

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Sobre uma conjectura de Erdős acerca de
grafos livres de triângulos**

Marcelo Machado Lage

MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisor: Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processos nº 2025/06707-6, 2025/14743-2

São Paulo
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Resumo

Marcelo Machado Lage. **Sobre uma conjectura de Erdős acerca de grafos livres de triângulos**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Grafos livres de triângulos são objetos de grande importância na Teoria Extremal dos Grafos. O clássico Teorema de Mantel mostra o limite para o número máximo de arestas que um tal grafo pode ter, e, a partir da década de 1960, perguntas mais desafiadoras vêm sendo postas relacionadas a grafos livres de triângulos. Nesse trabalho, investigamos questões de estabilidade em grafos livres de triângulos e, particularmente, uma conjectura proposta por Erdős em 1975 sobre a distância entre grafos livres de triângulos e grafos bipartidos.

Inicialmente, apresentamos resultados parciais para a conjectura utilizando técnicas clássicas em Teoria Extremal dos Grafos. Em seguida, apresentamos duas técnicas modernas que têm sido usadas para avançar em conjecturas sobre grafos livres de triângulos: as álgebras de flag de Razborov, que permitem automatizar certas estratégias de prova que generalizam os métodos clássicos usando cortes locais; teoremas de homomorfismos em grafos com restrição de grau mínimo, que facilitam o estudo de objetos complexos a partir de uma perspectiva mais simples. Por fim, obtemos avanços parciais na conjectura principal utilizando esses dois métodos, que se complementam pela força expressiva e versatilidade computacional das álgebras de flag e pela simplificação estrutural dos teoremas de homomorfismos.

Palavras-chave: Grafos. Combinatória. Álgebras de flag.

Abstract

Marcelo Machado Lage. **On a conjecture by Erdős about triangle-free graphs.**
Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics, Statistics and Computer
Science, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Triangle-free graphs are objects of great importance in Extremal Graph Theory. A classic result by Mantel establishes the limit for the maximum number of edges a triangle-free graph can have. Starting in the 1960s, more challenging questions have been posed about such graphs. In this work, we investigate stability questions related to triangle-free graphs, particularly a conjecture proposed by Erdős in 1975 regarding the distance between triangle-free graphs and bipartite graphs.

Initially, we present partial results to the conjecture using classical techniques in Extremal Graph Theory. Then, we present and apply two modern techniques to advance the conjecture: Razborov's flag algebras, which allow for the automatization of certain proof strategies that generalize the classical methods using local cuts, and homomorphism theorems in graphs with minimum degree restrictions, which facilitate the study of complex objects by offering a simpler perspective. We obtain partial results for the conjecture using both methods, which complement each other through the expressive power and computational versatility of the flag algebras and the structural simplification afforded by the homomorphism theorems.

Keywords: Graphs. Combinatorics. Flag algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Resultados clássicos	5
2.1 Estabilidade em grafos livres de triângulos	5
2.2 Avanços parciais na Conjectura 2.4	8
3 Álgebras de flag	11
3.1 Conceitos iniciais	11
3.1.1 Densidades	11
3.1.2 O Teorema de Mantel	13
3.1.3 A álgebra	16
3.2 Aplicações	19
3.2.1 Cortes locais	20
3.2.2 Construindo o programa	22
3.3 Considerações sobre software e questões numéricas	24
4 Restrições de grau mínimo	27
4.1 Grafos livres de triângulos com grau mínimo alto	27
4.1.1 Grafos de Andrásfai	28
4.2 A Conjectura 2.4 para grafos de Andrásfai	28
4.2.1 Condição 1	29
4.2.2 Condição 2	30
5 Conclusão	33
Referências	35

Introdução

Uma das perguntas mais fundamentais em Teoria Extremal dos Grafos é “qual o maior número possível de arestas em um grafo com n vértices sem cópias de H como subgrafo?” Os celebrados teoremas de Turán e Erdős-Stone, e Erdős-Kovari-Sós dão respostas complementares para essa pergunta quantitativa, e muitas vezes (como no caso dos dois primeiros) fornecem também respostas qualitativas. De fato, se H não é bipartido, o Teorema de Erdős-Stone diz que um grafo que atinja a cota superior deve se aproximar de um grafo $(\chi(H) - 1)$ -partido, onde $\chi(H)$ é o número cromático de H . Para mais detalhes, recomendamos o livro [4].

A resposta (numérica e estrutural) para essa pergunta no caso em que H é um *triângulo* é um dos resultados mais antigos em Teoria Extremal dos Grafos, tendo sido provado por Mantel em 1907: um grafo com n vértices sem triângulos possui no máximo $n^2/4$ arestas, e se a cota é atingida com igualdade, então H é bipartido. A partir das décadas de 1960 e 1970, com o trabalho de Erdős, Simonovits, Andrásfai e outros, a interação entre restrições numéricas e restrições estruturais em grafos introduz perguntas diversas, entre elas o estudo da *estabilidade*.

A estabilidade se refere justamente ao comportamento de grafos que, próximos ao limiar para o qual uma propriedade acontece, se aproximam de um exemplo “extremal”. Para o Teorema de Mantel, uma pergunta geral que se pode fazer é “quão próximo de ser bipartido um grafo livre de triângulos pode estar”? Em 1975, Erdős conjecturou que todo grafo livre de triângulos com n vértices pode ser tornado bipartido deletando no máximo $n^2/25$ das suas arestas.

O caso geral dessa conjectura permanece em aberto até a data da conclusão deste texto. Neste trabalho, realizamos um estudo da conjectura, dos resultados clássicos provados em direção a estabilidade em grafos livres de triângulos e posteriormente apresentamos e empregamos duas ferramentas modernas (álgebras de flag e teoremas de homomorfismos relacionados a condições de grau mínimo) para obter avanços parciais na direção do caso geral da conjectura.

Estrutura do trabalho

Organizamos os capítulos subsequentes como segue.

- No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos e fixamos a notação que será utilizada ao longo deste trabalho.

- No Capítulo 2, discutimos uma breve história do problema e resultados parciais clássicos.
- No Capítulo 3, apresentamos as álgebras de flag e a técnica de cortes locais para obter resultados numéricos na direção da conjectura principal.
- No Capítulo 4, discutimos teoremas de homomorfismos e a conjectura principal para grafos de grau mínimo alto.
- No Capítulo 5, discutimos brevemente os resultados obtidos e direções futuras de pesquisa.

Capítulo 1

Preliminares

Um grafo G é um par de conjuntos finitos (V, E) , onde V é o conjunto de *vértices* de G , e E é o conjunto de *arestas* (pares não ordenados de vértices). Escrevemos $v(G)$ (ou $|G|$) e $e(G)$ para representar a cardinalidade de V e E , respectivamente. Dado um grafo G , usamos $V(G)$ e $E(G)$ para representar seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Escrevemos, por simplicidade, uv (ou vu) para denotar a aresta $\{u, v\} \in E(G)$. Se a aresta uv é um elemento de $E(G)$, então dizemos que u e v são *vizinhos* (em G). A *vizinhança* de v (em G) é definida como $N_G(v) := \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, e o *grau* de v (em G) é definido como $d_G(v) := |N_G(v)|$. Quando estiver claro a que grafo G estamos nos referindo, escrevemos simplesmente $N(v)$ e $d(v)$. Definimos o grau mínimo de G como $\min_{v \in V(G)} d_G(v)$. Dizemos que G é *d-regular* se $d_G(v) = d$ para todo $v \in V(G)$.

Um grafo H é dito *subgrafo* de um grafo G e escrevemos $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Ademais, se $V(G) = V(H)$, dizemos que H é um subgrafo *gerador* de G . Se um grafo G não contém nenhum subgrafo isomorfo a H , dizemos que G é *livre de H* ou *H -livre*. Para qualquer família \mathcal{H} de grafos, dizemos que G é *livre de \mathcal{H}* ou *\mathcal{H} -livre* se G é H -livre para cada $H \in \mathcal{H}$. Dado um subconjunto $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G[S]$ o grafo $(S, E(G) \cap \binom{S}{2})$. Para cada $S \subseteq V(G)$, definimos $G - S := G[V(G) \setminus S]$, e para cada $F \subseteq E(G)$, definimos $G - F := (V(G), E(G) \setminus F)$.

Dizemos que um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* (em G) se $G[S]$ não possui nenhuma aresta. Um grafo com n vértices e $\binom{n}{2}$ arestas é chamado de *completo*. O grafo completo com conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ é denotado K_n . Definimos o *k-ciclo* C_k como o grafo com conjunto de vértices $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ e conjunto de arestas $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k-1, k\}, \{k, 1\}\}$.

Se G é um grafo tal que $V(G)$ admite uma partição $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ em que cada A_i é um conjunto independente em G , então dizemos que G é *r-partido*, e (A_1, A_2, \dots, A_r) é uma *r-partição* de G . Cada A_i é chamado de uma *classe* da *r-partição*. Dizemos que G é *r-partido completo* se $E(G) = \cup_{1 \leq i < j \leq r} G[A_i \cup A_j]$. Um grafo 2-partido é chamado de *bipartido*, e uma 2-partição de *bipartição*. O menor r tal que G é *r-partido* é chamado de *número cromático* de G e denotado $\chi(G)$.

Um conceito importante nessa pesquisa é o de um *blow-up* G de um grafo H , que é

um grafo G em que, para cada $v \in V(H)$, existe $S_v \subseteq V(G)$ tal que

- $\{S_v : v \in V(H)\}$ é uma partição de $V(G)$, e
- Para cada $xy \in E(G)$ e $u, v \in V(H)$, vale que $(x, y) \in S_u \times S_v \iff uv \in E(H)$.

Um blow-up é dito *balanceado* se todos os conjuntos S_v têm a mesma cardinalidade. Se um grafo G é subgrafo de um blow-up de um grafo H , dizemos que G é *homomórfico* a H , e escrevemos $G \hookrightarrow H$.

Capítulo 2

Resultados clássicos

Nesse capítulo, apresentaremos resultados clássicos sobre grafos livres de triângulos, bem como enunciamos a conjectura que iremos explorar nos demais capítulos deste trabalho.

2.1 Estabilidade em grafos livres de triângulos

Historicamente, um dos primeiros resultados provados no que futuramente viria a ser conhecido como Teoria Extremal dos Grafos é o Teorema de Mantel.

Teorema 2.1 ([23]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então $e(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. Além disso, $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se, e somente se, G é um grafo bipartido completo em que uma das classes tem tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$, e a outra tem tamanho $\lceil n/2 \rceil$.*

Omitimos a prova do Teorema 2.1 nessa seção. No Capítulo 3, apresentaremos uma prova do Teorema 2.1 usando ferramentas modernas de Teoria Extremal dos Grafos, que servirá de motivação para o restante do Capítulo 3. De toda forma, provas elementares do Teorema 2.1 podem ser encontradas nas referências básicas da área (ver [4]).

O Teorema 2.1 impõe uma restrição bastante forte sobre grafos livres de triângulos muito *densos* (isto é, grafos com muitas arestas). Ao mesmo tempo que se permite que um grafo livre de triângulos tenha aproximadamente metade das arestas “disponíveis” (uma vez que o número máximo de arestas possíveis em um grafo com n vértices é $\binom{n}{2} \approx 2 \cdot \frac{n^2}{4}$), ele impõe uma forte restrição estrutural sobre tais grafos: para cada n , existe essencialmente um *único* grafo livre de triângulos com n vértices e $e(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

De forma paralela, podemos pensar em formas gerais de descrever grafos livres de triângulos e maximizar o número de arestas disponíveis. Por exemplos, os grafos bipartidos são claramente livres de triângulos, pois para quaisquer três vértices do grafo há dois na mesma parte pelo Princípio da Casa dos Pombos, e tais dois vértices não fazem parte de um triângulo pois não são vizinhos. Além disso, um grafo bipartido G com bipartição $V(G) = A \cup B$ possui, no máximo $|A||B| = |A|(n - |A|) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas, com igualdade se e somente se $\{|A|, |B|\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\}$.

Em conclusão, observa-se uma relação muito próxima entre a família de grafos livres de triângulos densos e a família de grafos bipartidos, e o Teorema 2.1 sugere uma aproximação entre as duas famílias quando a densidade do grafo aumenta. É portanto natural se perguntar se se estende tal analogia entre as duas classes de grafos: *quão “distante” pode estar um grafo livre de triângulos de ser bipartido?* A noção de distância que iremos utilizar é formalizada pela definição a seguir:

Definição 2.2. Seja G um grafo. Definimos $D(G)$ como o menor tamanho de um conjunto de arestas $F \subseteq G$ tal que $G - F := (V(G), E(G) \setminus F)$ é bipartido.

O próximo resultado é um teorema clássico de *estabilidade*, e dá uma resposta inicial para a nossa pergunta.

Teorema 2.3 ([28]). *Seja $m \geq 0$ um inteiro e seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\frac{n^2}{4} - m$ arestas. Então $D(G) \leq m$.*

O Teorema 2.3 pode ser interpretado como um resultado estrutural: quanto mais arestas queremos que um grafo livre de triângulos tenha, mais restrita será a estrutura desse grafo. Esse paradigma voltará no Capítulo 4, quando em vez de usarmos o número de arestas para parametrizar a densidade de grafos livres de triângulos, usarmos o seu grau mínimo.

A prova do Teorema 2.3 pode ser encontrada no Capítulo 3 de [4], mas os métodos utilizados na prova do Teorema de Mantel que apresentaremos no Capítulo 3 permitem obter resultados similares de estabilidade. Mais resultados relacionados a estabilidade em grafos podem ser vistos em [16, 18, 29].

Para grafos com apenas poucas arestas a menos que $n^2/4$, o Teorema 2.3 fornece uma cota superior satisfatória para $D(G)$. Em 1975, Erdős propôs a seguinte conjectura para uma cota *incondicional* sobre $D(G)$, no sentido que ela não depende do número de arestas de G .

Conjectura 2.4 ([11]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{25}.$$

A Conjectura 2.4 permanece em aberto no caso geral. Observe que o Teorema 2.3 prova a Conjetura 2.4 para grafos com pelo menos $21n^2/100$ arestas. Além disso, se verdadeira, a cota $n^2/25$ é ótima, pois um blow-up balanceado G de C_5 com $n = 5m$ vértices satisfaz $D(G) = m^2 = n^2/25$. É fácil ver que G é livre de triângulos e $D(G) \leq m^2$, pois ao remover todas as arestas entre um par de classes da partição o subgrafo restante se torna bipartido. Por outro lado, segue do Teorema 2.6 que existe uma coleção de “arestas grossas” de G cuja remoção deixa G bipartido e o total de arestas removidas é igual a $D(G)$, ou seja, $D(G) \geq m^2$.

Os blow-ups serão amplamente utilizados nos capítulos a seguir no estudo da Conjectura 2.4. Eles são grafos úteis porque se um grafo (grande) G é um blow-up de um grafo (pequeno) H , então uma série de comportamentos em G “imitam os comportamentos análogos” em H , e portanto podemos descrever certas propriedades de G usando os parâmetros de H , que são menos e menores. O Teorema 2.6 abaixo deixará essa utilidade evidente, mas antes de enunciá-lo e prová-lo precisamos definir de forma precisa a “analogia” entre os grafos G e H .

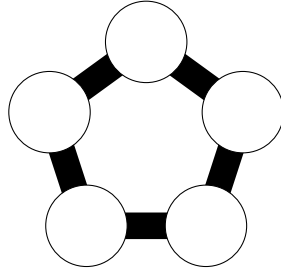


Figura 2.1

Definição 2.5. Seja G um blow-up de H e seja $V(G) = \{S_v : v \in V(H)\}$ uma partição de H que satisfaz a definição de blow-up. Dizemos que $F_G \subseteq E(G)$ é *canônico* se existe $F_H \subseteq H$ tal que

$$F_G = \bigcup_{uv \in F_H} E(G[S_u \cup S_v]).$$

Em outras palavras, um conjunto canônico de arestas é tal que, entre cada par de classes de $V(G)$, ou adicionamos todas as arestas entre essas classes para o conjunto, ou não adicionamos nenhuma dessas arestas.

É prudente observar que a definição de um conjunto canônico depende da escolha da partição de $V(G)$ (que não necessariamente é única). Em geral, essa escolha será clara do contexto.

Teorema 2.6 ([14]). *Seja H um grafo livre de triângulos e seja G um blow-up de H . Então existe $F \subseteq E(G)$ canônico tal que $|F| = D(G)$ e $G - F$ é bipartido.*

Demonstração. A prova usa um procedimento conhecido como *simetrização de Zykov*. Em linhas gerais, a ideia é que se u e v estão na mesma parte e $d_Z(u) \geq d_Z(v)$ para um certo subgrafo bipartido Z de G , então trocar a vizinhança de v em Z para $N_Z(u)$ não muda a propriedade de Z ser bipartido, não diminui o número de arestas de Z e o torna mais “simétrico” de forma que esse procedimento pode ser realizado apenas finitamente.

Seja Z um subgrafo gerador de G tal que Z é bipartido e $e(G) - e(Z_0) = D(G)$. Vamos definir $Z_0 := Z$ e modificar Z_0 sem diminuir seu número de arestas e garantindo que a propriedade da bipartição é mantida. Para isso, ordene as classes do blow-up H como $V(G) = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ e aplique a seguinte operação sequencialmente para cada $i \in [n]$:

- Tome $x \in S_i$ com grau máximo em Z_{i-1} ;
- Para cada $y \in S_i \setminus \{x\}$, forme Z_i substituindo a vizinhança de y em Z_{i-1} por $N_Z(x)$.

Perceba que pela maximalidade de $N_{Z_{i-1}}(x)$, o número de arestas do grafo não diminui a cada substituição de vizinhanças. Além disso, a propriedade da bipartição é mantida: depois de substituir a vizinhança de y , coloque y na mesma classe da bipartição que contém x .

Em Z_n , todos os pares x, y pertencendo à mesma parte de $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ terão a mesma vizinhança. Além disso, se $xy \in E(Z_n)$ com $x \in S_u$ e $y \in S_v$, então $x'y \in E(Z_n)$ para

cada $x' \in S_u$ (pela simetria em S_u) e $xy' \in E(Z_n)$ para cada $y' \in S_v$ (pela simetria em S_v). Dessa forma, $F := E(H) \setminus E(Z')$ é um conjunto canônico de arestas de cardinalidade $e(H) - e(Z_n) \leq e(H) - e(Z_0) = D(H)$. Pela definição de $D(H)$, segue que a igualdade vale, e $|F| = D(H)$, como desejado. \square

2.2 Avanços parciais na Conjectura 2.4

Ao longo dos anos, as tentativas de resolução da Conjectura 2.4 levaram a importantes resultados parciais, e existem duas formas principais de obter resultados parciais na direção da Conjectura 2.4: restringindo a família de grafos G (por exemplo, a um número máximo/mínimo de arestas) ou provando cotas mais fracas para $D(G)$. O seguinte teorema foi usado para obter resultados parciais nas duas condições (Corolário 2.8 e Teorema 2.9).

Teorema 2.7 ([13]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e m arestas. Então*

$$D(G) \leq \min \left\{ m - \frac{4m^2}{n^2}, \frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)} \right\}$$

Demonstração. A prova da desigualdade $D(G) \leq m - 4m^2/n^2$, bem como a ideia principal por trás da contagem que leva à cota $D(G) \leq m/2 - 2m(2m^2 - n^3)/n^2(n^2 - 2m)$, serão generalizadas na Seção 3.2.1. Por ora, provaremos apenas $D(G) \leq m - 4m^2/n^2$, utilizando um argumento simples de contagem que utilizam importantes propriedades de grafos livres de triângulos, que usaremos para localizar subgrafos bipartidos grandes.

Para cada vértice $v \in V(G)$, defina o conjunto $F_v := V(G) \setminus N_G(v)$ (os não vizinhos de v , incluindo o próprio v). Note que $D(G) \leq |F_v|$ para qualquer vértice v , pois a bipartição $\{N_G(v), V(G) \setminus N_G(v)\}$ possui exatamente $|F_v|$ arestas dentro da segunda parte, e a primeira é independente. Assim, temos que

$$D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |F_v| \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v|. \quad (2.1)$$

Observe que se $xy \in F_v$, então $v \in V(G) \setminus (N_G(x) \cup N_G(y))$, logo cada aresta $xy \in E(G)$ pertence a no máximo $n - d_G(x) - d_G(y)$ conjuntos F_v . Aplicando essa cota em (2.1), temos

$$\begin{aligned} D(G) &\leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} |F_v| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{xy \in E(G)} (n - d_G(x) - d_G(y)) = m - \frac{1}{n} \sum_{x \in V(G)} d_G(x)^2 \\ &\leq m - \left(\frac{\sum_{x \in V(G)} d_G(x)}{n} \right)^2 = m - \frac{4m^2}{n^2}. \end{aligned}$$

\square

Corolário 2.8 ([13]). *Se G é um grafo livre de triângulos com n vértices, então $D(G) \leq n^2/18$.*

De fato, o resultado de [13] é mais justo: analisando os casos próximos à igualdade, é possível provar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(G) \leq (1/18 - \varepsilon)n^2$. A análise é direta, mas não trivial.

Teorema 2.9 ([13]). *Para todo n inteiro positivo, a Conjectura 2.4 é verdadeira para grafos com n vértices e pelo menos $n^2/5$ arestas.*

O Teorema 2.9 dá uma melhora aparentemente pequena sobre a cota inferior de $e(G)$ para a qual a Conjectura 2.4 é válida: de $e(G) \geq 0.21n^2$ usando o Teorema 2.3 para $e(G) \geq 0.20n^2$ usando o Teorema 2.9. Porém, acontece que $e(G) \geq n^2/5$ não é apenas uma melhora pequena, mas também um “limiar estrutural” para grafos livres de triângulos longe de serem bipartidos.

Teorema 2.10 ([14]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e pelo menos $n^2/5$ arestas. Então existe um grafo H^* também com n vértices tal que H^* é um blow-up de C_5 e, além disso, $e(G) \leq e(H^*)$ e $D(G) \leq D(H^*)$.*

É fácil ver que $\max_{e(H^*) \geq m} D(H^*)$ (máximo tomado sobre os blow-ups H^* de C_5) é decrescente em m para $m \geq n^2/5$, o que dá uma cota melhor que $n^2/5$ para $e(G) \geq n^2/5$, condicionando no valor de $e(G)$. Do resultado do Teorema 2.10 também segue que o único exemplo extremal para a Conjectura 2.4 quando $e(G) \geq n^2/5$ são os blow-ups balanceados de C_5 . Não é conhecido nenhum outro exemplo extremal.

Omitiremos a prova completa do Teorema 2.10 e daremos apenas um brevíssimo esboço. As técnicas utilizadas não serão replicadas em outras partes desse trabalho e requerem muitos cuidados com as contas. Os detalhes podem ser encontrados em [14].

Esboço da demonstração do Teorema 2.10. Definimos os dois conjuntos que formam a “quase bipartição” do grafo de forma algorítmica. Primeiro, escolhemos uma aresta xy com $d_G(x) + d_G(y)$ máximo e os conjuntos da bipartição $A_1 := N_G(x)$ e $A_2 := N_G(y)$. Como G é livre de triângulos, cada vértice de G pertence a no máximo uma dessas partes. Além disso, se $e(G) \geq n^2/5$, então é fácil ver que o número de vértices que ainda não tem lado definido é no máximo $n^2/5$. Iterativamente, adiciona-se sequencialmente cada um dos vértices restantes a A_1 ou A_2 de forma a minimizar o número de arestas “monocromáticas” (isso é, entre vértices da mesma parte) a cada passo. Esses novos vértices formam conjuntos C_1 e C_2 , respectivamente.

A partir desse ponto, a prova segue dois caminhos:

- Se existe algum vértice $x_0 \in C_1 \cup C_2$ (suponha sem perda de generalidade que $x_0 \in C_1$) que tem pelo menos $|C_1 \cup C_2|$ vizinhos em C_1 , então é possível definir os tamanhos das classes de H^* usando os conjuntos que já temos e as vizinhanças de x_0 em C_1 e C_2 . As definições precisas dos tamanhos das classes são omitidas aqui.
- Se não existe tal vértice, então usando conjuntos de arestas duas a duas disjuntas (de tamanho cotado superiormente) em $A_1 \cup C_1$ e em $A_2 \cup C_2$, é possível descrever os tamanhos das classes de H^* de forma similar. Os detalhes numéricos desse caso também são omitidos aqui.

A análise dos casos acima finaliza a prova. □

Por fim, apresentamos uma conjectura relacionada à Conjectura 2.4:

Conjectura 2.11 ([11]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| = \lfloor n/2 \rfloor$ tal que $e(G[X]) \leq n^2/50$.*

Posteriormente, Erdős ofereceu um prêmio monetário de \$ 250 para uma prova ou contraexemplo da Conjectura 2.11 [12].

Resultados similares ao Teorema 2.9 foram verificados para a Conjectura 2.11 [20]. Além disso, Krivelevich observou (ver [21]) que a Conjectura 2.11 implica a Conjetura 2.4 para grafos regulares: se X é o conjunto fornecido pela resposta à Conjectura 2.11 para G , então $e(G[X]) = e(G[V(G) \setminus X])$ pela regularidade de G , e segue que o subgrafo bipartido de G induzido pelas partes X e $V(G) \setminus X$ tem, no máximo, $2n^2/50 = n^2/25$ arestas a menos que G .

Capítulo 3

Álgebras de flag

Neste capítulo, introduzimos alguns aspectos do poderoso método de álgebras de flag, introduzido por Razborov em 2007 [25]. O método tem sido usado de forma diversa para obter resultados acerca de problemas em combinatória extremal, particularmente pela sua capacidade expressiva de representar densidades e homomorfismos de estruturas combinatórias variadas (grafos, grafos orientados, permutações...) Para uma visão histórica do uso das álgebras de flag e resultados importantes alcançados ainda nos primeiros anos após a introdução do método, recomendamos [26].

Nesse capítulo, introduzimos a teoria de álgebras de flag aplicada a grafos simples e densidades de subgrafos. A estrutura é fortemente baseada na exposição de [17] e também em [8]. Deixamos muitos dos detalhes técnicos das definições de lado em um primeiro momento, focando em uma abordagem prática que motive a utilização das álgebras de flag para problemas extremais em grafos livres de triângulos.

3.1 Conceitos iniciais

3.1.1 Densidades

Sejam F e G grafos quaisquer. Definimos a *densidade de F em G* (denotada $d(F, G)$) como o número de subgrafos induzidos de G com $|F|$ vértices que são isomorfos a F . Analogamente, $d(F, G)$ é a probabilidade que um conjunto de $|F|$ vértices de G , escolhido uniformemente ao acaso, induza um subgrafo isomorfo a F .

Fixe um grafos F e G com $|F| \leq |G|$. Para calcular $d(F, G)$, podemos escolher um inteiro l com $|F| \leq l \leq |G|$ e escrever

$$d(F, G) = \sum_{|V(H)|=l} d(F, H)d(H, G). \quad (3.1)$$

A igualdade é válida porque amostrar um subconjunto $S \subseteq \binom{V(G)}{l}$ uniformemente ao acaso e depois amostrar um subconjunto $T \subseteq \binom{S}{|F|}$ segue a distribuição uniforme em $\binom{V(G)}{|F|}$.

Agora, denote por \mathcal{F}_l^\emptyset a família dos grafos livres de triângulos com l vértices (a menos de isomorfismo). Para a configuração geral de álgebras de flag, a família “proibida” pode ser qualquer conjunto finito de grafos, que no nosso caso é simplesmente $\{K_3\}$. Se G é um grafo livre de triângulos, então por (3.1) vale que

$$d(F, G) = \sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(F, H)d(H, G). \quad (3.2)$$

Essa expressão é comumente referida como uma *regra da cadeia* no contexto de álgebras de flag.

Muitos problemas típicos em Teoria Extremal dos Grafos, como o próprio Teorema de Mantel, são problemas de minimização de uma expressão do tipo $d(F, G)$, e frequentemente desejamos utilizar (3.2) para simplificar os cálculos de densidade. Por exemplo, usando $\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(H, G) = 1$ temos $d(F, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} d(F, H)$. Essa cota é um resultado “finito”, pois enquanto G é um grafo em geral muito maior que F , o parâmetro l é algo que podemos tentar controlar para obter resultados mais refinados.

Contudo, essa cota em geral é bastante fraca, e um grande desafio é de gerar desigualdades lineares entre densidades que sejam mais sofisticadas que a regra da cadeia. Mais especificamente, seria interessante ter desigualdades da forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} c_H \cdot d(H, G) \geq 0, \quad (3.3)$$

onde os c_H 's são constantes reais, potencialmente negativas, que possam ser usadas para balancear as densidades de um e outro subgrafo de G . Logo, poderíamos obter de (3.2) a desigualdade

$$d(F, G) \leq \sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} (c_H + d(F, H))d(H, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} (c_H + d(F, H)).$$

Novamente, esse tipo de desigualdade permitirá cotar superiormente o valor de $d(F, G)$ para grafos “grandes” G usando apenas informações “finitas”, vindas de F , de l e da desigualdade na forma de (3.3).

Na verdade, o *método semidefinido* permitirá obter desigualdades na forma

$$\sum_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} c_H \cdot d(H, G) + o(1) \geq 0, \quad (3.4)$$



onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G|$ cresce, e portanto a cota superior obtida para $d(F, G)$ será

$$d(F, G) \leq \max_{H \in \mathcal{F}_l^\emptyset} (c_H + d(F, H)) + o(1). \quad (3.5)$$

Em geral, esse tipo de resultado é suficiente quando a compreensão assintótica é suficiente. Veremos no caso do Teorema 2.1 e posteriormente no caso da Conjectura 2.4 que argumentos com blow-ups podem ser usados para transferir os resultados assintóticos para

grafos de qualquer tamanho finito. Ou seja, o termo $o(1)$ em (3.4) poderá ser controlado para as aplicações visadas nesse trabalho.

3.1.2 O Teorema de Mantel

Nessa seção, iremos provar o Teorema 2.1 usando técnicas de álgebras flag que são simples descrever e que serão generalizadas no que se segue da exposição do método geral. Iremos usar representações visuais para grafos como usual, de forma que  é um grafo isomorfo a K_2 ,  é um grafo isomorfo a $(\{a, b, c\}, \{ab, ac\})$ e assim por diante. A motivação para isso, além de facilitar a leitura, é de deixar claro constantemente quais grafos são “pequenos” e podem ser vistos como parâmetros ou variáveis do método, enquanto quando escrevermos G para representar um grafo como em $d(\text{blue V}, G)$, tipicamente estamos pensando em G como um grafo com n vértices e no comportamento assintótico dessa densidade quando n tende a infinito.

O Teorema de Mantel pode ser reescrito da seguinte forma: para todo grafo G livre de triângulos com n vértices, temos

$$d(\text{blue edge}, G) \leq \frac{n^2/4}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} + o(1),$$

em que o termo de erro $o(1)$ que vai para zero quando n tende a infinito.

Usando $l = 3$ em (3.2), temos

$$d(\text{blue edge}, G) = d(\text{blue edge}, \text{blue V}) d(\text{blue V}, G) + d(\text{blue edge}, \text{blue V}) d(\text{blue V}, G) + d(\text{blue edge}, \text{blue V}) d(\text{blue V}, G),$$

ou simplesmente

$$d(\text{blue edge}, G) = \frac{1}{3} d(\text{blue V}, G) + \frac{2}{3} d(\text{blue V}, G). \quad (3.6)$$

Com isso, vemos que $d(\text{blue edge}, G) \leq 2/3$. Mas isso é bem mais fraco que o Teorema de Mantel, então vamos buscar uma desigualdade na forma de (3.4) que nos permita concluir $d(\text{blue edge}, G) \leq 1/2 + o(1)$.


A desigualdade em questão será

$$\frac{1}{2} d(\text{blue V}, G) - \frac{1}{6} d(\text{blue V}, G) - \frac{1}{6} d(\text{blue V}, G) + o(1) \geq 0. \quad (3.7)$$

Assumindo (3.7) e somando com (3.6), temos

$$d(\text{blue edge}, G) \leq \frac{1}{2} d(\text{blue V}, G) + \frac{1}{6} d(\text{blue V}, G) + \frac{1}{2} d(\text{blue V}, G) + o(1) \leq \frac{1}{2} + o(1),$$

como desejado. Então nos resta descobrir como gerar a desigualdade “mágica” de (3.7).

Fixe um vértice “especial” $v \in V(G)$ (que representaremos como ). Definimos densidades em G^\square com um vértice especial da mesma forma que quando G não tinha vértices especiais, mas agora calculando a densidade de subestruturas que também tenham um

vértice especial. Por exemplo, $d(\text{---}\bullet, G^\square)$ é a probabilidade de que um vértice $u \in V(G) \setminus \{v\}$, escolhido uniformemente ao acaso, seja vizinho de G .

Observe que

$$(d(\text{---}\bullet, G^\square) - d(\text{---}\bullet, G^\square))^2 \geq 0, \quad (3.8)$$

e portanto

$$d(\text{---}\bullet, G^\square)^2 - 2d(\text{---}\bullet, G^\square)d(\text{---}\bullet, G^\square) + d(\text{---}\bullet, G^\square)^2 \geq 0. \quad (3.9)$$

O produto $d(\text{---}\bullet, G^\square)^2$ é a probabilidade que dois vértices escolhidos aleatoriamente ao acaso (com reposição) em $V(G) \setminus \{v\}$ sejam ambos vizinhos de G . A probabilidade que esses dois vértices sejam iguais é $o(1)$ quando $n \rightarrow +\infty$, e se eles são distintos, então os dois (junto com v) induzem um subgrafo isomorfo a $\text{---}\text{---}\text{---}$ (pois G é livre de triângulos). Ou seja,

$$d(\text{---}\bullet, G^\square)^2 = d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + o(1).$$

De forma análoga, é possível provar

$$d(\text{---}\bullet, G^\square)d(\text{---}\bullet, G^\square) = \frac{1}{2}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + \frac{1}{2}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + o(1), \quad (3.10)$$

$$d(\text{---}\bullet, G^\square)^2 = d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + o(1). \quad (3.11)$$

Substituindo (3.10) e (3.11) em (3.9), obtemos

$$d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) - d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) - d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square) + o(1) \geq 0. \quad (3.12)$$

Obtivemos assim uma igualdade que se assemelha à igualdade (3.7), mas com densidades de conjuntos de 3 vértices contendo um vértice especial v de G^\square em vez de densidades em G para subconjuntos de tamanho 3 escolhidos ao acaso e sem vértices especiais.

Para obter a relação desejada, iremos simplesmente escolher v uniformemente ao acaso! Isso também pode ser pensado de forma determinística como a média de (3.12) por todas as escolhas possíveis de $v \in V(G)$.

Escolhendo v aleatoriamente, temos que

$$\mathbb{E}[d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square)] = \frac{1}{3}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G),$$

pois para cada subgrafo induzido de G que é isomorfo a $\text{---}\text{---}\text{---}$ existe apenas uma dentre as três escolhas possíveis para o vértice especial v tal que o grafo “rotulado” resultante é isomorfo a $\text{---}\text{---}\text{---}$. De forma similar, temos

$$\mathbb{E}[d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square)] = \frac{2}{3}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G), \quad \mathbb{E}[d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square)] = \frac{2}{3}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G),$$

$$\mathbb{E}[d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square)] = \frac{1}{3}d(\text{---}\text{---}\text{---}, G), \quad \mathbb{E}[d(\text{---}\text{---}\text{---}, G^\square)] = d(\text{---}\text{---}\text{---}, G).$$

Portanto, segue de (3.12) que

$$\frac{1}{3}d(\text{V}, G) - \frac{2}{3}d(\text{V}, G) - \frac{2}{3}d(\text{•}, G) + \frac{1}{3}d(\text{•}, G) + d(\text{•}, G) + o(1) \geq 0,$$

que é o mesmo que

$$d(\text{•}, G) - \frac{1}{3}d(\text{•}, G) - \frac{1}{3}d(\text{V}, G) + o(1) \geq 0,$$

que é um múltiplo de (3.7). Assim, provamos que se G é um grafo livre de triângulos, então $d(\text{•}, G) \leq 1/2 + o(1)$.

Para provar a versão original do Teorema de Mantel (ou seja, que $e(G) \leq n^2/4$ em vez de $e(G) \leq n^2/4 + o(n^2)$), tome um grafo livre de triângulos G qualquer e considere blow-up balanceado G_N de G em que cada vértice de G é substituído por um conjunto independente de tamanho N . Então, pela versão assintótica do Teorema de Mantel que provamos, vale

$$e(G_N) \leq \frac{1}{2} \binom{N|G|}{2} + o(1) \leq \frac{N^2|G|^2}{4} + o(N^2).$$

Além disso, $e(G) = N^2 e(G)/N^2$, portanto $e(G) \leq |G|^2/4 + o(N^2)/N^2$. Fazendo $N \rightarrow \infty$, obtemos $e(G) \leq |G|^2/4$, pois $e(G)$ é inteiro. Esse argumento conclui a prova do Teorema de Mantel.

A estratégia apresentada no esboço acima reflete bem a estratégia geral que utilizaremos quando formos provar algum resultado mais sofisticado com álgebras de flag:

1. Começamos fixando um subgrafo especial σ (no caso de Mantel, $\sigma = \blacksquare$ tem apenas um vértice) para uma desigualdade quadrática (3.8) envolvendo as densidades relativas a uma cópia fixa de σ em G ;
2. Multiplicamos tais densidades relativas a σ adicionando termos de erro para obter desigualdades lineares com as densidades relativas a σ (3.10);
3. Escolhemos aleatoriamente um subgrafo induzido de G isomórfico a σ para associar as densidades de subgrafos com σ fixado a densidades de subgrafos sem essa restrição.

A princípio, todos os passos acima podem ser automatizados, exceto a obtenção da desigualdade quadrática inicial. Essa desigualdade deve satisfazer a hipótese de ser não negativa para toda escolha de densidade envolvida. Para obter desigualdades dessa forma, utilizaremos matrizes positivas semidefinidas. Se X é um conjunto finito qualquer, então as matrizes positivas semidefinidas no espaço $\mathbb{R}^{X \times X}$ são as matrizes A que satisfazem $v^\top A v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^X$. Denotamos o subconjunto de $\mathbb{R}^{X \times X}$ formado por essas matrizes por \mathbb{S}_+^X .

A ideia é escolher uma desigualdade da forma $v^\top A v \geq 0$, onde v é um vetor com todas as densidades de certos subgrafos bem escolhidos e A é uma matriz positiva semidefinida. Por exemplo, podemos reescrever (3.9) como

$$\begin{bmatrix} d(\text{•}, G) & d(\text{•}, G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\text{•}, G) \\ d(\text{•}, G) \end{bmatrix} \geq 0.$$

De fato, poderíamos ter começado com uma matriz positiva semidefinida genérica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Encontrando os coeficientes de (3.4) e cotando em (3.5), poderíamos provar então que $d(\text{---}, G) \leq d^* + o(1)$, onde d^* é o valor ótimo do programa semidefinido

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22}, a_{22} \right\} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_+^2. \end{aligned}$$

3.1.3 A álgebra

Fixe \mathcal{H} uma família de subgrafos proibidos. Um *tipo de tamanho k* é um grafo \mathcal{H} -livre σ com $V(\sigma) = [k]$. Denotamos o tipo vazio como \emptyset . Um σ -flag é um par (F, θ) , em que F é um grafo \mathcal{H} -livre tal que $\theta: [k] \rightarrow V(G)$ é injetora e define um isomorfismo entre σ e $G[\text{Im}(\theta)]$. Em outras palavras, um tipo é um grafo (pequeno) com todos os seus vértices rotulados/especiais, enquanto um flag é um grafo parcialmente rotulado de acordo com um tipo. Note que todo grafo G está naturalmente identificado com o \emptyset -flag (G, \emptyset) .

Definimos isomorfismos entre flags da mesma forma que entre grafos, mas também preservando o isomorfismo nos vértices rotulados: dois σ -flags (G_1, θ_1) e (G_2, θ_2) são isomorfos se existe um isomorfismo $\rho: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $\rho(\theta_1(i)) = \theta_2(i)$ para cada $i \in [\sigma]$. Finalmente, definimos \mathcal{F}_m^σ como o conjunto de todos os σ -flags de tamanho m , a menos de isomorfismo e $\mathcal{F}^\sigma := \cup_{m \geq |\sigma|} \mathcal{F}_m^\sigma$.

Para definir densidades, sejam $(G, \theta), F_1, F_2, \dots, F_t$ flags com

$$|G| - |\sigma| \geq \sum_{i=1}^t (|F_i| - |\sigma|).$$

Definimos a densidade $d(F_1, F_2, \dots, F_t, G)$ como a probabilidade de que, ao escolher conjuntos dois a dois disjuntos $U_1, U_2, \dots, U_t \subseteq V(G) \setminus \text{Im}(\theta)$ com $|U_i| = |F_i| - |\sigma|$, vale que o σ -flag $(G[U_i \cup \text{Im}(\theta)], \theta)$ é isomórfico a F_i para cada $i \in [t]$. Quase sempre usamos apenas $t = 1$ e $t = 2$.

O seguinte teorema permite a manipulação de densidades multiplicativas.

Teorema 3.1. Para $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_m^\sigma$ e $G \in \mathcal{F}^\sigma$ com $|G| \geq |F_1| + |F_2| - |\sigma|$, vale que

$$d(F_1, G)d(F_2, G) = d(F_1, F_2, G) + O(|G|^{-1}).$$

Agora que introduzimos os conceitos e objetivos gerais quando estamos resolvendo um problema usando álgebras de flag, vamos formalizar alguns dos conceitos que apresentamos para simplificar as aplicações posteriores. Como visto, o objetivo geral do método aplicado a problemas de densidade e homomorfismos é obter desigualdades não triviais da forma

$$\sum_{F_i \in \mathcal{F}_1^\emptyset} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0, \quad (3.13)$$

onde l é fixo e $G \in \mathcal{F}^\emptyset$ é um grafo (não rotulado) arbitrário. Para isso, vimos que é interessante considerar desigualdades na forma $\sum_{F_i \in \mathcal{F}_l^\sigma} a_i d(F_i, G) + o(1) \geq 0$, onde $G \in \mathcal{F}^\sigma$ é um grafo “grande” e aplicar um operador linear (associado a uma distribuição de probabilidade) que gere uma desigualdade da forma de (3.13).

Como pensamos em G como grande e arbitrário, podemos ver as somas $\sum_{F_i \in \mathcal{F}_l^\sigma} a_i d(F_i, G)$ como ações de \mathcal{F}^σ sobre $\mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma$. Ou seja, vamos considerar as somas formais de σ -flags e deixar um grafo G agir sobre elas através de $\sum_{i \in I} a_i F_i \mapsto \sum_{i \in I} a_i d(F_i, G_i)$. Note que, de (3.2), todo elemento da forma

$$\tilde{F} - \sum_{F \in \mathcal{F}_l^\sigma} d(\tilde{F}, F)F \quad (3.14)$$

é levado a 0 por qualquer G . Defina o espaço quociente $\mathcal{A}^\sigma := \mathbb{R}\mathcal{F}^\sigma / \mathcal{K}^\sigma$, onde \mathcal{K}^σ é o subespaço gerado pelos elementos da forma (3.14).

Finalmente, é importante definir uma noção adequada de multiplicação nesse espaço vetorial para manipular a multiplicação de densidades. Assim, também transformaremos \mathcal{A}^σ numa álgebra. Para $F_1 \in \mathcal{F}_{l_1}^\sigma$ e $F_2 \in \mathcal{F}_{l_2}^\sigma$ e $l \geq l_1 + l_2 - |\sigma|$, definimos

$$F_1 \cdot F_2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_l^\sigma} d(F_1, F_2, F)F,$$

e definimos a multiplicação sobre \mathcal{A}^σ expandindo essa definição bilinearmente. É possível provar (ver [25]) que essa operação de multiplicação está bem definida em \mathcal{A}^σ , ou seja, que não depende da escolha de l . Defina o mapa

$$\phi_G : \sum a_i F_i \in \mathcal{A}^\sigma \mapsto \sum a_i d(F_i, G) \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 3.1, ϕ_G pode ser visto como um “homomorfismo aproximado” de \mathcal{A}^σ para \mathbb{R} .

Por clareza, apresentamos alguns exemplos de igualdades em \mathcal{A}^\emptyset e em \mathcal{A}^\square :

$$\begin{aligned} \text{---} \bullet &= \frac{1}{3} \text{---} \bullet + \frac{2}{3} \text{---} \bullet + \text{---} \bullet, \\ \text{---} \square \cdot \text{---} \square &= \text{---} \square + \text{---} \square, \\ \text{---} \square \cdot \bullet &= \frac{1}{2} \text{---} \square + \frac{1}{2} \text{---} \square. \end{aligned}$$

Muitas vezes, quando estamos querendo provar algum resultado de densidade, comecemos com desigualdades de densidades com vértices especiais rotulados de acordo com um tipo σ . Para transferir esse resultado para grafos não rotulados (i.e., \emptyset -flags), escolhemos aleatoriamente onde alocar σ em G . Em álgebras de flag, esse formalismo será realizado por operadores lineares

$$[\![\cdot]\!] : \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathcal{A}^\emptyset$$

que representam essa “média”.

Para $F \in \mathcal{F}^\sigma$, definimos $[\![F]\!] := q(F) \downarrow F$, onde $\downarrow F \in \mathcal{F}^\emptyset$ é uma cópia de F em que os

rótulos especiais são esquecidos, e $q(F)$ é a probabilidade que um homomorfismo injetor $\theta: [|\sigma|] \rightarrow V(\downarrow F)$, escolhido uniformemente ao acaso, satisfaça que $(\downarrow F, \theta)$ é isômrfico a F . Em seguida, estendemos $\llbracket \cdot \rrbracket$ linearmente para \mathcal{A}^σ . Por exemplo, temos

$$\llbracket \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \rrbracket = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}, \quad \llbracket 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \rrbracket = \frac{4}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}, \quad \llbracket \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \diagup & \diagdown \\ \square & \square \\ 1 & 2 \end{array} \rrbracket = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

Note que os $\begin{pmatrix} \square & \square \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ -flags $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array}$ e $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array}$ não são isômrficos. Como esse tipo tem mais de um vértice, é importante rotulá-los. Ao contrário, no tipo de tamanho 1 o rótulo não é relevante. O seguinte teorema será essencial para as aplicações futuras de álgebras de flag.

Teorema 3.2. *Seja F um σ -flag e G um \emptyset -flag com $|G| \geq |F|$ e $d(\downarrow \sigma, G) > 0$. Então, se θ é escolhido uniformemente ao acaso entre todas as injeções $\theta: [|\sigma|] \rightarrow V(G)$ com $G[\text{Im}(\theta)]$ isômrfico a σ , vale que*

$$\mathbb{E}_\theta[d(F, (G, \theta))] = \frac{q(F)d(\downarrow F, G)}{q(\sigma)d(\downarrow \sigma, G)}.$$

Finalmente, iremos lidar com a noção de “homomorfismos aproximados” de \mathcal{A}^σ a \mathbb{R} e como recuperar de toda a linguagem algébrica introduzida a informação sobre densidades em grafos para o problema original. Para cada σ -flag G , podemos associar um vetor (de dimensão infinita) $(d(F, G))_{F \in \mathcal{F}^\sigma} \in [0, 1]^{\mathcal{F}^\sigma}$. Se $(G_k)_{k \geq 0}$ é uma sequência de σ -flags tal que tal que $d(F, G_k)$ converge para todo $F \in \mathcal{F}^\sigma$, então dizemos que $(G_k)_{k \geq 0}$ é *convergente*. Pela compacidade de $[0, 1]$ e o Teorema de Tychonoff, o espaço $[0, 1]^{\mathcal{F}^\sigma}$ com a topologia produto é compacto. Logo, toda sequência infinita $(G_k)_{k \geq 0}$ de σ -flags possui uma subsequência infinita que é convergente.

Para cada sequência convergente $(G_k)_{k \geq 0}$ em $[0, 1]^{\mathcal{F}^\sigma}$, existe um homomorfismo (entre espaços vetoriais)

$$\phi: F \in \mathcal{F}^\sigma \mapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} d(F, G_k) \in \mathbb{R}$$

que pode ser estendido para um homomorfismo (entre álgebras) $\phi: \mathcal{A}^\sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Esses homomorfismos serão chamados de *homomorfismos funcionais*. Dessa forma, se vale uma desigualdade $\sum a_i F_i \geq 0$ em \mathcal{A}^σ , então também vale $\phi(\sum a_i F_i) \geq 0$ para todo homomorfismo funcional ϕ , e logo $\sum a_i d(F_i, G_k) + o(1) \geq 0$ para toda sequência convergente $(G_k)_{k \geq 0}$, onde o termo $o(1)$ vai para zero quando $|G_k|$ vai para infinito. Escolher $(G_k)_{k \geq 0}$ como uma sequência de blow-ups balanceados de um grafo base será suficiente para as aplicações desse trabalho.

Vamos mostrar mais uma vez o Teorema de Mantel usando a expressividade da álgebra que acabamos de desenvolver. Começamos com

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right)^2 \geq 0.$$

Assim, temos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \cdot \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \geq 0,$$

e multiplicando obtemos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \geq 0.$$

Aplicando $\llbracket \cdot \rrbracket$, segue que

$$\frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} - \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} - \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \geq 0 \implies \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \end{array} \geq 0.$$

Dividindo por 2 e somando a igualdade

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} + \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \end{array},$$

obtemos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} \leq \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \square \end{array} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, toda sequência infinita de grafos livres de triângulos $(G_k)_{k \geq 0}$ possui uma subseqüência $(G_{i_k})_{k \geq 0}$ com $d(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array}, G_{i_k}) \leq 1/2 + o(1)$. Tome G_1 qualquer e para cada $N \geq 2$ defina G_N como um blow-up completo balanceado de G_0 em que cada vértice de G_0 é substituído por um conjunto independente de tamanho N .

Então para alguma sequência $N_0 < N_1 < \dots$ vale $d(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array}, G_{N_k}) \leq 1/2 + o(1)$. Mas

$$d(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array}, G_{N_k}) = \frac{2e(G_{N_k})}{v(G_{N_k})^2} + o(1) = \frac{2N_k^2 e(G_1)}{N_k^2 v(G_1)^2} + o(1) = \frac{2e(G_1)}{v(G_1)^2} + o(1),$$

logo $e(G_1) \leq (1/4 + o(1))v(G_1)^2$, e como o termo $o(1)$ pode ser tornado arbitrariamente pequeno, obtemos $e(G_1) \leq v(G_1)^2/4$ para qualquer escolha de G_1 .

3.2 Aplicações

Vamos retomar a prova do Teorema 2.7 a partir do ponto de vista de álgebras de flag. Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Sabemos que, para todo vértice $v \in V(G)$, o conjunto $A_v := E(G - N(v))$ de arestas entre os não vizinhos de v é tal que $G - A_v$ é bipartido considerando as classes $(N(v), V(G) \setminus N(v))$. Portanto $D(G) \leq \min_{v \in V(G)} |A_v|$, ou ainda $D(G) \leq \mathbb{E}_{v \in V(G)} [|A_v|]$, onde $v \in V(G)$ é escolhido aleatoriamente ao acaso.

Isso nos mostra que é possível modelar certas escolhas de bipartições e, portanto, de arestas que precisamos contar/deletar a partir de um único vértice *especial* e de uma *estratégia* de bipartição. Na linguagem de álgebras de flag (sobre os grafos livres de triângulos), a primeira parte do Teorema 2.7 pode ser escrita da seguinte forma:

Teorema 3.3. Se $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array} \geq 2/25$ para todo flag G^\square obtido de G rotulando um vértice especial, então $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} \leq 2/5$.

Demonstração. Primeiro, vamos fixar o tipo σ de tamanho 1, e os inteiros $l = 3$ e $m = 2$

(assim como no Teorema de Mantel). Da desigualdade

$$\left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} & \bullet \\ \square & \bullet \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \square \end{array} \right] \geq 0,$$

segue

$$\left(\frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12} \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \left(\frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} + a_{22} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \geq 0.$$

Além disso, $\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} = \frac{2}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$, logo da média sobre todas as escolhas de G^σ vale que $\left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \right] \geq 2/25 \iff \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \geq \frac{6}{25}$, e assim temos

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \frac{6}{25}x \leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12} \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x \right) \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} + a_{22} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \\ \leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x, a_{22} \right\}.$$

Finalmente,

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \leq \max \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{1}{3}a_{22} + x, a_{22} \right\} - \frac{6}{25}x$$

para toda escolha de $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ e $x \geq 0$. Um software que resolve programas semidefinidos pode ser usado para encontrar que o mínimo da expressão acima é $2/5$. \square

3.2.1 Cortes locais

Em [18], os autores provam a seguinte conjectura de Sudakov (ver [29]):

Teorema 3.4. *Seja G um grafo K_6 -livre com n vértices. Então G pode ser tornado bipartido deletando no máximo $4n^2/25$ arestas.*

O principal ingrediente dos resultados provados em [18] é a utilização de álgebras de flag para expressar os chamados *cortes locais*. O Teorema 3.3 mostra como podemos definir cortes (ou seja, subgrafos bipartidos grandes) a partir de um único vértice, e também como utilizar álgebras de flag para expressar a densidade de arestas fora de cada um desses cortes. Essa técnica também foi utilizada em [2, 24] para definir partições a partir de outros conjuntos pequenos de vértices.

Por exemplo, se G é livre de triângulos e $uv \in E(G)$, então é possível definir uma bipartição de $V(G)$ com $N(u)$ em uma das partes, $N(v)$ em outra das partes e, para cada vértice em $V(G) \setminus (N(u) \cup N(v))$, decidimos uniformemente ao acaso com probabilidade $1/2$ em qual das partes definidas por $N(u)$ e $N(v)$ ele será colocado. A escolha é feita de forma aleatória porque sabemos que o maior corte (determinístico) que pode ser gerado tem tamanho pelo menos o valor esperado do tamanho do corte na escolha aleatória, e é fácil calcular o valor esperado.

Se nenhum desses cortes deixa no máximo $n^2/25$ arestas de fora, então a densidade esperada das arestas fora de qualquer um desses cortes definidos localmente é pelo menos

$2/25$, o que pode ser expressado da seguinte maneira, onde as densidades são tomadas sobre um flag G^σ com uma não-aresta uv rotulada:

$$\frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \geq \frac{2}{25}. \quad (3.15)$$

O seguinte resultado demonstra o poder do método de cortes locais para obter cotas significativamente melhores para resultados parciais na direção da Conjectura 2.4.

Teorema 3.5 ([2]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices. Então, vale que*

1. $D(G) \leq \frac{n^2}{23.5}$;
2. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \geq 0.3197 \binom{n}{2}$;
3. $D(G) \leq \frac{n^2}{25}$ se $e(G) \leq 0.2486 \binom{n}{2}$.

Contudo, os autores de [2] o método e software utilizados, o que impõe restrições desconhecidas sobre o número de desigualdades advindas de cortes locais que tentaram adicionar ao programa semidefinido. A seguir, oferecemos como complemento ao resultado de [2] uma explicação mais detalhada e abrangente de como restrições à moda de (3.15) podem ser formuladas e implementadas computacionalmente para gerar resultados parciais para a Conjectura 2.4.

De forma precisa, um *corte local* é definido a partir de um tipo σ de tamanho k (nos exemplos que já vimos, usamos os tipos \square e $\begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \end{array}$) e uma função $p : \mathcal{P}(V(\sigma)) \rightarrow [0, 1]$. Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices (pensamos em n como um parâmetro grande) e $S \subseteq V(G)$ tal que $G[S]$ é isomorfo a σ . Seja também $p_S : \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$ o análogo de p em S dado pelo isomorfismo entre $G[S]$ e σ . Defina uma bipartição aleatória (A, B) de $G - S$ em que cada elemento $v \in V(G) \setminus S$ é adicionado à parte A com probabilidade $p_S(N_G(v) \cap S)$ ou à parte B com probabilidade $1 - p_S(N_G(v))$. Se $\sigma = \square$ e $p_\emptyset = 1.0$, $p_{\{v\}} = 0.0$, essa é a bipartição determinística da primeira parte do Teorema 2.7. Os vértices de S podem ficar em qualquer lado da bipartição, porque como k é constante em relação a n , as arestas adjacentes a S são $O(n)$ no total.

Assim, o número esperado de arestas fora do corte gerado pela bipartição (A, B) é

$$O(n) + \sum_{\substack{X, Y \subseteq V(S) \\ X \leq Y}} (p_X p_Y + (1 - p_X)(1 - p_Y)) m_{XY},$$

onde m_{XY} é o número de arestas $uv \in E(G - S)$ com $N_G(u) \cap S = X$ e $N_G(v) \cap S = Y$ e \leq é uma ordem total qualquer em $\mathcal{P}(V(\sigma))$.

Para $X, Y \subseteq V(\sigma)$, seja $F_{X,Y}^\sigma \in \mathcal{F}_{k+2}^\sigma$ o flag que tem dois vértices não rotulados conectados por uma aresta, um deles ligados a X em σ , e o outro ligado a Y em σ . Assim, podemos

assumir que, para qualquer escolha de S , vale que

$$\begin{aligned} O(n) + \sum_{X,Y \subseteq V(\sigma)} (p_X p_Y + (1-p_X)(1-p_Y)) \binom{n-k}{2} d(F_{X,Y}^\sigma, G^\sigma) &\geq \frac{n^2}{25} \\ \Leftrightarrow \sum_{X,Y \subseteq V(\sigma)} (p_X p_Y + (1-p_X)(1-p_Y)) d(F_{X,Y}^\sigma, G^\sigma) &\geq \frac{2}{25} + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

onde G^σ é o grafo em que rotulamos S como sendo σ . Escolhendo S aleatoriamente e usando o Teorema 3.2 (supondo que $d(\downarrow\sigma, G) > 0$), vale que

$$\sum_{X,Y \subseteq V(\sigma)} (p_X p_Y + (1-p_X)(1-p_Y)) \frac{q(F_{X,Y}^\sigma) d(\downarrow F_{X,Y}^\sigma, G)}{q(\sigma) d(\downarrow\sigma, G)} \geq \frac{2}{25} + o(1).$$

Omitindo G e o termo $o(1)$, que já sabemos que podemos omitir, obtemos finalmente

$$\sum_{X,Y \subseteq V(\sigma)} (p_X p_Y + (1-p_X)(1-p_Y)) \llbracket F_{X,Y}^\sigma \rrbracket \geq \frac{2}{25} \llbracket \sigma \rrbracket. \quad (3.16)$$

Observe que essa última desigualdade vale mesmo no caso $\llbracket \sigma \rrbracket = 0$, pois aí também teríamos $\llbracket F_{X,Y}^\sigma \rrbracket = 0$ para cada escolha de X e Y . Chamamos essa desigualdade de uma (σ, p) -restrição.

Também sabemos que podemos gerar restrições escolhendo um tipo π , um inteiro $m \geq |\pi|$ e, listando $\mathcal{F}_m^\pi = \{F_1, F_2, \dots, F_\ell\}$, para qualquer $A \in \mathbb{S}_+^\ell$ vale que

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} A_{ij} \llbracket F_i F_j \rrbracket \geq 0. \quad (3.17)$$

Chamamos essa desigualdade de uma (π, m) -restrição.

3.2.2 Construindo o programa

Note que uma (σ, p) -restrição é escrita em termos de elementos de $\mathcal{A}_{|\sigma|+2}^\emptyset$, e uma (π, m) -restrição é escrita em termos de elementos de $\mathcal{A}_{2m-|\pi|}^\emptyset$ e variáveis que correspondem a matrizes positivas semidefinidas.

Fixe uma coleção $\{(\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2), \dots, (\sigma_r, p_r)\}$ de (σ, p) -restrições e uma coleção $\{(\pi_1, m_1), (\pi_2, m_2), \dots, (\pi_s, m_s)\}$ de (π, m) -restrições. Tome $m \geq \max_i (|\sigma_i| + 2), \max_j (2m_j - |\pi_j|)$. Usando (3.14), podemos escrever as $r + s$ restrições como desigualdades em \mathcal{A}_m^\emptyset .

De forma mais explícita, uma (σ, p) -restrição pode ser reescrita em \mathcal{A}_m^\emptyset como

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} \left(\sum_{X,Y \subseteq V(\sigma)} (p_X p_Y + (1-p_X)(1-p_Y)) ([F] \llbracket F_{X,Y}^\sigma \rrbracket) - \frac{2}{25} [F] \llbracket \sigma \rrbracket \right) F \geq 0,$$

onde $[F]F'$ é o coeficiente de F quando F' é expandido em termos de flags de ordem $|F|$.

Escreva cada uma das (σ, p) -restrições como

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} c(F)F \geq 0, \quad (3.18)$$

onde os $c(F)$'s são coeficientes não negativos. Analogamente, uma (π, m) -restrição pode ser reescrita como

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} A_{ij}[F] \llbracket F_i F_j \rrbracket F \geq 0 \iff \sum_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} \left(\sum_{i,j=1}^{\ell} d_{ij}(F) A_{ij} \right) F \geq 0. \quad (3.19)$$

Finalmente, escreva

$$\bullet = \sum_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} b(F)F. \quad (3.20)$$

Combinando as equações (3.18), (3.19) e (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} \bullet &\leq \sum_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} \left(b(F) + \sum_{i=1}^r c_i(F) \cdot \alpha_i + \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^{\ell_k} d_{kij}(F) \cdot (A_k)_{ij} \right) F \\ &\leq \max_{F \in \mathcal{F}_m^\emptyset} \left(b(F) + \sum_{i=1}^r c_i(F) \cdot \alpha_i + \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^{\ell_k} d_{kij}(F) \cdot (A_k)_{ij} \right), \end{aligned}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \geq 0$ são escalares.

Finalmente, podemos montar o seguinte programa semidefinido para encontrar o valor ótimo da expressão acima:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && M \\ &\text{sujeito a} && M - \sum_{i=1}^r c_i(F) \alpha_i \\ &&& - \sum_{k=1}^s \sum_{i,j=1}^{\ell_k} d_{kij}(F) (A_k)_{ij} \geq b(F), \quad \text{para cada } F \in \mathcal{F}_m^\emptyset, \\ &&& M \geq 0, \\ &&& \alpha_i \geq 0, && \text{para cada } i \in [r], \\ &&& A_k \in \mathbb{S}_+^{\ell_k}, && \text{para cada } k \in [s]. \end{aligned}$$

Se d^* é o valor ótimo desse programa, então a Conjectura 2.4 está provada para grafos com pelo menos $\frac{d^*}{2}n^2$ arestas. O nosso objetivo, é combinar (σ, p) -restrições e (π, m) -restrições que gerem valores menores de d^* .

Escolher bons valores de σ e p é um desafio porque o número de restrições geradas cresce exponencialmente, e para $|\sigma| \geq 5$ já é impraticável gerar todas as (σ, p) -restrições sem escolher “à mão” valores de σ e p . Em [2], os autores comentam pelo menos duas escolhas de (σ, p) -restrições com $|\sigma| = 6$, uma delas formulada especialmente para lidar

com o *grafo de Clebsch*, um grafo de Cayley que é descrito como “particularmente hostil” com respeito à estratégia de cortes locais.

Estamos desenvolvendo uma implementação do método de [2] que pode ser encontrada em <https://github.com/Marcelo-ML/flag-algebras>. Até o momento da conclusão desse trabalho, não conseguimos reproduzir os resultados do Teorema 3.5. Estamos buscando estratégias de otimização e incorporação de novas restrições locais que permitam agilizar a geração dos programas definidos correspondentes. Conforme sugerido em [2], não é sempre claro qual o “melhor” corte local a se incorporar ao programa, e exemplos patológicos como o do grafo de Clebsch mostram que certas estruturas apresentam tanta rigidez com relação a cortes locais que adicionar milhares de restrições de cortes locais pode ser muito mais ineficiente que uma única restrição bem escolhida. Suspeitamos que uma classificação mais eficiente de certos exemplos extremos advindos de grafos de Cayley e o estudo da Conjectura 2.4 para certas classes de grafos pseudoaleatórios pode ser útil em novas frentes de avanço para a conjectura principal.

3.3 Considerações sobre software e questões numéricas

O método de álgebras de flag foi originalmente introduzido por Razborov em um contexto muito mais geral que de grafos, na linguagem da Teoria dos Modelos Finitos. De fato, não é difícil generalizar a descrição prática desse capítulo para contextos como de hipergrafos, digrafos, grafos com coloração, permutações, entre vários outros modelos.

Apesar disso, ainda não há uma implementação “padrão” das álgebras de flag. O software *flagmatic* (<https://lidicky.name/flagmatic/>) é possivelmente a implementação mais acessível e tem sido usada com êxito em problemas do tipo Turán. Ademais, o software *flagmatic* já foi usado e testado com resultados prolíficos em diversos problemas de densidade em grafos e hipergrafos. Outras implementações podem ser encontradas facilmente e tem sido usados com êxito em problemas de combinatória extremal (ver [6, 7, 22]).

Nesse trabalho, optamos por utilizar o pacote *flag-algebra-program-package* (desenvolvido por Leonardo Nagami Coregiano e disponível em <https://github.com/robertoparente/flag-algebra-program-package>) para elaborar os programas, que é desenvolvido inteiramente em C++ e foi usado para obter os resultados de [10]. A implementação está disponível em <https://github.com/Marcelo-ML/flag-algebras>.

Escolhemos esse pacote como base porque ele oferecia um nível suficiente de abstração e otimização para certas propriedades como normalização e produto de densidades, além de a documentação e linguagem serem mais acessíveis nas fases iniciais desse trabalho. Usamos o *csdp* para resolver os programas semidefinidos vindos da formulação em álgebras de flag. No futuro, consideraremos revisar os métodos utilizados e trabalhar com uma distribuição do *flagmatic*.

Por fim, cabe ressaltar que muitas vezes os cálculos não são feitos de forma exata, e isso depende da implementação utilizada. Há métodos de arredondamento utilizados (implementados pelo *flagmatic*), mas no caso da geração de cortes locais, arredondar os resultados em ponto flutuante dos resultados do *csdp* incorreria em ainda mais tempo

de execução para os programas. Como nesse trabalho nos preocupamos, principalmente, com o detalhamento da implementação dos métodos de [2], não realizamos cálculos de forma exata. De fato, em [2] é fornecido um esboço de prova para o regime de densidade $e(G) \geq (0.2 - \varepsilon)n^2$ para $\varepsilon \approx 10^{-8}$ (que depende dos erros máximos garantidos pela execução do csdp). A prova desse resultado utiliza um argumento de remoção de vértices de grau baixo e também o Teorema 2.10.

Capítulo 4

Restrições de grau mínimo

4.1 Grafos livres de triângulos com grau mínimo alto

Na literatura que trata da Teoria Extremal dos Grafos, o estudo de grafos livres de certos subgrafos com grau mínimo limitado inferiormente merece atenção especial. Um dos teoremas mais fundamentais nesse sentido é o seguinte teorema de Andrásfai, Erdős e Sós:

Teorema 4.1 ([1]). *Seja $r \geq 2$ e G um grafo livre de K_{r+1} com n vértices. Se*

$$\delta(G) > \frac{3r-4}{3r-1}n,$$

então G é r -partido.

Para grafos livres de triângulos, o Teorema 4.1 prova que, se um grafo livre de triângulos tem grau mínimo maior que $\delta(G) > 2n/5$, então ele é bipartido. Automaticamente, a Conjectura 2.4 é verdadeira para grafos com grau mínimo maior que $2n/5$. Mas se $\delta(G) > 2n/5$, então $e(G) > n^2/5$, o que já é coberto pelo Teorema 2.9. Portanto, é de se perguntar se a condição de grau mínimo pode ser relaxada, a fim de obter algum resultado que não seja trivial dada a restrição $e(G) \geq n^2/5$.

Para obter esse relaxamento, usamos o seguinte importante resultado:

Teorema 4.2 ([5]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\delta(G) > n/3$. Então G é homomórfico a um grafo Vega.*

Não definimos precisamente os grafos Vega porque não os utilizaremos de forma direta no trabalho (o menor deles tem 11 vértices e é conhecido como *Grafo de Grötzsch*). Por ora, é suficiente dizer que os grafos Vega são supergrafos dos grafos de Andrásfai que apresentaremos em breve, e veremos que, com condições levemente relaxadas, o Teorema 4.2 possui análogos mais simples em termos de grafos de Andrásfai.

É interessante observar que a condição do Teorema 4.2 não pode ser substituída por $\delta(G) > cn$ para nenhum $c < 1/3$. De fato, para todo $\varepsilon > 0$, existem grafos de n vértices com

grau mínimo maior que $(1/3 - \varepsilon)n$ mas número cromático não limitado (ver [15]).

De toda forma, a utilidade do Teorema 4.2 e de teoremas de homomorfismo relacionados é que, se temos um teorema que garante que G com uma quantidade muito grande de vértices é homomórfico a H (que tem, digamos, 8 vértices), então pelo Teorema 2.6 sabemos exatamente como proceder para encontrar candidatos de conjuntos de arestas que, removidos, podem realizar $D(G)$.

4.1.1 Grafos de Andrásfai

Os grafos de Andrásfai são importantes estruturas no estudo de propriedade de estabilidade em grafos livres de triângulos e são definidos da seguinte forma.

Definição 4.3. Seja $d \geq 1$ um inteiro positivo. O *grafo de Andrásfai* F_d é o grafo com vértices $\{0, 1, \dots, 3d - 2\}$ (vistos módulo $3d - 1$) e arestas entre i e $i + d + j$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, 3d - 2\}$ e cada $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$.

Uma forma de representar os grafos de Andrásfai é colocar os vértices em uma circunferência em sentido horário como vértices de $(3d - 1)$ -ágono regular e ligar cada vértice com os d vértices mais distantes.

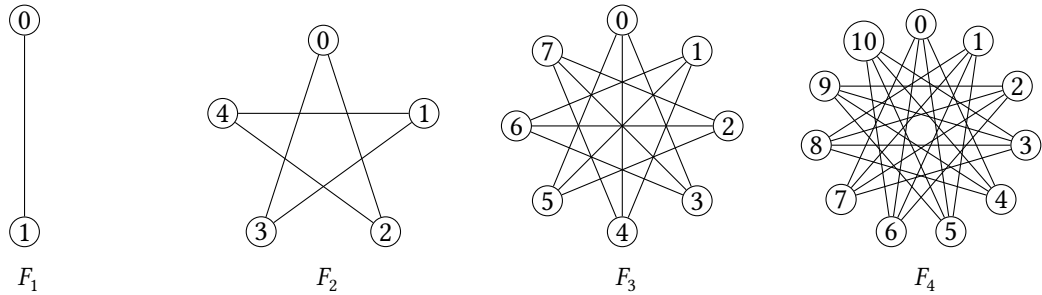


Figura 4.1: Grafos de Andrásfai para $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que F_d é d -regular e livre de triângulos.

Os Teoremas 4.4 e 4.5 formam a caracterização estrutural que estamos procurando.

Teorema 4.4 ([19]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e grau mínimo maior que $10n/29$. Então $G \hookrightarrow F_9$.*

Teorema 4.5 ([9]). *Seja G um grafo livre de triângulos com n vértices e $\chi(G) \leq 3$. Se $\delta(G) > \frac{d+1}{3d+2}n$ para algum $d \geq 1$, então $G \hookrightarrow F_d$.*

Do Teorema 4.5, segue diretamente que se G é um grafo livre de triângulos com n vértices satisfazendo $\delta(G) > n/3$ e $\chi(G) \leq 3$, então G é homomórfico a algum F_d .

4.2 A Conjectura 2.4 para grafos de Andrásfai

Em [3], os autores verificam o seguinte resultado para a Conjectura 2.11:

Teorema 4.6 ([3]). *Se um grafo G com n vértices é homomórfico a um grafo de Andrásfai F_d para algum $d \geq 1$, então existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $e(G[X]) \leq n^2/50$.*

Para isso, os autores utilizaram uma representação geométrica de grafos de Andrásfai como subgrafos finitos de um grafo infinito com vértices no círculo unitário, e o conjunto X é escolhido também de forma geométrica, como pontos em um intervalo no círculo com os vértices de G .

Inspirados nessa interpretação geométrica de grafos de Andrásfai, provamos o seguinte resultado nessa seção:

Teorema 4.7. *Seja G um grafo livre de triângulos isomorfo a F_d para algum $d \geq 1$. Então G satisfaz a Conjectura 2.4 se alguma das condições abaixo vale:*

1. $d \leq 3$;
2. Cada uma das $3d - 1$ classes de G tem tamanho no máximo $\frac{2}{5d}|G|$.

4.2.1 Condição 1

Inicialmente, verificamos um lema geral sobre partições do conjunto de arestas em grafos livres de triângulos.

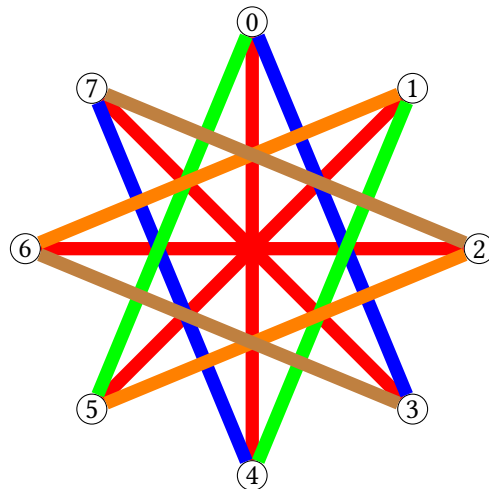
Lema 4.8. *Seja G um grafo e suponha que existem $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E$, dois a dois disjuntos, tais que $G - E_i$ é bipartido para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Então G satisfaz a Conjectura 2.4.*

Demonstração. Se $e(G) \geq n^2/5$, então o resultado segue do Teorema 2.9. Por outro lado, se $e(G) < n^2/5$, então

$$5 \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\} \leq |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \leq e(G) < \frac{n^2}{5},$$

e para $|E_i| = \min\{|E_1|, |E_2|, |E_3|, |E_4|, |E_5|\}$ temos $G - E_i$ bipartido com $|E_i| < n^2/5$. \square

Dessa forma, se apresentarmos uma tal partição para F_d , ela também valerá para qualquer blow-up de F_d , independentemente dos tamanhos relativos entre as classes no blow-up. A figura a seguir mostra que tal partição existe para F_3 , em que cada cor está associada a um E_i :



Corolário 4.9. *Se G é livre de triângulos e $\delta(G) > 4n/11$, então G satisfaz a Conjectura 2.4.*

Apesar disso, não é fácil generalizar a estratégia de partição de $E(G)$ do Lema 4.8, porque essa propriedade não ocorre em geral em grafos de triângulos. De fato, é fácil verificar que essa partição não existe para F_4 e, portanto, não existe para nenhum F_d com $d \geq 4$.

4.2.2 Condição 2

Na Seção 4.2.1, utilizamos a estratégia de tentar encontrar conjuntos explícitos de arestas $F \subseteq E(F_d)$ tais que $F_d - F$ é bipartido e transferir as propriedades dessas arestas para blow-ups de F_d . Pelo Teorema 2.6, essa estratégia não é somente razoável, mas suficiente para encontrar conjuntos de arestas de grafos $H \hookrightarrow F_d$ que realizem $D(H)$.

Assim, seguimos a estratégia geral de procurar, em F_d , conjuntos de arestas pequenos cuja remoção torna F_d bipartido. É fácil ver que os conjuntos independentes maximais de F_d são conjuntos de vértices consecutivos (módulo $3d - 1$), e portanto é natural considerar conjuntos que possuem a maior quantidade possível de vértices consecutivos, ou seja, com uma das partes contendo os vértices de 0 a $\lfloor 3d/2 \rfloor - 1$ e a outra parte contendo os vértices de $\lfloor 3d/2 \rfloor$ a $3d - 1$.

Teorema 4.10. *Seja $d \geq 1$. Então*

$$D(F_d) \leq \left\lfloor \frac{d^2}{4} \right\rfloor.$$

Demonstração. Basta apresentar uma bipartição $\{A, B\}$ de F_d com $e(G[A]), e(G[B]) = \lfloor d^2/4 \rfloor$. Considere a seguinte bipartição $V(F_d) = A \cup B$ em que cada parte é formada por (aproximadamente) metade dos vértices de F_d :

$$V(G) = \{0, 1, \dots, \lfloor (3d - 1)/2 \rfloor - 1\} \cup \{3d - 2, 3d - 3, \dots, \lfloor (3d - 1)/2 \rfloor\}.$$

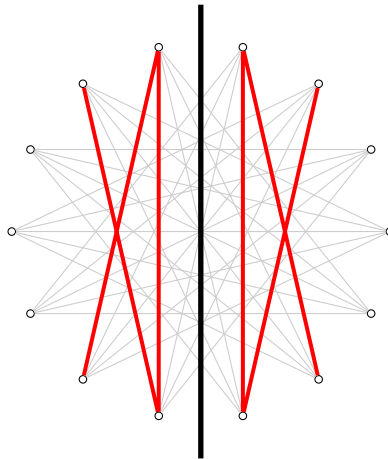


Figura 4.2: Exemplo da bipartição para $d = 5$.

Em A , as arestas que ligam vértices a uma distância ℓ (percorrida no círculo no sentido mais próximo) são $\lfloor (3d - 1)/2 \rfloor - \ell$, para cada $\ell \in \{d, d + 1, \dots, |A| - 1\}$. Fazendo a contagem

análoga para B , obtemos:

$$\begin{aligned}
 e(G[A]) + e(G[B]) &= \sum_{\ell=d}^{\lfloor \frac{3d-1}{2} \rfloor - 1} \left\lfloor \frac{3d-1}{2} \right\rfloor - \ell + \sum_{\ell=d}^{\lceil \frac{3d-1}{2} \rceil - 1} \left\lceil \frac{3d-1}{2} \right\rceil - \ell \\
 &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} i + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{d-1}{2} \rceil} i \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil \right).
 \end{aligned}$$

Se d é ímpar, temos $e(G[A]) + e(G[B]) = 2(d^2 - 1)/8 = \lfloor d^2/4 \rfloor$. Se d é par, temos $e(G[A]) + e(G[B]) = 2d^2/8 = \lfloor d^2/4 \rfloor$.

□

Finalmente, se toda classe de G tem tamanho no máximo $2|G|/5d$, segue que

$$D(G) \leq D(F_d) \cdot \frac{4|G|^2}{25d^2} \leq \frac{d^2}{4} \cdot \frac{4|G|^2}{25d^2} = \frac{|G|^2}{25}.$$

O resultado de 2 pode ser melhorado utilizando os mesmos conjuntos de arestas mas tomando conjuntos de vértices gerados rotacionando a linha que separa as partes do subgrafo bipartido final. No geral, desejamos incluir pesos $x_0, x_1, \dots, x_{3d-2} \in [0, 1]$ com $\sum_{i=0}^{3d-2} x_i = 1$ e modelar o número de arestas removidas como uma expressão da forma $\sum_{ij \in F} x_i x_j$, em que $F \subseteq E(F_d)$ é tal que $F_d - F$ é bipartido.

Contudo, a região factível do programa resultante não é côncava. Uma forma fácil de verificar isso é tomando $U \subseteq V(F_d)$ tal que $G[U]$ é isomórfico a C_5 e a atribuição

$$\begin{cases} x_v = \frac{1}{5} & \text{se } v \in U, \\ x_v = 0 & \text{se } v \notin U. \end{cases}$$

Essa atribuição equivale a um blow-up de F_d que também é um blow-up balanceado de C_5 , e que não pode ser tornado bipartido pela deleção de menos que $n^2/5$ arestas. Dessa forma, se a Conjectura 2.4 for verdadeira, todas essas atribuições são extremos locais para os problemas de otimização razoáveis que podem ser considerados. Para valores pequenos de d , verificamos computacionalmente que, de fato, esses são os únicos extremos locais.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho, apresentamos a Conjectura 2.4 de Erdős, que completa 50 anos em aberto no ano de 2025. No Capítulo 2, estudamos resultados parciais clássicos para a conjectura, utilizando contagens e simetrização que remontam às décadas de 1970 e 1980. Nos Capítulos 3 e 4, propusemos estudar a Conjectura 2.4 utilizando técnicas mais modernas de Teoria Extremal dos Grafos: as álgebras de flag de Razborov e os teoremas de homomorfismo em grafos livres de triângulos com grau mínimo alto.

Os métodos utilizados no Capítulo 3 prometem ser bastante robustos e o Teorema 3.5 de [2] cobre os resultados do Capítulo 4, uma vez que grafos com grau mínimo maior que $n/3$ tem mais de $n^2/6$ arestas.

Não obstante, não se descarta a importância do estudo continuado de propriedades estruturais de blow-ups de Andrásfai para a Conjectura 2.4, em particular para compreender a dinâmica do problema em blow-ups de grafos bem estruturados ou os exemplos extremais abaixo do limiar de arestas $n^2/5$ (que não é coberto pelo Teorema 2.10).

Por fim, destaca-se mais uma vez a relação entre as Conjecturas 2.4 e 2.11. Recentemente, o método de álgebras de flag também foi utilizado por Razborov para obter resultados parciais para a Conjectura 2.11 (trocando a constante $1/50$ por $27/1024$) [27]. Dessa forma, espera-se que os produtos desse trabalho possam continuar a ser utilizados em problemas relacionados da combinatória extremal.

Referências

- [1] Béla Andrásfai, Paul Erdős e Vera T Sós. “On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph”. Em: *Discrete Mathematics* 8.3 (1974), pp. 205–218 (ver p. 27).
- [2] József Balogh, Felix Christian Clemen e Bernard Lidický. “Max cuts in triangle-free graphs”. Em: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*. Springer. 2021, pp. 509–514 (ver pp. 20, 21, 23–25, 33).
- [3] Wiebke Bedenknecht, Guilherme Oliveira Mota, Christian Reiher e Mathias Schacht. “On the local density problem for graphs of given odd-girth”. Em: *Journal of Graph Theory* 90.2 (2019), pp. 137–149 (ver p. 28).
- [4] F. H. Botler, M. Collares, T. Martins, W. Mendonça e G. O. Mota. *Combinatória*. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. URL: <https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM02-eBook.pdf> (ver pp. 1, 5, 6).
- [5] Stephan Brandt e Stéphan Thomassé. “Dense triangle-free graphs are four-colorable: A solution to the Erdos-Simonovits problem”. Em: *preprint* (2011), p. 172 (ver p. 27).
- [6] Daniel Brosch. “Symmetry reduction in convex optimization with applications in combinatorics”. Em: (2022) (ver p. 24).
- [7] Daniel Brosch, Bernard Lidický, Sydney Miyasaki e Diane Puges. “Lower and Upper Bounds for Small Canonical and Ordered Ramsey Numbers”. Em: *arXiv preprint arXiv:2511.04364* (2025) (ver p. 24).
- [8] Marcel K de Carli Silva, Fernando Mário de Oliveira Filho e Cristiane Maria Sato. “Flag algebras: a first glance”. Em: *Nieuw Arch. Wiskd.*(5) 17.3 (2016), pp. 193–199 (ver p. 11).
- [9] Chuan-Chong Chen, Guoping P Jin e Khee Meng Koh. “Triangle-free graphs with large degree”. Em: *Combinatorics, Probability and Computing* 6.4 (1997), pp. 381–396 (ver p. 28).
- [10] Leonardo N Coregliano, Roberto F Parente e Cristiane M Sato. “On the maximum density of fixed strongly connected subtournaments”. Em: *arXiv preprint arXiv:1505.05200* (2015) (ver p. 24).
- [11] Paul Erdős. “Problems and results in graph theory and combinatorial analysis”. Em: *Proc. British Combinatorial Conj., 5th* (1975), pp. 169–192 (ver pp. 6, 10).

- [12] Paul Erdős. “Some old and new problems in various branches of combinatorics”. Em: *Discrete Mathematics* 165.15 (1997), pp. 227–231 (ver p. 10).
- [13] Paul Erdős, Ralph J Faudree, János Pach e Joel H Spencer. “How to make a graph bipartite.” Em: *J. Comb. Theory, Ser. B* 45.1 (1988), pp. 86–98 (ver pp. 8, 9).
- [14] Paul Erdős, Ervin Győri e Miklós Simonovits. “How many edges should be deleted to make a triangle-free graph bipartite”. Em: *Sets, graphs and numbers, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*. Vol. 60. 1992, pp. 239–263 (ver pp. 7, 9).
- [15] Paul Erdős e Miklós Simonovits. “On a valence problem in extremal graph theory”. Em: *Discrete Mathematics* 5.4 (1973), pp. 323–334 (ver p. 28).
- [16] Zoltán Füredi. “A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits’ stability from Szemerédi’s regularity”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115 (2015), pp. 66–71 (ver p. 6).
- [17] Andrzej Grzesik. “Flag Algebras in Extremal Graph Theory”. PhD Thesis. Jagiellonian University, 2014 (ver p. 11).
- [18] Ping Hu, Bernard Lidický, Taísa Martins, Sergey Norin e Jan Volec. “Large multipartite subgraphs in H-free graphs”. Em: *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*. Springer. 2021, pp. 707–713 (ver pp. 6, 20).
- [19] Guoping Jin. “Triangle-free four-chromatic graphs”. Em: *Discrete Mathematics* 145.1-3 (1995), pp. 151–170 (ver p. 28).
- [20] Peter Keevash e Benny Sudakov. “Sparse halves in triangle-free graphs”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 96.4 (2006), pp. 614–620 (ver p. 10).
- [21] Michael Krivelevich. “On the edge distribution in triangle-free graphs”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63.2 (1995), pp. 245–260 (ver p. 10).
- [22] Bernard Lidický e Florian Pfender. “Semidefinite programming and Ramsey numbers”. Em: *SIAM journal on discrete mathematics* 35.4 (2021), pp. 2328–2344 (ver p. 24).
- [23] Willem Mantel. “Problem 28, Wiskundige Opgaven”. Em: (1907) (ver p. 5).
- [24] Sergey Norin e Yue Ru Sun. “Triangle-independent sets vs. cuts”. Em: *arXiv preprint arXiv:1602.04370* (2016) (ver p. 20).
- [25] Alexander A Razborov. “Flag algebras”. Em: *The Journal of Symbolic Logic* 72.4 (2007), pp. 1239–1282 (ver pp. 11, 17).
- [26] Alexander A Razborov. “Flag algebras: an interim report”. Em: *The Mathematics of Paul Erdős II*. Springer, 2013, pp. 207–232 (ver p. 11).
- [27] Alexander A Razborov. “More about sparse halves in triangle-free graphs”. Em: 213.1 (2022), p. 109. DOI: [10.1070/SM9615](https://doi.org/10.1070/SM9615). URL: <https://doi.org/10.1070/SM9615> (ver p. 33).
- [28] Miklós Simonovits. “A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems”. Em: *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*. 1968, pp. 279–319 (ver p. 6).

REFERÊNCIAS

- [29] Benny Sudakov. “Making a K_4 -free graph bipartite”. Em: *Combinatorica* 27.4 (2007), pp. 509–518 (ver pp. 6, 20).