Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Grafos: legal demais!

Marcelo Machado Lage

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de
Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo
2025

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Grafos: legal demais!**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, constituído de uma sequência de frases concisas e objetivas, em forma de texto. Deve apresentar os objetivos, métodos empregados, resultados e conclusões. O resumo deve ser redigido em parágrafo único, conter no máximo 500 palavras e ser seguido dos termos representativos do conteúdo do trabalho (palavras-chave). Deve ser precedido da referência do documento. Texto texto. Texto texto.

Palavras-chave: Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **Graphs: so cool!**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Elemento obrigatório, elaborado com as mesmas características do resumo em língua portuguesa. De acordo com o Regimento da Pós-Graduação da USP (Artigo 99), deve ser redigido em inglês para fins de divulgação. É uma boa ideia usar o sítio www.grammarly.com na preparação de textos em inglês. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text. Text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text text.

Keywords: Keyword1. Keyword2. Keyword3.

Sumário

Capítulo 1

Resultados clássicos

Seja G um grafo. Defininimos $D(G)$ como o menor tamanho de um $F \subseteq E(G)$ tal que $G - F$ é bipartido.

Teorema 1 (Mantel)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Além disso, se vale a igualdade então G é bipartido completo.*

Teorema 2 (Estabilidade)**.** *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

Conjectura 1 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido pela remoção de no máximo $\frac{n^2}{25}$ arestas, i.e.*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

Uma Conjectura relacionada:

Conjectura 2 (Erdős, 1975)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $X = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq \frac{n^2}{50}$.*

Observe que o Teorema 2 prova a Conjetura para grafos suficientemente densos (com pelo menos $\frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{25}$ arestas).

Definição 1. Sejam G um grafo e H um blow-up de G, com $\phi\colon V(H) \to V(G)$ sendo um homomorfismo que define esse blow-up. Dizemos que um $S \subseteq E(H)$ é *canônico com relação a ϕ* se para quaisquer $e, f \in E(H)$ com $\phi(e) = \phi(f)$ vale que $e \in S \iff f \in S$. Em outras palavras, entre cada par de classes de H escolhemos ou todas as arestas entre essas classes ou não escolhemos nenhuma dessas arestas.

Se ϕ for claro do contexto, iremos omitir e dizer apenas que o conjunto de arestas do blow-up é simplesmente *canônico*.

Teorema 3 (Simetrização)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos e seja H um blow-up de G. Então existe $F \subseteq E(H)$ canônico com $|F| = D(H)$ e tal que $G - F$ é bipartido.*

Corolário 1. *Seja H um blow-up balanceado de C_5 com n vértices. Então*

$$D(H) = \frac{n^2}{25}.$$

Em particular, a Conjectura 1 (se verdadeira) dá a melhor constante possível.

Teorema 4 (EFPS)**.** *Seja G um grafo livre de triângulo com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \left\{ m - \frac{m^2}{4n}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\}.$$

Teorema 5. *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 1 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas.*

Teorema 6 (Erdős - Győri - Simonovits)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{25}$ arestas. Então existe um grafo H também com n vértices tal que H é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H)$ e $D(G) \leq D(H)$.*

A prova é algorítmica.

Capítulo 2

Álgebras de flag

A estrutura desse capítulo segue fortemente o que é apresentado em Silva, Sato *et al.*, 2016 e também inspirado nas lecture notes do Andrzej Grzesik.

2.1 Preliminares

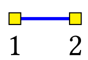
Seja $k \geq 0$ um inteiro. Um *tipo* de *tamanho* k é um grafo G com $V(G) = [k]$, i.e. é um grafo com todos os seus vértices rotulados com os inteiros de 1 a k. O tipo vazio (grafo vazio) é denotado por $\emptyset$.

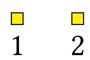
Seja σ um tipo de tamanho k e F um grafo com pelo menos k vértices. Um σ-*flag* é um par (F, θ) em que $\theta\colon [k] \to V(F)$ é um homomorfismo de grafos injetor tal que $F[\theta([k])] \cong \sigma$. Em outras palavras, σ-flag é um grafo *parcialmente* rotulado, em que o subgrafo rotulado é uma cópia de σ.

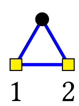
Note que todo tipo σ é um (σ, θ)-flag para θ a função identidade em $[k]$. Em geral, iremos omitir θ da definição de uma flag se a sua definição for clara do contexto.

Para definir isomorfismos entre σ-flags, fazemos exatamente como para grafos, com a condição adicional que os rótulo devem ser preservados pela bijeção. Formalmente, dizemos que dois σ-flags (G_1, θ_1) e (G_2, θ_2) são *isomórficos* se existe um isomorfismo $\theta\colon V(G_1) \to V(G_2)$ tal que $\theta(\theta_1(i)) = \theta_2(i)$ para cada $i \in [|\sigma|]$.

Exemplo 1. 1. Sejam

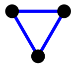
$\sigma_1 =$ 

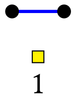
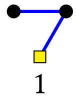
e $\sigma_2 =$ 

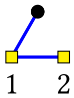
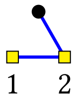
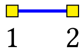
dois tipos (ambos com $k = 2$ vértices). Então se $G =$ 

e θ é a identidade em $\{1, 2\}$, temos que (G, θ) é um σ_1-flag mas não é um σ_2-flag.

Usando a notação apresentada anteriormente, podemos simplesmente escrever que G é um σ_1-flag.

2.  é um $\emptyset$-flag, uma vez que nenhum de seus vértices está rotulado.

3.  é um σ_3-flag, onde σ_3 é o (único) tipo com exatamente um vértice.  é outro σ_3-flag.

4.  e  são dois  -flags, que são isomórficos como grafos mas não são isomórficos como flags.

Finalmente, para cada tipo σ e $n \geq |\sigma|$, definimos $\mathcal{F}_n^\sigma$ como o conjunto de todos os σ-flags de tamanho n.

2.1.1 Densidade e limites

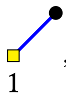
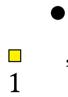
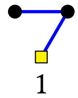
Para continuar a definição de flag algebras, será importante definir densidades e suas propriedas. Sejam F e G dois grafos (sem rótulos especiais nos vértices) e defina $c(F, G)$ como a quantidade de subgrafos *induzidos* de G que são isomorfos a f. Então definimos a *densidade de F em G* como

$$p(F, G) := \frac{c(F, G)}{\binom{|G|}{|F|}}.$$

De outra forma, $p(F; G) = \mathbb{P}_U[G[U] \cong F]$ é a probabilidade que um subconjunto U de $V(G)$ com tamanho exatamente $|F|$ induza um subgrafo isomorfo a F.

Por exemplo, temos $p(K_2; G) = \frac{e(G)}{\binom{n}{2}}$ e $p(K_3; G)$ é a probabilidade de uma tripla de vértices distintos de G escolhida uniformemente ao acaso formar um triângulo.

De forma similar, para um tipo σ dado, um σ-flag (G, θ) e um conjunto de σ-flags $F_1, F_2, \ldots, F_t$, deifnimos a *densidade de $F_1, F_2, \ldots, F_t$ em G* como a probabilidade que conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_t \subseteq V(G) \setminus \operatorname{Im}\theta$ dois a dois disjuntos escolhidos uniformemente ao acaso satisfaçam $(G[U_i \cup \operatorname{Im}\theta], \theta) \cong F_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Denotamos essa densidade como $p(F_1, F_2, \ldots, F_t; G)$.

Exemplo 2. Seja σ o tipo de tamanho 1. Sejam $F_1 =$  $, F_2 =$  $, G =$  três σ-flags. Então $p(F_1, F_2; G) = \frac{1}{2}$.

Os dois seguintes lemas fornecem as relações para a "regra da cadeia" das densidades.

Lema 1. *Sejam F e G dois σ-flags. Se n é um inteiro positivo tal que $|F| \leq n \leq |G|$, então*

$$p(F; G) = \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')p(F'; G).$$

Lema 2. *Suponha que $F_1, F_2, \dots, F_t$ e G são σ-flags. Se n é um inteiro positivo tal que*

$$\sum_{i=1}^{t}(|F_i| - |\sigma|) \leq n - |\sigma| \leq |G| - |\sigma|,$$

então para todo $s \in [t]$ vale

$$p(F_1, F_2, \dots, F_t; G) = \sum_{F \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F_1, F_2, \dots, F_s; F) p(F, F_{s+1}, F_{s+2} \dots, F_t; G)$$

Agora, podemos definir a noção de funcionais limites e álgebras de flag.

Definição 2. Uma sequência de grafos $(G_1, G_2, \dots)$ é chamada de *crescente* se $(|G_1|, |G_2|, \dots)$ é estritamente crescente. Uma sequência crescente de grafos é chamada de *convergente* se para todo grafo F vale que a sequência

$$(p(F; G_1), p(F; G_2), \dots)$$

é convergente.

Exemplo 3.

1. A sequência de grafos completos $(K_1, K_2, K_3, \dots)$ é convergente.
2. A sequência de grafos bipartidos completos em que uma classe tem o tamanho da outra também é convergente: $(K_{1,2}, K_{2,4}, K_{3,6}, \dots)$.
3. A sequência de grafos de Andrásfai $(F_1, F_2, F_3, \dots)$ (que serão estudados no Capítulo 3) é um exemplo menos trivial de sequência convergente.

Sequências convergentes e crescentes de σ-flags são definidas de forma análoga para qualquer tipo σ. Para cada sequência convergente de σ-flags $(A_1, A_2, \dots)$, podemos definir uma função ϕ que atribui a cada σ-flag F o real $\phi(F) := \lim_{k\to\infty} p(F; A_k)$. A tais funções ϕ chamamos de *limites funcionais.*

Na seção 2.2, iremos apresentar uma estrutura algébrica para flags the permitirão desenvolver propriedades gerais de limites funcionais. Então, na seção 2.3, mostraremos como traduzir os resultados obtidos para limites funcionais para a linguagem clássica de grafos e aplicá-las ao nosso problema.

2.2 Estrutura algébrica

Agora, vamos colocar uma estrutura algébrica para os flags.

Seja $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$ o espaço vetorial gerado pelas combinações lineares de σ-flags com coeficientes (isto é, o espaço de somas formais de múltiplos reais de σ-flags). Podemos estender linearmente qualquer limite funcional para $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$.

Utilizando o Lema 1, obtém-se que para qualquer σ-flag F e $n \geq |F|$ vale

$$\phi(F) = \phi\left(\sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')\right),$$

ou seja,

$$F - \sum_{F' \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F; F')$$

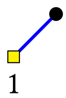
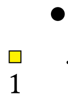
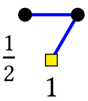
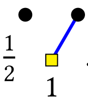
is in the kernel of ϕ para todo funcional limite ϕ. We can then define the vector space $\mathcal{A}^\sigma := \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma / \ker \phi$. It is useful to note that $\phi(\sigma) = p(\sigma; F) = 1$ for every σ-flag F, so $\mathcal{A}^\sigma$ has at least one nonzero element.

A principal vantagem de trabalhar com $\mathcal{A}^\sigma$ é que é possível definir multiplicação entre seus elementos (transformando esse espaço vetorial em uma álgebra de fato).

Definição 3. Sejam F e G σ-flags e seja $n \geq |F| + |G| - |\sigma|$. Definimos o produto de F e G como

$$F \cdot G = \left(\sum_{H \in \mathcal{F}_n^\sigma} p(F, G; H) H \right) \in \mathcal{A}^\sigma.$$

É possível provar que o produto acima está bem definido, é comutativo e associativo.

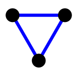
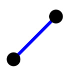
Exemplo 4. Sejam $F_1 =$  e $F_2 =$ . Então $F \cdot G = \frac{1}{2}$  $+ \frac{1}{2}$ .

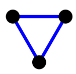
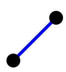
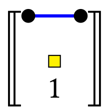
Agora, podemos enunciar o principal resultado das álgebras de flag.

Teorema 7 (ϕ é homomorfismo de $\mathcal{A}^\sigma$ para $\mathbb{R}$)**.** *Se f, g são dois elementos da álgebra $\mathcal{A}^\sigma$ e ϕ é um funcional limite qualquer, então*

$$\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g).$$

2.3 Aplicações para a Conjectura 1

Exemplo 5 (Mantel)**.** Se  $= 0$, então  $\leq \frac{1}{2}$.

Teorema 8. *Se*  $= 0$ *e*  $\geq \frac{2}{25}$, *então*  $\leq \frac{2}{25}$.

Corolário 2. *Seja G um grafo com n vértices e pelo menos $\frac{n^2}{5}$ arestas. Então a Conjectura 1 vale para G.*

O ponto é que ter a linguagem de flag algebras facilita obter cotas a partir da ideia de "cortes locais" e daí pode automatizar o processo.

Teorema 9 (Balogh-Clemen-Lidický)**.** *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \geq 0.3197\binom{n}{2}$;

3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ *se* $e(G) \leq 0.2486\binom{n}{2}$.

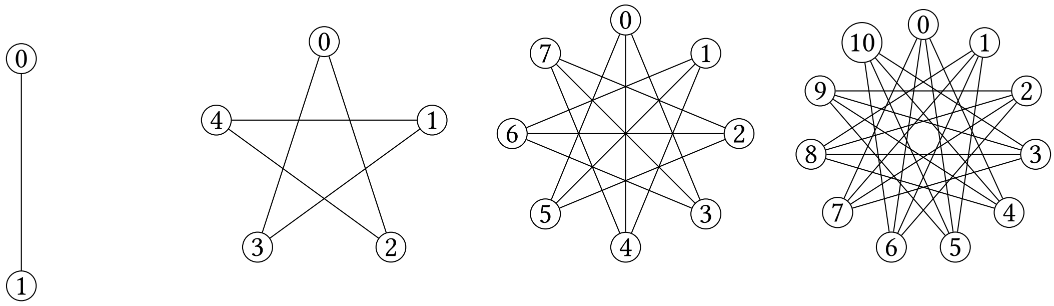
Capítulo 3

Grau limitado

Vamos tentar resolver quando $\delta(G)$ é grande? Ok, ok, você vai dizer "mas o resultado do capítulo 2 já cobre isso". Verdade, mas queremos mais *estrutura* sobre os conjuntos que geram $D(G)$, então ainda vale a pena estudar esses casos!

Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo.

Definição 4. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d-2\}$ e arestas entre i e $i+d+j$ para cada $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d-1)$-ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes dele.



F_1 F_2 F_3 F_4

Figura 3.1: *Grafos de Andrásfai para $d = 1$ a $d = 4$. Observe que F_d é d-regular e livre de triângulos.*

Teorema 10 (Jin, 1995). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \xhookrightarrow{hom} F_9$.*

Teorema 11 (Chen *et al.*, 1997). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$, então G está contido em um blow-up de F_d.*

Lema 3. *Seja G um grafo e suponha que existem conjuntos dois a dois disjuntos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$ tais que $G - F_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 1.*

Demonstração. Se $e(G) \geq \frac{n^2}{5}$, então o resultado segue do Teorema 5. Por outro lado, se $e(G) < \frac{n^2}{5}$, então

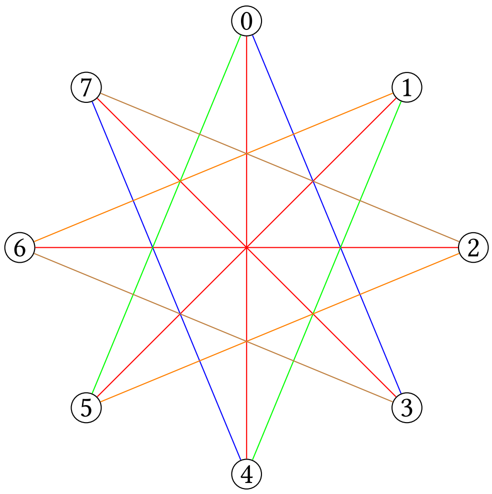
$$5\min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

de forma que para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < \frac{n^2}{25}$. □

Esse Lema vai funcionar para F_4, mas não para F_5.

Teorema 12. *Se G é um grafo livre de triângulo com n vértices e $\delta(G) > 4n/11$, então $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$.*

Demonstração. Veja que $4/11 > 10/29$, logo pelo Teorema 10, temos que $G \xhookrightarrow{\text{hom}} F_9$. Em particular, $\chi(G) \leq \chi(F_9) = 3$. Assim, pelo Teorema 11 com $d = 3$, vale que $G \xhookrightarrow{\text{hom}} F_4$. Considere a seguinte partição das arestas de G, em que cada classe está representada por um vértice e todos as arestas entre o mesmo par de classes estão na mesma parte:



Como a remoção de cada uma das partes deixa G bipartido, podemos aplicar o Lema 3 a G. Isso conclui a prova do Teorema. □

Referências

[Chen *et al.* 1997] Chuan-Chong Chen, Guoping P Jin e Khee Meng Koh. "Triangle-free graphs with large degree". *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (citado na pg. 9).

[Erdős 1975] Paul Erdős. "Problems and results in graph theory and combinatorial analysis". *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (citado na pg. 1).

[Jin 1995] Guoping Jin. "Triangle-free four-chromatic graphs". *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (citado na pg. 9).

[Silva, Sato *et al.* 2016] Marcel K Silva, Cristiane Maria Sato *et al.* "Flag algebras: a first glance". *arXiv preprint arXiv:1607.04741* (2016) (citado na pg. 3).