

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!.** Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

[illegible]

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

[illegible]

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

1	Resultados clássicos	1
2	Álgebras de flag	3
2.1	Preliminares	3
2.1.1	Densidade e limites	4
2.1.2	Estrutura algébrica	5
2.1.3	Operador de média	6
2.1.4	Teorema de Mantel	7
2.2	Aplicações para a Conjectura 1	10
3	Grau limitado	13
	Referências	15

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Definimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade). *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2 (ERDŐS, 1975). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G , com $\phi: V(H) \rightarrow V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a ϕ* se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização). *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G . Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. *Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então*

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \min \left\{ m - \frac{4m^2}{n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\} \leq \frac{n^2}{18}.$$

Demonstração. Provamos primeiro que $D(G) \leq m - \frac{m^2}{4n}$. Para isso, vamos definir para cada vértice v o conjunto $F_v \subseteq E(G)$ de arestas $xy \in E(G)$ tais que $vx, vy \notin E(G)$. Note que $D(G) \leq |F_v|$ para qualquer vértice v , pois a bipartição $\{N_G(v), V(G) \setminus N_G(v)\}$ possui exatamente $|F_v|$ arestas dentro da segunda parte, e a primeira é independente. Assim, temos que

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |F_v| \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v|. \quad (1.1)$$

Observe que $xy \in F_v \implies v \in V(G) \setminus (N_G(x) \cup N_G(y))$, logo cada aresta $xy \in E(G)$ pertence a no máximo $n - d_G(x) - d_G(y)$ conjuntos F_v , logo em 1.1 we have

$$\begin{aligned} D(G) &\leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{xy \in E(G)} (n - d_G(x) - d_G(y)) \\ &= m - \frac{1}{n} \sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \\ &\leq m - \left(\frac{\sum_{x \in V(G)} d_G(x)}{n} \right)^2 \\ &= m - \frac{4m^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 5. *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.*

Teorema 6 (Erdős - Győri - Simonovits). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.*

A prova é algorítmica.

Capítulo 2

Álgebras de flag

A estrutura desse capítulo segue fortemente o que é apresentado em [CARLI SILVA *et al.*, 2016](#) e também inspirado nas lecture notes do Andrzej Grzesik.

2.1 Preliminares

Seja $k \geq 0$ um inteiro. Um *tipo de tamanho k* é um grafo G com $V(G) = [k]$, i.e. é um grafo com todos os seus vértices rotulados com os inteiros de 1 a k . O tipo vazio (grafo vazio) é denotado por \emptyset .

Seja σ um tipo de tamanho k e F um grafo com pelo menos k vértices. Um σ -flag é um par (F, θ) em que $\theta: [k] \rightarrow V(F)$ é um homomorfismo de grafos injetor tal que $F[\theta([k])] \cong \sigma$. Em outras palavras, σ -flag é um grafo *parcialmente* rotulado, em que o subgrafo rotulado é uma cópia de σ .

Note que todo tipo σ é um (σ, θ) -flag para θ a função identidade em $[k]$. Em geral, iremos omitir θ da definição de um flag se a sua definição for clara do contexto.






Para definir isomorfismos entre σ -flags, fazemos exatamente como para grafos, com a condição adicional que os rótulos devem ser preservados pela bijeção. Formalmente, dizemos que dois σ -flags (G_1, θ_1) e (G_2, θ_2) são *isomórficos* se existe um isomorfismo $\theta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $\theta(\theta_1(i)) = \theta_2(i)$ para cada $i \in [|\sigma|]$.

Exemplo 1. 1. Sejam

$$\sigma_1 = \begin{array}{cc} \square & \square \\ 1 & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{array}{cc} \square & \square \\ 1 & 2 \end{array}$$

dois tipos (ambos com $k = 2$ vértices). Então se $G = \begin{array}{c} \triangle \\ \square \quad \square \\ 1 \quad 2 \end{array}$ e θ é a identidade em $\{1, 2\}$, temos que (G, θ) é um σ_1 -flag mas não é um σ_2 -flag.

Usando a notação apresentada anteriormente, podemos simplesmente escrever que G é um σ_1 -flag.

2.  é um \emptyset -flag, uma vez que nenhum de seus vértices está rotulado.
3.  é um σ_3 -flag, onde σ_3 é o (único) tipo com exatamente um vértice.  é outro σ_3 -flag.
4.  e  são dois $\begin{smallmatrix} 1 & 2 \end{smallmatrix}$ -flags, que são isomórficos como grafos mas não são isomórficos como flags.

Finalmente, para cada tipo σ e $n \geq |\sigma|$, definimos \mathcal{F}_n^σ como o conjunto de todos os σ -flags de tamanho n .

2.1.1 Densidade e limites

Para continuar a definição de flag algebras, será importante definir densidades e suas propriedades. Sejam F e G dois grafos (sem rótulos especiais nos vértices) e defina $c(F, G)$ como a quantidade de subgrafos *induzidos* de G que são isomorfos a f . Então definimos a *densidade de F em G* como

$$p(F, G) := \frac{c(F, G)}{\binom{|G|}{|F|}}.$$

De outra forma, $p(F; G) = \mathbb{P}_U[G[U] \cong F]$ é a probabilidade que um subconjunto U de $V(G)$ com tamanho exatamente $|F|$ induza um subgrafo isomorfo a F .

Por exemplo, temos $p(K_2; G) = \frac{e(G)}{\binom{n}{2}}$ e $p(K_3; G)$ é a probabilidade de uma tripla de vértices distintos de G escolhida uniformemente ao acaso formar um triângulo.

De forma similar, para um tipo σ dado, um σ -flag (G, θ) e um conjunto de σ -flags F_1, F_2, \dots, F_t , definimos a *densidade de F_1, F_2, \dots, F_t em G* como a probabilidade que conjuntos $U_1, U_2, \dots, U_t \subseteq V(G) \setminus \text{Im } \theta$ dois a dois disjuntos escolhidos uniformemente ao acaso satisfaçam $(G[U_i \cup \text{Im } \theta], \theta) \cong F_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Denotamos essa densidade como $p(F_1, F_2, \dots, F_t; G)$.

Exemplo 2. Seja σ o tipo de tamanho 1. Sejam $F_1 = \begin{smallmatrix} \bullet \\ 1 \end{smallmatrix}$, $F_2 = \begin{smallmatrix} \bullet \\ 1 \end{smallmatrix}$, $G = \begin{smallmatrix} \bullet \\ 1 \end{smallmatrix}$ três σ -flags. Então $p(F_1, F_2; G) = \frac{1}{2}$.

Os dois seguintes lemas fornecem as relações para a “regra da cadeia” das densidades.

Lema 1. Sejam F e G dois σ -flags. Se n é um inteiro positivo tal que $|F| \leq n \leq |G|$, então

$$p(F; G) = \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')p(F'; G).$$

Lema 2. Suponha que F_1, F_2, \dots, F_t e G são σ -flags. Se n é um inteiro positivo tal que

$$\sum_{i=1}^t (|F_i| - |\sigma|) \leq n - |\sigma| \leq |G| - |\sigma|,$$

então para todo $s \in [t]$ vale

$$p(F_1, F_2, \dots, F_t; G) = \sum_{F \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F_1, F_2, \dots, F_s; F) p(F, F_{s+1}, F_{s+2}, \dots, F_t; G)$$

Agora, podemos definir a noção de funcionais limites e álgebras de flag.

Definição 2. Uma sequência de grafos (G_1, G_2, \dots) é chamada de *crescente* se $(|G_1|, |G_2|, \dots)$ é estritamente crescente. Uma sequência crescente de grafos é chamada de *convergente* se para todo grafo F vale que a sequência

$$(p(F; G_1), p(F; G_2), \dots)$$

é convergente.

- Exemplo 3.**
1. A sequência de grafos completos (K_1, K_2, K_3, \dots) é convergente.
 2. A sequência de grafos bipartidos completos em que uma classe tem o tamanho da outra também é convergente: $(K_{1,2}, K_{2,4}, K_{3,6}, \dots)$.
 3. A sequência de grafos de Andrásfai (F_1, F_2, F_3, \dots) (que serão estudados no Capítulo 3) é um exemplo menos trivial de sequência convergente.
 4. Se G é um grafo qualquer. Então a sequência $(G_k)_{k \geq 0}$, onde $G_0 = G$ e G_k é um blow-up de G em que cada vértice é substituído por um conjunto independente de tamanho $k + 1$ é convergente.
 5. Pelo Teorema de Tychonoff (ADICIONAR REFERÊNCIA), toda sequência crescente de grafos possui uma subsequência decrescente.

Sequências convergentes e crescentes de σ -flags são definidas de forma análoga para qualquer tipo σ . Para cada sequência convergente de σ -flags (A_1, A_2, \dots) , podemos definir uma função ϕ que atribui a cada σ -flag F o real $\phi(F) := \lim_{k \rightarrow \infty} p(F; A_k)$. A tais funções ϕ chamamos de *limites funcionais*.

Na seção 2.1.2, iremos apresentar uma estrutura algébrica para flags the permitirão desenvolver propriedades gerais de limites funcionais. Então, na seção 2.2, mostraremos como traduzir os resultados obtidos para limites funcionais para a linguagem clássica de grafos e aplicá-las ao nosso problema.

2.1.2 Estrutura algébrica

Agora, vamos colocar uma estrutura algébrica para os flags.

Seja $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ o espaço vetorial gerado pelas combinações lineares de σ -flags com coeficientes (isto é, o espaço de somas formais de múltiplos reais de σ -flags). Podemos estender

linearmente qualquer limite funcional para $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$.

Utilizando o Lema 1, obtém-se que para qualquer σ -flag F e $n \geq |F|$ vale

$$\phi(F) = \phi\left(\sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')F'\right),$$

ou seja,

$$F - \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')F' \in \ker \phi \quad (2.1)$$

para todo funcional limite ϕ . Podemos então definir o espaço vetorial $\mathcal{A}^\sigma := \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma / \mathcal{K}^\sigma$, sendo \mathcal{K}^σ o subespaço gerado por todos os vetores na forma 2.1. Note que $\phi(\sigma) = p(\sigma; F) = 1$ para todo σ -flag F , logo \mathcal{A}^σ tem pelo menos um elemento não nulo.

A principal vantagem de trabalhar com \mathcal{A}^σ é que é possível definir multiplicação entre seus elementos (transformando esse espaço vetorial em uma álgebra de fato).

Definição 3. Sejam F e G σ -flags e seja $n \geq |F| + |G| - |\sigma|$. Definimos o produto de F e G como

$$F \cdot G = \left(\sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H)H \right) + \mathcal{K}^\sigma \in \mathcal{A}^\sigma.$$

É possível provar que o produto acima está bem definido, é comutativo e associativo.

Exemplo 4. Sejam $F_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array}$ e $F_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ 1 \end{array}$. Então $F \cdot G = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagup \\ \square \\ 1 \end{array}$.

Agora, podemos enunciar o principal resultado das álgebras de flag.

Teorema 7 (ϕ é homomorfismo de \mathcal{A}^σ para \mathbb{R}). Se f, g são dois elementos da álgebra \mathcal{A}^σ e ϕ é um funcional limite qualquer, então

$$\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g).$$

2.1.3 Operador de média

Em teoria extremal de grafos, estamos interessados em obter resultados sobre a densidade de grafos (pequenos) *não rotulados* em grafos maiores. Então por que usamos flags, isto é, grafos rotulados? Mesmo para teoremas simples (como o Teorema 9), costuma ser muito difícil obter resultados úteis usando apenas a álgebra \mathcal{A}^\emptyset .

A estratégia geral será produzir relação válidas em uma álgebra \mathcal{A}^σ e então aplicar uma transformação linear de \mathcal{A}^σ para \mathcal{A}^\emptyset que chamaremos de *operador de média*.

Definição 4. Seja F um σ -flag, onde σ é um tipo de tamanho k . Definimos $\downarrow F$ como o \emptyset -flag obtido ao esquecer os rótulos dados aos vértices de F . Definimos também $q(F)$ como a probabilidade de que uma função injetiva $\theta: [k] \rightarrow V(F)$ escolhida uniformemente ao acaso é tal que $(\downarrow F, \theta) \cong F$.


Então definimos $\llbracket F \rrbracket = q(F) \downarrow F$, e estendemos $\llbracket \cdot \rrbracket$ linearmente para $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ para obter uma transformação linear de $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ para $\mathbb{R}\mathcal{F}^\emptyset$.

O seguinte teorema, junto com o Lema 1, prova que $\llbracket K^\sigma \rrbracket \subseteq \mathcal{K}^\emptyset$, e portanto $\llbracket \cdot \rrbracket$ também é uma transformação bem definida de \mathcal{A}^σ para \mathcal{A}^\emptyset .

Teorema 8. *Sejam F um σ -flag e G um \emptyset -flag com $|G| \geq |F|$ e $p(\downarrow \sigma; G) > 0$. Se θ é um embedding de σ em G escolhido uniformemente ao acaso, então*

$$\mathbb{E}[p(F; (G, \theta))] = \frac{q(F)p(\downarrow F; G)}{q(\sigma)p(\downarrow \sigma; G)}.$$

De fato, o que o Teorema 8 diz é que o operador de média $\llbracket \cdot \rrbracket$ atua da seguinte forma: para cada subgrafo induzido de G isomorfo a σ , se calcula a densidade de F em G ao se considerar G como um σ -flag rotulado dessa mesma forma e se calcula o valor esperado dessa densidade.

Considere por exemplo o flag . Então $\llbracket \begin{smallmatrix} \text{yellow square} \\ 1 \end{smallmatrix} \rrbracket = \text{blue edge}$ e

$$\mathbb{E}[p(\text{blue edge}; (G, \theta))] = p(E; G),$$

ou seja, o valor esperado da proporção de vizinhos de um vértice escolhido ao acaso é (assintoticamente) igual à densidade de arestas no grafo.

A mesma ideia pode ser aplicada para combinações de flags mais sofisticadas: o operador de média aplicado ao flag $\left(\begin{smallmatrix} \text{blue edge} \\ 1 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \text{yellow square} \\ 1 \end{smallmatrix} \right)^2$ calcula (assintoticamente) a variância da diferença da proporção entre vizinhos e não vizinhos de vértices em um grafo G . Além disso, a linearidade do operador permite avaliar esse indicador que (a princípio) é quadrático em função de combinações lineares de \emptyset -flags. A prova do Teorema de Mantel na Seção 2.1.4 mostrará o poder dessa ideia.

2.1.4 Teorema de Mantel

Começamos com o clássico Teorema de Mantel. Mostraremos como expressar o Teorema usando a linguagem de álgebras de flag bem como recuperá-lo dos resultados com álgebras de flag.

Teorema 9 (“Mantel”). *Seja ϕ um funcional limite qualquer. Se $\phi(\text{triangle}) = 0$, então $\phi(\text{edge}) \leq \frac{1}{2}$.*

Em alto nível, o Teorema 9 pode ser visto como uma versão assintótica do Teorema 1: para grafos grandes, se a proporção de vértices que são triângulos tende a 0, então a proporção de áreas tende a no máximo $1/2$.

Antes de provar o Teorema 9, vamos ver como obter o Teorema 1 do Teorema 9. Para definir um funcional limite ϕ , precisamos de uma sequência convergente de grafos. Toda sequência crescente de grafos possui uma subsequência convergente. Assim, seja $(G_k)_{k \geq 0}$

uma sequência convergente de grafos livres de triângulos em que G_{i+1} é um blow-up de G_i para cada $i \geq 0$ e G_0 é o grafo para que se quer provar o Teorema 1. O Teorema 9 pode ser escrito como $e(G_k) \leq (\frac{1}{4} + o_k(1))|G_k|^2$, onde $o_k(1)$ é uma função que tende a zero quando k cresce.

Mas pela definição da sequência G_k , temos

$$e(G_k) = \frac{|G_k|^2}{|G_0|^2} e(G_0) \leq (\frac{1}{4} + o_k(1))|G_k|^2.$$

Logo, $e(G_0)/|G_0|^2 \leq (1/4 + o_k(1))$, e segue que $e(G_0)/|G_0|^2 \leq 1/4$, como desejado.

A prova a seguir reflete a estratégia geral que será utilizada para provas com álgebras de flag.

Prova do Teorema 9. Seja σ o tipo de tamanho 1 e considere o vetor

$$v = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \in \mathcal{A}^\sigma.$$

Veja que para qualquer homomorfismo $\psi: \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ temos $\psi(v^2) = \psi(v)^2 \geq 0$. Observe também que

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right)^2 \\ &= \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array}^2 - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array}^2 \\ &= \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right) - 2 \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

logo tomando $\psi = \phi \circ \llbracket \cdot \rrbracket$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(v^2) &= \phi \left(\left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket + \left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket - \left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket - \left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket + \left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket + \left\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right\rrbracket \right) \\ &= \frac{1}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) + \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right) - \frac{2}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) - \frac{2}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right) + \frac{1}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right) + \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \\ &= \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) - \frac{1}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) - \frac{1}{3} \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right) + \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, obtemos uma relação (não trivial) sobre funcionais limites com relação a \emptyset -flags de tamanho 3. Porém, o resultado do Teorema diz respeito a $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}$, que é um \emptyset de tamanho 2. Para associar os dois, usamos a expressão de 2.1, que é igual a zero em \mathcal{A}^\emptyset . Tomando $F = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}$, $n = 2$, obtemos

$$\bullet = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}. \tag{2.3}$$

De forma similar, para $F = \text{triângulo invertido}$, $n = 3$, obtemos

$$\text{triângulo invertido} = \text{triângulo} + \frac{2}{3} \text{V} + \frac{1}{3} \text{—} \cdot \cdot. \quad (2.4)$$

Combinando 2.4 e 2.2:

$$\begin{aligned} \phi(\text{—} \cdot \cdot) &\leq \phi\left(\text{triângulo} + \frac{2}{3} \text{V} + \frac{1}{3} \text{—} \cdot \cdot\right) + \frac{1}{2} \phi\left(\text{triângulo} - \frac{1}{3} \text{V} - \frac{1}{3} \text{—} \cdot \cdot + \cdot \cdot \cdot\right) \\ &= \frac{1}{2} \phi(\text{triângulo} + \text{V} + \text{—} \cdot \cdot + \cdot \cdot \cdot) + \phi(\text{triângulo}) - \frac{1}{3} \phi(\text{—} \cdot \cdot) \\ &\leq \frac{1}{2} \phi(\cdot) + \phi(\text{triângulo}) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde na última igualdade usamos que $\phi(\cdot) = 1$ para todo funcional limite ϕ e também a condição que $\phi(\text{triângulo}) = 0$. \square

A prova acima do Teorema de Mantel, ainda que aparentemente complicada, serve de exemplo de diversas propriedades e vantagens do método de álgebras de flag na abstração de propriedades de grafos:

1. A mesma prova pode ser usada para obter um resultado de supersaturação na forma $\phi() \leq \frac{1}{2} + \phi(\text{triângulo})$.
2. A prova essencialmente fornece informação estrutural sobre o caso extremal no teorema, já que devem valer as igualdades em 2.2 e em 2.5. A igualdade em 2.2 quer dizer que o número de vizinhos de quase todo vértice é quase igual ao número de seus não vizinhos, isto é, $n - o(n)$ dos vértices possuem grau exatamente $n/2 + o(n)$. Já a desigualdade em 2.5 quer dizer que $\phi(\text{—} \cdot \cdot) = 0$, ou seja, que apenas $o(n^3)$ tripla de vértices determinam exatamente 1 aresta. É imediato provar que isso significa que o grafo pode ser dividido em dois conjuntos, cada um com pelo menos $n/2 - o(n)$ vértices, de forma que há $o(n^2)$ arestas dentro de cada conjunto.
- 3.

A mesma prova também é um bom exemplo de um “roteiro” que se pode usar para provar resultados com álgebras de flag de forma automatizada. Para problemas de maximização de um valor (no caso de Mantel, de $\text{—} \cdot \cdot$) restrito a condições lineares em certos parâmetros do grafo ($\text{triângulo} = 0$), a estratégia é a seguinte:

- Escolher n e um tipo σ de tamanho k e expressar uma soma de quadrados usando os σ -flags de tamanho n .
- Utilizar o operador de média para obter uma expressão em σ -flags de tamanho n que é não negativa.
- Utilizar a relação de 2.1 para reescrever as somas dos σ -flags de tamanho n em função dos parâmetros que se deseja maximizar e cotar os coeficientes obtidos.

Iremos mostrar que é possível realizar todos esses passos utilizando uma programação semidefinida. Por simplicidade, quase sempre iremos omitir os homomorfismos lineares ϕ e ψ quando formos mostrar um resultado que vale para quaisquer tais homomorfismos: por exemplo, o Teorema 9 poderia ser enunciado de forma mais sucinta como “se $\triangle = 0$, então $\bullet \leq \frac{1}{2}$ ”.

A sucinta

2.2 Aplicações para a Conjectura 1

Teorema 10. Se $\triangle = 0$ e $\bullet \geq \frac{2}{5}$, então $\left\| \begin{smallmatrix} \bullet \\ 1 \end{smallmatrix} \right\| \leq \frac{2}{25}$.

O que o Teorema 10 diz em termos de grafos é que, se uma sequência convergente de grafos $(G_k)_{k \geq 0}$ (com $n_k := |G_k|$) satisfaz que G_k possui $o(n_k^3)$ triângulos e pelo menos $\frac{n_k^2}{5} + o(n_k^2)$ arestas, então ao escolher um vértice aleatoriamente ao acaso de G para fazer o embedding do tipo σ de tamanho 1 que faz parte de $\begin{smallmatrix} \bullet \\ 1 \end{smallmatrix}$, espera-se que o número de arestas na não vizinhança desse vértice seja no máximo $\frac{n_k^2}{25} + o(n_k^2)$. Em particular, para cada grafo G_k nessa sequência existe um vértice que possui $\frac{n_k^2}{25} + o(n_k^2)$ arestas na não vizinhança. Pela mesma prova obtida no Teorema 4, isso significa que

$$D(G_k) \leq \frac{n_k^2}{25} + o(n_k^2) \text{ para todo } k \geq 0. \quad (2.6)$$

No caso do Teorema 1, ao obter um resultado para sequências convergentes arbitrárias de grafos, escolhemos um grafo base G_0 e uma sequência convergente de blow-ups de G_0 e usamos que $e(G_k) = e(G_0) \cdot \frac{|G_k|^2}{|G_0|^2}$ para obter cotas (superiores) para $e(G_0)$ a partir de cotas (superiores) para G_k . No caso da primeira parte do Teorema 4, também iremos considerar uma sequência de blow-ups de um grafo livre de triângulos G_0 com pelo menos $\frac{|G_0|^2}{5}$ arestas. Então é claro que todo blow-up G_k de G_0 também é livre de triângulos e possui ao menos $\frac{|G_k|^2}{25}$ arestas, e podemos aplicar a cota de 2.6 para uma sequência convergente de blow-ups de G_0 . Para isso, precisamos do seguinte Lema:

Lema 3. Seja G um grafo e seja H um blow-up balanceado de G com $|H| = k|G|$. Então $D(H) = k^2 D(G)$.

Demonstração. Pelo Teorema 3, existe um conjunto canônico de arestas de $E(H)$ com $|F_H| = D(H)$. Se $F_H \subseteq E(H)$ é levado a $F_G \subseteq E(G)$ pelo homomorfismo canônico $\phi: H \rightarrow G$ dado pelo blow-up, então $|F_H| = k^2 |F_G|$ e $G - F_G$ é livre de triângulos. Portanto, $D(G) \leq D(H)/k^2$.

Para provar o outro lado, basta ver que se $G - F_G$ é livre de triângulos para algum $F_G \subseteq E(G)$, então o conjunto $F_H \subseteq E(H)$ canonicamente associado a F_G é tal que $|F_H| = k^2 |F_G|$ e

$H - F_H$ é livre de triângulos, logo $D(H) \leq k^2 D(G)$. □

Pelo Lema 3 e a desigualdade em 2.6, obtemos

$$\frac{n_k^2}{n_0^2} D(G_0) \leq D(G_k) \leq \frac{n_k^2}{25} + o(n_k^2),$$

logo $D(G_0)^2 \leq \frac{n_0^2}{25} + o(1)$, de onde segue $D(G_0)^2 \leq \frac{n_0^2}{25}$, como desejado.

Dessa forma, o Teorema 10 implica a Conjectura 1 para grafos com pelo menos $n_0^2/5$ arestas.

Prova do Teorema 10. Veja que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[\left(3 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} \right)^2 \right] \\ &= 9 \left[\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \\ 1 \end{array} \right] - 12 \left[\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} \right] \\ &= - \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - \frac{8}{3} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array}, \end{aligned}$$

ou simplesmente $-12 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} + 8 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \leq 0$. Além disso,

$$-12 = -12 \left(\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{45}{2} \cdot \frac{2}{5} \leq \frac{45}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} \leq \frac{45}{2} \left(\frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{25}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} = \frac{25}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array}. \quad (2.9)$$

Somando 2.7, 2.8 e 2.9, obtemos

$$\frac{25}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} - 3 \leq -12 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 8 \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} \leq 0,$$

e concluimos que $\left[\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \square \\ 1 \end{array} \right] = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \bullet \\ \bullet \end{array} \leq \frac{2}{25}$. □

Podemos escrever a prova acima como um programa semidefinido:

O ponto é que ter a linguagem de flag algebras facilita obter cotas a partir da ideia de “cortes locais” e daí pode automatizar o processo.

Teorema 11 (Balogh-Clemen-Lidický). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \geq 0.3197 \binom{n}{2}$;

$$3. D(G) \leq \frac{n^2}{25} \text{ se } e(G) \leq 0.2486 \binom{n}{2}.$$

Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer “mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso”. Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 5. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d - 2\}$ e arestas entre i e $i + d + j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d - 1)$ -ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.

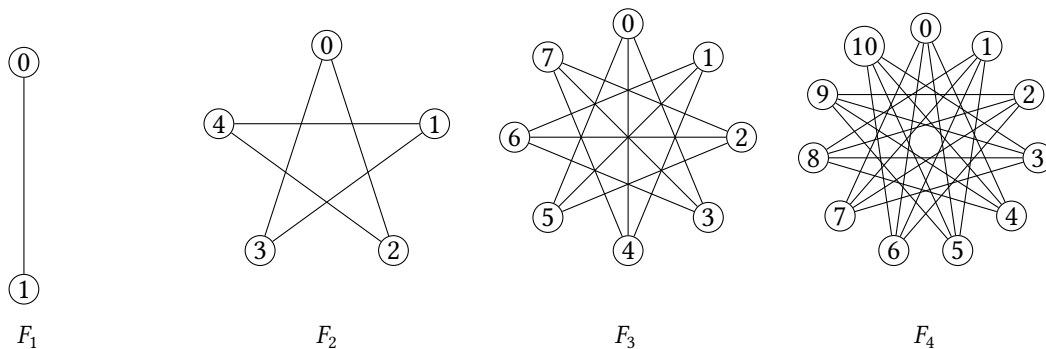


Figura 3.1: Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d -regular e livre de triângulos.

Teorema 12 (JIN, 1995). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$.

Teorema 13 (CHEN *et al.*, 1997). Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$, então G está contido em um blow-up de F_d .

Lema 4. Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ tais que $G - F_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 1.

Demonstração. Se $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < \frac{n^2}{5}$, então

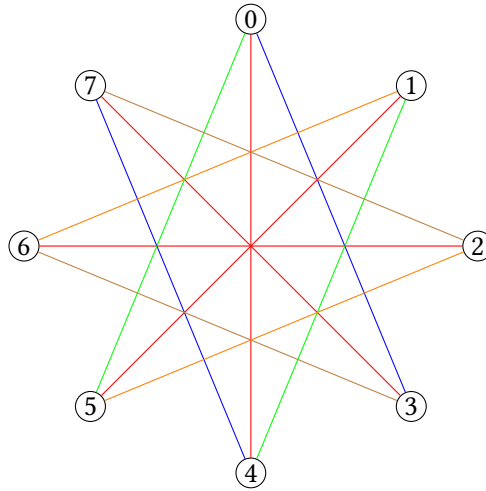
$$5 \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

de forma que para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < \frac{n^2}{25}$. \square

Esse Lema vai funcionar para F_4 , mas não para F_5 .

Teorema 14. Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.

Demonstração. Veja que $4/11 > 10/29$, logo pelo Teorema 12, temos que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_9$. Em particular, $\chi(G) \leq \chi(F_9) = 3$. Assim, pelo Teorema 13 com $d = 3$, vale que $G \xrightarrow{\text{hom}} F_4$. Considere a seguinte partição das arestas de G , em que cada classe está representada por um vértice e todas as arestas entre o mesmo par de classes estão na mesma parte:



Como a remoção de cada uma das partes deixa G bipartido, podemos aplicar o Lema 4 a G . Isso conclui a prova do Teorema. \square

Referências

- [CARLI SILVA *et al.* 2016] Marcel K de CARLI SILVA, Fernando Mário de OLIVEIRA FILHO e Cristiane Maria SATO. “Flag algebras: a first glance”. *Nieuw Arch. Wiskd.*(5) 17.3 (2016), pp. 193–199 (citado na pg. 3).
- [CHEN *et al.* 1997] Chuan-Chong CHEN, Guoping P JIN e Khee Meng KOH. “Triangle-free graphs with large degree”. *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 13).
- [ERDŐS 1975] Paul ERDŐS. “Problems and results in graph theory and combinatorial analysis”. *Proc. British Combinatorial Conj.*, 5th (1975), pp. 169–192 (citado na pg. 1).
- [JIN 1995] Guoping JIN. “Triangle-free four-chromatic graphs”. *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 13).