangle-free graphs**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós-Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. É uma boa ideia usar o sítio www.grammarly.com na preparação de textos em inglês. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

Capítulo 1

Resultados clássicos

Nesse capítulo, iremos apresentar alguns resultados clássicos sobre grafos livres de triângulos, bem como os problemas principais que iremos explorar nos demais capítulos dessa tese. Historicamente, um dos primeiros resultados na teoria extremal de grafos é o Teorema de Mantel.

Teorema 1 (Mantel, 1907). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se G é um grafo bipartido completo em que uma das classes tem tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$, e a outra tem tamanho $\lceil n/2 \rceil$.*

Omitimos a prova do Teorema 1 nessa seção. No capítulo 2, apresentaremos uma prova do Teorema 1 usando ferramentas modernas de teoria extremal de grafos, que servirá de base para melhoras para problemas contemporâneos sobre grafos livres de triângulos. De toda forma, a prova do Teorema 1 pode ser encontrada na maioria das referências clássicas da área (ver Botler *et al.*, 2022).

O Teorema 1 impõe uma restrição bastante forte sobre grafos livres de triângulos muito *densos*, isto é, grafos com muitas arestas. Ao mesmo tempo que o Teorema de Mantel permite que um grafo livre de triângulos tenha aproximadamente metade das arestas "disponíveis" (uma vez que o número máximo de arestas possíveis em um grafo com n vértices é $\binom{n}{2} \approx 2 \cdot \frac{n^2}{4}$), ele impõe uma forte restrição estrutural sobre tais grafos: existe, a menos de isomorfismo, um único grafo livre de triângulos com n vértices e $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$, para cada n.

De forma contrária, podemos pensar em formas gerais de descrever grafos livres de triângulos e maximizar o número de arestas disponíveis. Grafos bipartidos são claramente livres de triângulos, pois para quaisquer três vértices do grafo há dois na mesma parte pelo Princípio da Casa dos Pombos, e tais dois vértices não fazem parte de um triângulo pois não formam uma aresta. Além disso, um grafo bipartido G com bipartição $V(G) = A \cup B$ possui, no máximo $|A||B| = |A|(n - |A|) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas, com igualdade se e somente se $\{|A|, |B|\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\}$.

Em conclusão, observa-se uma relação muito próxima entre a família de grafos livres de triângulos densos e a família de grafos bipartidos. O Teorema 1 prova que, de fato, todo grafo livre de triângulos tão denso quanto possível é bipartido. É, portanto, natural se perguntar, até onde se estende tal analogia entre as duas classes de grafos e, mais ainda, quão "distante" pode estar um grafo livre de triângulos de ser bipartido. Essa noção de distância é formalizada pela definição a seguir:

Definição 1. Seja G um grafo. Definimos $D(G)$ como o menor tamanho de um conjunto de arestas $F \subseteq G$ tal que $G - F := (V(G), E(G) \setminus F)$ é bipartido.

O próximo teorema é um teorema clássico de *estabilidade*, e dá uma resposta inicial para a nossa pergunta.

Teorema 2 (Simonovits, 1968)**.** *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

O Teorema 2 pode ser interpretado como um resultado estrutural: quanto mais arestas queremos que um grafo livre de triângulos tenha, mais restrita será a estrutura desse grafo. Esse paradigma voltará no Capítulo 3, quando em vez de usarmos o número de arestas para parametrizar a densidade de grafos livres de triângulos, usarmos o seu grau mínimo. A prova do Teorema 2 pode ser encontrada no capítulo 3 de Botler *et al.*, 2022, mas os métodos utilizados na prova do Teorema de Mantel que apresentaremos no Capítulo 2 permitem obter resultados similares de estabilidade. Mais resultados relacionados a estabilidade em grafos podem ser vistos em Füredi, 2015; Hu *et al.*, 2021; Sudakov, 2007.

Para grafos com apenas poucas arestas a menos que $n^2/4$, o Teorema 2 fornece uma cota superior satisfatória para $D(G)$. Em 1975, Erdős propôs a seguinte conjectura sobre uma cota *incondicional* sobre $D(G)$, no sentido que ela não depende do número de arestas de G.

Conjectura 1 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

A Conjectura 1 permanece em aberto no caso geral. Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura 1 com pelo menos $\frac{21n^2}{100}$ arestas. Além disso, se verdadeira, a cota $n^2/25$ é ótima, pois o seguinte grafo G com $n = 5m$ vértices satisfaz $D(G) = m^2 = n^2/25$.

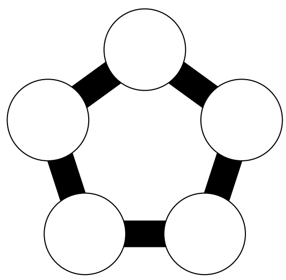


Figura 1.1

Os $5m$ vértices estão particionados nas classes representadas, cada uma de tamanho m. Uma "aresta grossa" na figura representa que todas as arestas entre vértices das duas classes unidas pertencem ao grafo. É fácil ver que o grafo G não é livre de triângulos nem bipartido e que $D(G) \leq m^2$, pois ao remover todas as arestas entre um par de classes da partição o grafo se torna bipartido. Por outro lado, segue do Teorema 3 que existe uma coleção de "arestas grossas" de G cuja remoção deixa G bipartido e o total de arestas removidas é igual a $D(G)$. Ou seja, $D(G) \geq m^2$.

O grafo da Figura 1.1 pode ser visto como um grafo obtido a partir de uma "explosão" dos vértices de C_5. Essa noção pode ser formalizada pela definição de *blow-up* de um grafo:

Definição 2. Seja G um grafo. Dizemos que um grafo H é um *blow-up* de G se cada vértice de G é substituído por um conjunto independente de vértices. Formalmente, para cada $v \in V(G)$, existe $S_v \subseteq V(H)$ e:

- $\{S_v : v \in V(G)\}$ é uma partição de $V(H)$;
- Para cada $xy \in E(H)$, vale que $(x, y) \in S_u \times S_v \iff uv \in E(G)$.

Um blow-up é chamado de *balanceado* se todos os conjuntos S_v têm o mesmo tamanho.

Blow-ups serão amplamente utilizados nos capítulos a seguir, e são úteis porque se um grafo (grande) H é um blow-up de um grafo (pequeno) G, então uma série de comportamentos em H imitam os comportamentos "análogos" em G, e portanto podemos descrever certas propriedades de H usando os parâmetros de G. O Teorema 3 deixará isso claro, mas antes de prová-lo precisamos definir de forma precisa a "analogia" entre G e H.

Definição 3. Sejam H um blow-up de G e seja $V(H) = \{S_v : v \in V(G)\}$ uma partição de H que satisfaz a condição de blow-up. Dizemos que $F_H \subseteq E(H)$ é *canônico* se existe $F_G \subseteq G$ tal que
$$F_H = \bigcup_{uv \in F_G} E(H[S_u \cup S_v]).$$
Em outras palavras, um conjunto canônico de arestas é tal que, entre cada par de classes de H, ou escolhemos todas as arestas entre essas classes, ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

É importante observar que a definição de um conjunto canônico depende da escolha da partição de $V(H)$ (que não necessariamente é única). Em geral, essa escolha será clara do contexto.

O teorema a seguir é um resultado fundamental para calcular o valor de D para blow-ups de grafos livres de triângulos.

Teorema 3 (Erdős *et al.*, 1992)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G. Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico tal que $|F| = D(H)$ e $G - F$ é bipartido.*

Demonstração. A prova usa um procedimento conhecido como *simetrização de Zykov*. Em linhas gerais, a ideia é que se $uv \notin E(G)$ e $d_Z(u) \geq d_Z(v)$ para um certo subgrafo bipartido Z de G, então trocar a vizinhança de v em Z para $N_Z(u)$ não muda a propriedade de Z ser bipartido, não diminui o número de arestas de Z e o torna mais "simétrico".

Seja Z_0 um subgrafo gerador de G tal que Z_0 é bipartido. Vamos definir $Z := Z_0$ e modificar Z da forma descrita acima sem diminuir seu número de arestas e garantindo que a propriedade da bipartição é mantida. Para isso, ordene as classes do blow-up H como $V(G) = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ e aplique a seguinte operação sequencialmente para cada $i \in [n]$:

- Tome $x \in S_i$ com grau máximo em Z;
- Para cada $y \in S_i \setminus \{x\}$, substitua a vizinhança de y em Z por $N_Z(x)$.

Perceba que pela maximalidade de $N_Z(x)$, o número de arestas do grafo não diminui a cada substituição de vizinhanças. Além disso, a propriedade da bipartição é mantida, por exemplo, forçando y a estar na mesma parte que x depois de substituir a vizinhança de y.

No grafo Z' final, todos os pares x, y pertencendo ao mesmo S_i terão a mesma vizinhança. Além disso, se $xy \in E(Z')$ com $x \in S_u$ e $y \in S_v$, então $x'y \in E(Z')$ para cada $x' \in S_u$ (pela simetria em S_u) e $xy' \in E(Z')$ para cada $y' \in S_v$ (pela simetria em S_v). Dessa forma, $F \coloneqq E(H) \setminus E(Z')$ é um conjunto canônico de arestas com tamanho no máximo $e(H) - e(Z_0) = D(H)$. Pela definição de $D(H)$, segue que $|F| = D(H)$, como desejado. $\square$

Dada a dificuldade de atacar a forma geral da Conjectura 1, resultados parciais em sua direção foram atingidos ao longo dos anos. Existem duas formas principais de produzir resultados parciais na direção da Conjectura 1: restringindo a família de grafos G (por exemplo, a um número máximo/mínimo de arestas) ou provando cotas mais fracas para $D(G)$.

O Teorema 4 foi um dos primeiros resultados nessa direção, e pode ser usado para resultados parciais nas duas condições (Corolário 1 e Teorema 5).

Teorema 4 (Erdös, Faudree *et al.*, 1988). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \min\left\{m - \frac{4m^2}{n^2}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)}\right\}.$$

Demonstração. A prova da desigualdade $D(G) \leq m - \frac{4m^2}{n^2}$, bem como a ideia principal por trás da contagem que leva à cota $D(G) \leq \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2-2m)}$, serão exploradas com mais ferramentas na Seção 2.2.1. Por ora, provaremos apenas $D(G) \leq m - \frac{4m^2}{n^2}$, utilizando um argumento simples de contagem que ilustra de forma explícita algumas das propriedades de grafos livres de triângulos que podem ser usadas para localizar subgrafos bipartidos grandes.

Para cada vértice $v \in V(G)$, defina o conjunto $F_v \subseteq E(G)$ de arestas $xy \in E(G)$ tais que $vx, vy \notin E(G)$. Note que $D(G) \leq |F_v|$ para qualquer vértice v, pois a bipartição $\{N_G(v), V(G) \setminus N_G(v)\}$ possui exatamente $|F_v|$ arestas dentro da segunda parte, e a primeira é independente. Assim, temos que

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |F_v| \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v|. \tag{1.1}$$

Observe que $xy \in F_v \implies v \in V(G) \setminus (N_G(x) \cup N_G(y))$, logo cada aresta $xy \in E(G)$

pertence a no máximo $n - d_G(x) - d_G(y)$ conjuntos F_v, logo em 1.1 temos

$$\begin{aligned} D(G) &\leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{xy \in E(G)} (n - d_G(x) - d_G(y)) \\ &= m - \frac{1}{n} \sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \\ &\leq m - \left(\frac{\sum_{x \in V(G)} d_G(x)}{n} \right)^2 \\ &= m - \frac{4m^2}{n^2}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1 (Erdös, Faudree *et al.*, 1988). *Se G é um grafo livre de triângulos com n vértices, então $D(G) \leq n^2/18$.*

De fato, analisando os casos próximos à igualdade, é possível provar que existe $\epsilon > 0$ tal que $D(G) \leq (1/18 - \epsilon)n^2$. Ainda que direta, a análise é não trivial e não segue imediatamente das cotas do Teorema 4.

Teorema 5 (Erdös, Faudree *et al.*, 1988). *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.*

O Teorema 5 dá uma melhora aparentemente pequena sobre a cota inferior de $e(G)$ para a qual a Conjectura 1 é válida: $e(G) \geq 0,21n^2$ do Teorema 2 para $e(G) \geq 0,20n^2$ do Teorema 5. Porém, o número de arestas $e(G) \geq n^2/5$ não é apenas uma melhora pequena, mas também pode ser visto como um "limiar estrutural" para grafos livres de triângulos longe de serem bipartidos. Por exemplo, o único grafo que se conhece com $D(G) \geq n^2/25$ possui exatamente $n^2/5$ arestas, e esse número de arestas é coberto pelo Teorema 5. O seguinte teorema também evidencia uma mudança de comportamento para $e(G) \geq n^2/5$.

Teorema 6 (Erdős *et al.*, 1992). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H^* também com n vértices tal que H^* é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H^*)$ e $D(G) \leq D(H^*)$.*

Essencialmente, o Teorema 6 diz que, se $e(G) \geq n^2/5$, então é possível cotar $D(G)$ superiormente considerando os blow-ups de C_5 com n vértices e pelo menos $e(G)$ arestas. É fácil ver que $\max_{e(H^*) \geq m} D(H^*)$ (máximo tomado sobre os blow-ups H^* de C_5) é decrescente em m para $m \geq n^2/5$, o que dá uma cota melhor que $n^2/5$ para $e(G) \geq n^2/5$, condicionando no valor de $e(G)$.

Omitiremos a prova do Teorema 6. A prova é algorítmica, e define a bipartição final adicionando um vértice por vez a um lado bem escolhido de uma partição inicial já grande. As técnicas utilizadas são específicas e requerem muitos cuidados com contas que não serão retomadas em outras partes desse trabalho.

Por fim, apresentamos uma conjectura relacionada à Conjectura 1:

Conjectura 2 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Resultados similares ao Teorema 5 foram verificados para a Conjectura 2 (ver Keevash e Sudakov, 2006). Além disso, a Conjectura 2 implica a Conjetura 1 para grafos regulares (ver Krivelevich, 1995): se X é o conjunto fornecido pela resposta à Conjectura 2 para G, então $e(G[X]) = e(G[V(G) \setminus X])$ pela regularidade de G, e segue que o subgrafo bipartido de G induzido pelas partes X e $V(G) \setminus X$ tem, no máximo, $2n^2/50 = n^2/25$ arestas a menos que G.

Capítulo 2

Álgebras de flag

A estrutura desse capítulo segue o jeito que o Andrzej Grzesik faz na tese de doutorado dele. É menos técnico e mais motivado.

2.1 Preliminares

2.1.1 Densidades

Sejam F e G grafos quaisquer. A *densidade de F em G* (denotada $d(F,G)$) como o número de subgrafos induzidos de G com $|F|$ vértices que são isomorfos a F. Analogamente, a densidade de F em G é a probabilidade que um conjunto de F vértices de G, escolhido uniformemente ao acaso, induza um subgrafo isomorfo a F.

Fixe um grafo grande G e fixe um grafo F com $|F| \le |G|$. Para calcular $d(F,G)$, podemos fixar um inteiro l com $|F| \le l \le |G|$ e escrever

$$d(F,G) = \sum_{|V(H)|=l} d(F,H)d(H,G). \tag{2.1}$$

A igualdade é válida porque sortear um subconjunto $S \subseteq \binom{V(G)}{l}$ uniformemente ao acaso e depois sortear um subconjunto $T \subseteq \binom{S}{|F|}$ segue a distribuição uniforme em $\binom{V(G)}{|F|}$.

Agora, denote por $\mathscr{F}_l^{\varnothing}$ a família dos grafos livres de triângulos com l vértices (a menos de isomorfismo). Para a configuração geral de flag algebras, a família "proibida" pode ser qualquer conjunto finito de grafos que não $\{K_3\}$. Se G é um grafo livre de triângulos, então por (2.1) vale que

$$d(F,G) = \sum_{H \in \mathscr{F}_l^{\varnothing}} d(F,H)d(H,G). \tag{2.2}$$

Para problemas de minimização de uma expressão do tipo $d(F,G)$ (como no caso do Teorema de Mantel), desejamos utilizar a igualdade (2.2) para Em particular, usando $\sum_{H \in \mathscr{F}_l^{\varnothing}} d(H,G) = 1$ temos $d(F,G) \le \max_{H \in \mathscr{F}_l^{\varnothing}} d(F,H)$. Por um lado, essa cota é um resultado “finito”, pois enquanto G é um grafo grande e F é um dado do problema, l é um parâmetro que podemos controlar para tentar obter resultados mais refinados.

Contudo, essa cota em geral é bastante fraca. A ideia do método semidefinido nas álgebras de flag é de gerar inequações lineares da forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^{\emptyset}} c_H d(H, G) \geq 0, \tag{2.3}$$

onde os c_H’s’ são constantes reais. Logo, poderemos obter de (2.2) a desigualdade

$$d(F, G) \leq \sum_{H \in \mathcal{F}_l^{\emptyset}} (c_H + d(F, H)) d(H, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^{\emptyset}} (c_H + d(F, H)).$$

Novamente, esse tipo de desigualdade permitirá cotar superiormente o valor de $d(F, G)$ para grafos “grandes” G usando apenas informações “finitas”, vindas de F, de l e da desigualdade na forma de (2.3).

Na verdade, o método semidefinido permitirá obter desigualdades na forma

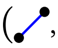
$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^{\emptyset}} c_H d(H, G) + o(1) \geq 0, \tag{2.4}$$

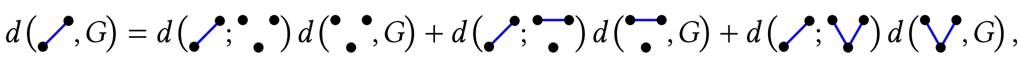
onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G|$ cresce, e portanto a cota superior obtida para $d(F, G)$ será

$$d(F, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^{\emptyset}} (c_H + d(F, H)) + o(1). \tag{2.5}$$

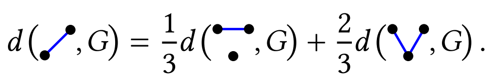
Em geral, esse tipo de resultado é suficiente quando a compreensão assintótica é suficiente. Veremos no caso do Teorema 1 e posteriormente no caso da Conjectur 1 que argumentos com blow-ups podem ser usadas para transferir os resultados assintóticos para grafos concretos. Ou seja, o termo $o(1)$ em (2.4) não será um problema para as aplicações visadas nesse trabalho.

2.1.2 O Teorema de Mantel

Vamos provar o Teorema 1 usando a estratégia descrita na seção 2.1.1. Iremos provar que $d($$, G) \leq 1/2 + o(1)$. Iremos usar $l = 3$, que em 2.2 nos dá a igualdade



ou simplesmente



Isso nos dá a igualdade na forma de (2.2). Agora, temos que uma desigualdade na forma de (2.4) que nos permita concluir $d($$, G) \leq 1/2 + o(1)$.

A desigualdade em questão será

$$\frac{1}{2}d(\,,G) - \frac{1}{6}d(\,,G) - \frac{1}{6}d(\,,G) + o(1) \geq 0. \tag{2.6}$$

Assumindo (2.6), temos

$$d(\,,G) \leq \frac{1}{2}d(\,,G) + \frac{1}{6}d(\,,G) + \frac{1}{2}d(\,,G) + o(1) \leq \frac{1}{2} + o(1),$$

como desejado. Então nos resta descobrir como gerar desigualdades à maneira de (2.6).

Fixe um vértice "especial" $v \in V(G)$ (que representaremos como). Nós podemos definir a densidade em $G^{\square}$ com um vértice especial da mesma forma, calculando a densidade de estruturas que também tenham um vértice especial. Por exemplo, $d(\,,G^{\square})$ é a probabilidade de que um vértice $u \in V(G) \setminus \{v\}$, escolhido uniformemente ao acaso, seja vizinho de G.

Observe que

$$\left(d(\,,G^{\square}) - d(\,,G^{\square})\right)^2 \geq 0, \tag{2.7}$$

e portanto

$$d(\,,G^{\square})^2 - 2d(\,,G^{\square})\,d(\,,G^{\square}) + d(\,,G^{\square})^2 \geq 0. \tag{2.8}$$

O produto $d(\,)^2$ é a probabilidade que dois vértices escolhidos aleatoriamente ao acaso (com reposição) em $V(G) \setminus \{v\}$ sejam ambos vizinhos de G. A probabilidade que esses dois vértices sejam iguais é $o(1)$, e se eles são distintos, então os dois (e v) induzem um subgrafo isomorfo a (pois G é livre de triângulos). Ou seja,

$$d(\,,G^{\square})^2 = d(\,,G^{\square}) + o(1).$$

De forma análoga, é possível provar

$$d(\,,G^{\square})\,d(\,,G^{\square}) = \frac{1}{2}d(\,,G^{\square}) + \frac{1}{2}d(\,,G^{\square}) + o(1), \tag{2.9}$$

$$d(\,,G^{\square})^2 = d(\,,G^{\square}) + d(\,,G^{\square}) + o(1). \tag{2.10}$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), obtemos

$$d(\,,G^{\square}) - d(\,,G^{\square}) - d(\,,G^{\square}) + d(\,,G^{\square}) + d(\,,G^{\square}) + o(1) \geq 0. \tag{2.11}$$

Obtivemos assim uma igualdade que se assemelha à igualdade (2.6), mas com densidades de conjuntos de 3 vértices contendo um vértice especial v em $G^{\square}$ em vez de densidades em G para subconjuntos de tamanho 3 escolhidos ao acaso.

Para obter densidades em G a partir de (2.11), iremos fazer a média dessa desigualdade por todas as escolhas possíveis de v. De forma análoga, podemos pensar em escolher v

uniformemente ao acaso. Por exemplo, escolhendo v aleatoriamente temos que

$$\mathbb{E}\left[d\left(\,,G^{\square}\right)\right] = \frac{1}{3}d\left(\,,G\right),$$

pois para cada subgrafo induzido de G que é isomorfo a existe apenas uma dentre as três escolhas possíveis para o vértice especial v tal que o grafo "rotulado" resultante é isomorfo a .

Portanto, segue de (2.11) que

$$\frac{1}{3}d\left(\,,G\right) - \frac{2}{3}d\left(\,,G\right) - \frac{2}{3}d\left(\,,G\right) + \frac{1}{3}d\left(\,,G\right) + d\left(\,,G\right) + o(1) \geq 0,$$

que é o mesmo que

$$d\left(\,,G\right) - \frac{1}{3}d\left(\,,G\right) - \frac{1}{3}d\left(\,,G\right) + o(1) \geq 0,$$

que é um múltiplo de (2.6).

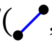
Assim, provamos que se G é um grafo livre de triângulos, então $d\left(\,,G\right) \leq 1/2 + o(1)$. Para provar a versão sem $o(1)$, tome um grafo livre de triângulos G qualquer e considere um blow-up balanceado G_N de G em que cada vértice de G é substituído por um conjunto independente de tamanho N. Então, pela versão assintótica do Teorema de Mantel que provamos, $e(G_N) \leq \frac{1}{2}\binom{N|G|}{2} + o(1) \leq \frac{N^2|G|^2}{4} + o(N^2)$. Além disso, $e(G) = N^2 e(G)$, portanto $e(G) \leq \frac{|G|^2}{4} + \frac{o(N^2)}{N^2}$. Fazendo $N \to \infty$, obtemos $e(G) \leq \frac{|G|^2}{4}$, o que conclui a prova da versão finitística (existe essa palavra?) do Teorema 1.

A estratégia apresentada nesse caso simples reflete bem a estratégia geral que utilizaremos quando formos provar algum resultado mais sofisticado com álgebras de flag. Começamos fixando um subgrafo especial σ (no caso de Mantel, $\sigma = \square$ tem apenas um vértice) para uma desigualdade quadrática (2.7) envolvendo as densidades relativas a uma cópia fixa de σ em G; multiplicamos tais densidades relativas a σ adicionando termos de erro para obter desigualdades lineares com as densidades relativas a σ (2.9); escolhemos aleatoriamente um subgrafo induzido de G isomórfico a σ para associar as densidades de subgrafos com σ fixado a densidades de subgrafos sem essa restrição. Todos os passos acima podem ser tornados mecânicos, exceto a obtenção da desigualdade quadrática inicial.

A desigualdade em questão deve satisfazer a hipótese de ser não negativa para toda escolha de densidade envolvida. Para isso, iremos escolher uma desigualdade da forma $v^\top A v \geq 0$, onde v é um vetor com todas as densidades de certos subgrafos bem escolhidos e A é uma matriz positiva semidefinida. Por exemplo, podemos reescrever (2.8) como

$$\begin{bmatrix} d\left(\,,G^{\square}\right) & d\left(\,,G^{\square}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\left(\,,G^{\square}\right) \\ d\left(\,,G^{\square}\right) \end{bmatrix} \geq 0.$$

De fato, poderíamos ter começado com uma matriz positive semidefinida genérica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, encontrando os coeficientes de (2.4) e cotando em (2.5) para provar que

$d($$, G) \leq d^* + o(1)$, onde d^* é o valor do programa semidefinido

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \max\left\{a_{11}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22}\right\} \\ \text{sujeito a} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2_+. \end{array}$$

2.1.3 O método semidefinido

Seja $\mathscr{F}$ uma família de grafos "proibidos". Um *tipo* σ é um grafo $\mathscr{F}$-livre junto a um homorfismo $\theta\colon [s] \to V(\sigma)$ para algum $s \geq 0$. Frequentemente iremos omitir o homorfismo quando esse for claro do contexto. Então, definimos um *σ-flag* como um grafo $\mathscr{F}$-livre F que contém como subgrafo induzido uma cópia induzida de σ rotulada por θ. Em outras palavras, um tipo é um grafo (pequeno) com todos os seus vértices rotulados/especiais, enquanto um flag é um grafo parcialmente rotulado de acordo com um tipo.

Dado um grafo G e um tipo σ de tamanho s, vamos fixar inteiros $l > s$ e $m \leq (l+s)/2$. Seja $\mathscr{F}^\sigma_m$ o conjunto de todos os σ-flags de tamanho m, a menos de isomorfismo (no caso de flags, o isomorfismo restrito aos vértices de σ deve ser a identidade). Seja também Θ o conjunto de todos os homorfismos injetivos de $[s]$ para $V(G)$. Dado $F \in \mathscr{F}^\sigma_m$ e $\theta \in \Theta$, definimos a *densidade induzida* $d(F, G; \theta)$ como a probabilidade de um conjunto $V' \subseteq$ de tamanho m que contém σ, escolhido uniformemente ao acaso, induza um σ-flag isomórifico a F. Observe que para $s = 0$ (isto é, não estamos efetivamente rotulando nenhuma parte do grafo), então $d(F, G; \theta) = d(F, G)$ é a definição usual de densidade induzida.

Se $F_a, F_b \in \mathscr{F}^\sigma_m$ e $\theta \in \Theta$, definimos $d(F_a, F_b, G; \theta)$ como a probabilidade de, ao escolhermos dois conjuntos $V_a, V_b \subseteq V(G)$ com $V_a \cap V_b = \mathrm{im}(\theta)$, uniformemente ao acaso, então os σ-flags induzidos por V_a e V_b são isomórficos a F_a e F_b respectivamente. Essa definição é importante para lidar com produtos de densidades, como diz o próximo teorema:

Teorema 7 (CITA ALGUÉM). *Para $F_a, F_b \in \mathscr{F}^\sigma_m$ e $\theta \in \Theta$, vale*

$$d(F_a, G; \theta)d(F_b, G; \theta) = d(F_a, F_b, G; \theta) + o(1),$$

onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G|$ vai para infinito.

Seja $\mathscr{F}^\sigma_m = \{F_1, F_2, \ldots, F_{|\mathscr{F}^\sigma_m|}\}$ e sejam $v \in \mathbb{R}^{|\mathscr{F}^\sigma_m|}$ um vetor e $Q \in \mathbb{R}^{|\mathscr{F}^\sigma_m| \times |\mathscr{F}^\sigma_m|}$ uma matriz positiva semidefinida. Então de $v^\top Q v \geq 0$, podemos escrever

$$\sum_{F_a, F_b \in \mathscr{F}^\sigma_m} Q_{ab} v_a v_b \geq 0.$$

Fazendo $v_F = d(F, G; \theta)$ e usando o Teorema 7, obtemos

$$\sum_{F_i, F_j \in \mathscr{F}^\sigma_m} Q_{ij} d(F_i, F_j, G; \theta) + o(1) \geq 0. \tag{2.12}$$

Agora, seja $H \in \mathscr{F}^\emptyset_l$ um flag sem vértices rotulados e seja Θ_H o conjunto de homorfismos injetivos de $[s]$ para $V(H)$. Da mesma forma que em (2.2), é fácil ver que

$$\mathbb{E}_{\theta\in\Theta}\left[d(F_a, F_b, G; \theta)\right] = \sum_{H\in\mathcal{F}_l^{\emptyset}} \mathbb{E}_{\theta\in\Theta_H}\left[d(F_a, F_b, H; \theta)\right] d(H, G). \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13), temos então

$$\sum_{H\in\mathcal{F}_l^{\emptyset}} \sum_{F_i, F_j\in\mathcal{F}_m^{\sigma}} Q_{ij}\mathbb{E}_{\theta\in\Theta_H}\left[d(F_a, F_b, H; \theta)\right] d(H, G) + o(1) \geq 0.$$

Definindo $c_H(\sigma, m, Q) := \sum_{F_i, F_j\in\mathcal{F}_m^{\sigma}} Q_{ij}\mathbb{E}_{\theta\in\Theta_H}\left[d(F_a, F_b, H; \theta)\right]$, a desigualdade obtida é exatamente da forma

$$\sum_{H\in\mathcal{F}_l^{\emptyset}} c_H(\sigma, m, Q) d(H, G) + o(1) \geq 0. \tag{2.14}$$

Combinando (2.2) e (2.14), é possível obter cotas para problemas de Turán ao variar os hiperparâmetros m, l, σ do modelo e utilizar a cota de (2.5) [CITAÇÕES]. Também é possível combinar escolhas de hiperparâmetros $c_H(\sigma_i, m_i, Q_i)$ para obter cotas mais refinadas [CITAÇÕES].

2.1.4 A álgebra

Vamos agora entender a formalização das álgebras de flag. O objetivo geral do método aplicado a problemas de densidade e homomorfismos é obter desigualdades não triviais da forma

$$\sum_{F_i\in\mathcal{F}_l^{\emptyset}} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0, \tag{2.15}$$

onde l é fixo e $Gin\mathcal{F}^{\emptyset}$ é um grafo (não rotulado) arbitrário. Para isso, vimos que é interessante considerar desigualdades na forma $\sum_{F_i\in\mathcal{F}_l^{\sigma}} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0$, onde $G \in \mathcal{F}^{\sigma}$ e aplicar um operador linear (associado a uma distribuição de probabilidade) que gere uma desigualdade da forma de (2.15).

Como G é arbitrário (em geral, grande), podemos lidar com as somas $\sum_{F_i\in\mathcal{F}_l^{\emptyset}} a_i d(F_i, G)$ considerando essas somas como ações de $\mathcal{F}^{\sigma}$ sobre $\mathbb{R}\mathcal{F}^{\sigma}$. Ou seja, vamos considerar as somas formais de σ-flags e deixar um grafo G agir sobre elas através de $\sum a_i F_i \mapsto a_i d(F_i, G_i)$. Note que, de (2.2), todo elemento da forma

$$\tilde{F} - \sum_{F\in\mathcal{F}_l^{\sigma}} d(\tilde{F}, F) F \tag{2.16}$$

é levado a 0 por qualquer por G. Dessa forma, iremos definir o espaço vetorial $\mathcal{A}^{\sigma} := \mathbb{R}\mathcal{F}^{\sigma}/\mathcal{K}^{\sigma}$, onde $\mathcal{K}^{\sigma}$ é o subespaço gerado pelos elementos da forma (2.16).

Finalmente, é importante definir uma noção adequada de multiplicação nesse espaço vetorial para manipular a multiplicação de densidades. Assim, também transformaremos

$\mathscr{A}^\sigma$ numa álgebra. Para $F_1 \in \mathscr{F}^\sigma_{l_1}$ e $F_2 \in \mathscr{F}^\sigma_{l_2}$ e $l \geq l_1 + l_2 - |\sigma|$, definimos

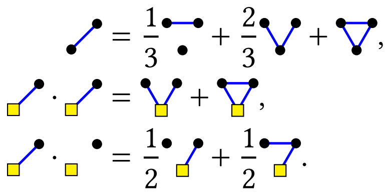
$$F_1 \cdot F_2 = \sum_{F \in \mathscr{F}^\sigma_l} d(F_1, F_2, F)F,$$

e definimos a multiplicação sobre $\mathscr{A}^\sigma$ expandindo essa definição bilinearmente. É possível provar Razborov, 2007 que essa operação de multiplicação está bem definida em $\mathscr{A}^\sigma$, ou seja, que não depende da escolha de l. Pelo Teorema 7, temos que o mapa

$$\phi_G : \sum a_i F_i \in \mathscr{A}^\sigma \mapsto \sum a_i d(F_i, G) \in \mathbb{R}$$

pode ser visto como um "homomorfismo aproximado" de $\mathscr{A}^\sigma$ para $\mathbb{R}$.

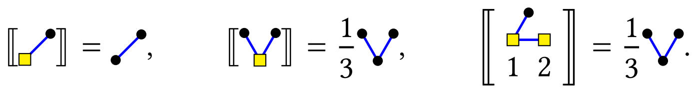
Apresentamos alguns exemplos em que $\square$ é um tipo de tamanho 1:

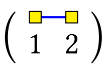
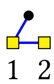
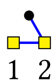


Muitas vezes, quando estamos querendo provar algum resultado de densidade, começamos com desigualdades de densidades com vértices especiais rotulados de acordo com um tipo σ. Para transferir esse resultado para grafos não rotulados (i.e., $\emptyset$-flags), escolhemos aleatoriamente onde alocar σ em G. Em álgebras de flag, esse formalismo será realizado por operadores lineares

$$[\![\cdot]\!] : \mathscr{A}^\sigma \to \mathscr{A}^\emptyset.$$

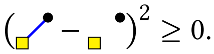
Para $F \in \mathscr{F}^\sigma$, definimos $[\![F]\!] = q(F) \downarrow F$, onde $\downarrow F \in \mathscr{F}^\emptyset$ é uma cópia de F em que os rótulos especiais são esquecidos e $q(F)$ é a probabilidade que a imagem de um homorfismo injetivo $\theta : [|\sigma|] \to V(\downarrow F)$ escolhido uniformemente ao acaso defina um flag isomórfico a F. Em seguida, estendemos $[\![\cdots]\!]$ linearmente para $\mathscr{A}^\sigma$. Por exemplo, temos



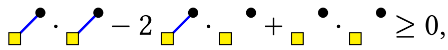
Note que os -flags  e  não são isomórficos. Como esse tipo tem mais de um vértice, é importante rotulá-los, ao contrário de tipos de tamanho 1.

Finalmente, iremos lidar com a noção de "homomorfismos aproximados" de $\mathscr{A}^\sigma$ a $\mathbb{R}$ e como recuperar informação sobre densidades em grafos. Para cada σ-flag G, podemos associar um vetor (de dimensão infinita) $(d(F,G))_{F\in\mathscr{F}^\sigma} \in [0,1]^{\mathscr{F}^\sigma}$. Se $(G_k)_{k\geq 0}$ é uma sequência de σ-flags tal que tal que $d(F, G_k)$ converge para todo $F \in calf^\sigma$, então dizemos que $(G_k)_{k\geq 0}$ é *convergente*. Pelo Teorema de Tychonoff (REFERÊNCIA?), o espaço $[0,1]^{\mathscr{F}^\sigma}$ com a topologia produto é compacto e portanto para toda sequência infinita $(G_k)_{k\geq 0}$ de σ-flags, possui uma subsequência infinita que é convergente. Para cada sequência convergente, existe um homomorfismo (entre espaços vetoriais) $\phi : F \in \mathscr{F}^\sigma \mapsto \lim_{k\to\infty} d(F, G_{i_k}) \in \mathbb{R}$, que pode ser estendido para um homomorfismo (entre álgebras) $\phi\colon \mathscr{A}^\sigma \to \mathbb{R}$. Esses homomorfismos serão chamados de *homomorfismos funcionais*. Dessa forma, se vale uma desigualdade $\sum a_i F_i \geq 0$ em $\mathscr{A}^\sigma$, então também vale $\phi(\sum a_i F_i) \geq 0$ para todo homomorfismo funcional ϕ, e logo $\sum a_i d(F_i, G_k) + o(1) \geq 0$ para toda sequência convergente $(G_k)_{k\geq 0}$, onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G_k|$ vai para infinito.

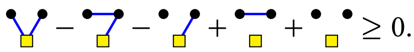
Vamos mostrar mais uma vez o Teorema de Mantel usando a linguagem da álgebra. Começamos com



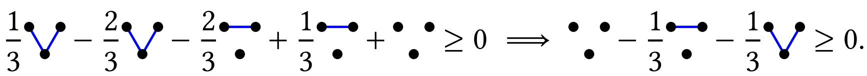
Daí, temos



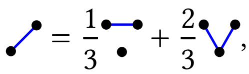
e multiplicando obtemos



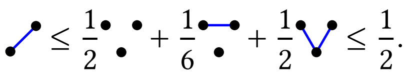
Aplicando $[\![\cdot]\!]$, segue que

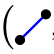
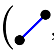


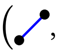
Dividindo por 2 e somando a igualdade



obtemos



Logo, toda sequência infinita de grafos livres de triângulos $(G_k)_{k\geq 0}$ possui uma subsequência $(G_{i_k})_{k\geq 0}$com $d($  $, G_{i_k}) \leq 1/2 + o(1)$. Tome G_0 e G_N como um blow-up completo balanceado de G_0 em que cada vértice de G_0 é substituído por um conjunto independente de tamanho N. Então para alguma sequência $N_0 < N_1 < \dots$ vale $d($  $, G_{N_k}) \leq 1/2 + o(1)$. Mas

$d($  $, G_{N_k})$
$$= \frac{e(G_{N_k})}{v(G_{N_k})^2/2} + o(1) = \frac{N_k^2 e(G_0)}{N_k^2 v(G_0)^2/2} + o(1) = \frac{e(G_0)}{v(G_0)^2/2} + o(1),$$

logo $e(G_0) \leq (1/4 + o(1))v(G_0)^2$, e como o termo $o(1)$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno, obtemos $e(G_0) \leq v(G_0)^2/4$ para qualquer escolha de G_0.

2.2 Aplicações

Vamos provar o Teorema 5 usando álgebras de flag. Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Primeiro, observe que, para todo vértice $v \in V(G)$, o conjunto

$$A_v := E(G - N(v))$$

de arestas entre os não vizinhos de v é tal que $G - A_v$ é bipartido considerando as classes $(N(v), V(G) \setminus N(v))$. Portanto,

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |A_v|,$$

ou ainda

$$D(G) \leq \mathbb{E}_{v \in V(G)} \left[|A_v| \right], \tag{2.17}$$

onde $v \in V(G)$ é escolhido aleatoriamente ao acaso.

Isso nos mostra que é possível modelar certas escolhas de bipartições e, portanto, de arestas que precisamos contar/deletar a partir de um único vértice *especial*. Na linguagem de álgebras de flag (sobre os grafos livres de triângulos):

Teorema 8. *Se* $[\![\quad]\!] \geq 2/25$*, então* $\leq 2/5$.

Demonstração. Primeiro, vamos fixar o tipo σ de tamanho 1, e os inteiros $l = 3$ e $m = 2$ (assim como no Teorema de Mantel). Da desigualdade

$$\left[\!\left[\left[\quad \quad \right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \left[\quad \right] \right]\!\right] \geq 0,$$

segue

$$\left(\frac{1}{3} a_{11} + \frac{2}{3} a_{12} \right) + \left(\frac{2}{3} a_{12} + \frac{1}{3} a_{22} \right) + a_{22} \geq 0.$$

Além disso,

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3},$$

logo

$$\begin{aligned} + \frac{6}{25} x &\leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} a_{11} + \frac{2}{3} a_{12} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} a_{12} + \frac{1}{3} a_{22} + x \right) + a_{22} \\ &\leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} a_{11} + \frac{2}{3} a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3} a_{12} + \frac{1}{3} a_{22} + x, a_{22} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} a_{11} + \frac{2}{3} a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3} a_{12} + \frac{1}{3} a_{22} + x, a_{22} \right\} - \frac{6}{25} x$$

para toda escolha de $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ e $x \geq 0$.

Um software específico de SDP (`cvxpy`) pode ser usado para encontrar que o mínimo da expressão acima é $2/5$ para

$$A = \begin{bmatrix} 6/5 & -4/5 \\ -4/5 & 8/15 \end{bmatrix}, \qquad x = 5/9.$$

$\square$

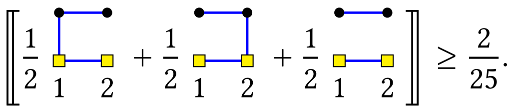
2.2.1 Cortes locais

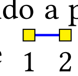
Em Hu *et al.*, 2021, os autores provam a seguinte conjectura de Sudakov Sudakov, 2007:

Teorema 9. *Seja G um grafo K_6-livre com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido deletando no máximo* $4n^2/25$.

O principal ingrediente dos resultados provados em Hu *et al.*, 2021 é a utilização de álgebras de flag para expressar os chamados *cortes locais*.

O Teorema 8 mostra como podemos definir cortes (ou seja, subgrafos bipartidos grandes) a partir de um único vértice, e também como utilizar álgebras de flag para expressar a densidade de arestas fora de cada um desses cortes e foi utilizada em Norin e Sun, 2016; Balogh *et al.*, 2021. A mesma ideia pode ser usada para definir cortes a partir de outros conjuntos pequenos de vértices. Por exemplo, se G é livre de triângulos e $uv \in E(G)$, então é possível definir um corte com $N(u)$ em uma das parte, $N(v)$ em outra das partes e, para cada vértice em $V(G) \setminus (N(u) \cup N(v))$, decidimos uniformemente ao acaso em qual das partes definidas por $N(u)$ e $N(v)$ ele será colocado. Se nenhum desses cortes deixa no máximo $n^2/25$ arestas de fora, então a densidade esperada das arestas fora de qualquer um desses cortes definidos localmente é pelo menos $2/25$, o que pode ser expressado da seguinte maneira:



Um *corte local* é definido a partir de um tipo σ de tamanho k (nos exemplos que já vimos, usamos os tipos e ). Esse tipo está associado a uma estrutura pequena do grafo grande livre de triângulos G a partir da qual definiremos o corte particionando os demais vértices de G em 2^k conjuntos $X_1, X_2, \dots, X_{2^k}$ a partir das arestas entre esse vértice e σ. (Na prática, o número de conjuntos é menor, uma vez que um vértice não pode ser simultaneamente adjacente a dois vértices adjacentes de σ.)

Após definir esses X_{2^k} conjuntos, adcionamos cada elemento de X independentemente a um conjunto A (inicialmente vazio) com probabilidade p_i ou a B com probabilidade $1 - p_i$, onde $p_1, p_2, \dots, p_{2^k}$ são hiperparâmetros do modelo.

Teorema 10 (Balogh *et al.*, 2021)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;

2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

Capítulo 3

Restrições de grau mínimo

Na literatura de teoria extremal de grafos, o estudo de grafos livres de certas estruturas com grau mínimo limitado inferiormente merece atenção especial. Um dos teoremas mais fundamentais nesse sentido é o Teorema de Andrásfai-Erdős, Sós:

Teorema 11 (ANDRÁSFAI *et al.*, 1974)**.** *Seja $r \geq 2$ e G um grafo livre de K_{r+1} com n vértices. Se*

$$\delta(G) > \frac{3r-4}{3r-1}n,$$

então G é r-partido.

Para grafos livres de triângulos, o Teorema 11 prova que, se um grafo livre de triângulos tem grau mínimo maior que $\delta(G) > 2n/5$, então ele é bipartido. Automaticamente, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com grau mínimo maior que $2n/5$. Mas se $\delta(G) > 2n/5$, então $e(G) > n^2/5$, o que já é coberto pelo Teorema 5. Portanto, é de se perguntar se a condição de grau mínimo pode ser relaxada, a fim de obter algum resultado que não seja automaticamente verdade pela cota em $e(G) \geq n^2/5$.

De fato, essa condição pode ser relaxada:

Teorema 12 (BRANDT e THOMASSÉ, 2011)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\delta(G) > n/3$. Então $\chi(G) \leq 4$.*

Além disso, o resultado de BRANDT e THOMASSÉ, 2011 permite caracterizar completamente os grafos livres de triângulos e grau mínimo maior que $n/3$ como os grafos homomórficos aos *grafos Vega*.

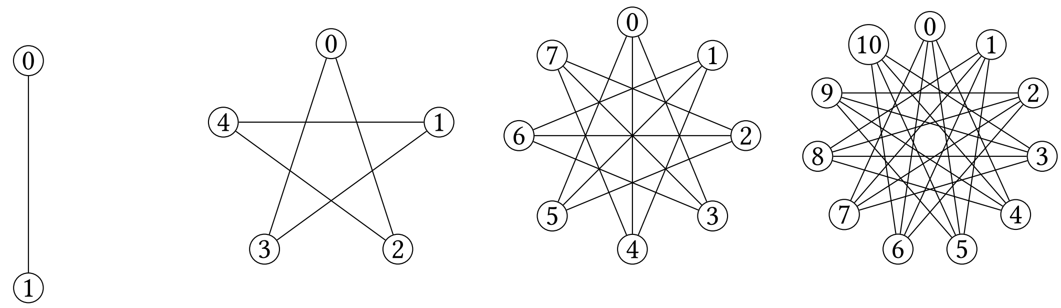
É interessante observar que a condição do Teorema 12 não pode ser substituída por $\delta(G) > cn$ para nenhum $c < 1/3$. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, existem grafos de n vértices com grau mínimo maior que $(1/3 - \varepsilon)n$ mas número cromático não limitado (ver ERDÖS e SIMONOVITS, 1973).

O Teorema 12 permite descrever exatamente quem são os conjuntos de arestas que podemos remover para calcular $D(G)$ sempre que $\delta(G) > n/3$ usando o Teorema 3. Porém, a estrutura dos grafos Vega é não-trivial (o menor deles tem 11 vértices), e por isso iremos restringir a nossa análise a um teorema estrutural mais simples com a restrição adicional de $\chi(G) = 3$ ou a restrição de grau mínimo substituída por $\delta(G) > 10n/29$.

Para isso, precisamos definir os grafos de Andrásfai.

Definição 4. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai F_d* é o grafo com vértices $\{0, 1, \ldots, 3d - 2\}$ (módulo $3d - 1$) e arestas entre i e $i + d + j$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, d - 1\}$.

Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d - 1)$-ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes.



F_1 F_2 F_3 F_4

Figura 3.1: *Grafos de Andrásfai para $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que F_d é d-regular e livre de triângulos.*

No que se segue, para grafos G e H, usaremos a notação $G \hookrightarrow H$ para representar que G é homomórfico a H (isto é, G é um subgrafo de um blow-up de H). Os Teoremas 13 e 14 formam a caracterização estrutural procurada.

Teorema 13 (Jin, 1995)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \hookrightarrow F_9$.*

Teorema 14 (Chen *et al.*, 1997)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$ para algum $d \geq 1$, então G está contido em um blow-up de F_d.*

Do Teorema 14, segue diretamente que se G é um grafo livre de triângulos com n vértices, grau mínimo $\delta(G) > n/3$ e $\chi(G) \leq 3$, então G é homomórfico a algum F_d.

3.1 A Conjectura 1 para grafos homomórficos a F_d

Em Bedenknecht *et al.*, 2019, os autores verificam o seguinte resultado para a Conjectura 2:

Teorema 15. *Se um grafo G com n vértices é homomórfico a um grafo de Andrásfai F_d para algum $d \geq 1$, então existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $e(G[X]) \leq n^2/50$.*

As técnicas utilizadas em Bedenknecht *et al.*, 2019 envolvem a representação de grafos de Andrásfai como subgrafos finitos de um grafo infinito com vértices no círculo unitário, e o conjunto X é escolhido de forma geométrica, como a interseção de um intervalo no círculo com os vértices de G.

Nessa seção, provamos o seguinte resultado:

Teorema 16. *Seja G um grafo livre de triângulos isomorfo a F_d para algum $d \geq 1$. Então G satisfaz a Conjectura 1 se alguma das condições abaixo vale:*

- $d \leq 4$;
- $\alpha(G) = \frac{d}{3d-1}$.

A seguir, apresentamos uma prova da Conjectura 1 para grafos homomórficos a F_4. Para começar, apresentamos um lema geral sobre partições do conjunto de arestas em grafos livres de triângulos.

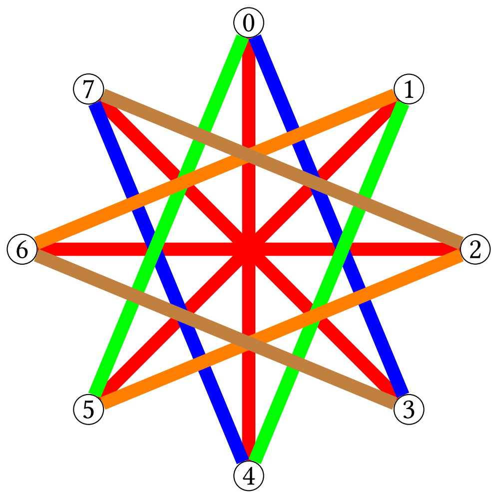
Lema 1. *Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ tais que $G - E_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 1.*

Demonstração. Se $e(G) \geq n^2/5$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < n^2/5$, então

$$5 \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

e para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < n^2/5$. □

Dessa forma, se apresentarmos uma tal partição para F_d, ela também valerá para qualquer blow-up de F_d, independentemente dos tamanhos relativos entre as classes no blow-up. A figura a seguir mostra que tal partição existe para F_4:



O seguinte resultado é imediato da partição acima e dos Teoremas 13 e 14.

Corolário 2. *Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer "mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso". Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Referências

[Andrásfai *et al.* 1974] Béla Andrásfai, Paul Erdös e Vera T Sós. "On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph". *Discrete Mathematics* 8.3 (1974), pp. 205–218 (citado na pg. 19).

[Balogh *et al.* 2021] József Balogh, Felix Christian Clemen e Bernard Lidickỳ. "Max cuts in triangle-free graphs". In: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications.* Springer. 2021, pp. 509–514 (citado na pg. 16).

[Bedenknecht *et al.* 2019] Wiebke Bedenknecht, Guilherme Oliveira Mota, Christian Reiher e Mathias Schacht. "On the local density problem for graphs of given odd-girth". *Journal of Graph Theory* 90.2 (2019), pp. 137–149 (citado na pg. 20).

[Botler *et al.* 2022] F. H. Botler, M. Collares, T. Martins, W. Mendonça e G. O. Mota. *Combinatória.* Rio de Janeiro: IMPA, 2022. url: https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM02-eBook.pdf (citado nas pgs. 1, 2).

[Brandt e Thomassé 2011] Stephan Brandt e Stéphan Thomassé. "Dense triangle-free graphs are four-colorable: a solution to the erdos-simonovits problem". *preprint* (2011), p. 172 (citado na pg. 19).

[Chen *et al.* 1997] Chuan-Chong Chen, Guoping P Jin e Khee Meng Koh. "Triangle-free graphs with large degree". *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 20).

[Erdős 1975] Paul Erdős. "Problems and results in graph theory and combinatorial analysis". *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (citado nas pgs. 2, 6).

[Erdös, Faudree *et al.* 1988] Paul Erdös, Ralph J Faudree, János Pach e Joel H Spencer. "How to make a graph bipartite." *J. Comb. Theory, Ser. B* 45.1 (1988), pp. 86–98 (citado nas pgs. 4, 5).

[Erdős *et al.* 1992] Paul Erdős, Ervin Győri e Miklós Simonovits. "How many edges should be deleted to make a triangle-free graph bipartite". In: *Sets, graphs and numbers, Colloq. Math. Soc. János Bolyai.* Vol. 60. 1992, pp. 239–263 (citado nas pgs. 3, 5).

[Erdös e Simonovits 1973] Paul Erdös e Miklós Simonovits. "On a valence problem in extremal graph theory". *Discrete Mathematics* 5.4 (1973), pp. 323–334 (citado na pg. 19).

[Füredi 2015] Zoltán Füredi. "A proof of the stability of extremal graphs, simonovits' stability from szemerédi's regularity". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115 (2015), pp. 66–71 (citado na pg. 2).

[Hu *et al.* 2021] Ping Hu, Bernard Lidickỳ, Taísa Martins, Sergey Norin e Jan Volec. "Large multipartite subgraphs in h-free graphs". In: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications.* Springer. 2021, pp. 707–713 (citado nas pgs. 2, 16).

[Jin 1995] Guoping Jin. "Triangle-free four-chromatic graphs". *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 20).

[Keevash e Sudakov 2006] Peter Keevash e Benny Sudakov. "Sparse halves in triangle-free graphs". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 96.4 (2006), pp. 614–620 (citado na pg. 6).

[Krivelevich 1995] Michael Krivelevich. "On the edge distribution in triangle-free graphs". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63.2 (1995), pp. 245–260 (citado na pg. 6).

[Mantel 1907] W Mantel. "Problem 28, wiskundige opgaven" (1907) (citado na pg. 1).

[Norin e Sun 2016] Sergey Norin e Yue Ru Sun. "Triangle-independent sets vs. cuts". *arXiv preprint arXiv:1602.04370* (2016) (citado na pg. 16).

[Razborov 2007] Alexander A Razborov. "Flag algebras". *The Journal of Symbolic Logic* 72.4 (2007), pp. 1239–1282 (citado na pg. 13).

[Simonovits 1968] Miklós Simonovits. "A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems". In: *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966).* 1968, pp. 279–319 (citado na pg. 2).

[Sudakov 2007] Benny Sudakov. "Making a K_4-free graph bipartite". *Combinatorica* 27.4 (2007), pp. 509–518 (citado nas pgs. 2, 16).