Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de
Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento. Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós-Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. É uma boa ideia usar o sítio www.grammarly.com na preparação de textos em inglês. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Defininimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade)**.** *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G, com $\phi\colon V(H) \to V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a ϕ* se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G. Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. *Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então*

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS)**.** *Seja G um grafo livre de triângulo com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \left\{m - \frac{m^2}{4n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)}\right\}.$$

Teorema 5. *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.*

Teorema 6 (Erdős - Győri - Simonovits)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.*

A prova é algorítmica.

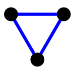
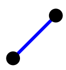
Capítulo 2

Álgebras de flag

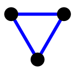
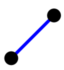
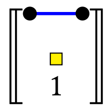
2.1 Preliminares

Seja $k \geq 0$ um inteiro. Um *tipo* de *tamanho* k é um grafo G com $V(G) = [k]$, i.e. é um grafo com todos os seus vértices rotulados. O tipo vazio é denotado por $\emptyset$.

Seja σ um tipo de tamanho k. Um *σ-flag* é um par (F, ϕ) em que $\phi\colon\ [k] \to V(F)$ é um homomorfismo de grafos injetor tal que $F[\phi([k])] \cong \sigma$.

Exemplo 1 (Mantel)**.** Se  $= 0$, então  $\leq \frac{1}{2}$.

2.2 Aplicações para a Conjectura 1

Teorema 7. *Se*  $= 0$ *e*  $\geq \frac{2}{25}$, *então*  $\leq \frac{2}{25}$.

Corolário 2. *Seja G um grafo com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas. Então a Conjectura 1 vale para G.*

O ponto é que ter a linguagem de flag algebras facilita obter cotas a partir da ideia de "cortes locais" e daí pode automatizar o processo.

Teorema 8 (Balogh-Clemen-Lidický)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer "mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso". Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 2. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d-2\}$ e arestas entre i e $i+d+j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d-1)$-ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.

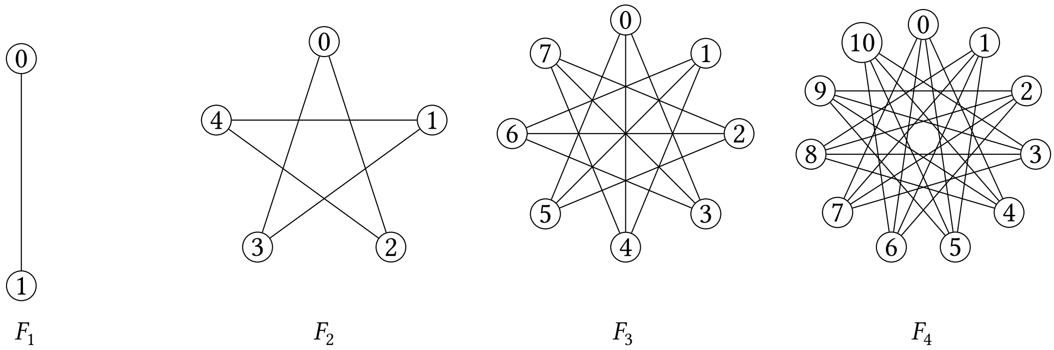


Figura 3.1: *Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d-regular e livre de triângulos.*

Teorema 9 (Jin, 1995)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que* $10n/29$*. Então* $G \xhookrightarrow{hom} F_9$.

Teorema 10 (Chen *et al.*, 1997)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e* $\chi(G) \leq 3$*. Se* $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$*, então G está contido em um blow-up de* F_d*.*

Lema 1. *Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos* $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ *tais que* $G - F_i$ *é bipartido para cada* $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$*. Então G satisfaz a Conjectura 1.*

Demonstração. Se $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < \frac{n^2}{5}$, então

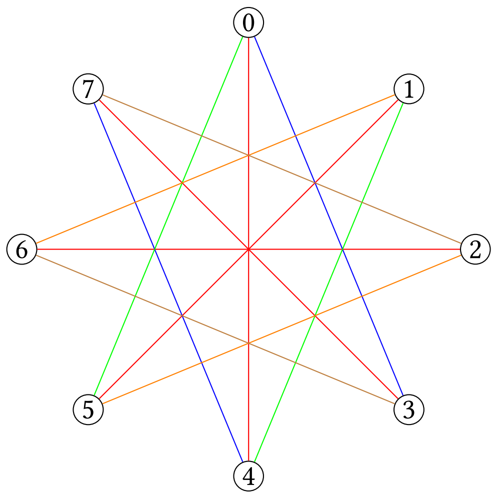
$$5\min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

de forma que para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < \frac{n^2}{25}$. □

Esse Lema vai funcionar para F_4, mas não para F_5.

Teorema 11. *Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*

Demonstração. Veja que $4/11 > 10/29$, logo pelo Teorema 9, temos que $G \xhookrightarrow{\text{hom}} F_9$. Em particular, $\chi(G) \leq \chi(F_9) = 3$. Assim, pelo Teorema 10 com $d = 3$, vale que $G \xhookrightarrow{\text{hom}} F_4$. Considere a seguinte partição das arestas de G, em que cada classe está representada por um vértice e todos as arestas entre o mesmo par de classes estão na mesma parte:



Como a remoção de cada uma das partes deixa G bipartido, podemos aplicar o Lema 1 a G. Isso conclui a prova do Teorema. □

Referências

[Chen *et al.* 1997] Chuan-Chong Chen, Guoping P Jin e Khee Meng Koh. “Triangle-free graphs with large degree”. *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 5).

[Erdős 1975] Paul Erdős. “Problems and results in graph theory and combinatorial analysis”. *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (citado na pg. 1).

[Jin 1995] Guoping Jin. “Triangle-free four-chromatic graphs”. *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 5).